MAXimal

home
algo
bookz
forum
about

added: 10 Jun 2008 10:57
Edited: 18 Oct 2011 20:20

# Euler function

Contents [hide]



## Definition

**Euler function** $\phi(n)$ (sometimes denoted $\varphi(n)$or $phi(n)$) - the number of properties $1$to $n$prime to $n$. In other words, the quantity of such properties in a segment $[1;n]$, the greatest common divisor of which is to $n$unity.

The first few values of this function ( A000010 in OEIS encyclopedia ):

$$\phi(1) = 1,$$
$$\phi(2) = 1,$$
$$\phi(3) = 2,$$
$$\phi(4) = 2,$$
$$\phi(5) = 4.$$

## Properties

The following three simple properties of the Euler - enough to learn how to calculate it for any number:

- If $p$- a prime, then $\phi(p) = p - 1$.

  (This is obvious, because any number, except for the $p$relatively easy with him.)

- If $p$- simple $a$- a natural number, then $\phi(p^a) = p^a - p^{a-1}$.

  (Since the number of $p^a$not only relatively prime numbers of the form , which pieces.)$pk\,(k \in \mathcal{N})p^a/p = p^{a-1}$

- If $a$and $b$are relatively prime, then $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$("multiplicative" Euler function).

  (This follows from the Chinese remainder theorem . Consider an arbitrary number $z \le ab$. denote $x$and $y$the remnants of the division $z$at $a$and $b$, respectively. then $z$coprime $ab$if and only if $z$is prime to $a$and $b$separately, or, equivalently, $x$a one- simply $a$and $y$relatively prime to $b$. Applying the Chinese remainder theorem, we see that any pair of numbers $x$and the number of one-to-one correspondence , which completes the proof.)$y$

$(x \le a, \ y \le b) z (z \le ab)$

From here you can get the Euler function for all $n$through its **factorization** (decomposition $n$into prime factors):

if

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$$

(Where all $p_i$- common), then

$$\phi(n) = \phi(p_1^{a_1}) \cdot \phi(p_2^{a_2}) \cdot \ldots \cdot \phi(p_k^{a_k}) =$$
$$= (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1}) \cdot (p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}) \cdot \ldots \cdot (p_k^{a_k} - p_k^{a_k-1}) =$$
$$= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

# Implementation

The simplest code that computes the Euler function, factoring in the number of elementary method $O(\sqrt{n})$:

```
int phi (int n) {
	int result = n;
	for (int i=2; i*i<=n; ++i)
		if (n % i == 0) {
			while (n % i == 0)
				n /= i;
			result -= result / i;
		}
	if (n > 1)
		result -= result / n;
	return result;
}
```

The key place for the calculation of the Euler function - is to find the **factorization of** the number $n$. It can be done in a time much smaller $O(\sqrt{n})$: see. Efficient algorithms for factorization .

# Applications of Euler's function

The most famous and important property of Euler's function is expressed in **Euler's theorem** :

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m,$$

where $a$and $m$are relatively prime.

In the particular case when $m$a simple Euler's theorem turns into the so-called

**Fermat's little theorem** :

$$a^{m-1} \equiv 1 \pmod m$$

Euler's theorem occurs quite often in practical applications, for example, see. inverse element in the modulo .

# Problem in online judges

A list of tasks that require the function to calculate the Euler or use Euler's theorem, or meaningfully Euler function to restore the original number:

- UVA # 10179 **"Irreducible Basic Fractions"** [Difficulty: Easy]
- UVA # 10299 **"Relatives"** [Difficulty: Easy]
- UVA # 11327 **"Enumerating Rational Numbers"** [Difficulty: Medium]
- TIMUS # 1673 **"tolerance for the exam"** [Difficulty: High]

---

**10 Комментариев** e-maxx Войти

Лучшее вначале Поделиться Избранный

Присоединиться к обсуждению...

Сула • 10 месяцев назад

if (n % i == 0) {
while (n % i == 0)
n /= i;
result -= result / i;
Зачем там while, ведь мы проверили что n%i==0? Объясните пожалуйста: например ввел 18, а он мне возвращает 4, а по идее должен 6?

3 • Ответить • Поделиться ›

Guest • 8 месяцев назад

```
Hello, world!
```

1 • Ответить • Поделиться ›

**rishabh roy** • 9 месяцев назад

unable to solve UVA # 10179 "Irreducible Basic Fractions" [Difficulty: Easy] please help the function is giving the correct results for given text cases but the uva judge is not Accepting my solutions

1 • Ответить • Поделиться ›

**Татьяна** • год назад

Чем первая задача из списка отличается от второй??Вторая у меня почему то не сдается..

1 • Ответить • Поделиться ›

**Владислав** → Татьяна • год назад

во второй задаче phi(1)=0

1 • Ответить • Поделиться ›

**Vlad** • год назад

Я не совсем понял, зачем в конце проверять n > 1, ведь мы уже разложили вроде n

1 • Ответить • Поделиться ›

**e_maxx** Модератор → Vlad • год назад

Нет, т.к. мы перебрали только делители до квадратного корня из n, однако, если n было простым числом (или стало таковым в процессе факторизации), мы не найдём этот последний делитель, равный самому числу. Простой пример: если n=11, то цикл совершит две итерации (i=2 и i=3), не найдёт ни одного делителя, и завершится с n=11.

1 • Ответить • Поделиться ›

**незнакомец** • 2 года назад

Кроме этого phi(x), есть L(m)- обобщенная функция эйлера, используеться она в олимпиадах?
http://www.pifagor.kz/category...

1 • Ответить • Поделиться ›

**e_maxx** Модератор → незнакомец • год назад

Никогда про такую не слышал. По вашей ссылке ничего не понял, мне кажется, там закрался ряд ошибок.

1 • Ответить • Поделиться ›