Задача 1.

Напишите программу, реализующую приближённое решение системы линейных алгебраических уравнений итерационным методом наискорейшего спуска. С её помощью найдите решение системы уравнений с матрицей Гильберта:

$$\mathrm{A}x = f \qquad a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \qquad f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

С какой скоростью метод сходится в зависимости от n?

Задача 2.

Напишите программу, реализующую приближённое решение системы линейных алгебраических уравнений методом сопряжённых градиентов. С её помощью найдите решение системы уравнений из предыдущей задачи. Сравните между собой скорости сходимости итерационных методов наискорейшего спуска и сопряжённых градиентов.

Задача 3.

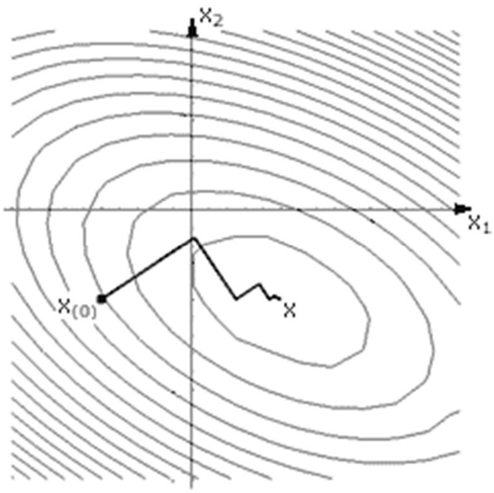
Рассмотрим квадратичную строго выпуклую функцию (A – симметричная матрица):

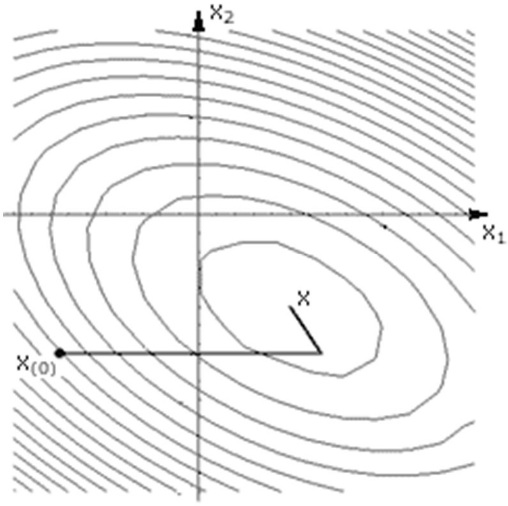
$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$$

Сгенерируйте случайным образом пару таких квадратичных функций и запустите на каждой из них оба метода (из одной и той же начальной точки). Постройте графики сходимости в терминах евклидовой нормы невязки $r_k = Ax_k - b$ (в логарифмической шкале) против номера итерации. При этом оба метода нарисуйте на одном и том же графике, но разными линиями: один — сплошным, другой — пунктиром.

Задача 4.

На этих рисунках изображены траектории движения в точку минимума методами сопряжённых градиентов и наискорейшего спуска:

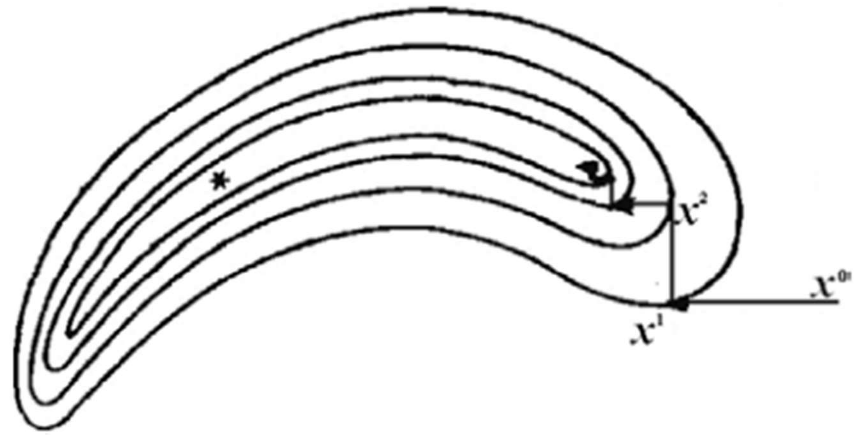




Определите, на каком из них какой из этих двух методов проиллюстрирован. Ответ аргументируйте. Что изображают замкнутые линии? Докажите, что один из этих двух методов (какой?) позволяет решать квадратичные задачи за конечное число шагов. Каково максимально возможное количество этих шагов для матрицы размера n?

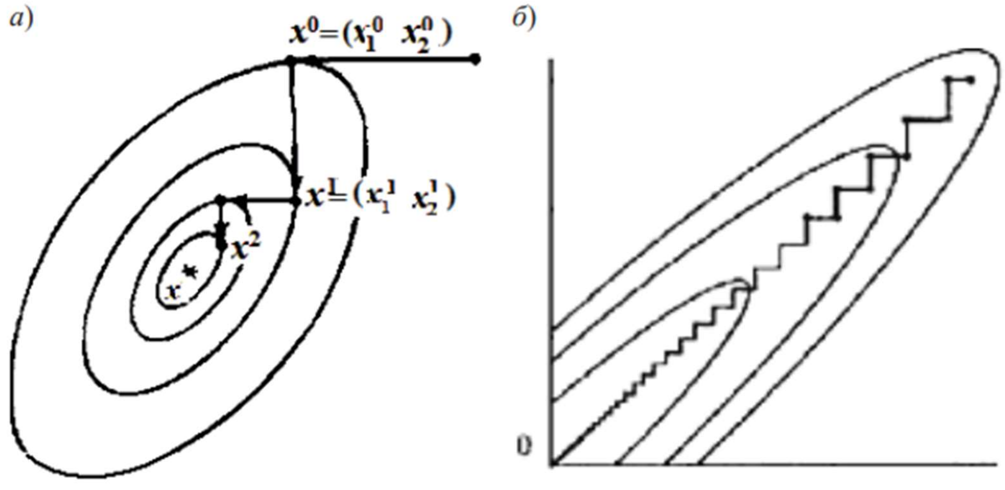
Задача 5.

Градиентный метод сходится достаточно быстро, если для минимизируемой функции f (x) поверхности уровня близки к сферам (при n = 2 – к окружностям). Если же линии уровня сильно вытянуты в каком-то направлении, то по нормали к этому направлению целевая функция меняется значительно быстрее, чем вдоль направления. Такой характер целевой функции называется овражным. Исходя из рисунка, объясните, почему в этих случаях градиентный метод сходится хуже



Как связан овражный характер функции с величиной наименьшего сингулярного числа матрицы квадратичной формы? А с величиной числа обусловленности матрицы?

На рисунке ниже изображена работа метода покоординатного спуска для функций овражного характера. Какой вывод можно сделать из этого рисунка?



Задача 6.

Докажите, что для симметричной невырожденной матрицы A, у которой все собственные числа различны, следующий набор векторов является базисом:

$$v_1 = v,\ v_2 = Av_1,\ v_3 = Av_2,\ \ldots,\ v_m = Av_{m-1}.$$

Пространством Крылова называется линейная оболочка этих векторов. Какова размерность подпространства Крылова, если есть одинаковые собственные числа?

Указание: действуя от противного, разложить все слагаемые линейной комбинации этих векторов по базису из собственных векторов симметричной матрицы A.