Actividad 2

Sea $f(x)$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

1. Calcule el valor de la constante c para que $f(x)$ sea la función de densidad de la variable aleatoria X.
2. Calcule $P[0 < X \leq 1]$.

Pregunta 1

$$\int_0^2 cx^2 \, dx = 1$$

$$c \cdot \int_0^2 x^2 \, dx = c \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = c \cdot \frac{(2)^3}{3} - c \cdot \frac{(0)^3}{3} = c \cdot \frac{8}{3} = 1$$

$$c \cdot \frac{8}{3} = 1$$

$$c \cdot 8 = 3$$

$$c = \frac{3}{8}$$

Pregunta 2

$$\int_0^1 \frac{3}{8} x^2 \, dx$$

$$\frac{3}{8} \cdot \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{3}{8} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{8} \cdot \left[\frac{(1)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right] = \frac{3}{8} \cdot \left[\frac{1}{3} - 0\right] = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$$

Problema del flujo vehicular

En una cierta calle transitada se quiere medir el flujo vehicular. Una manera de hacerlo es medir el tiempo entre un automóvil y otro. Sea X es el tiempo transcurrido en segundos entre el tiempo en que un auto termina de pasar por un punto fijo y el instante en que el siguiente auto comienza a pasar por ese punto. La distribución del tiempo de avance tiene la forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^4}, & si \quad x > 1 \\ 0 & si \quad x \le 1 \end{cases}$$

a) Determine el valor de k para la cual $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad (fdp).

b) ¿Cuál será el valor esperado entre autos? ¿su varianza?

c) ¿Cuál será la probabilidad de que se tarde un auto más de 2 segundos? ¿A lo más 2?¿x segundos o menos?

Pregunta A

$$\int_1^{\infty} \frac{k}{x^4}\,dx = 1$$

$$k \cdot \int_1^{\infty} x^{-4}\,dx = k \cdot \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^{\infty} = k \cdot \left[-\frac{1}{3(\infty)^3} + \frac{1}{3(1)^3}\right] \quad -\frac{1}{3} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\lim_{x\to\infty} 1}{\lim_{x\to\infty} x^3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\infty} = 0$$

$$= k \cdot \left[0 + \frac{1}{3}\right] = \frac{k}{3} = 1$$

$$\frac{k}{3} = 1$$

$k = 3$

Pregunta B

Sea $\mu = E(x) = \int_1^{\infty} x \cdot f(x)$

$$\mu = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{3}{x^4}\,dx = 3 \cdot \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} = 3 \cdot \int_1^{\infty} \frac{x^{-2}}{-2} = 3 \cdot \left[\frac{1}{-2x^2}\right]_1^{\infty} = 3 \cdot \left[-\frac{1}{2(\infty)^2} + \frac{1}{2(1)^2}\right] = 3 \cdot \left[0 + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{2}$$

∴ El valor esperado es $\frac{3}{2}$

Sea $Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$ y $[E(x)]^2 = \frac{9}{4}$

$$E(x^2) = \int_1^{\infty} x^2 \cdot \frac{3}{x^4}\,dx = 3 \cdot \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = 3 \cdot \int_1^{\infty} \frac{x^{-1}}{-1} = 3 \cdot \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 3 \cdot \left[-\frac{1}{\infty} + \frac{1}{1}\right] = 3 \cdot [0 + 1] = 3$$

$$Var(x) = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

∴ La varianza es de $\frac{3}{4}$

Pregunta c

$$P[X>2] = \int_2^{\infty} \frac{3}{x^4}\,dx = 3 \cdot \int_2^{\infty} x^{-4}\,dx = 3 \cdot \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_2^{\infty} = 3 \cdot \left[-\frac{1}{3(\infty)^3} + \frac{1}{3(2)^3}\right] = 3 \cdot \left[0 + \frac{1}{24}\right] = \frac{1}{8}$$

$$\therefore P[X>2] = \frac{1}{8}$$

$$P[X<2] = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\therefore P[X<2] = \frac{7}{8}$$

$$P[X \le x] = 1 - \cancel{3} \cdot \left[-\frac{1}{3(-\infty)^3} + \frac{1}{\cancel{3}(x)^3}\right] = 1 - \frac{1}{x^3}$$

$$\therefore P[X \le x] = 1 - \frac{1}{x^3}$$