# EDP-parabólicas

Phd. Alejandro Paredes

# EDP parabólicas

$$\boxed{a\phi_{xx} + b\phi_{xy} + c\phi_{yy} + d\phi_x + e\phi_y + f\phi = g(x, y)}$$

Ecuación de conducción del calor 1D
Ecuación de difusión 1D

Clasificación: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = 0$$

- Si $\Delta > 0$ : EDP hiperbólica.

$a$= -$\alpha$, $b$= 0, $c$=0
Δ=0

- Si $\Delta = 0$ : EDP parabólica

- Si $\Delta < 0$ : EDP elíptica.

# EDP parabólicas

Ecuación de balance de momento N-S

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}\right) = -\nabla p + \rho\nu\, \nabla^2 \boldsymbol{V} + \boldsymbol{f}^{cuerpo}$$

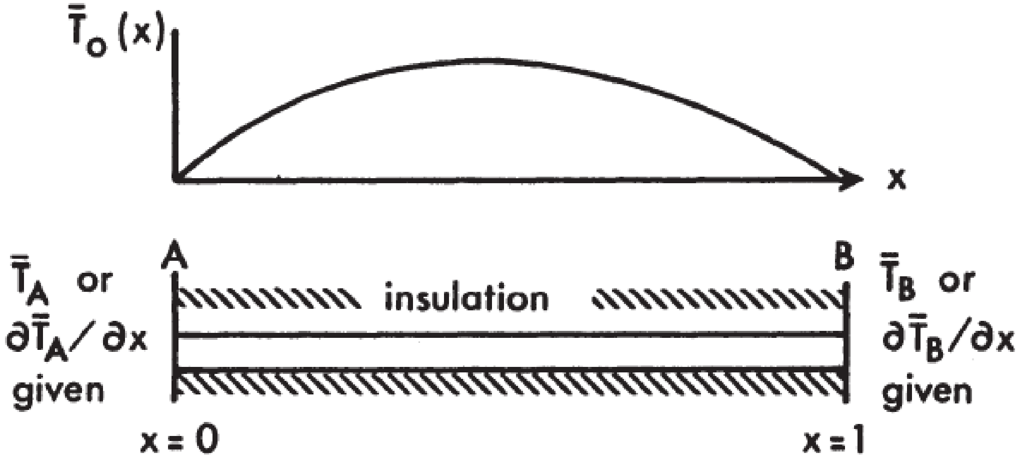
Ecuación de la vorticidad $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ para un fluido incompresible

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\nu}\nabla^2\boldsymbol{\omega}$$

# Ecuación conducción del calor 1D

Ecuación conducción - Ecuación de difusión

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = 0 \qquad \begin{array}{c} 0 < x < 1 \\ 0 < t \end{array}$$




Condiciones de frontera

Dirichlet

$$\bar{T}(0,t) = b(t)$$

Neumann

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}(0,t) = c(t)$$

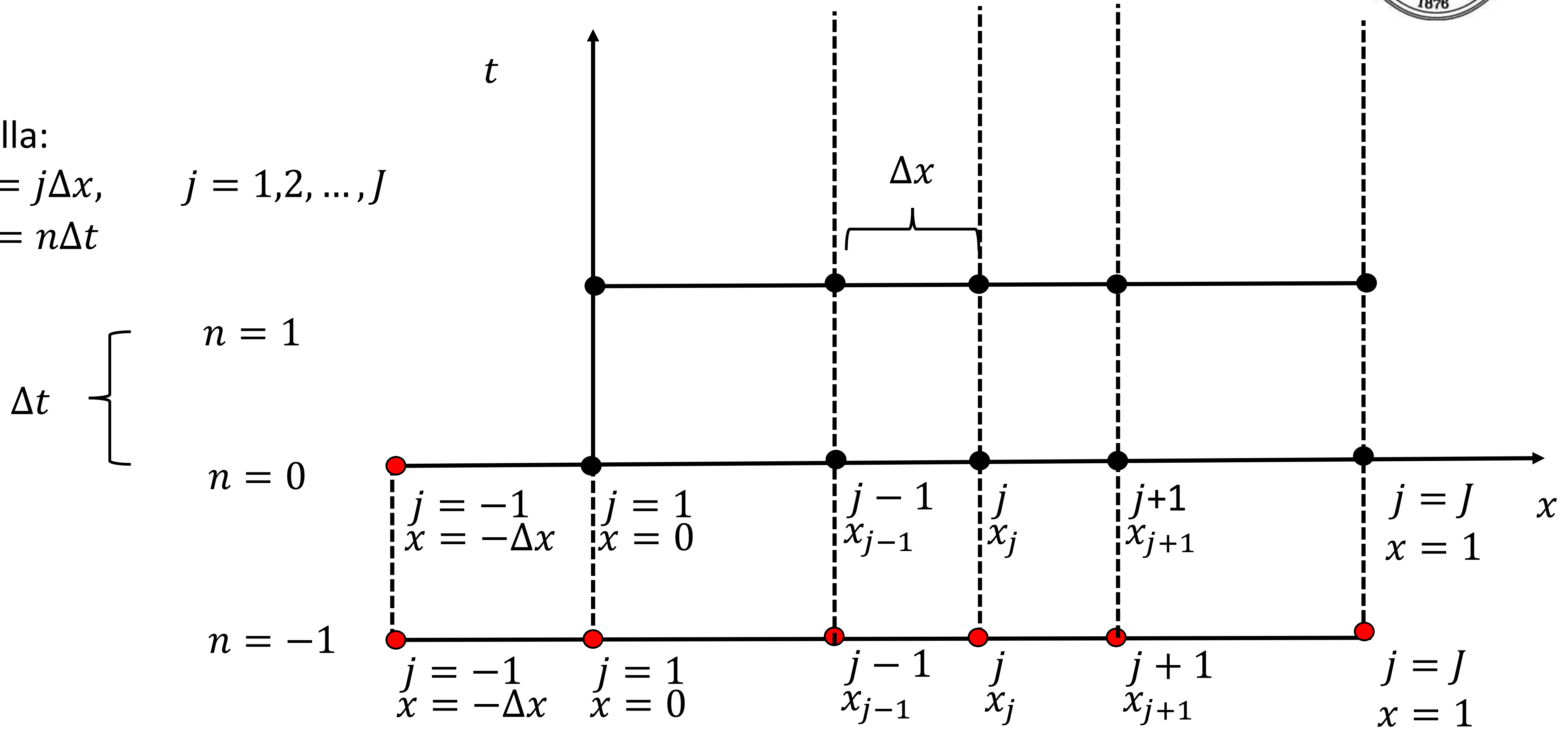
Condiciones iniciales $\bar{T}(x,0) = T_0(x)$

# Ecuación conducción del calor 1D

Malla:

$x_j = j\Delta x, \qquad j = 1,2,\dots,J$

$t_n = n\Delta t$



# Forward Time Central Space-FTCS

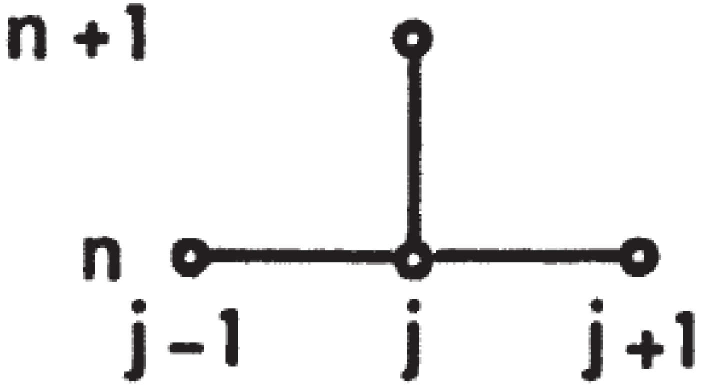
Segunda derivada
centrada de orden 2

$$\frac{T_j^{n+1}-T_j^n}{\Delta t}-\frac{\alpha(T_{j-1}^n-2T_j^n+T_{j+1}^n)}{\Delta x^2}=0$$

Primera derivada forward de orden 1

$$T_j^{n+1}=sT_{j-1}^n+(1-2s)\,T_j^n+sT_{j+1}^n$$

$$s=\alpha\,\Delta t/\Delta x^2$$



# Forward Time Central Space-FTCS

Error local de truncamiento:

Primer orden en tiempo segundo en espacio

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2}\right]_j^n + E_j^n = 0$$

$$E_j^n = \left[\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4 \bar{T}}{\partial x^4}\right]_j^n + O(\Delta t^2, \Delta x^4)$$

Error de truncamiento mejorado

$s = \alpha \Delta t / \Delta x^2$ Escogemos $s = 1/6$

$$E_j^n = \left[\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^4 \bar{T}}{\partial x^4}\right)\right]_j^n + O(\Delta t^2, \Delta x^4)$$

- Consistencia: $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow E_j^n = 0$
  El método (esquema) es consistente!!
- Estabilidad: condicionada $0 < s \leq 0.5$
- $\Rightarrow$ Convergencia condicionada.

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^4 \bar{T}}{\partial x^4} = 0$$

$$E_j^n = O(\Delta t^2, \Delta x^4)$$

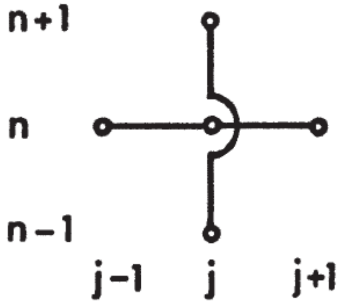
# Richardson y Dufort-Frankel

Richardson:

Primera derivada temporal
centrada  de orden 2 y segunda derivada
Espacial centrada  de orden 2.

$$\frac{T_j^{n+1}-T_j^{n-1}}{2\Delta t}-\frac{\alpha(T_{j-1}^n-2T_j^n+T_{j+1}^n)}{\Delta x^2}=0$$

- Esquema consistente, pero incondicionalmente inestable.




$$s=\alpha\,\Delta t/\Delta x^2$$

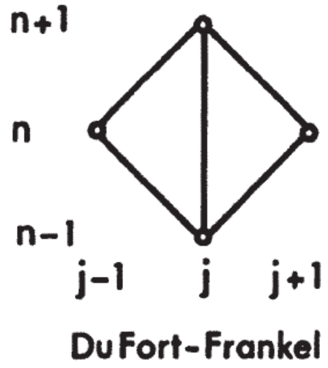
Dufort-Frankel:

Se modifica el término $T_j^n=0.5(T_j^{n-1}+T_j^{n+1})$

$$\frac{T_j^{n+1}-T_j^{n-1}}{2\Delta t}-\frac{\alpha[T_{j-1}^n-(T_j^{n-1}+T_j^{n+1})+T_{j+1}^n]}{\Delta x^2}=0$$

$$T_j^{n+1}=\left(\frac{2s}{1+2s}\right)(T_{j-1}^n+T_{j+1}^n)+\left(\frac{1-2s}{1+2s}\right)T_j^{n-1}$$

- Cuando $s=0.5$  Dufort-Frankel → FTCS.
- Se necesita otro método para determinar $T_j^{n-1}$ cuando n=0.



# Richardson y Dufort-Frankel

Dufort-Frankel:

- Es estable para $s > 0$ y cualquier valor de $\Delta t$.
- Para la consistencia tenemos:

$$E_j^n = \left[\alpha\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2}\right]_j^n + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

Entonces $\Delta t\ /\Delta x\ \rightarrow 0$ cuando $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ si y solo si $\Delta t \ll \Delta x$

Inconsistencia para $\Delta t = \lambda\ \Delta x$

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2}\right]_j^n + E_j^n = 0$$

$$\left[\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2}\ \alpha\lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2}\right]_j^n + O(\Delta t^2, \Delta x^2) = 0$$

Cuando $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, el esquema de discretización resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2}\ \alpha\lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2} = 0$$

# Completamente implícito

- Primera derivada temporal centrada de orden 2.
- Segunda derivada espacial centrada de orden 2 con términos evaluados en $n+1$.

$$\frac{(T_j^{n+1}-T_j^n)}{\Delta t}-\frac{\alpha(T_{j-1}^{n+1}-2T_j^{n+1}+T_{j+1}^{n+1})}{\Delta x^2}=0$$

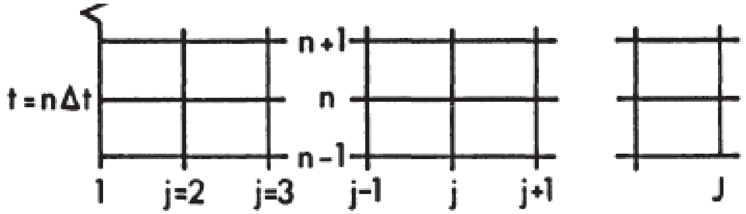
Se puede reescribir: $s=\alpha\,\Delta t/\Delta x^2$

$$-sT_{j-1}^{n+1}+(1+2s)\,T_j^{n+1}-sT_{j+1}^{n+1}=T_j^n$$

Error local de truncamiento

$$E_j^n=-\frac{\Delta t}{2}\left(1+\frac{1}{6s}\right)\left[\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial t^2}\right]_j^n+O(\Delta t^2,\Delta x^4)$$

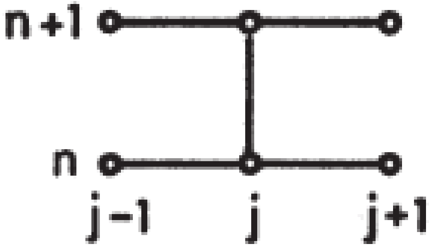
- Incondicionalmente estable.
- Los extremo del dominio son $T_{j=1}^{n}$ y $T_{J}^{n+1}$.




$$\begin{bmatrix} (1+2s) & -s & & \\ -s & (1+2s) & -s & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ & -s & (1+2s) & -s \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \cdots & \cdots \\ & & -s & (1+2s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ \cdots \\ \cdots \\ T_j^{n+1} \\ \cdots \\ \cdots \\ T_{J-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ d_j \\ \cdots \\ \cdots \\ d_{J-1} \end{bmatrix}$$

# Crank-Nicolson

- Primera derivada temporal centrada de orden 2.
- Segunda derivada espacial centrada de orden 2 se divide en una contribución implícita y otra explícita.
- Consistente e incondicionalmente estable.




Error local de truncamiento

$$E_j^n = \left[-\alpha \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \bar{T}}{\partial x^4}\right]_j^n + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$\frac{(T_j^{n+1} - T_j^n)}{\Delta t} - \alpha(0.5 L_{xx} T_j^n + 0.5 L_{xx} T_j^{n+1}) = 0$$

$$L_{xx} T = \frac{T_{j-1} - 2T_j + T_{j+1}}{\Delta x^2}$$

Sistema lineal a resolver:

$$-0.5s\, T_{j-1}^{n+1} + (1+s)\, T_j^{n+1} - 0.5s\, T_{j+1}^{n+1} = 0.5s\, T_{j-1}^n + (1-s)\, T_j^n + 0.5s\, T_{j+1}^n \;,$$

$$s = \alpha\, \Delta t / \Delta x^2$$

# Condiciones de frontera

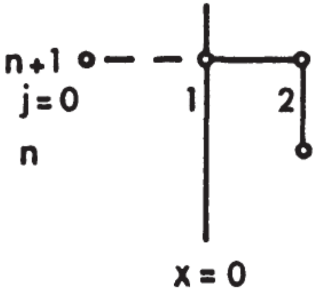
$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}(0, t) = c(t)$$

Condición implícita:

$$[\partial \bar{T}/\partial x]^{n+1}_{x=0} = c(t_{n+1})$$

$$\rightarrow (T_2^{n+1} - T_0^{n+1})/2\Delta x = c^{n+1}$$

Derivada fordward de orden 1



Implícito

$$\frac{T_2^{n+1} - T_1^{n+1}}{\Delta x} = c^{n+1}$$

$$T_1^{n+1} = T_2^{n+1} - c^{n+1}\Delta x$$

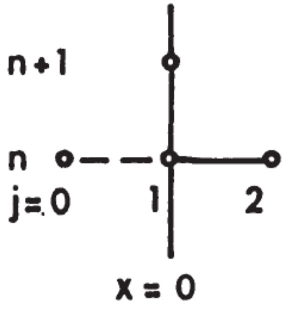
Condición explícita:

$$[\partial \bar{T}/\partial x]^{n}_{x=0} = c(t_{n})$$

$$\rightarrow (T_2^{n} - T_0^{n})/2\Delta x = c^{n}$$

Derivada centrada de orden 2

$$\frac{T_2^n - T_0^n}{2\Delta x} = c^n$$



Explícito

Usando FTCS:

$$T_1^{n+1} = -2s\Delta x c^n + (1-2s)\, T_1^n + 2s\, T_2^n$$

Usando esquema completamente implícito:

$$(1+2s)\, T_1^{n+1} - 2s\, T_2^{n+1} = T_1^n - 2s\Delta x\, c^{n+1}$$

# Ejercicio 1

Resolver la siguiente ecuación diferencial usando los esquemas: FTCS, Dufort-Frankel, completamente implícito y Crank-Nicolson.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial u}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{t}}$$

| | | |
|---|---|---|
| Boundary conditions | $u(1, \bar{t}) = 1$ | $\frac{\partial u}{\partial \bar{t}}(0, \bar{t}) = 0$ |
| Initial conditions | $u(\bar{x}, 0) = 0$ | $0 \leq \bar{x} \leq 1$ |