Integración y diferenciación numérica

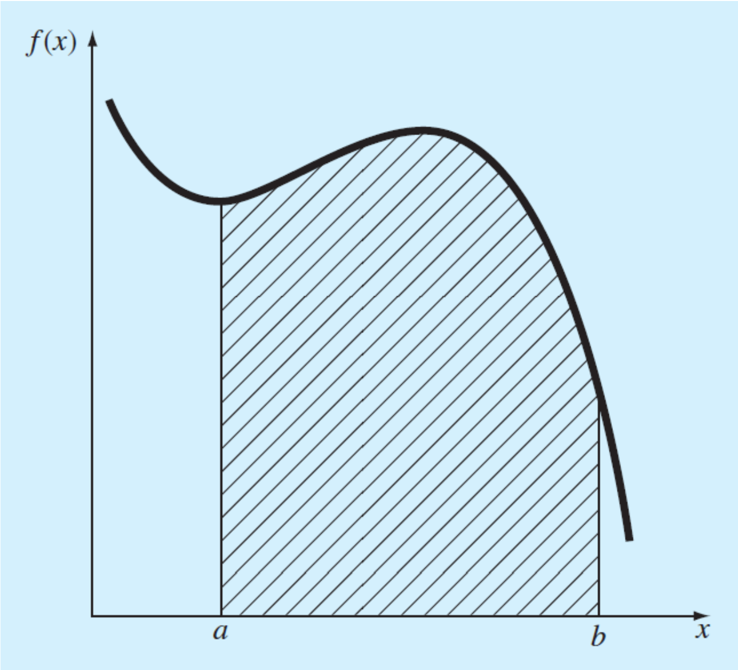
Alejandro Paredes

Formulas de Newton-Cotes

Técnica que consiste en rremplazar el integrando por una expression polynomial.

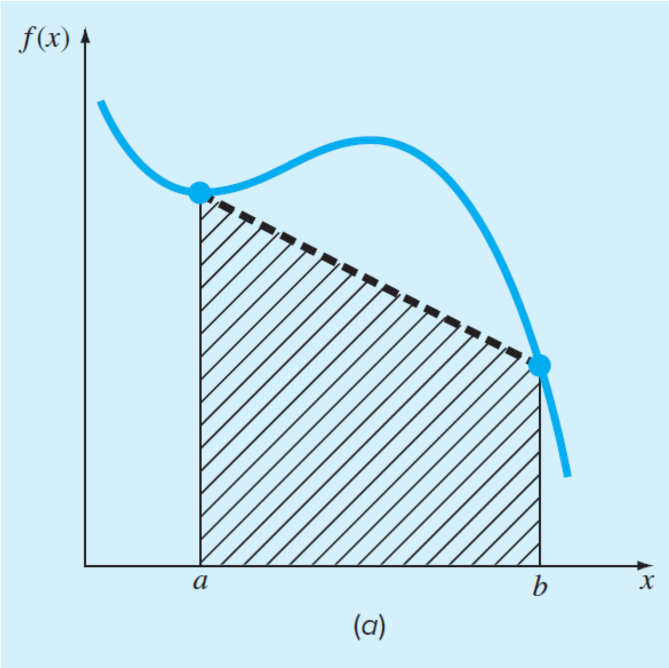
$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_n(x)\,dx$$

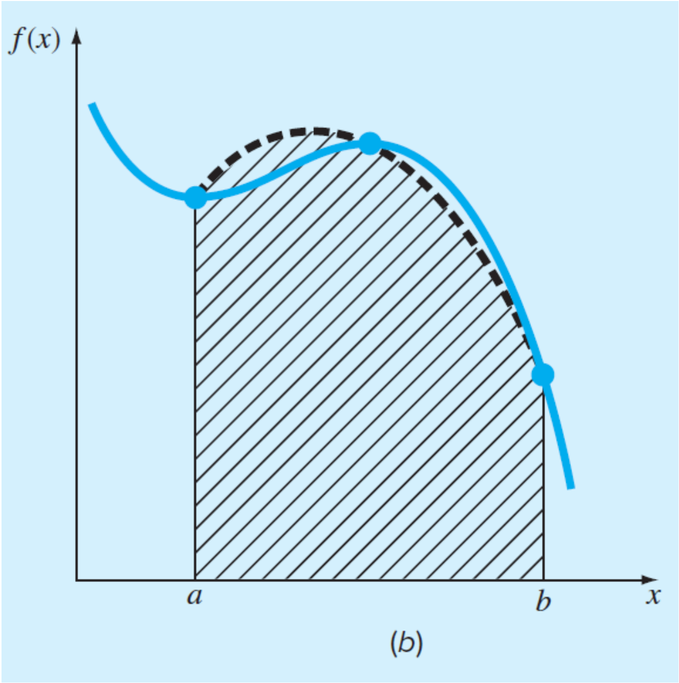


$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

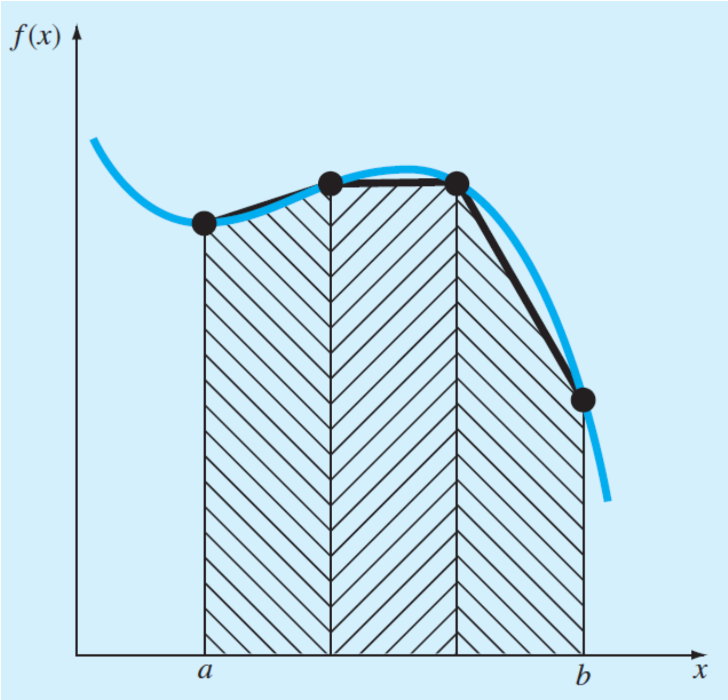
Formulas Newton-Cotes



Aproximación lineal



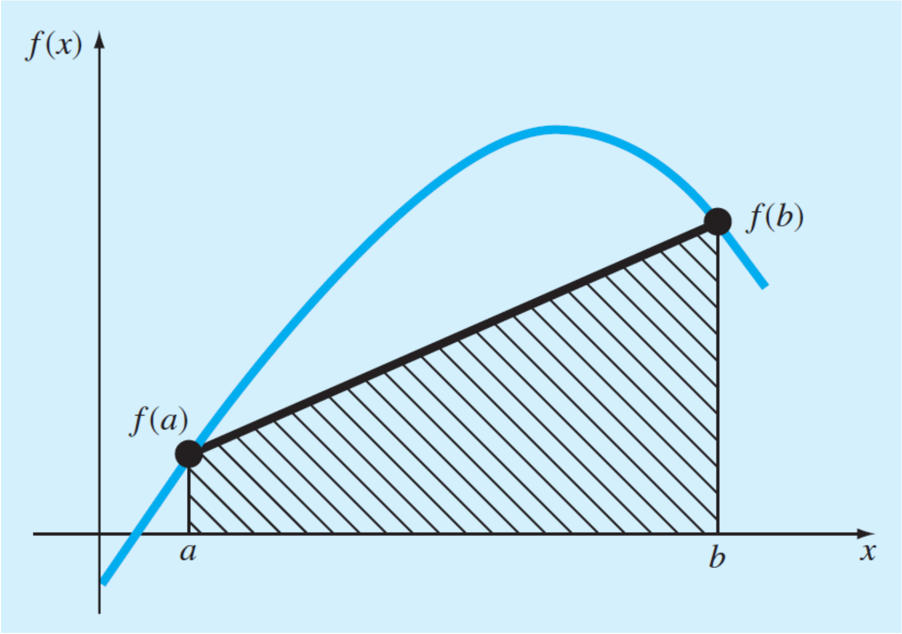
Aproximación polinomial



Aproximación compuesta

Método del trapecio

$$f(x) = \frac{(x-b)}{a-b} f(a) + \frac{(x-b)}{b-a} f(b) \; + \frac{f''(\zeta)}{3!}(x-a)(x-b) \forall\, x, \zeta \in [a,b]$$

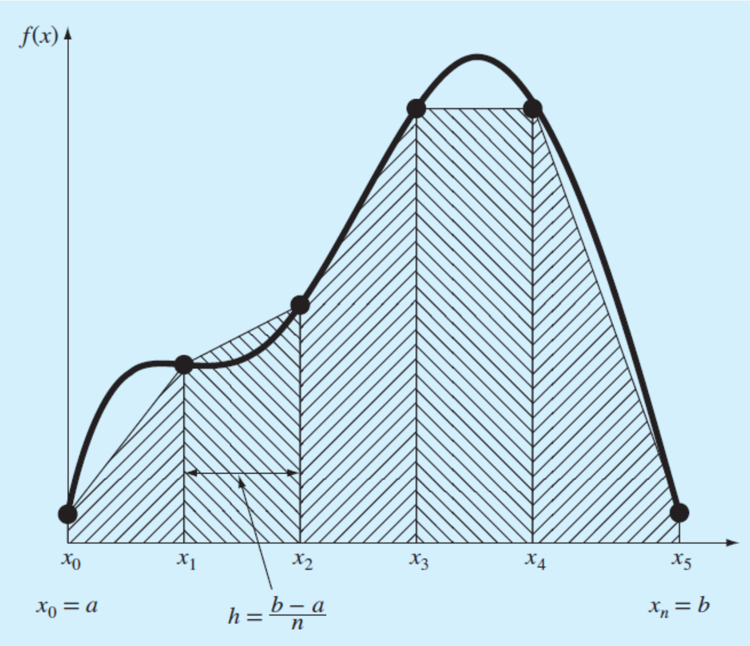


$$I = \int_a^b f(x) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + E_t$$

$$E_t = \int_a^b \frac{f''(\zeta)}{3!}(x-a)(x-b)$$

$$= -\frac{1}{12} f''(\zeta)(b-a)^3$$

Método del trapecio compuesto



$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$I = h\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

```
FUNCTION Trapun (x, y, n)
  LOCAL i, sum
  sum = 0
  DOFOR i = 1, n
    sum = sum + (xi − xi−1)*(yi−1 + yi)/2
  END DO
  Trapun = sum
END Trapun
```

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \qquad E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

$$I = (b-a)\,\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n} \qquad \bar{f}'' \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''$$

Método de Simpson (1/3)

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx$$

Polinomio interpolante de segundo grado.

$$E_t = -\frac{(b - a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

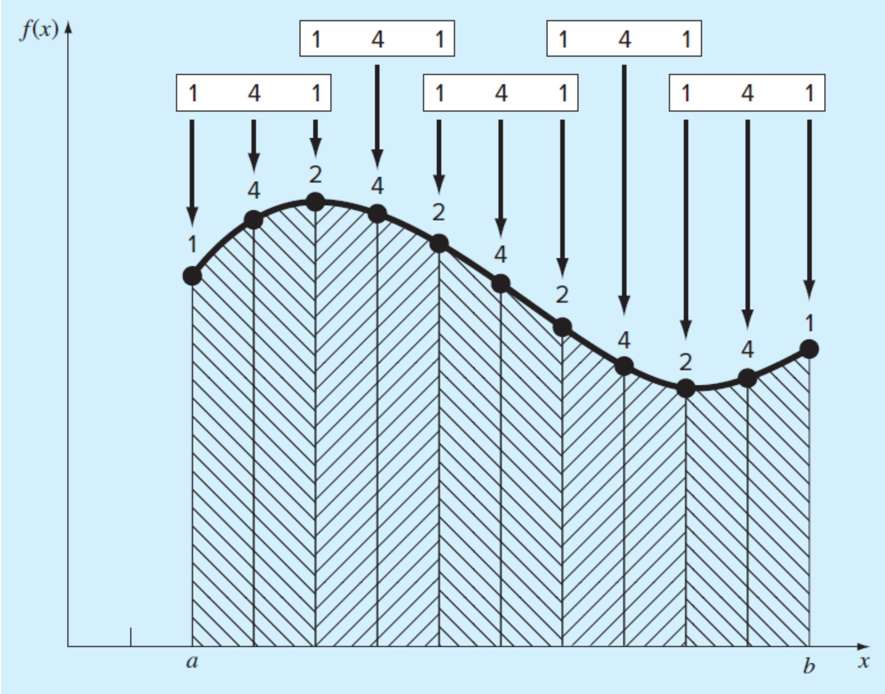
$$I = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2)]$$

$$I = (b - a) \frac{f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

```
FUNCTION Simp13 (h, f0, f1, f2)
  Simp13 = 2*h* (f0+4*f1+f2) / 6
END Simp13
```

Método de Simpson (1/3) compuesto

- El intervalo $[a, b]$ se divide en segmentos de igual longitud.
- En cada segmento se calcula un polinomio interpolante de segundo grado.



$$I = 2h\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + 2h\frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6}$$

$$+ \cdots + 2h\frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6}$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de Simpson (3/8)

Polinomio interpolante de tercer grado.

$$I = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$$

$$E_t = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

```
FUNCTION Simp38 (h, f0, f1, f2, f3)
  Simp38 = 3*h* (f0+3*(f1+f2)+f3) / 8
END Simp38
```

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi)$$

Ejercicio 1

Evaluar la siguiente integral

$$\int_{-2}^{4} (1 - x - 4x^3 + 2x^5)\, dx$$

- Analiticamente.
- Aplicando la regla del trapecio.
- Aplicando la regla compuesta del trapecio para $n = 2{,}4$.
- Aplicando la regla de Simpson 1/3.
- Aplicando la regla de Simpson 3/8.

Ejercicio

La tabla muestra la velocidad de un auto para diferentes instants de tiempo

t	1	2	3.25	4.5	6	7	8	8.5	9	10
v	5	6	5.5	7	8.5	8	6	7	7	5

Determine la distancia recorrida por el auto, utilizando la regla del trapecio compuesto con puntos no equidistantes.

$$I = h_1 \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h_2 \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + h_n \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

Extrapolación de Richardson

$$I = I(h) + E(h)$$

- I: valor de la integral.
- $I(h)$: aproximación por el método del trapecio compuesto.
- $E(h)$: Error de la aproximación. Con $h = (b-a)/n$.

Para dos aproximaciones distintas:

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2)$$

Extrapolación de Richardson

Para el caso de la integracioón con método de trapecio compuesto

$$E \cong -\frac{b-a}{12} h^2 \bar{f}'' \qquad \frac{E(h_1)}{E(h_2)} \cong \frac{h_1^2}{h_2^2} \qquad E(h_1) \cong E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

$$I(h_1) + E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \cong I(h_2) + E(h_2) \qquad E(h_2) \cong \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2}$$

$$I = I(h_2) + E(h_2) \qquad I \cong I(h_2) + \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1}[I(h_2) - I(h_1)]$$

Extrapolación de Richardson

$$I \cong \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1)$$ $h_1/h_2 = 2$ $O(h^4)$

$$I \cong \frac{16}{15} I_m - \frac{1}{15} I_l$$ $h_1/h_2 = 4$ $O(h^6)$

$$I \cong \frac{64}{63} I_m - \frac{1}{63} I_l$$ $h_1/h_2 = 8$ $O(h^8)$

Ejercicio

Calcule la integral de la función $f(x) = 0.2 + 25x \; - 200x^2 + 675x^3 \; - 900x^4 + 400x^5$ en el intevalo [0.08] usando el método del trapecio com puesto con 2 puntos, 3 puntos y 5 puntos. Mejore los valores obtneidos con la extrapolación De Ricahrdson.