Problemas con condiciones de frontera

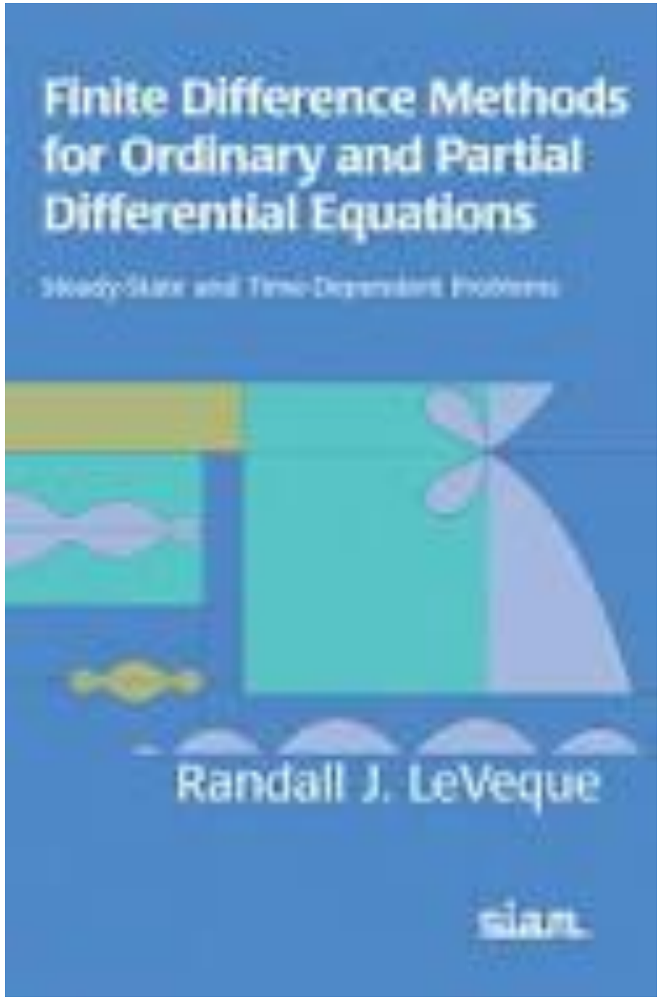
PhD. Alejandro Paredes

Problemas con condiciones de frontera
Boundary Value Problems (BVP)

Consideremos la ecuación del calor de una barra con extremos en los puntos $x = a$ y $x = b$.

$$u_t(x,t) = (\kappa(x)u_x(x,t))_x + \psi(x,t)$$

- $u(x,t)$: Temperatura de la barra en un punto e instante determinado.
- $\kappa(x)$: Coeficiente de conducción dependiente de la posición.
- $\psi(x,t)$: Fuente de calor ($\psi > 0$) o sumidero ($\psi < 0$).



Problemas con condiciones de frontera

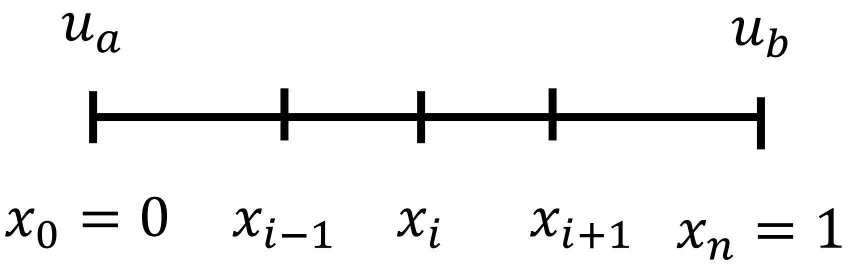
- Consideremmos el estado estacionario, $\kappa(x) = \kappa$, temperatura fija en los bordes (condiciones de frontera de Dirichlet) y extremos $a = 0, b = 1$.

$$u''(x) = f(x) \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = u_a, u(1) = u_b$$

- Consideremos la discretización (malla)

$$x_i = i\,h, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \frac{1}{n}$$



$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)}{h^2}$$

$$\frac{u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)}{h^2} = f(x_i) + error$$

$error$: Error local o de truncamiento.

Problemas con condiciones de frontera

Definimos U_i como la solución en diferencias finitas. U_i es una aproximación de $u(x)$ en el punto x_i. Si U_i existe, entonces verifica el sistema lineal

$$\begin{aligned}
\frac{u_a - 2U_1 + U_2}{h^2} &= f(x_1)\\
\frac{U_1 - 2U_2 + U_3}{h^2} &= f(x_2)\\
\frac{U_2 - 2U_3 + U_4}{h^2} &= f(x_3)\\
\cdots &= \cdots\\
\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} &= f(x_i)\\
\cdots &= \cdots\\
\frac{U_{n-3} - 2U_{n-2} + U_{n-1}}{h^2} &= f(x_{n-2})\\
\frac{U_{n-2} - 2U_{n-1} + u_b}{h^2} &= f(x_{n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{A} & & \boldsymbol{U} & & \boldsymbol{F}\\
\begin{bmatrix}
-\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & & \\
\frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & \\
 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2}\\
 & & & & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2}
\end{bmatrix}
&
&
\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-2} \\ U_{n-1} \end{bmatrix}
& = &
\begin{bmatrix} f(x_1) - u_a/h^2 \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) - u_b/h^2 \end{bmatrix}
\end{array}$$

A : Es la representación matricial del operador d^2/dx^2.

Convergencia, consistencia y estabilidad

Error global

- Si $\boldsymbol{U} = [U_1, \dots, U_{n-1}]^T$ es la solución en DF y $\boldsymbol{u} = [u(x_1), \dots, u(x_{n-1})]^T$ es la solución analítica evaluada en los puntos de la malla con paso h, entonces definimos el error global

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{u}$$

- **Definición**: el método de diferencias finitas es **convergente** si se tiene una norma $\| \quad \|$ sobre la malla y $\lim_{h \to 0} \|\boldsymbol{E}\| = 0$.

Norma infinita:

$$\|\boldsymbol{E}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n-1} \{E_i\}$$

p-norma :

$$\|\boldsymbol{E}\|_p = \left(h \sum_{i=1}^{n-1} |E_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

- **Definición**: el método DF tiene un orden de precisión p, si

$$\|\boldsymbol{E}\| \le C\, h^p, \qquad p > 0$$

dodne C no depende de h.

Convergencia, consistencia y estabilidad

Error local

- En general la solución analítica $\boldsymbol{u} = [u(x_1), \dots, u(x_{n-1})]^T$ no satisface exactamente la ecuación $\mathrm{A}\mathbf{u} \neq \boldsymbol{F}$, mas bien

$$\tau_j = \frac{1}{h^2}(u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1})) - f(x_j) \qquad \boldsymbol{\tau} = A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{F} \qquad \boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_{n-1}]^T$$

- El vector $\boldsymbol{\tau}$ recibe el nombre de error local. Si definimos los operadores :

$$Pu(x) = \frac{d^2u(x)}{dx^2}, \ P_h u(x) = \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} \qquad \tau_j = P_h u(x_j) - Pu(x_j)$$

- **Definición**: el método de diferencias finitas es **consistente** si: $\lim_{h\to 0} \tau_j = 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, n-1$

- Consistencia significa que la ecuación discretizada tiende a la ecuación diferencial en cada punto cuando $h \to 0$. En nuestro caso $\|\boldsymbol{\tau}\| = O(h^2)$.

Convergencia, consistencia y estabilidad

En general tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{U} - \boldsymbol{u} \\ A\boldsymbol{U} &= \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\tau} &= A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{F} \end{aligned}\right\} \quad A\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\tau}$$

Sea $\left(A^h\right)^{-1}$ la inversa de A^h, entonces

$$E^h = -(A^h)^{-1}\tau^h$$

$$\begin{aligned} \|E^h\| &= \|(A^h)^{-1}\tau^h\| \\ &\leq \|(A^h)^{-1}\| \, \|\tau^h\| \end{aligned}$$

Para una malla determinada con paso h

$$A^h\boldsymbol{E}^h = -\boldsymbol{\tau}^h, \qquad dim(A) = n - 1 = 1/h - 1$$

Donde A^h es la matriz asociada al operador diferencial d^2/dx^2 y su dimensión depende de h.

Definición: un método DF genera una secuencia de ecuaciones matriciales de la forma $A^h\boldsymbol{U}^h = \boldsymbol{F}^h$ donde h es el paso de la malla. El método DF es **estable** si $\left(A^h\right)^{-1}$ existe para todo h suficientemente pequeño ($h < h_0$) y si existe una constante C, independiente de h, tal que

$$\left\|\left(A^h\right)^{-1}\right\| \leq C \quad \forall\, h < h_0.$$

Convergencia, consistencia y estabilidad

Teorema: Un método DF consistente y estable es convergente.

Consistencia + Estabilidad $\Rightarrow$ Convergencia

$\|E^h\| \leq \|(A^h)^{-1}\| \, \|\tau^h\| \leq C\|\tau^h\| \to 0$ cuando $h \to 0$

Error local por truncamiento $O(h^2)$ + Estabilidad $\Rightarrow$ Error global $O(h^2)$

Condiciones de frontera y puntos fantasmas

Condiciones de Dirichlet

$$u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = u_a, \quad u(1) = u_b,$$

Condiciones de Neumann

$$u''(x) = f(x), \quad a < x < b,$$

$$u'(a) = \alpha, \qquad u(b) = u_b\,,$$

Condiciones de Robin

$$u''(x) = f(x), \quad a < x < b,$$

$$\alpha u'(a) + \beta u(a) = \gamma \qquad u(b) = u_b$$

$$x = a \quad \alpha \neq 0$$

Condiciones de Cauchy

$$u''(x) = f(x), \quad a < x < b,$$

$$u(a) = u_a, \qquad u(b) = u_b$$

$$u'(a) = \alpha, \qquad u'(b) = \beta$$

Condiciones de frontera y puntos fantasmas

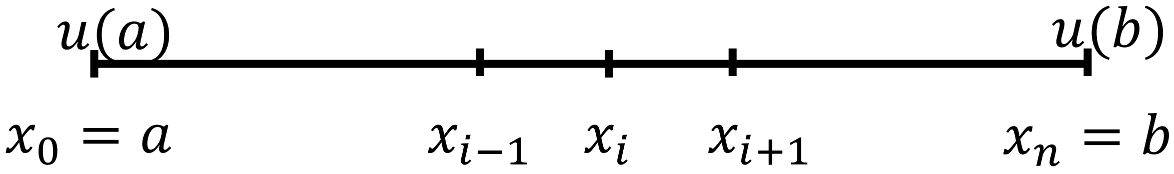
Condiciones de Neumann

$$u''(x) = f(x), \quad a < x < b,$$

$$u'(a) = \alpha, \qquad u(b) = u_b\,,$$

Para los puntos interiores

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$



Ecuación para el punto x_0

$$\frac{U_1 - U_0}{h} = \alpha \qquad\qquad \frac{-U_0 + U_1}{h^2} = \frac{\alpha}{h}$$

(Orden 1)

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & & \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & \\ & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ & & & & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-2} \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{h} \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) - \frac{u_b}{h^2} \end{bmatrix}$$

Condiciones de frontera y puntos fantasmas

Para mantener la precisión al segundo orden necesitamos extender la solución al intervalo $[a-h, a]$

Punto fantasma : $x_{-1} = x_0 - h = a - h$

Condición de frontera al segundo orden:

$$\frac{U_1 - U_{-1}}{2h} = \alpha$$

$$U_{-1} = U_1 - 2h\alpha.$$

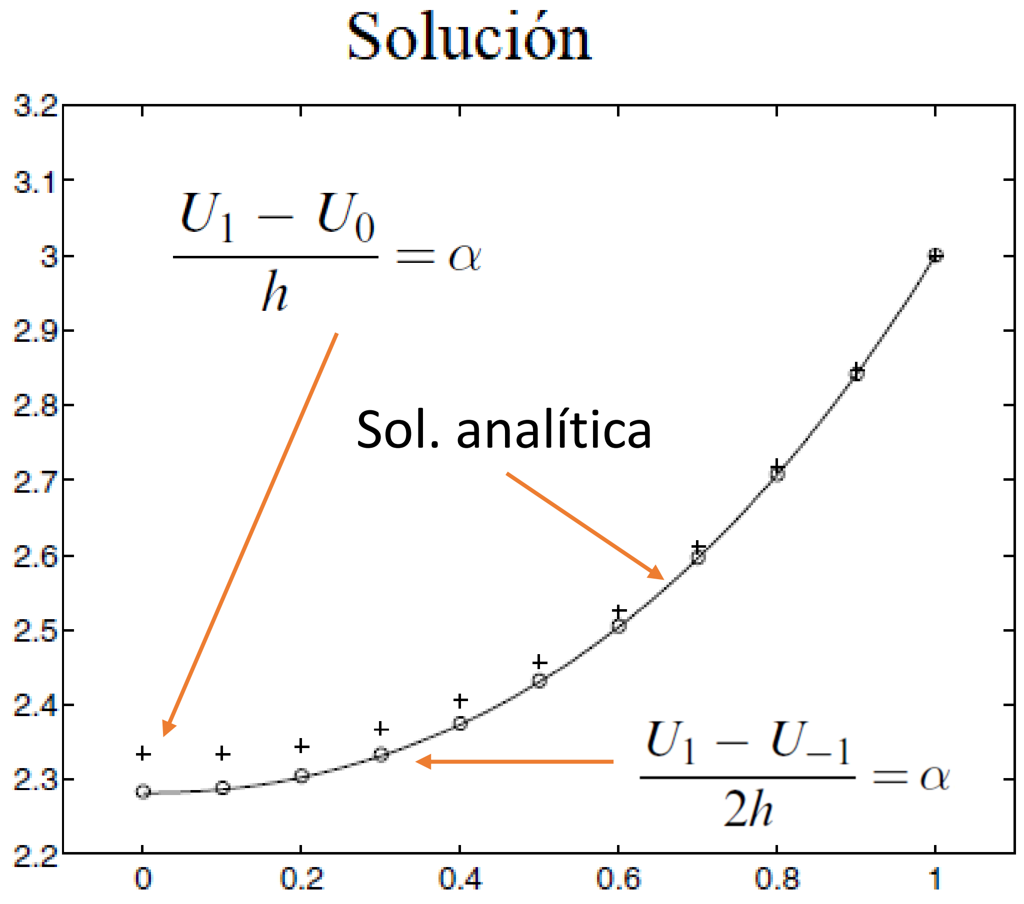
$$\frac{U_{-1} - 2U_0 + U_1}{h^2} = f_0,$$

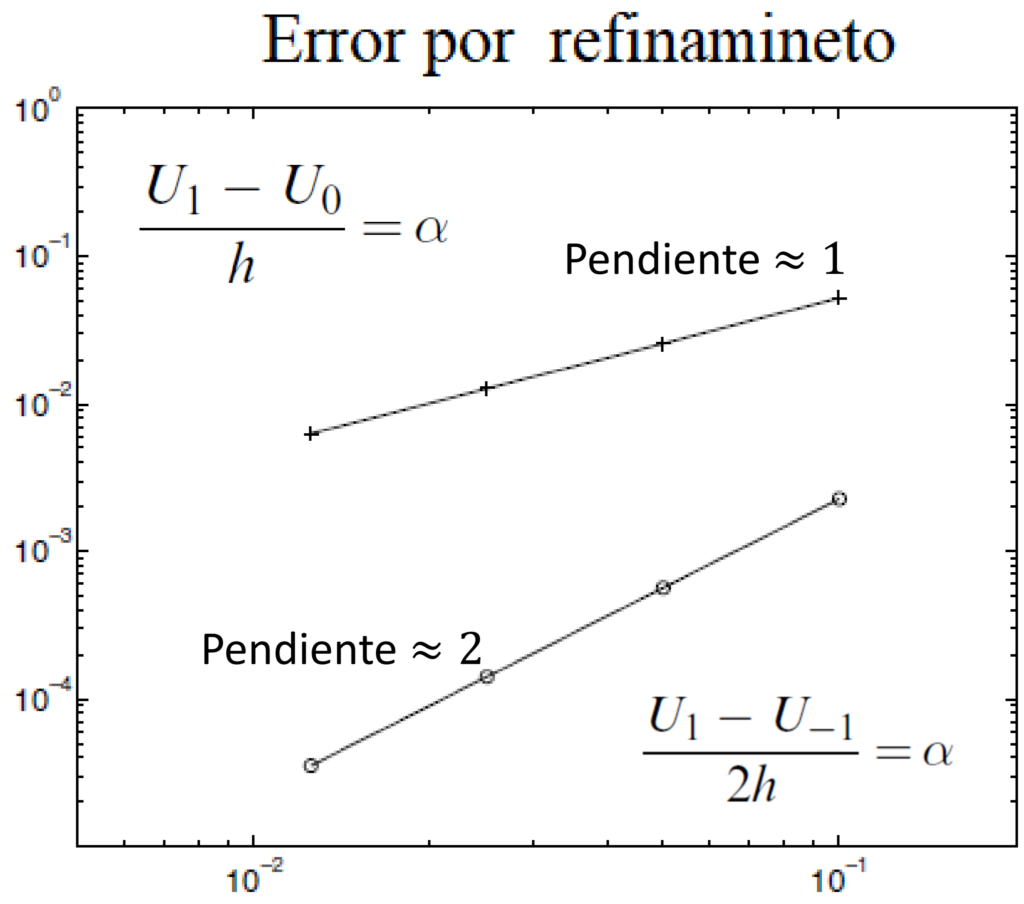
$$\frac{U_1 - 2h\alpha - 2U_0 + U_1}{h^2} = f_0,$$

$$\frac{-U_0 + U_1}{h^2} = \frac{f_0}{2} + \frac{\alpha}{h},$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & & \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & \\ & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ & & & & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-2} \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0/2 + \alpha/h \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) - \frac{u_b}{h^2} \end{bmatrix}$$

Condiciones de frontera y puntos fantasmas





Problemas autoadjuntos con condiciones de frontera

Ecuación conducción del calor con conductivad variable (problema de Sturm-Liouville)

$$(\kappa(x)u'(x))' = f(x) \quad u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta$$

L : operador auto adjunto $\qquad -L(u(x)) = f(x), \qquad L(u) = -\frac{d}{dx}(\kappa(x)\frac{du}{dx})$

Dado un producto interno se cumple que: $\quad (Lu, v) = (u, Lv)$

Si además escogemos una base, la matriz asociada a L (L_{mn}) es una matriz simétrica.

Problemas autoadjuntos con condiciones de frontera

$$(\kappa(x)u'(x))' = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \kappa(x)u''(x) + \kappa'(x)u'(x) = f(x)$$

Discretizamos con diferencias centradas de orden 2

$$\kappa_i \left(\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} \right) + \kappa_i' \left(\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} \right) = f_i$$

Matriz no simétrica !!!!

$$\Longrightarrow \quad A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2\kappa_1 & (\kappa_1 + h\kappa_1'/2) & & & \\ (\kappa_2 - h\kappa_2'/2) & -2\kappa_2 & (\kappa_2 + h\kappa_2'/2) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & (\kappa_{m-1} - h\kappa_{m-1}'/2) & -2\kappa_{m-1} & (\kappa_{m-1} + h\kappa_{m-1}'/2) \\ & & & (\kappa_m - h\kappa_m'/2) & -2\kappa_m \end{bmatrix}$$

Problemas autoadjuntos con condiciones de frontera

$$\kappa(x_{i+1/2})u'(x_{i+1/2}) = \kappa_{i+1/2}\left(\frac{U_{i+1}-U_i}{h}\right)$$

$$\begin{aligned}(\kappa u')'(x_i) &\approx \frac{1}{h}\left[\kappa_{i+1/2}\left(\frac{U_{i+1}-U_i}{h}\right) - \kappa_{i-1/2}\left(\frac{U_i-U_{i-1}}{h}\right)\right]\\ &= \frac{1}{h^2}[\kappa_{i-1/2}U_{i-1} - (\kappa_{i-1/2}+\kappa_{i+1/2})U_i + \kappa_{i+1/2}U_{i+1}]\end{aligned}$$

Matriz simétrica !!!!

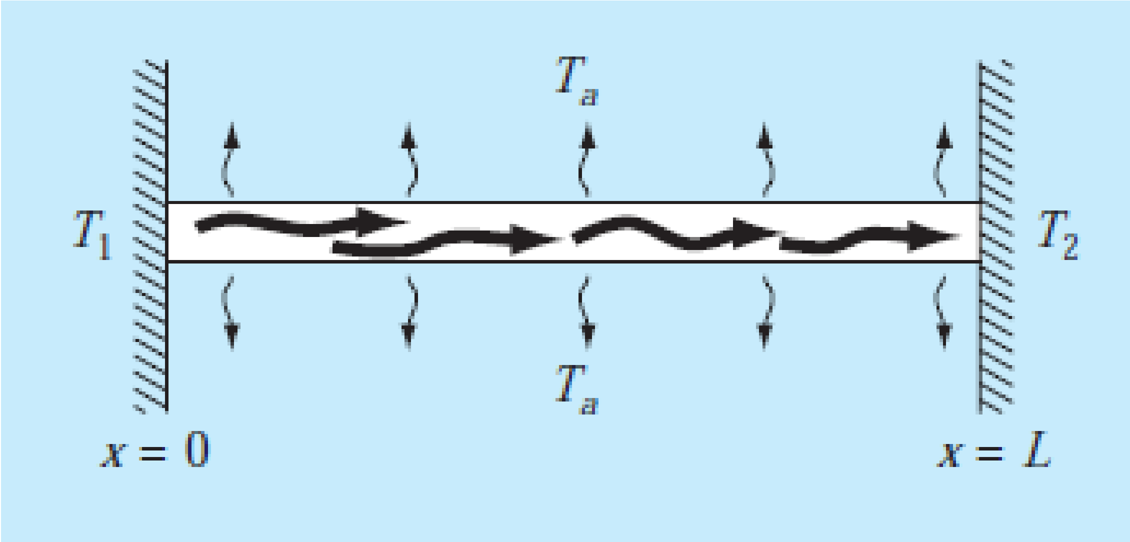
$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -(\kappa_{1/2}+\kappa_{3/2}) & \kappa_{3/2} & & & \\ \kappa_{3/2} & -(\kappa_{3/2}+\kappa_{5/2}) & \kappa_{5/2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \kappa_{m-3/2} & -(\kappa_{m-3/2}+\kappa_{m-1/2}) & \kappa_{m-1/2} \\ & & & \kappa_{m-1/2} & -(\kappa_{m-1/2}+\kappa_{m+1/2}) \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

Condiciones de Dirichlet

$$T(0) = T_1$$
$$T(L) = T_2$$



- Encontrar la solución analítica.
- Resolver numéricamente considerando:
- Graficar el error global por refinamiento.

$$L = 10m\ , h' = 0.01m^{-2}\ \ \Delta x = 1m\ T(0) = 40, T(10) = 200°C, Ta = 20°C$$

Ejercicio 2

$$0 = \frac{d^2 T}{dx^2} + h' \left(T_\infty - T \right)$$

Condiciones de Neumann y Dirichlet

$$\frac{dT}{dx}(0) = T_a'$$

$$T(L) = T_b$$

- Encontrar la solución analítica.
- Resolver numéricamente considerando:

$L = 10m \; , h' = 0.01m^{-2} \;\; \Delta x = 1m$
$T_\infty = 40°C, T(10) = 200°C, T'a = 10°C/m$

y las aproximaciones para la condición de Neumann.

- Graficar el error global por refinamiento.

Método del disparo

Consideremos la EDO

$$0 = \frac{d^2 T}{dx^2} + h' \left(T_\infty - T \right)$$

Con la condición de contorno

$$T(0) = T_a$$
$$T(L) = T_b$$

$$\frac{dT}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = -h'(T_\infty - T)$$

$$T(0) = T_a$$

Adivinamos

$$z(0) = z_{a1}$$

De tal manera que

$$T(L) = T_b$$

Método del disparo

Realizamos dos intentos

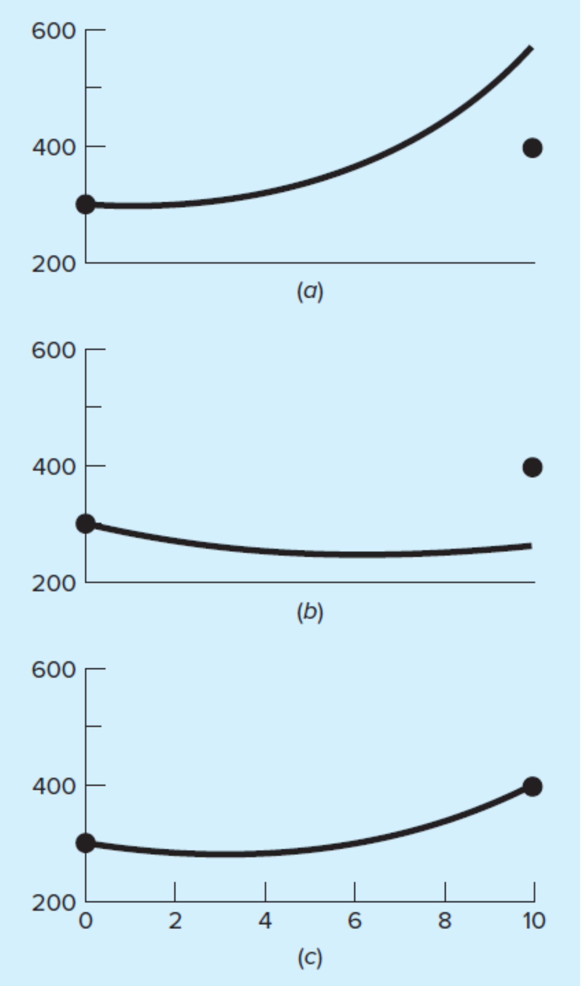
- Proponemos $z(0) = z_1$ y obtenemos $T_{b_1} < T_b$.
- Proponemos $z(0) = z_2$ y obtenemos $T_{b_2} > T_b$.

Para el caso de EDO lineales, el valor correcto de $z(0)$ está relacionado linealmente a los resultados(z_1, T_{b_1}) y (z_2, T_{b_2}).

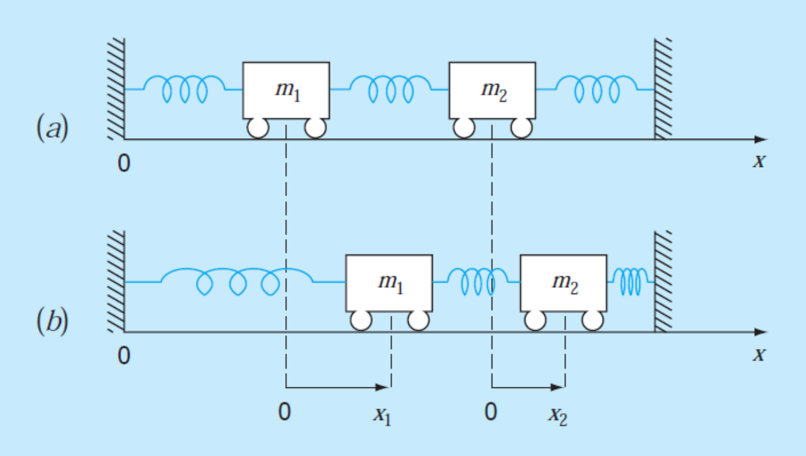
$$z(0) = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{T_{b_2} - T_{b_1}}(T_b - T_{b_1})$$

- Con el valor de $z(0)$ ya se puede resolver la EDO adecuadamente.

Ejercicio 3: resolver el ejercicio 1 con el método del disparo.



Problema de autovalores



$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k x_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - k x_2$$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - k(-2x_1 + x_2) = 0$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - k(x_1 - 2x_2) = 0$$

$$x_i = A_i \sin(\omega t) \qquad x_i'' = -A_i \omega^2 \sin(\omega t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T_p}$$

$$\left(\frac{2k}{m_1} - \omega^2\right) A_1 - \frac{k}{m_1} A_2 = 0$$

$$-\frac{k}{m_2} A_1 + \left(\frac{2k}{m_2} - \omega^2\right) A_2 = 0$$

- La variable ω es un valor propio necesario para hallar A_1 y A_2.
- Se determina ω y luego se resuelve un sistema lineal.

Problema de autovalores

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2 y = 0$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p^2 y_i = 0$$

$$y_{i-1} - (2 - h^2 p^2) y_i + y_{i+1} = 0$$

Para cuatro puntos dentro del intervalo

$$\begin{bmatrix} (2-h^2p^2) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & (2-h^2p^2) & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (2-h^2p^2) & -1 \\ 0 & 0 & -1 & (2-h^2p^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Método polinomial

$$\begin{bmatrix} (2-h^2p^2) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & (2-h^2p^2) & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (2-h^2p^2) & -1 \\ 0 & 0 & -1 & (2-h^2p^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = 0$$

A partir del determinante se obtine la ecuación característica que se resuelve Numericamente con e método de la bisección, newtonrhapson, etc.

$$(2-0.36p^2)^4 - 3(2-0.36p^2)^2 + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} p &= \pm 1.0301 & \quad |\varepsilon_t| &= 1.6\% \\ p &= \pm 1.9593 & \quad |\varepsilon_t| &= 6.5\% \\ p &= \pm 2.6967 & \quad |\varepsilon_t| &= 14\% \\ p &= \pm 3.1702 & \quad |\varepsilon_t| &= 24\% \end{aligned}$$

Los valores de y_1, y_2, y_3, y_4 se obtiene resolviendo el sistema lineal

Método de potencias

- Permite calcular el valor propio mas elevado y su correspondiente autovector
- La ecuación de valores propios induce un proceso iterativo

$$[A]\{X\} = \lambda\{X\}$$

$$\frac{A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \frac{\lambda\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \frac{\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \lambda.$$

Método de potencias

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
3.556x_1 - 1.778x_2 \quad &= \lambda x_1 \\
-1.778x_1 + 3.556x_2 - 1.778x_3 &= \lambda x_2 \\
-1.778x_2 + 3.556x_3 &= \lambda x_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3.556(1) - 1.778(1) \quad &= 1.778 \\
-1.778(1) + 3.556(1) - 1.778(1) &= 0 \\
-1.778(1) + 3.556(1) &= 1.778
\end{aligned}
$$

Iter 1 $\begin{Bmatrix} 1.778 \\ 0 \\ 1.778 \end{Bmatrix} = 1.778 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3.556 & -1.778 & 0 \\ -1.778 & 3.556 & -1.778 \\ 0 & -1.778 & 3.556 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.778 \\ 0 \\ 1.778 \end{Bmatrix} = 1.778 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Iter 2 $\begin{bmatrix} 3.556 & -1.778 & 0 \\ -1.778 & 3.556 & -1.778 \\ 0 & -1.778 & 3.556 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.556 \\ -3.556 \\ 3.556 \end{Bmatrix} = 3.556 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Iter 3 $\begin{bmatrix} 3.556 & -1.778 & 0 \\ -1.778 & 3.556 & -1.778 \\ 0 & -1.778 & 3.556 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.334 \\ -7.112 \\ 5.334 \end{Bmatrix} = -7.112 \begin{Bmatrix} -0.75 \\ 1 \\ -0.75 \end{Bmatrix}$

Iter 4 $\begin{bmatrix} 3.556 & -1.778 & 0 \\ -1.778 & 3.556 & -1.778 \\ 0 & -1.778 & 3.556 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.75 \\ 1 \\ -0.75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.445 \\ 6.223 \\ -4.445 \end{Bmatrix} = 6.223 \begin{Bmatrix} -0.714 \\ 1 \\ -0.714 \end{Bmatrix}$

Iter 5 $\begin{bmatrix} 3.556 & -1.778 & 0 \\ -1.778 & 3.556 & -1.778 \\ 0 & -1.778 & 3.556 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.714 \\ 1 \\ -0.714 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.317 \\ 6.095 \\ -4.317 \end{Bmatrix} = 6.095 \begin{Bmatrix} -0.708 \\ 1 \\ -0.708 \end{Bmatrix}$

Ejercicio 4

Usando el método de potencias encontrar en cada caso el valor propio mas elevado y su correspondiente vector propio

$$\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$