



# Ecuaciones Diferenciales Parciales

PhD. Alejandro Paredes



# Ecuaciones en Derivadas Parciales

Son ecuaciones que contienen derivadas con respecto a más de una variable independiente.

## Ejemplos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y$$

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 + 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

- El orden de una EDP está determinado por la derivada de mayor orden.
- EDP lineal: los coeficientes de las derivadas no dependen de  $u(x, y)$  o sus derivadas.
- EDP no lineal: los coeficientes de las derivadas dependen de  $u(x, y)$  o sus derivadas.
- EDP cuasi-lineal: es lineal en la derivada de mayor orden.
- Clasificación física: problemas de equilibrio, problemas de autovalores y problemas de propagación.
- Clasificación matemática : EDP's. elípticas, EDP's parabólicas, EDP's hiperbólicas .



# Ecuaciones en Derivadas Parciales

## Problemas de equilibrio

Son problemas en los cuales la solución de la EDP está confinada a un dominio cerrado con condiciones de frontera Especificadas. Por lo general están asociados EDP elípticas.

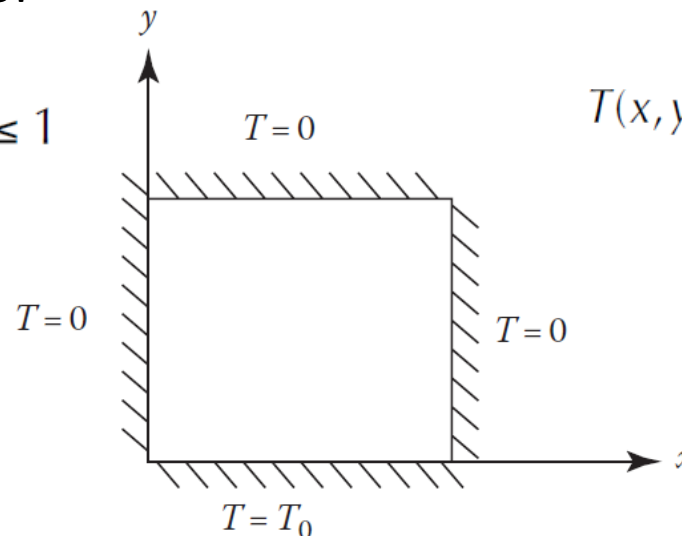
Ejemplo: Ecuación estacionaria del calor

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

Condiciones de frontera de Dirichlet

$$T(0, y) = 0 \quad T(x, 0) = T_0$$

$$T(1, y) = 0 \quad T(x, 1) = 0$$



$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \sinh[n\pi(y - 1)]$$

$$A_n = \frac{2T_0}{n\pi} \frac{[(-1)^n - 1]}{\sinh(n\pi)}$$

# Ecuaciones en Derivadas Parciales

## Problemas de autovalores

Son una extensión de los problemas de equilibrio. La solución solo existe para un numero discreto de valores del parámetro  $\lambda_i$ . Problemas relacionados a frecuencias de resonancia en circuitos eléctricos, frecuencias naturales de vibración, etc.

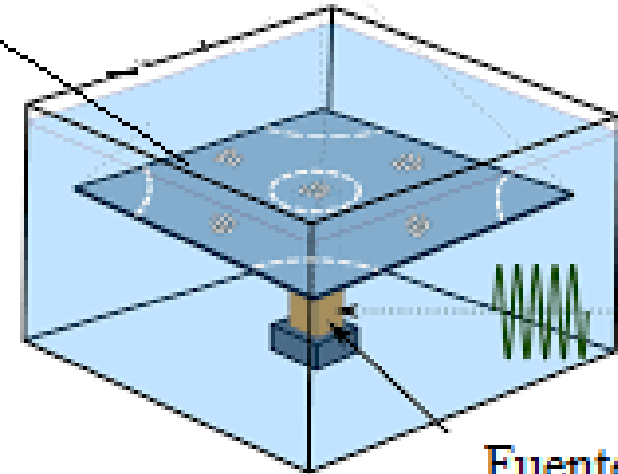
Ejemplo

$$\nabla^4 \phi = \lambda \phi \quad \text{Condiciones de Dirichlet}$$

$$0 < x < 1 \quad \phi(x, 1) = 0, \quad \phi(x, 0) = 0$$

$$0 < y < 1 \quad \phi(1, y) = 0, \quad \phi(0, y) = 0$$

Plato vibrante



Fuente de vibración



# Ecuaciones en Derivadas Parciales

## Problemas de propagación

Son problemas en los cuales la solución de la EDP se encuentra en un dominio abierto y sujeta a condiciones iniciales y de frontera. Por lo general están asociados EDP hiperbólicas y elípticas.

Ejemplo

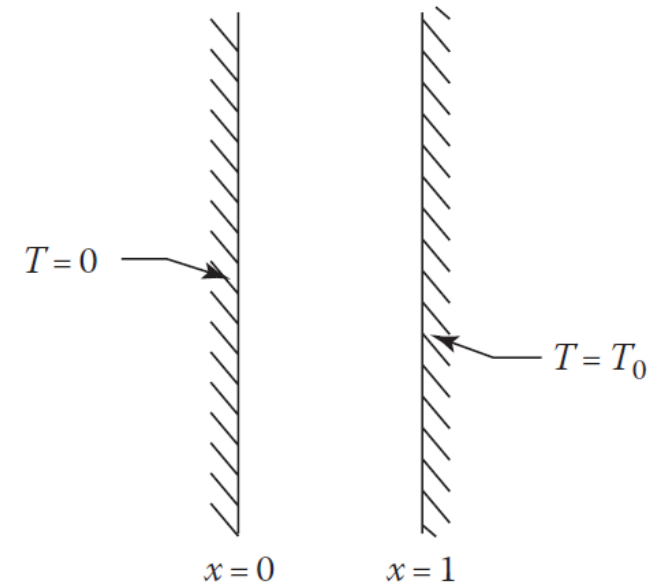
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Condiciones de frontera

$$T(0,t) = 0 \quad T(1,t) = T_0$$

Condiciones iniciales

$$T(x,0) = 0$$

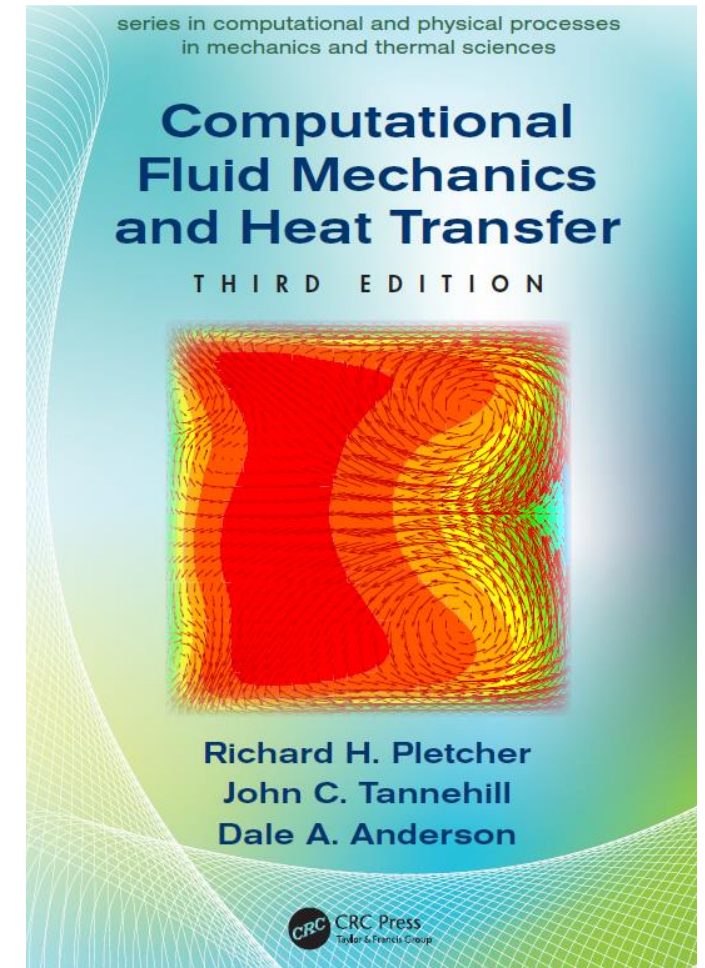


# Ecuaciones en Derivadas Parciales

## Clasificación matemática



- Basada en el concepto de características (líneas o superficies) a lo largo de las cuales las derivadas de mayor orden no son únicas.
- Las características están relacionadas a las direcciones en las cuales la información puede ser transmitida.
- La EDP sobre las características tiene una expresión sencilla.
- EDP hiperbólica : admite soluciones de tipo onda.
- EDP parabólica : admite soluciones de tipo onda amortiguada.
- EDP elíptica : no admite soluciones de tipo onda.







# Ecuaciones en Derivadas Parciales

## Clasificación matemática

Consideremos la EDP de segundo orden con  $a, b, c, d, e$  y  $f$  funciones de  $(x, y)$ .

$$a\phi_{xx} + b\phi_{xy} + c\phi_{yy} + d\phi_x + e\phi_y + f\phi = g(x, y)$$

Reordenando términos, tenemos :  $a\phi_{xx} + b\phi_{xy} + c\phi_{yy} = -(d\phi_x + e\phi_y + f\phi - g) = H$

Supongamos que las características en el plano  $xy$  están parametrizadas por  $\tau$ .

$$C: x(\tau), y(\tau)$$



# Ecuaciones en Derivadas Parciales

## Clasificación matemática

Entonces tenemos:

$$\left. \begin{aligned} & au(\tau) + bv(\tau) + cw(\tau) = H \\ & \phi_x = p(\tau) \quad \phi_{xx} = u(\tau) \\ & \phi_y = q(\tau) \quad \phi_{xy} = v(\tau) \\ & \quad \quad \quad \phi_{yy} = w(\tau) \\ & \frac{dp}{d\tau} = u \frac{dx}{d\tau} + v \frac{dy}{d\tau} \\ & \frac{dq}{d\tau} = v \frac{dx}{d\tau} + w \frac{dy}{d\tau} \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} a & b & c \\ \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} & 0 \\ 0 & \frac{dx}{d\tau} & \frac{dy}{d\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ \frac{dp}{d\tau} \\ \frac{dq}{d\tau} \end{bmatrix}$$





# Ecuaciones en Derivadas Parciales

## Clasificación matemática

Las características: sistema lineal no tiene solución única, entonces  $|A| = 0$

$$a \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 - b \left( \frac{dx}{d\tau} \right) \left( \frac{dy}{d\tau} \right) + c \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = 0$$

Ecuación de las características

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Clasificación:

- Si  $\Delta > 0$  : EDP hiperbólica.

Ec. de onda :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- Si  $\Delta = 0$  : EDP parabólica

Ec. no estacionaria calor :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- Si  $\Delta < 0$  : EDP elíptica.

Ec. estacionaria calor :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$



# Ecuaciones en Derivadas Parciales Hiperbólicas

Tenemos que  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Si consideramos coeficientes constantes, entonces tenemos dos características

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1 \quad \frac{dy}{dx} = \lambda_2$$

cuya solución es:

$$y - \lambda_1 x = k_1 \quad y - \lambda_2 x = k_2$$

Consideramos el cambio de coordenadas

$$\xi = y - \lambda_1 x \quad \eta = y - \lambda_2 x$$

$$\phi_{\xi\eta} = f(\xi, \eta, \phi, \phi_\xi, \phi_\eta)$$

Con un cambio de coordenadas adicional

$$\bar{\xi} = \frac{\xi + \eta}{2} \quad \bar{\eta} = \frac{\xi - \eta}{2}$$

$$\phi_{\bar{\xi}\bar{\xi}} - \phi_{\bar{\eta}\bar{\eta}} = f(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \phi, \phi_{\bar{\xi}}, \phi_{\bar{\eta}})$$



# Ecuaciones en Derivadas Parciales Parabólicas

Tenemos que  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

Si consideramos coeficientes constantes, entonces tenemos dos características

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a} = \lambda_1$$

Consideramos el cambio de coordenadas

$$\xi = y - \lambda_1 x \quad \eta = y - \lambda_2 x$$

Donde  $\lambda_2$  puede tomar cualquier valor que verifique

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = f(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$$

Luego de efectuar la transformación de coordenadas

$$\phi_{\xi\xi} = g(\phi_\xi, \phi_\eta, \phi, \xi, \eta)$$



# Ecuaciones en Derivadas Parciales Elípticas

Tenemos que  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Con coeficientes constantes, entonces tenemos dos características ( $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ )

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1 \quad \frac{dy}{dx} = \lambda_2$$

$$y - c_1x + ic_2x = k_1$$

$$y - c_1x - ic_2x = k_2$$

Consideramos el cambio de coordenadas

$$\xi = y - c_1x \quad \eta = c_2x$$

tenemos

$$\phi_{\xi\xi} + \phi_{\eta\eta} = h(\phi_\xi, \phi_\eta, \phi, \xi, \eta)$$



# EDP-Elípticas

Ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 u = 0 \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

- Ec. Estacionaria del calor.
- Potencial eléctrico en el espacio libre de cargas.

Ecuación generalizada de Helmholtz:

$$\nabla^2 u - \lambda u = f \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 u = f$$

$$\lambda = \lambda(x, y), \quad f = f(x, y)$$

Ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 u = f \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = f$$

- Potencial eléctrico en región con carga eléctrica.
- Versión vectorial en la aproximación cuasi-estática de la MHD.
- Fluidos incompresibles a bajo  $Re$ .
- Membrana vibrante.
- Separación de variables en la ecuación de onda.

# EDP-Elípticas



Ecuación de Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

$$(x, y) \in \Omega = (a, b) \times (c, d)$$

$$u(x, y)|_{\partial\Omega} = u_0(x, y)$$

Discretización de 5 puntos

$$x_i = a + ih_x, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m, \quad h_x = \frac{b - a}{m}$$

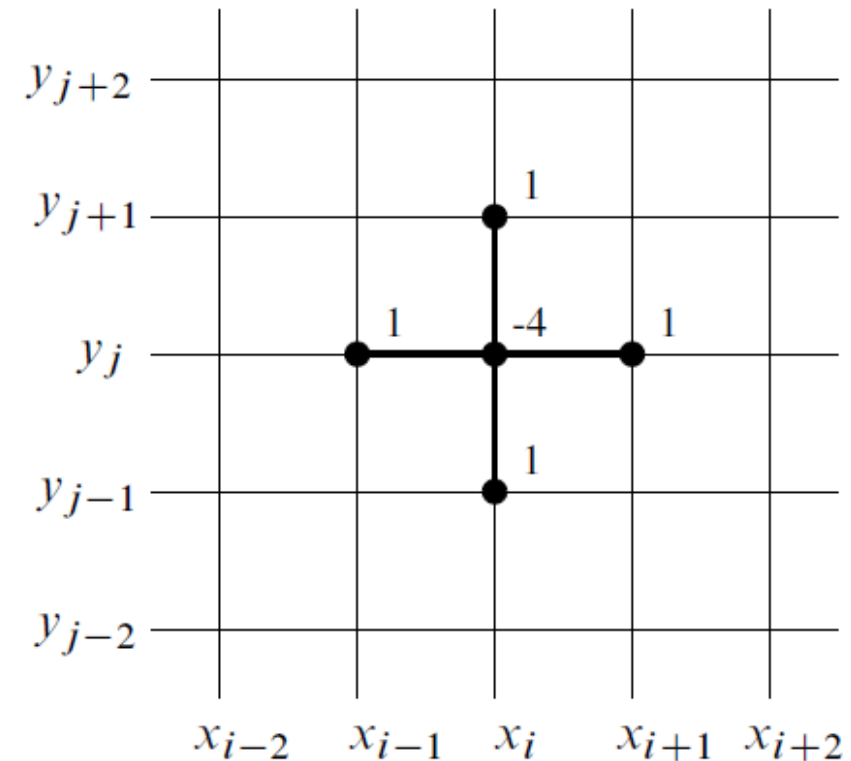
$$y_j = c + jh_y, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad h_y = \frac{d - c}{n}$$

$$\frac{U_{i-1,j} + U_{i+1,j}}{(h_x)^2} + \frac{U_{i,j-1} + U_{i,j+1}}{(h_y)^2} - \left( \frac{2}{(h_x)^2} + \frac{2}{(h_y)^2} \right) U_{ij} = f_{ij}$$

$$i = 1, 2, \dots, m - 1, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Tomando  $h_x = h_y = h$

$$\frac{1}{h} (U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1} - 4U_{ij}) = f_{ij}$$







# EDP-Elípticas

Ordenamiento natura para  $h_x = h_y = h \quad m = n = 4$

$$k = i + (m - 1)(j - 1), \quad i = 1, 2, \dots, m - 1, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1$$

$$x_1 = U_{11}, \quad x_2 = U_{21}, \quad x_3 = U_{31}, \quad x_4 = U_{12}, \quad x_5 = U_{22},$$

$$x_6 = U_{32}, \quad x_7 = U_{13}, \quad x_8 = U_{23}, \quad x_9 = U_{33}.$$

7	8	9	
4	5	6	
1	2	3	

$$\frac{1}{h^2} (-4x_1 + x_2 + x_4) = f_{11} - \frac{u_{01} + u_{10}}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^2} (x_1 - 4x_2 + x_3 + x_5) = f_{21} - \frac{u_{20}}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^2} (x_2 - 4x_3 + x_6) = f_{31} - \frac{u_{30} + u_{41}}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^2} (x_1 - 4x_4 + x_5 + x_7) = f_{12} - \frac{u_{02}}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^2} (x_2 + x_4 - 4x_5 + x_6 + x_8) = f_{22}$$

$$\frac{1}{h^2} (x_3 + x_5 - 4x_6 + x_9) = f_{32} - \frac{u_{42}}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^2} (x_4 - 4x_7 + x_8) = f_{13} - \frac{u_{03} + u_{14}}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^2} (x_5 + x_7 - 4x_8 + x_9) = f_{23} - \frac{u_{24}}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^2} (x_6 + x_8 - 4x_9) = f_{33} - \frac{u_{34} + u_{43}}{h^2}.$$

# EDP-Elípticas



$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_9 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} f_{11} - \frac{u_{01} + u_{10}}{h^2} \\ \vdots \\ f_{33} - \frac{u_{34} + u_{43}}{h^2} \end{bmatrix} \quad AX = F$$

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} B & I & 0 \\ I & B & I \\ 0 & I & B \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

# Ejercicio



Resolver la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

para la siguiente configuración mostrada

