

# Informe N°3 Métodos Experimentales II

## Estudio del período del péndulo simple para todo ángulo

Nombre, Apellido

XX de Junio de XXX

El presente experimento consistió en analizar el período de un péndulo simple para cualquier ángulo de desplazamiento inicial. Para ello se utilizaron hilos de referencia y una fotopuerta. Luego se procedió a graficar la ecuación (10), de manera de obtener un valor experimental para la aceleración de gravedad.

El valor obtenido fue de  $g = 9,48 \pm 0,12(m/s^2)$ , con un error porcentual  $\xi = 3,036\%$  del valor de referencia. Esto avala la aproximación realizada en el marco teórico, así como el procedimiento experimental realizado.

### 1. Introducción

En física, muchos problemas han podido resolverse aproximando los movimientos de algún cuerpo al comportamiento de un péndulo simple. Sin embargo, el comportamiento de este objeto físico va mucho más allá de lo que habitualmente se estudia: una ecuación diferencial en la que se hace una aproximación para ángulos pequeños (ecuación diferencial lineal). El intentar estudiar el comportamiento de un péndulo en el ámbito de la dinámica para cualquier ángulo inicial de desplazamiento, es el objetivo del presente experimento.

### 2. Marco Teórico

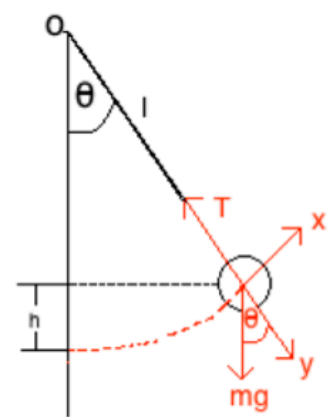


fig 1: Diagrama de fuerzas en el péndulo

Consideremos el diagrama de fuerzas de un péndulo de largo  $l$  y masa  $m$ . Las ecuaciones de fuerza para el péndulo en el eje  $x$  (la componente tangencial) es:

$$-mg \sin \theta = ma_t \quad (1)$$

Donde  $a_t$  es la aceleración tangencial.

Sabemos que  $a_t = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$ , donde  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  es la aceleración angular. Luego la ecuación (1), queda :

$$-mg \sin \theta = ml \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2)$$

Simplificando términos iguales y agrupando, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (3)$$

Usando conservación de la energía se podrá determinar el período de oscilación.

Ahora bien, sea  $\theta_o$  la posición inicial en la cual es soltada la masa, luego la altura a la cual se encuentra respecto al origen es  $h = l(1 - \cos \theta_o)$ , entonces su energía inicial es:

$$E_i = mgl(1 - \cos \theta_o) \quad (4)$$

Sea  $v_t = l \frac{d\theta}{dt}$  la velocidad del péndulo en un instante  $t$  y sea  $h = l(1 - \cos \theta)$  la altura (respecto al origen) en aquel tiempo, entonces la energía en ese instante es:

$$E = \frac{1}{2}m \left( l \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos \theta) \quad (5)$$

Luego por conservación de energía se obtiene que :

### 4. Resultados y análisis de Resultados

De la ecuación (10), se observa que si se grafica  $T$  vs  $(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_o}{2})$ , debemos obtener una recta donde la pendiente corresponde a  $2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , que corresponde precisamente al período de un péndulo cuando describe un movimiento armónico simple. Con lo anterior obtenemos la tabla III:

T (s)	$[1 + 0,25 \cdot \sin^2(\theta_o/2)]$
0,9535	1.00189
0,9689	1.0167
0,9887	1.0366
0,9934	1.0446
1,0152	1.0625

Tabla III: Construido a partir de la tabla II. Indica el período asociado al factor  $(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_o}{2})$ ,

Aplicando la distribución normal de ajuste de mínimos cuadrados a la tabla III, donde T es la variable dependiente, obtenemos como ecuación:

$$y = 0,9996x + 0,04 \quad (11)$$

Y a continuación se encuentra el gráfico respectivo:

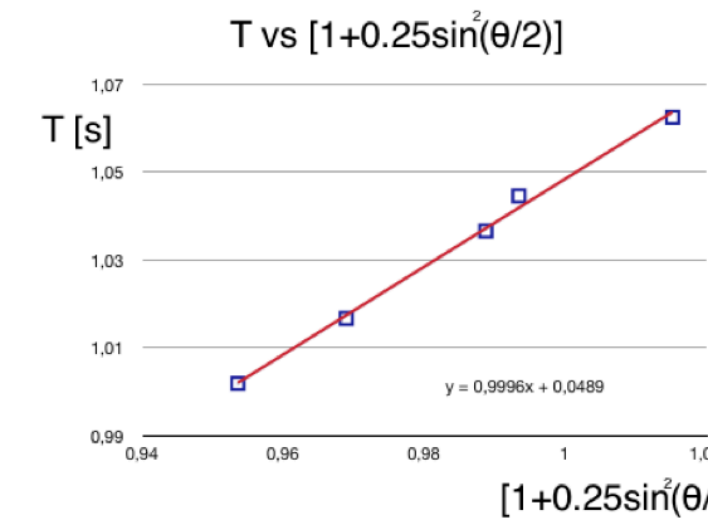


figura 3: Gráfico de los datos de la tabla III (puntos azules) y su respectivo ajuste de mínimos cuadrados(línea roja)

A través de la ecuación (10), se obtiene que el valor de la gravedad para la pendiente obtenida en la ecuación (11), es:

$$g = 9,48 \pm 0,12 \frac{m}{s^2} \quad (12)$$

El error porcentual  $\xi$  del valor  $g$  obtenido en la ecuación anterior, es de :

$$\xi = 3,036\% \quad (13)$$

Esta correspondencia reafirma la validez de la ecuación (10), junto con corroborar la fiabilidad del método experimental. Luego, a través de la pendiente de la ecuación (11) y en relación a la ecuación (10), obtenemos el período del péndulo para ángulos pequeños, es decir:

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 0,9996 \pm 0,038(s) \quad (14)$$

Otro punto a destacar es que tanto la linealidad de la curva del gráfico (figura 3) como el valor obtenido para  $g$  no se ven afectados en grandes proporciones por la aproximación realizada en el marco teórico, lo que indica el buen manejo de datos que se realizó.

### 5. Conclusión

Segn lo que arroja el gráfico (figura 3), la relación entre T (período) y el término que acompaña a la raíz en la ecuación (10) (que corresponde a la primera aproximación del polinomio) es evidentemente lineal, por lo que la aproximación utilizada es corroborada por la curva. Además, el valor obtenido para  $g$  es bastante semejante al de referencia, con un error porcentual equivalente a  $\xi = 3,36\%$ , lo que indica la validez tanto de la teoría como del método experimental. En consecuencia, se puede decir que, teniendo en cuenta la aproximación usada en el marco teórico, la relación entre el período y el ángulo es la sealada en la ecuación (10). Por lo tanto, el presente experimento puede considerarse exitoso, ya que permite predecir el período de un péndulo para cualquier ángulo de desplazamiento inicial con tan solo usar la primera aproximación, lo cual evidencia que si extendemos las aproximaciones obtendremos resultados aún más exactos a los ya obtenidos.

### 6. Apéndice

La solución a través de series de Taylor de :

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(\sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta_o}{2})^{1/2}}$$

es :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta_o}{2} + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\theta_o}{2} + \dots \right)$$

Lo que en forma general queda:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n+1)!}{(2n)!} \right]^2 \sin^2 \left( \frac{\theta_o}{2} \right)$$