

LABORATORIO 1 DE ALGORITMOS NUMÉRICOS

DANY RUBIANO JIMENEZ

Profesor: Oscar Rojas D.

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS.....	v
ÍNDICE DE CUADROS	vi
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....	7
1.1 MOTIVACIÓN Y ANTECEDENTES	7
1.2 OBJETIVOS	7
1.3 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO	7
CAPÍTULO 2. DESCRIPCIÓN DE LOS MÉTODOS	9
2.1 MÉTODO DE LA BISECCIÓN	9
2.2 MÉTODO DE PUNTO FIJO	9
2.3 MÉTODO DE LA SECANTE	10
2.4 MÉTODO REGULA FALSI	10
2.5 MÉTODO DE NEWTHON RAPHSON	11
2.6 MÉTODO DE NEWTHON RAPHSON PARA VARIAS VARIABLES	11
2.7 MÉTODO DE PUNTO FIJO PARA VARIAS VARIABLES	12
CAPÍTULO 3. RESULTADOS.....	13
3.1 FUNCIONES	13
3.1.1 $f_1(x) = (x - 1) \ln(x)$	13
3.1.1.1 Aproximación	13
3.1.1.2 Error	13
3.1.2 $f_2(x) = \cos(x) - \tan(x)$	15
3.1.2.3 Aproximación	15
3.1.2.4 Error	15
3.1.3 $f_3(x) = (x*x*x) - \ln(1 + 2x)$	17
3.1.3.5 Aproximación	17
3.1.3.6 Error	17
3.2 SISTEMAS DE ECUACIONES	20

3.2.1	S.E.1	20
	3.2.1.7 Aproximaciones	20
	3.2.1.8 Error	21
3.2.2	S.E.2	22
	3.2.2.9 Aproximaciones	22
	3.2.2.10 Error	24
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS		27
4.1	ANÁLISIS PARA LAS FUNCIONES NO LINEALES	27
	4.1.1 Análisis para la función F1	27
	4.1.2 Análisis para la función F2	27
	4.1.3 Análisis para la función F3	27
4.2	ANÁLISIS PARA LOS SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES	28
	4.2.1 Análisis para el Sistema de Ecuaciones S.E.1	28
	4.2.2 Análisis para el Sistema de Ecuaciones S.E.2	28
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES		29
CAPÍTULO 6. BIBLIOGRAFÍA.....		31

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3-1: Aproximación vs Iteraciones para $f1(x) = (x - 1)\ln(x)$	13
Figura 3-2: Error vs Iteraciones para $f1(x) = (x - 1)\ln(x)$	14
Figura 3-3: Error logarítmico vs Iteraciones para $f1(x) = (x - 1)\ln(x)$	14
Figura 3-4: Aproximación vs Iteraciones para $f2(x) = \cos(x) - \tan(x)$	15
Figura 3-5: Error vs Iteraciones para $f2(x) = \cos(x) - \tan(x)$	16
Figura 3-6: Error logarítmico vs Iteraciones para $f2(x) = \cos(x) - \tan(x)$	16
Figura 3-7: Aproximación vs Iteraciones para $f3(x) = x^3 - \ln(1 + 2x)$	17
Figura 3-8: Error vs Iteraciones para $f3(x) = x^3 - \ln(1 + 2x)$	18
Figura 3-9: Error logarítmico vs Iteraciones para $f3(x) = x^3 - \ln(1 + 2x)$	18
Figura 3-10: Aproximación X_1 vs Iteraciones: S.E.1.	20
Figura 3-11: Aproximación X_2 vs Iteraciones: S.E.1.	21
Figura 3-12: Error vs Iteraciones: S.E.1.	21
Figura 3-13: Error logarítmico vs Iteraciones: S.E.1.	22
Figura 3-14: Aproximación X_1 vs Iteraciones: S.E.2.	23
Figura 3-15: Aproximación X_2 vs Iteraciones: S.E.2.	23
Figura 3-16: Aproximación X_3 vs Iteraciones: S.E.2.	24
Figura 3-17: Error vs Iteraciones: S.E.2.	24
Figura 3-18: Error logarítmico vs Iteraciones: S.E.2.	25

ÍNDICE DE CUADROS

Tabla 3.1: Aproximación final y error de la función $f_1(x)$	15
Tabla 3.2: Aproximación final y error de la función $f_2(x)$	17
Tabla 3.3: Aproximación final y error de la función $f_3(x)$	19
Tabla 3.4: Aproximación final de las raíces y error del Sistema de Ecuaciones 1.	22
Tabla 3.5: Aproximación final de las raíces y error del Sistema de Ecuaciones 2.	25

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 MOTIVACIÓN Y ANTECEDENTES

Los métodos numéricos son técnicas mediante las cuales es posible formular problemas matemáticos de tal forma que puedan resolverse usando operaciones aritméticas.

Estos métodos nos vuelven aptos para entender esquemas numéricos a fin de resolver problemas matemáticos, de ingeniería y científicos en una computadora, reducir esquemas numéricos básicos, escribir programas y resolverlos en una computadora y usar correctamente el software existente para dichos métodos y no solo aumenta nuestra habilidad para el uso de computadoras sino que también amplía la pericia matemática y la comprensión de los principios científicos básicos. El análisis numérico trata de diseñar métodos para “aproximar” de una manera eficiente las soluciones de problemas expresados matemáticamente.

El objetivo principal del análisis numérico es encontrar soluciones “aproximadas” a problemas complejos utilizando sólo las operaciones más simples de la aritmética. Se requiere de una secuencia de operaciones algebraicas y lógicas que producen la aproximación al problema matemático.

1.2 OBJETIVOS

El objetivo principal de este laboratorio es analizar las características de los diferentes métodos presentados, considerando la rapidez con que convergen a la solución y el tamaño del error de cada uno de ellos, tomando en cuenta todas las iteraciones realizadas. Para esto, es necesario programar los algoritmos revisados en las clases de cátedra, consiguiendo manejo básico de la programación en MATLAB; y utilizando los gráficos que puede realizar este programa para de esta forma, consolidar los conocimientos obtenidos en las clases teóricas.

1.3 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

Este informe comienza con una breve descripción de los métodos, en donde se encuentra información relevante para el entendimiento de cada uno de ellos. Seguido se muestran mediante gráficos, información del cómo actúan cada uno de los métodos aplicados a distintas funciones predeterminadas, las cuales se informan en su respectivo momento, en específico las mencionadas gráficas deben proporcionar información sobre errores, cantidad de iteraciones, además las raíces respectivas. Finalmente se realizan conclusiones correspondientes con los datos obtenidos de los datos del análisis.

CAPÍTULO 2. DESCRIPCIÓN DE LOS MÉTODOS

2.1 MÉTODO DE LA BISECCIÓN

Este es uno de los métodos más sencillos y de fácil intuición para resolver ecuaciones en una variable, también conocido como Método de Intervalo Medio. Se basa en el teorema del valor intermedio (TVI), el cual establece que toda función continua f en un intervalo cerrado $[a,b]$ toma todos los valores que se hallan entre $f(a)$ y $f(b)$. Esto es que todo valor entre $f(a)$ y $f(b)$ es la imagen de al menos un valor en el intervalo $[a,b]$. En caso de que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos, el valor cero sería un valor intermedio entre $f(a)$ y $f(b)$, por lo que con certeza existe un p en $[a,b]$ que cumple $f(p)=0$. De esta forma, se asegura la existencia de al menos una solución de la ecuación $f(x)=0$. El método consiste en lo siguiente:

- Debe existir seguridad sobre la continuidad de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$
- A continuación se verifica que $f(a)*f(b)$ sea menor que 0
- Se calcula el punto medio m del intervalo $[a,b]$ y se evalúa $f(m)$ si ese valor es igual a cero, ya hemos encontrado la raíz buscada
- En caso de que no lo sea, verificamos si $f(m)$ tiene signo opuesto con $f(a)$ o con $f(b)$
- Se redefine el intervalo $[a, b]$ como $[a, m]$ ó $[m, b]$ según se haya determinado en cuál de estos intervalos ocurre un cambio de signo
- Con este nuevo intervalo se continúa sucesivamente encerrando la solución en un intervalo cada vez más pequeño, hasta alcanzar la precisión deseada.

El método de bisección es menos eficiente que el método de Newton, pero es mucho más seguro para garantizar la convergencia. Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y que $f(a)*f(b)$ sea menor que 0, entonces este método converge a la raíz de f . De hecho, una cota del error absoluto es:

$$|b - a|/2^n \quad (2.1)$$

en la n -ésima iteración. La bisección converge linealmente, por lo cual es un poco lento. Sin embargo, se garantiza la convergencia si $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo. Si existieran más de una raíz en el intervalo entonces el método sigue siendo convergente pero no resulta tan fácil caracterizar hacia qué raíz converge el método.

2.2 MÉTODO DE PUNTO FIJO

El método del punto fijo es un método iterativo que permite resolver sistemas de ecuaciones no necesariamente lineales. En particular se puede utilizar para determinar raíces de una función de la forma $f(x)$, siempre y cuando se cumplan los criterios de convergencia.

El método de iteración de punto fijo, también denominado método de aproximación sucesiva, requiere volver a escribir la ecuación $f(x)=0$ en la forma $x=g(x)$.

Llamemos x^* a la raíz de f . Supongamos que existe y es conocida la función g tal que:

$$f(x) = x - g(x) \quad (2.2)$$

Entonces:

$$f(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* - g(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = g(x^*) \quad (2.3)$$

Tenemos, pues, a x^* como punto fijo de g .

El procedimiento empieza con una estimación o conjetura inicial de x , que es mejorada por iteración hasta alcanzar la convergencia. Para que converja, la derivada (dg/dx) debe ser menor que 1 en magnitud (al menos para los valores x que se encuentran durante las iteraciones). La convergencia será establecida mediante el requisito de que el cambio en x de una iteración a la siguiente no sea mayor en magnitud que alguna pequeña cantidad ε .

2.3 MÉTODO DE LA SECANTE

En análisis numérico el método de la secante es un método para encontrar los ceros de una función de forma iterativa. Es una variación del método de Newton-Raphson donde en vez de calcular la derivada de la función en el punto de estudio, teniendo en mente la definición de derivada, se aproxima la pendiente a la recta que une la función evaluada en el punto de estudio y en el punto de la iteración anterior. Este método es de especial interés cuando el coste computacional de derivar la función de estudio y evaluarla es demasiado elevado, por lo que el método de Newton no resulta atractivo. En otras palabras, el método de la secante es un algoritmo de la raíz de investigación que utiliza una serie de raíces de las líneas secantes para aproximar mejor la raíz de una función f . El método de la secante se puede considerar como una aproximación en diferencias finitas del método de Newton-Raphson. Sin embargo, este método fue desarrollado independientemente de este último. El método se define por la relación de recurrencia:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \quad (2.4)$$

Como se puede ver, este método necesitará dos aproximaciones iniciales de la raíz para poder inducir una pendiente inicial.

De manera general, el proceso consiste en:

1. Obtener ecuación de la recta que pasa por $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$.
2. Se selecciona como siguiente elemento de la recurrencia el valor x_{n+1} , que es la intersección de la secante con el eje de las abscisas.
3. Se obtiene el nuevo valor de la formula y se repite el proceso hasta el nivel deseado de precisión.

2.4 MÉTODO REGULA FALSI

Es un método iterativo de resolución numérica de ecuaciones no lineales. El método combina el método de bisección y el método de la secante. Como en el método de bisección, se parte de un intervalo inicial

$[a_0, b_0]$ con $f(a_0)$ y $f(b_0)$ de signos opuestos, lo que garantiza que en su interior hay al menos una raíz (véase Teorema de Bolzano). El algoritmo va obteniendo sucesivamente en cada paso un intervalo más pequeño $[a_k, b_k]$ que sigue incluyendo una raíz de la función f . A partir de un intervalo $[a_k, b_k]$ se calcula un punto interior c_k :

$$c_k = \frac{f(b_k)a_k - f(a_k)b_k}{f(b_k) - f(a_k)} \quad (2.5)$$

Dicho punto es la intersección de la recta que pasa por $(a, f(a_k))$ y $(b, f(b_k))$ con el eje de abscisas (igual a como se hace en el método de la secante). Se evalúa entonces $f(c_k)$. Si es suficientemente pequeño, c_k es la raíz buscada. Si no, el próximo intervalo $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ será:

a_k, c_k si $f(a_k)$ y $f(c_k)$ tienen signos opuestos;

c_k, b_k en caso contrario.

2.5 MÉTODO DE NEWTHON RAPHSON

Es un algoritmo eficiente para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real. También puede ser usado para encontrar el máximo o mínimo de una función, encontrando los ceros de su primera derivada. El método de Newton-Raphson es un método abierto, en el sentido de que no está garantizada su convergencia global. La única manera de alcanzar la convergencia es seleccionar un valor inicial lo suficientemente cercano a la raíz buscada. Así, se ha de comenzar la iteración con un valor razonablemente cercano al cero (denominado punto de arranque o valor supuesto). La relativa cercanía del punto inicial a la raíz depende mucho de la naturaleza de la propia función; si ésta presenta múltiples puntos de inflexión o pendientes grandes en el entorno de la raíz, entonces las probabilidades de que el algoritmo diverja aumentan, lo cual exige seleccionar un valor puesto cercano a la raíz. Una vez que se ha hecho esto, el método linealiza la función por la recta tangente en ese valor supuesto. La abscisa en el origen de dicha recta será, según el método, una mejor aproximación de la raíz que el valor anterior. Se realizarán sucesivas iteraciones hasta que el método haya convergido lo suficiente. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ función derivable definida en el intervalo real $[a, b]$. Empezamos con un valor inicial x_0 y definimos para cada número natural n

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.6)$$

Donde f' denota la derivada de f . Nótese que el método descrito es de aplicación exclusiva para funciones de una sola variable con forma analítica o implícita conocida. Existen variantes del método aplicables a sistemas discretos que permiten estimar las raíces de la tendencia, así como algoritmos que extienden el método de Newton a sistemas multivariantes, sistemas de ecuaciones, etc.

2.6 MÉTODO DE NEWTHON RAPHSON PARA VARIAS VARIABLES

Este método se basa en utilizar el desarrollo de Taylor para aproximar una función derivable en las proximidades de un punto. Partimos de un sistema de la forma:

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\
 f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\
 &\vdots \\
 f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0,
 \end{aligned}$$

del que se pretende obtener una solución. Utilizando el desarrollo de Taylor alrededor de (x_1^0, \dots, x_n^0) , queda :

$$\begin{aligned}
 F(x^0) + DF(x^0)(x - x^0) &= 0 \\
 \text{entonces: } x &= x^0 - DF^{-1}(x^0)F(x^0)
 \end{aligned}$$

y el método de Newton consiste en calcular la sucesión:

$$x^{k+1} = x^k - DF^{-1}(x^k)F(x^k).$$

2.7 MÉTODO DE PUNTO FIJO PARA VARIAS VARIABLES

Partimos de un sistema de ecuaciones no lineales de la forma:

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\
 f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\
 &\vdots \\
 f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0,
 \end{aligned}$$

del que se pretende obtener una solución. Para utilizar el método del punto fijo, se reescribe el sistema de la forma

$$\begin{aligned}
 x_1 &= g_1(x_1, \dots, x_n), \\
 x_2 &= g_2(x_1, \dots, x_n), \\
 &\vdots \\
 x_n &= g_n(x_1, \dots, x_n).
 \end{aligned}$$

Se parte de una solución inicial (x_1^0, \dots, x_n^0) y se construye la sucesión $x_1^{k+1}, \dots, x_n^{k+1} = g_1(x_1^k, \dots, x_n^k), \dots, g_n(x_1^k, \dots, x_n^k)$. Si esta sucesión converge, lo hará a una solución del sistema de ecuaciones próxima a la solución inicial. La convergencia de la sucesión depende mucho de hacer una buena elección de las funciones g_1, \dots, g_n .

CAPÍTULO 3. RESULTADOS

3.1 FUNCIONES

Las funciones impuestas para su estudio son las cuatro siguientes:

1. $f1(x) = (x - 1)\ln(x)$
2. $f2(x) = \cos(x) - \tan(x)$
3. $f3(x) = x^3 - \ln(1 + 2x)$

3.1.1 $f1(x) = (x - 1)\ln(x)$

Tomado en cuenta que la raíz de esta función es 1, entonces para efectos del cálculo a través de los métodos, se va a tomar como referencia los puntos entre el intervalo $[0.5, 1.5]$, ya que estos cumplen con el teorema de Bolzano. En el caso de aquellos métodos que necesitan solo un punto inicial, el valor a tomar es de 0.5.

3.1.1.1 Aproximación

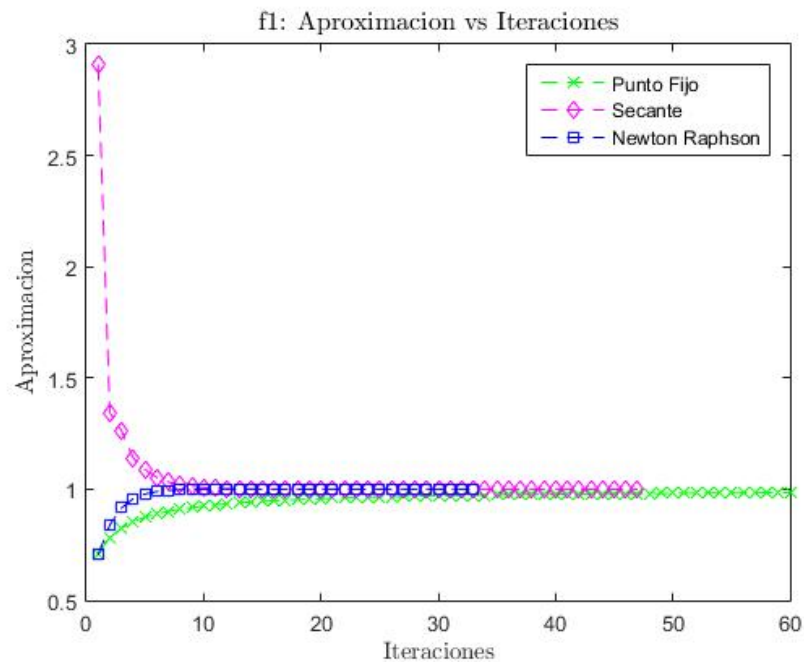


Figura 3-1: Aproximación vs Iteraciones para $f1(x) = (x - 1)\ln(x)$

3.1.1.2 Error

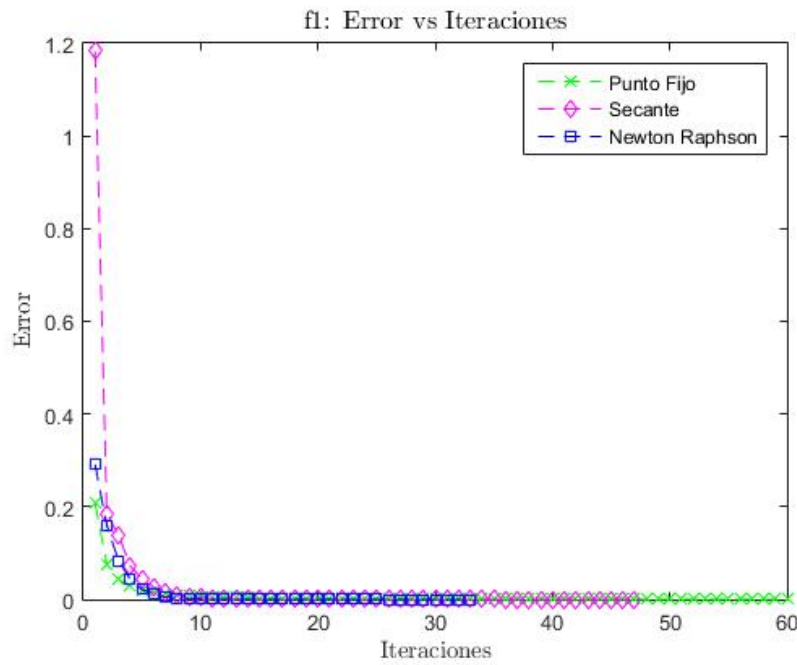


Figura 3-2: Error vs Iteraciones para $f1(x) = (x - 1)\ln(x)$

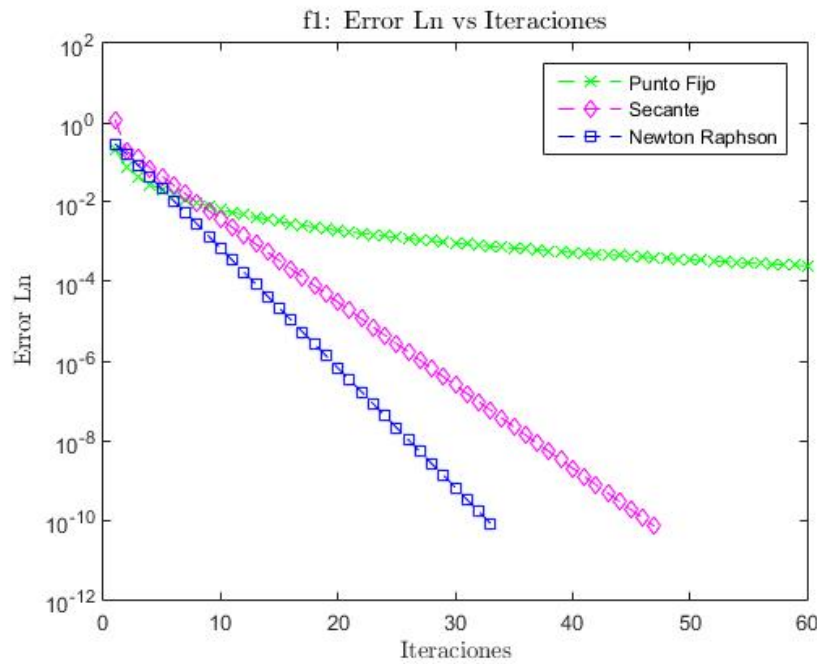


Figura 3-3: Error logarítmico vs Iteraciones para $f1(x) = (x - 1)\ln(x)$

Para saber a que aproximaciones llegó, número de iteraciones y el error final, se presenta la siguiente tabla:

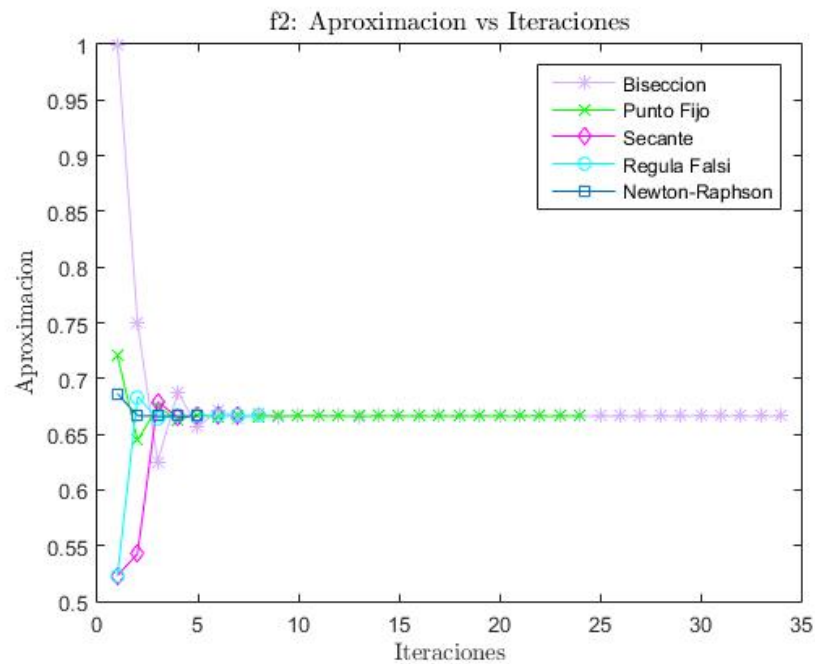
Tabla 3.1: Aproximación final y error de la función $f1(x)$.

Método	Iteraciones	Aproximación	Error
Punto Fijo	60	0,984374217787491	0,000250062855417954
Secante	46	1,000000000013824	6,91214863076623e-11
Newthon Raphson	33	0,999999999918233	8,17664824803965e-11

3.1.2 $f2(x) = \cos(x) - \tan(x)$

En el caso de esta función, el dominio es: $x \in \mathbb{R} : \pi(n + \frac{1}{2}) \nmid x \nmid \pi(n + \frac{3}{2}), n \in \mathbb{Z}$, tomando $n = -1$, se va a tomar como referencia los puntos entre el intervalo $[\pi(-\frac{1}{2}), \pi(\frac{1}{2})]$. Por lo tanto, en el caso de los métodos que necesita de dos puntos, se va a tomar 0,5 y 1,5. En el caso de aquellos métodos que necesitan solo un punto inicial, el valor a tomar es de 0,5.

3.1.2.3 Aproximación

Figura 3-4: Aproximación vs Iteraciones para $f2(x) = \cos(x) - \tan(x)$

3.1.2.4 Error

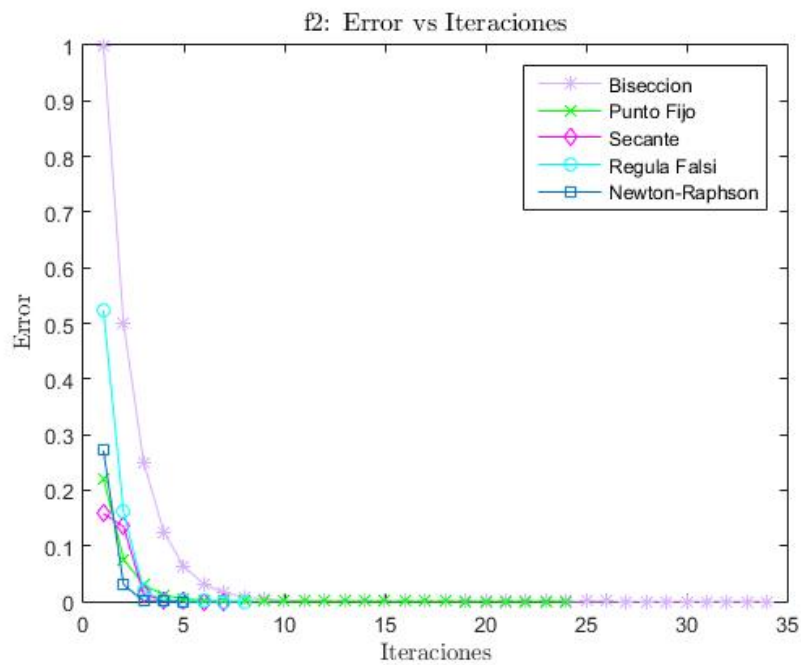


Figura 3-5: Error vs Iteraciones para $f2(x) = \cos(x) - \tan(x)$

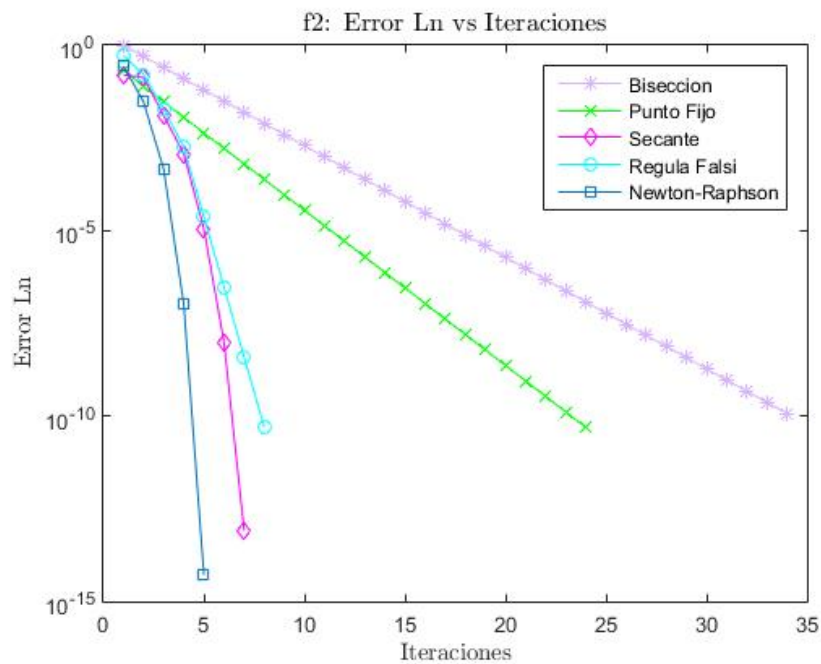


Figura 3-6: Error logarítmico vs Iteraciones para $f2(x) = \cos(x) - \tan(x)$

Para saber a que aproximaciones llegó, número de iteraciones y el error final, se presenta la siguiente tabla:

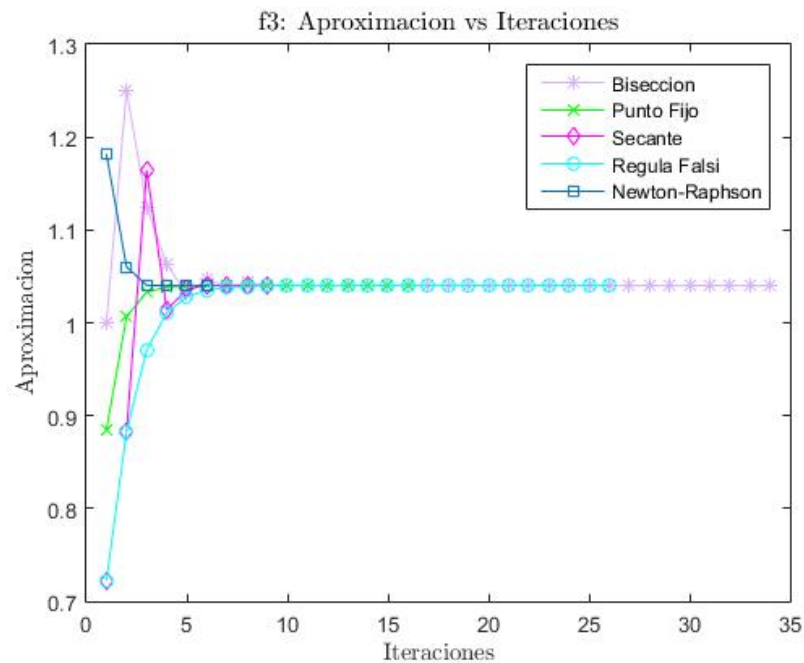
Tabla 3.2: Aproximación final y error de la función $f_2(x)$.

Método	Iteraciones	Aproximación	Error
Bisección	34	0,666239432466682	1,16415321826935e-10
Punto Fijo	24	0,666239432478881	4,93302065862622e-11
Secante	7	0,666239432492433	8,22711818386247e-14
Regula Falsi	8	0,666239432491857	5,03002084428772e-11
Newthom Raphson	5	0,666239432492515	5,16584760445960e-15

3.1.3 $f_3(x) = (x \cdot x \cdot x) - \ln(1 + 2x)$

Para esta función, tomado en cuenta que la raíz de esta función es aproximadamente 1,04003, entonces para efectos del cálculo a través de los métodos, se va a tomar como referencia los puntos entre el intervalo $[0,5, 1,5]$. En el caso de aquellos métodos que necesitan solo un punto inicial, el valor a tomar es de 0.5.

3.1.3.5 Aproximación

Figura 3-7: Aproximación vs Iteraciones para $f_3(x) = x^3 - \ln(1 + 2x)$

3.1.3.6 Error

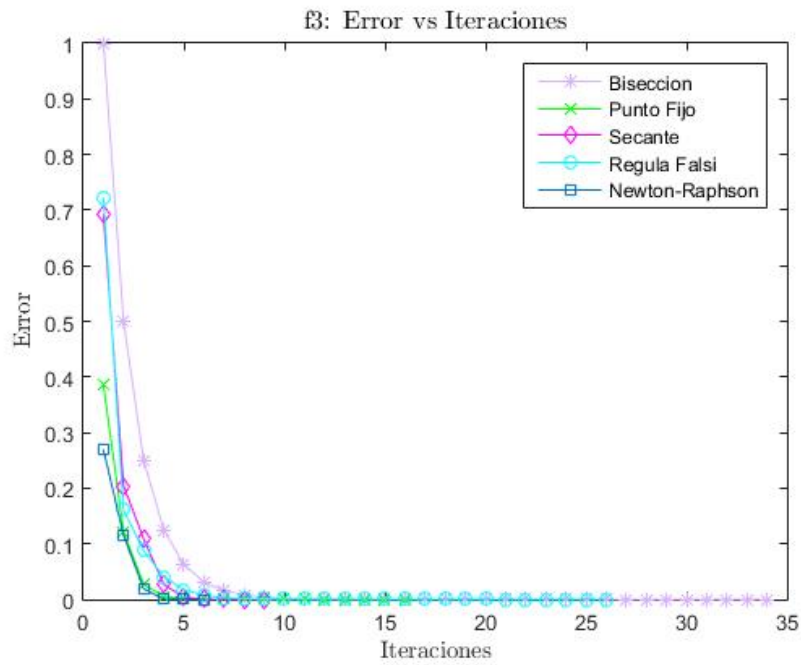


Figura 3-8: Error vs Iteraciones para $f_3(x) = x^3 - \ln(1 + 2x)$

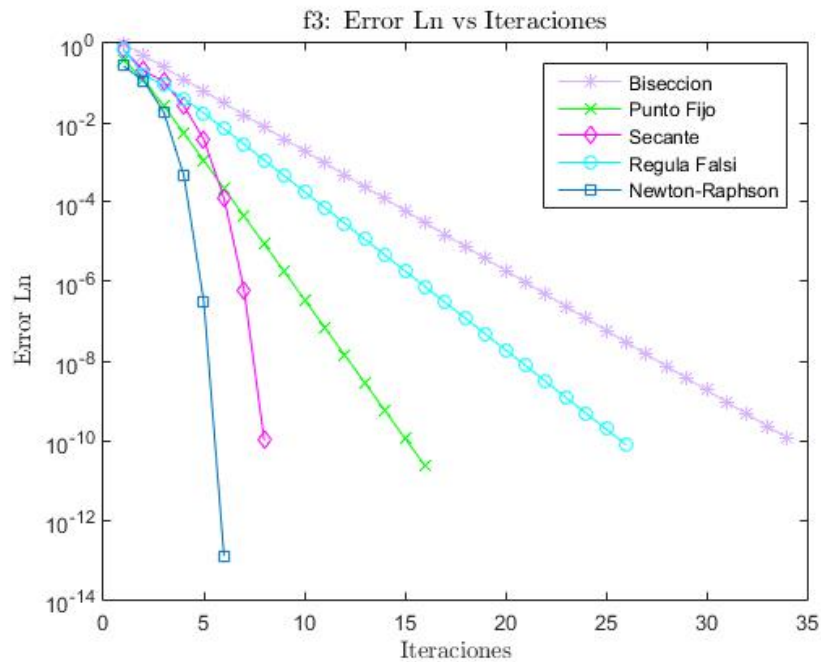


Figura 3-9: Error logarítmico vs Iteraciones para $f_3(x) = x^3 - \ln(1 + 2x)$

Para saber a que aproximaciones llegó, número de iteraciones y el error final, se presenta la siguiente tabla:

Tabla 3.3: Aproximación final y error de la función $f_3(x)$.

Método	Iteraciones	Aproximación	Error
Bisección	34	1,04002527304692	1,16415321826935e-10
Punto Fijo	16	1,04002527301994	2,27911023387151e-11
Secante	9	1,040025273025639	1,00307769034716e-13
Regula Falsi	26	1,04002527297392	7,76854136574912e-11
Newthon Raphson	6	1,04002527302564	1,23829558950865e-13

3.2 SISTEMAS DE ECUACIONES

Se pide utilizar los siguientes S.E. para los métodos de Newton Raphson y Punto Fijo, con una tolerancia de 10^{-8} .

1. S.E.1:

$$3x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$3x_1x_2^2 - x_1^3 = 0$$

2. S.E.2:

$$x_1^2 + x_2 - 37 = 0$$

$$3x_1 - x_2^2 - 5 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$$

3.2.1 S.E.1

Para este sistema de ecuaciones, se tiene a $(1, 1)^t$ como puntos iniciales, obteniéndose lo siguientes resultados:

3.2.1.7 Aproximaciones

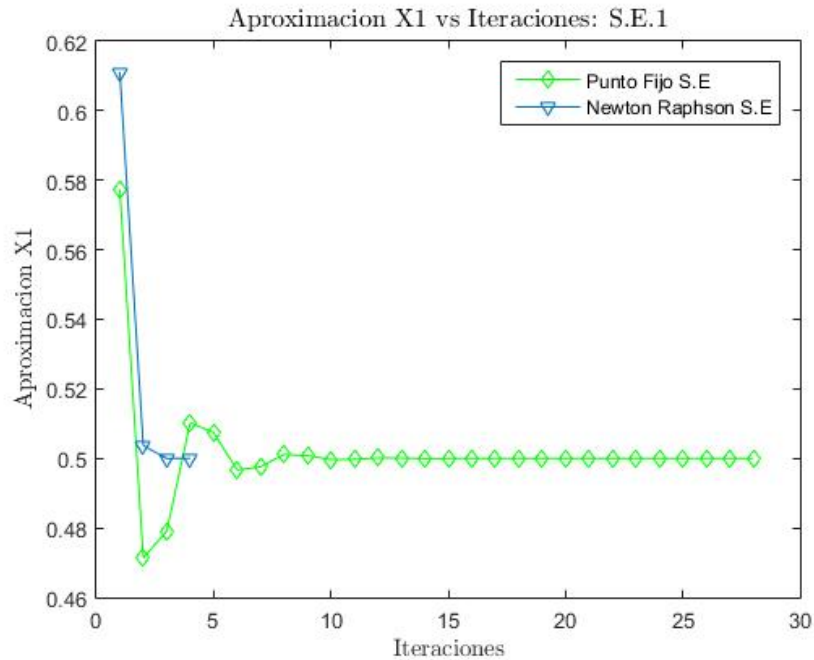


Figura 3-10: Aproximación X_1 vs Iteraciones: S.E.1.

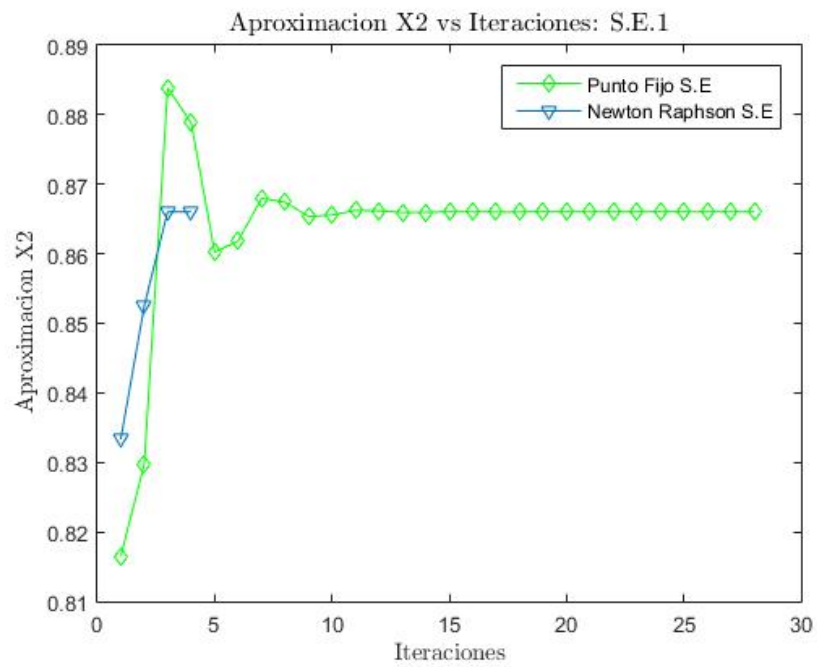


Figura 3-11: Aproximación X_2 vs Iteraciones: S.E.1.

3.2.1.8 Error

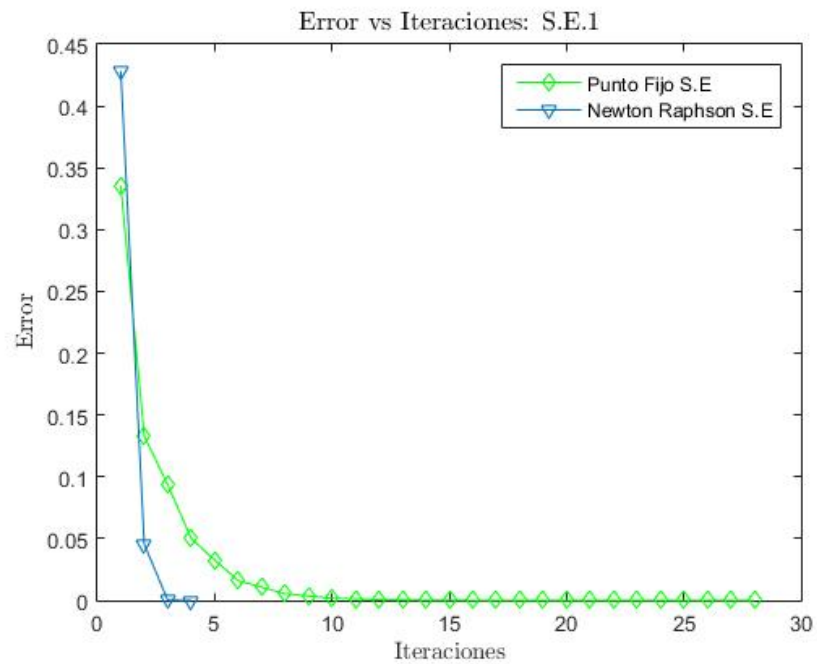


Figura 3-12: Error vs Iteraciones: S.E.1.

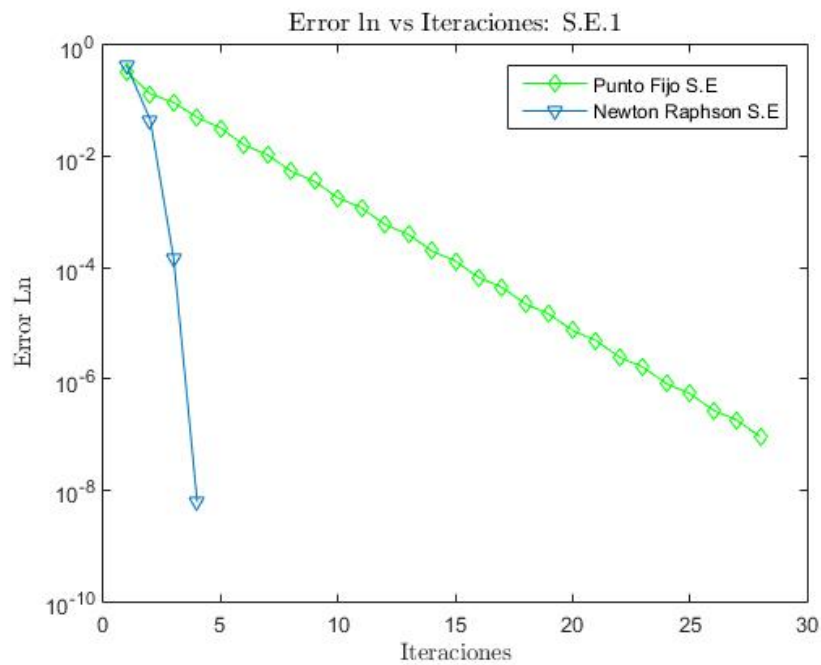


Figura 3-13: Error logarítmico vs Iteraciones: S.E.1.

Para saber a que aproximaciones llegó, número de iteraciones y el error final, se presenta la siguiente tabla:

Tabla 3.4: Aproximación final de las raíces y error del Sistema de Ecuaciones 1.

Mét.	It.	Aproximación X_1	Aproximación X_2	Error
PF	28	0,500000018960037	0,866025427499296	9,14294562428414e-08
NR	4	0,5000000000014920	0,866025401817003	6,14972251299779e-09

3.2.2 S.E.2

Para este sistema de ecuaciones, se tiene a $(0,0,0)^t$ como puntos iniciales, obteniéndose lo siguientes resultados:

3.2.2.9 Aproximaciones

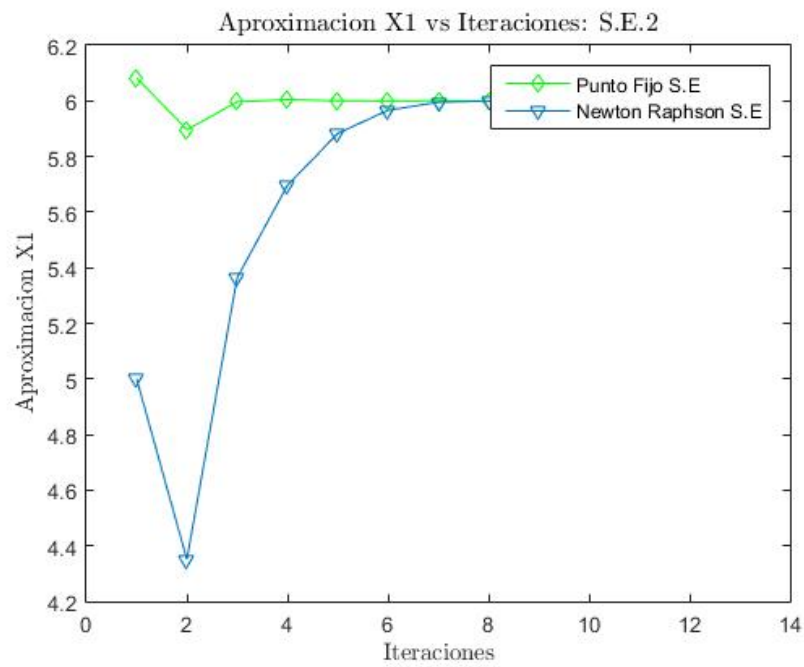


Figura 3-14: Aproximación X_1 vs Iteraciones: S.E.2.

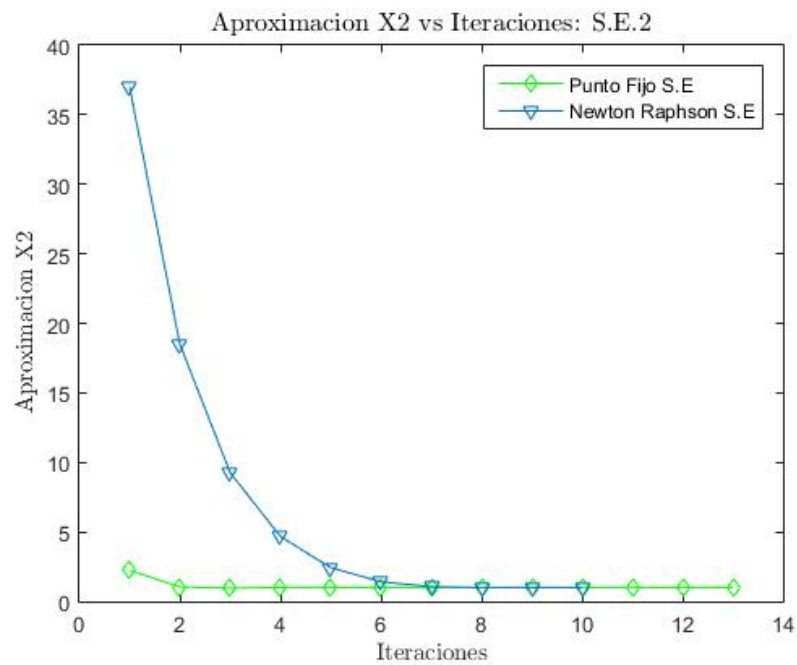


Figura 3-15: Aproximación X_2 vs Iteraciones: S.E.2.

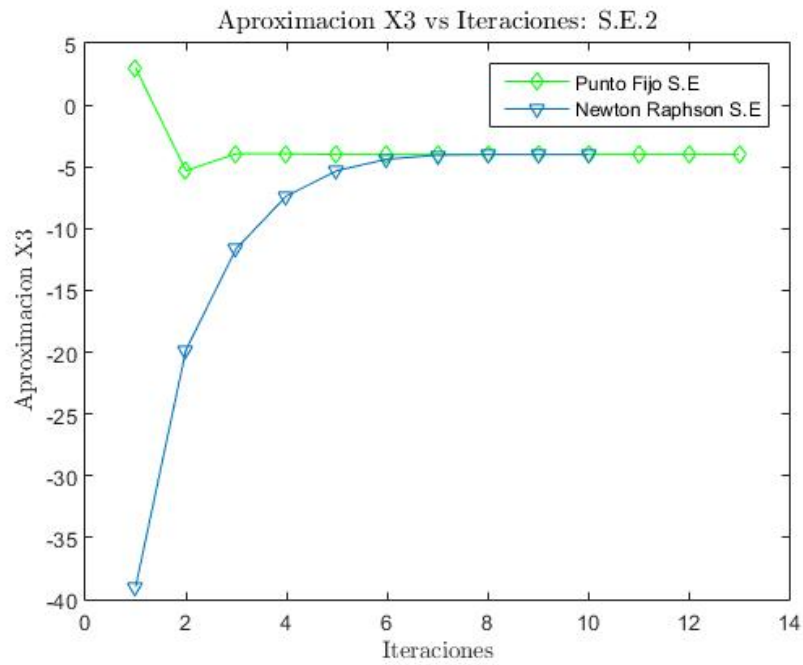


Figura 3-16: Aproximación X_3 vs Iteraciones: S.E.2.

3.2.2.10 Error

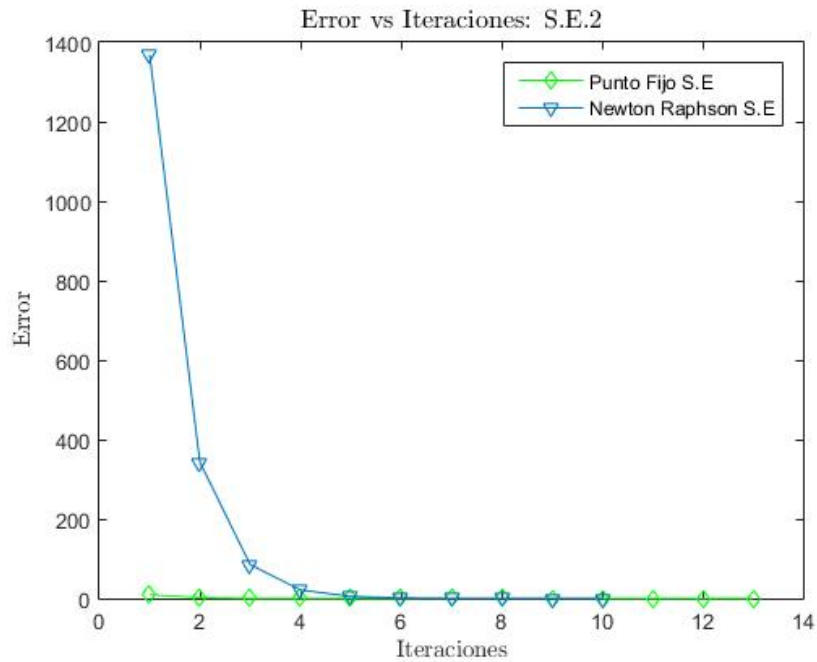


Figura 3-17: Error vs Iteraciones: S.E.2.

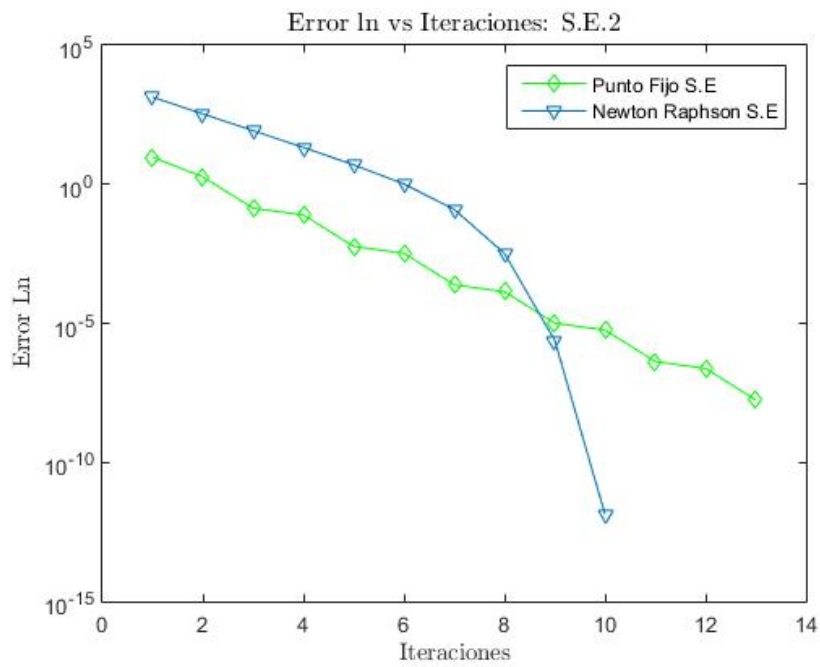


Figura 3-18: Error logarítmico vs Iteraciones: S.E.2.

Para saber a que aproximaciones llegó, número de iteraciones y el error final, se presenta la siguiente tabla:

Tabla 3.5: Aproximación final de las raíces y error del Sistema de Ecuaciones 2.

Mét.	It.	Aproximación X_1	Aproximación X_2	Aproximación X_3	Error
PF	13	6,00000000042493	1,000000000669396	-4,0000000008288756	1,75637438435779e-0
NR	10	5,99999999999995	1,000000000000065	-4,000000000000060	1,35987541512246e-1

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

4.1 ANÁLISIS PARA LAS FUNCIONES NO LINEALES

4.1.1 Análisis para la función F1

Recordando que $f1 = (1 - x)\ln(x)$: Esta función presenta ciertas dificultades para el cálculo de las raíces, ya que no todos los métodos implementados convergen a la solución. Siendo más específico, esta función no converge para el método de Bisección y de Regula Falsi, ya que cualquiera de los puntos que se seleccionen, en cuyo intervalo este la raíz de la función, estos no cumplen con el teorema de Bolzano, no cumpliendo así con los criterios que presentan estos métodos. Por lo tanto los métodos con los cuales se llegó a un resultado, fueron el de Newton Raphson, Punto Fijo y el de la Secante. Para el caso del método de Punto Fijo, con el $g(x)$ seleccionado, correspondiente a $g(x) = x^x$, se presenta que se necesita más de 9000 iteraciones para llegar a una aproximación que tenga un error menor a la tolerancia dada, por lo que se tuvo que imponer un límite a las iteraciones para poder tener una mejor representación en los gráficos generados. Este límite impuesto a las iteraciones de este método, se pueden apreciar claramente en los gráficos presentados, donde para el caso del gráfico con ajuste de error logarítmico, nunca se llega al error requerido. Da la impresión que para obtener una aproximación de la raíz de la función, se necesitan muchas iteraciones, caso que no ocurre con los resultados de las otras funciones analizadas. El método que converge de manera más rápida, es el de Newton Raphson con 33 iteraciones, seguido por el de la Secante, y culminando con el de Punto Fijo.

4.1.2 Análisis para la función F2

Recordando que $f2 = \cos(x) - \tan(x)$: Es importante señalar que en esta ocasión todos los métodos convergen a una solución a diferencia de lo presentado para la función anterior, es decir, que esta función con los puntos seleccionados que cumplen la regla de Fourier, cumplen así mismo con los criterios de los métodos implementados. Se observa que el método que converge más rápido es el método de Newton Raphson con 5 iteraciones, seguido por el método de la Secante con 7 iteraciones. La similitud de los resultados evidencia la semejanza que tienen ambos métodos, ya que uno proviene de otro. Se observa así también, que el método que converge más lentamente es el de la Bisección, el cual necesita de cerca de 34 iteraciones para lograr que la raíz tenga un error menor que la tolerancia dada. Observando el gráfico realizado con escala logarítmica para el error, se aprecia que los errores van disminuyendo a medida que van realizándose las iteraciones correspondientes. Para el caso de Newton Raphson se observa que presenta la aproximación con menos error, seguido por el de secante. Se evidencia así mismo, y era de esperarse que el método de la bisección es el que más demora en acercarse al error requerido en la aproximación.

4.1.3 Análisis para la función F3

Recordando que $f3 = x^3 - \ln(2x + 1)$: Así como sucede en la función anterior, en esta ocasión todos los métodos convergen a una solución, es decir, que esta función con los puntos seleccionados que cumplen la regla de Fourier, cumplen así mismo con los criterios de los métodos implementados. Se observa que el

método que converge más rápido es el método de Newton Raphson con 6 iteraciones, seguido por el método de la Secante con 9 iteraciones. Se observa así también, que el método que converge más lentamente es el de la Bisección, el cual necesita de cerca de 34 iteraciones para lograr que la raíz tenga un error menor que la tolerancia dada. Observando el gráfico realizado con escala logarítmica para el error, para el caso de Newton Raphson se observa que presenta la aproximación con menos error, seguido por el de secante. Se evidencia así mismo, y era de esperarse, que el método de la bisección es el que más demora en acercarse al error requerido en la aproximación.

4.2 ANÁLISIS PARA LOS SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

4.2.1 Análisis para el Sistema de Ecuaciones S.E.1

Recordando que S.E.1 es:

$$3x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$3x_1x_2 - x_1^3 = 0,$$

Para la aproximación de x_1 y de x_2 , el método de Newton Raphson converge de manera más rápida que el método de Punto Fijo, demostrando que así como para las funciones de ecuaciones no lineales, para los sistemas de ecuaciones se presentan resultados similares en cuanto a la rapidez de convergencia, evidenciando una gran diferencia entre estos dos métodos. Se presenta así mismo un problema para obtener el $g(x)$, lo que pudo ser determinante en la velocidad de convergencia obtenida. En el gráfico de error y en el gráfico realizado con escala logarítmica se aprecia la gran diferencia mencionada, el método de Newton Raphson se aproxima mucho más rápido al error requerido y en la gráfica de error presenta una forma cuadrática, tal como se esperaba. Para el método de Punto mFijo, se aprecia que su error va acercando poco a poco en cada iteración al error requerido.

4.2.2 Análisis para el Sistema de Ecuaciones S.E.2

Recordando que S.E.2 es:

$$x_1^2 + x_2 - 37 = 0$$

$$3x_1 - x_2^2 - 5 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$$

Para la aproximación de x_1 , de x_2 y de x_3 , así como para el sistema de ecuaciones anterior, el método de Newton Raphson converge de manera más rápida que el método de Punto Fijo, pero en esta ocasión, la diferencia no es mucha, ya que el primero necesita de 10 iteraciones, y este último precisa de 13 iteraciones para la aproximación con la tolerancia requerida. Claramente esto se debe al $g(x)$ calculado para la operación del método de Fijo. En el gráfico de error y en el gráfico realizado con escala logarítmica se aprecia esta idea planteada, donde no existe mucha diferencia entre la aproximación al error requerido según el número de iteraciones, de hecho, en gran parte de la convergencia al error, el método de Punto Fijo es mayor que el método de Newton Raphson.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Refiriéndose a los métodos utilizados para la resolución de ecuaciones no lineales, se tiene que:

El método de Bisección, tiene la ventaja de que siempre y cuando cumpla con el teorema de Bolzano, siempre converge. Pero presenta muchas desventajas, ya que no tiene en cuenta la magnitud de los valores de la función en las aproximaciones calculadas, solo tiene en cuenta el signo de $f(x)$, lo que hace que una aproximación intermedia, mejor que la respuesta final, pase desapercibida, además su convergencia es lenta.

El método de Newton Raphson es el método más eficiente para la resolución del problema de búsqueda de raíces. Entre sus principales desventajas son que presenta problemas cuando un punto de inflexión, $f''(x) = 0$, ocurre en la vecindad de una raíz, así también que no tiene un criterio general de convergencia, y además de que necesita la evaluación de la derivada.

El método de la Secante presenta ventajas en cuanto a que se puede aplicar cuando la función $f(x)$ es demasiado compleja como para obtener su derivada (que se usaría en el método de Newton-Raphson). Es decir: si $f(x)$ es tan compleja que es dispendioso obtener $f'(x)$, es mejor el uso de este método. Esto es válido principalmente en computación, donde los algoritmos de obtención de derivadas suelen ser básicamente de carácter numérico en vez de algebraico. A su vez, presenta la desventaja de que su velocidad de convergencia es menor que la del método de Newton- Raphson, y además dicha convergencia no se asegura si la primera aproximación a la raíz no es lo suficientemente cercana a ella, ni tampoco se asegura cuando la raíz es múltiple. Esto no quiere decir que no se pueda usar el método en esos casos, significa que al usarlo entramos en un riesgo de que este no converja y no se pueda hallar la raíz.

El método de Regula Falsi, presenta la ventaja al igual que el de bisección, que siempre converge con funciones continuas $f(x)$, siempre y cuando cumpla con el teorema de Bolzano. Aunque en general, converge más rápidamente que el método de la bisección, su velocidad de convergencia es baja.

El método de punto fijo es simple, pero presenta problemas en cuanto a que la convergencia depende de la magnitud de $g'(x)$, además de que necesita la construcción de funciones $g(x)$ para poder iterar, lo que conlleva cierta dificultad, ya que pueden existir diversas $g(x)$ y se necesita encontrar la adecuada.

Por lo tanto, ordenando los métodos según su eficiencia en base a los resultados obtenidos, se tiene la siguiente configuración:

1. Newton Raphson.
2. Secante.
3. Punto Fijo (Teniendo Cuidado con el $g(x)$ escogido).
4. Regula Falsi. Bisección.

En el caso de los métodos utilizados para la resolución de sistemas ecuaciones: El método de Newton Raphson y de Punto Fijo tienen las mismas características en cuanto a ventajas y desventajas de estos mismos

aplicados en la resolución de ecuaciones no lineales. En cuanto a eficiencia, el método de Newton Raphson sigue siendo superior al de Punto Fijo.

Lo más dificultoso en la realización de este laboratorio fue la estimación de los puntos a escoger para la obtención de las raíces. Así mismo, se tuvo obstáculos en la búsqueda del $g(x)$, para los cálculos del método de Punto Fijo tanto para ecuaciones como para sistemas de ecuaciones.. La implementación en Matlab de los métodos contribuyó en un mejor entendimiento de la aplicación de los métodos y los criterios asociados a estos. Por ultimo, se puede decir que se han cumplido todos los objetivos de la experiencia (analizar convergencia y error de los métodos utilizados sobre cuatro funciones). Uno de los retos que se dejan planteados es profundizar mas en las funcionalidades de Matlab y las posibles mejoras en la implementación de código que esto puede traer, ayudando a la realización de los próximos laboratorios de la asignatura

CAPÍTULO 6. BIBLIOGRAFÍA

Bock, R., Chilingarian, A., Gaug, M., Hakl, F., Hengstebeck, T., Jiřina, M., . . . Wittek, W. (2004). Methods for multidimensional event classification: a case study using images from a cherenkov gamma-ray telescope.

Univ. Complutense de Madrid. (2008, julio). Proyecto magic (detección de rayos gamma espaciales). <http://nuclear.fis.ucm.es/FERIA/DESCARGAS/MAGIC.pdf>.

http://personales.upv.es/dginesta/docencia/posgrado/practico_lineal.pdf