

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Departamento de Informática



MODELACIÓN Y SIMULACIÓN
LABORATORIO 3

DIEGO POLANCO
DANY RUBIANO

Profesor: Gonzalo Acuña
Ayudante: Robinson Oyarzún

Santiago – Chile

2017

TABLA DE CONTENIDO

Índice de tablas	v
Índice de ilustraciones	vii
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Motivación y antecedentes	1
1.2 Objetivos	1
1.3 Organización del documento	1
2 MARCO TEÓRICO	3
2.1 Sistemas Discretos	3
2.2 Teorema de Shannon	3
3 DESARROLLO: PRIMERA PARTE	5
3.1 Respuesta continua de $H(s)$ ante el escalón	5
3.2 Discretización de $H(s)$	7
3.3 Respuesta al escalón de $H(s)$, de discreta a continua	9
4 DESARROLLO: SEGUNDA PARTE	13
5 CONCLUSIONES	17
Bibliografía	19

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1	7
---------------------	---

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Figura 3.1	Respuesta continua al escalón de $H(s)$	6
Figura 3.2	Discretización de $H(s)$ con $T_s=0,08$ en Matlab	8
Figura 3.3	Discretización de $H(s)$ con $T_s=0,8$ en MatLab	9
Figura 3.4	Respuesta al escalón de $H(s)$ con $T_s = 0,08$, de discreta a continua en Matlab	10
Figura 4.1	Diagrama de Discretización en Simulink	13
Figura 4.2	Discretización de $H(s)$ con $T_s = 0,25$ en Simulink	13
Figura 4.3	Discretización de $H(s)$ con $T_s = 0,08$ en Simulink	14
Figura 4.4	Diagrama de Paso de Discreto a Continuo en Simulink	14
Figura 4.5	Respuesta al escalón de $H(s)$ con $T_s = 0,25$, de discreta a continua en Simulink	15
Figura 4.6	Respuesta al escalón de $H(s)$ con $T_s = 0,08$, de discreta a continua en Simulink	15

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 MOTIVACIÓN Y ANTECEDENTES

Se tiene como un sistema continuo a aquel que opera con señales analógicas y presenta continuidad tanto en magnitud como en tiempo. Esto difiere con un sistema discreto, el cual tienen como principal característica el operar con señales que presentan discontinuidad. Para poder comunicar ambos sistemas se presenta la discretización, proceso que permite transformar la continuidad de una señal a un tiempo discreto; junto con el proceso inverso, el cual posibilita pasar una señal discreta a continua.

En el siguiente informe se plantea el desarrollo de un sistema, para el cual se busca encontrar su respuesta ante un escalón de manera continua, para luego realizar un proceso de discretización y posteriormente llevar a cabo el paso de discreto a continuo.

1.2 OBJETIVOS

El presente documento tiene como objetivo principal exponer al lector distintas representaciones de la respuesta de un sistema, bajo el concepto de los espacios continuos y discretos, mediante el uso de MatLab y Simulink, con el fin de analizar el porqué de los resultados y sus diferencias.

1.3 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

La estructura del presente informe está constituida en primera parte por un marco teórico, en el cual se expone el sustento base del laboratorio y presenta temas sobre el Teorema de Shannon y los sistemas discretos. Posteriormente se realiza la explicación de los procesos descritos anteriormente, distribuyendo los resultados según la herramienta utilizada, con lo que

en la primera parte refleja lo desarrollado con MatLab, y la segunda parte lo desarrollado a través de Simulink. Por último se presentan las conclusiones finales de la experiencia, en conjunto con las referencias teóricas extraídas desde fuentes de información externas.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En el siguiente capítulo se explicarán los conceptos básicos y fundamentales para la correcta realización de éste laboratorio.

2.1 SISTEMAS DISCRETOS

Son sistemas cuyas cantidades toman un número finito de diferentes valores discretos y que son conocidos sólo en instantes discretos de tiempo.

Estos sistemas trabajan con datos muestreados, generalmente son manejados por medio de un computador, permitiendo manejar ecuaciones recursivas del tipo $y_t = ay_{t-h} + bu_{t-h}$, donde a,b,h son constantes, u(t) es el estímulo y y(t) es la respuesta (Departamento de Electrónica UTFSM (2015)).

2.2 TEOREMA DE SHANNON

Este teorema es conocido también como criterio de Nyquist o teorema de muestreo Nyquist-Shannon, el cual fue formulado en 1928 por Harry Nyquist y luego probado por Claude Shannon en el año 1949.

Este teorema indica que una señal del tipo analógica puede ser reconstruida sin error, siempre y cuando las muestras tomadas en iguales intervalos de tiempo son bajo una razón de muestreo igual o superior, al doble del ancho de banda de la señal analógica.

Se define que para una señal de ancho de banda limitado, la frecuencia de muestreo $[f_s]$, debe ser mayor que dos veces su ancho de banda o frecuencia máxima $[f_{max}]$ medida en Hertz $[Hz]$, es decir, $f_s > 2f_{max}$ (Ruiz (2015)).

CAPÍTULO 3. DESARROLLO: PRIMERA PARTE

Para empezar, es necesario pasar al dominio de la frecuencia el sistema dado en el dominio del tiempo; para esto, se utiliza la transformada de Laplace.

$$34\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 25y(t) - 5\frac{du}{dt} - 18u(t) = 0 \quad (3.1)$$

con $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ y $u(0) = 0$

Aplicando Laplace:

$$\mathcal{L}\left[34\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 25y(t) - 5\frac{du}{dt} - 18u(t) = 0\right] \quad (3.2)$$

$$34[s^2Y(s) - sY(0) - \dot{Y}(0)] - 6[sY(s) - Y(0)] + 25Y(s) - 5[sU(s) - U(0)] - 18U(s) = 0 \quad (3.3)$$

Reemplazando los términos según las condiciones iniciales:

$$34s^2Y(s) - 6sY(s) + 25Y(s) - 5sU(s) - 18U(s) = 0 \quad (3.4)$$

Factorizando y reduciendo términos:

$$Y(s) = \frac{5s + 18}{34s^2 - 6s + 25}U(s) \quad (3.5)$$

Luego, la función de transferencia esta dada por:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5s + 18}{34s^2 - 6s + 25} \quad (3.6)$$

3.1 RESPUESTA CONTINUA DE H(S) ANTE EL ESCALÓN

Una vez obtenida la función de transferencia, se procede a encontrar la respuesta continua ante la entrada de un escalón, para lo cual, se utiliza el comando *step*, el cual calcula

y grafica la respuesta ante un escalón de un sistema dinámico. Los parámetros del comando representan la función de transferencia ilustrada en vectores de los índices de las expresiones del numerador y denominador que dan lugar a dicha función. Luego, se utilizan otros comandos que permiten agregar el título y nombres de los ejes al gráfico correspondiente.

A continuación se refleja el código que detalla el proceso anteriormente descrito.

```
1 %Representacion del numerador y denominador a discretizar
2 numc = [5 18];
3 denc = [34 -6 25];
4
5 figure; %permite crear una nueva ventana para cada grafico
6 step(numc,denc); %Grafico de la respuesta al escalon
7 grid on;
8 title('Respuesta continua al escalon de H(s)');
9 xlabel('Tiempo');
10 ylabel('Amplitud');
```

Con lo que se obtiene la siguiente figura.

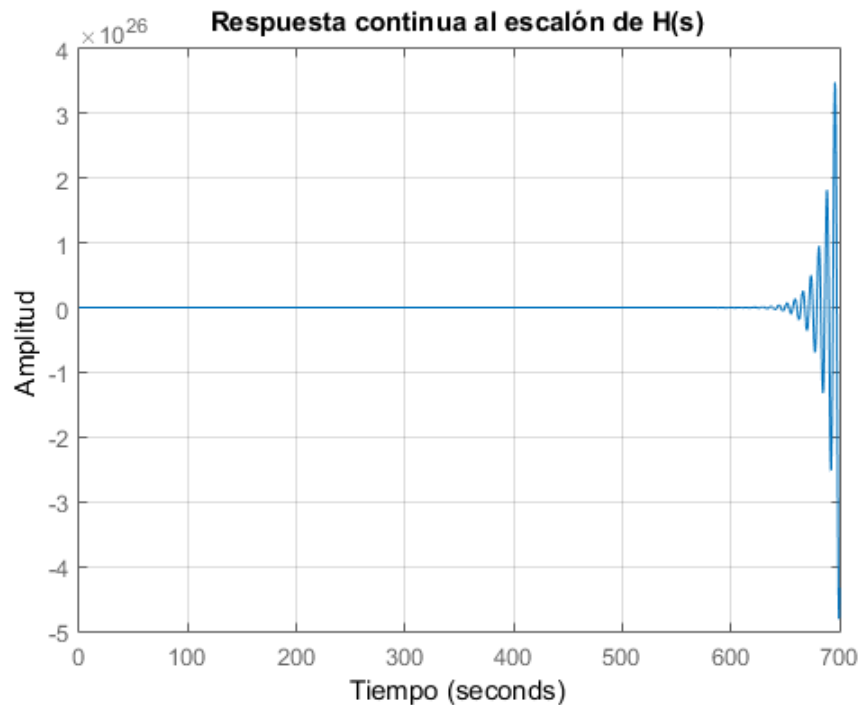


Figura 3.1: Respuesta continua al escalón de H(s)

En un análisis de la respuesta entregada ante un escalón por la función de

transferencia $H(s)$, en la siguiente tabla se encuentran distintos parámetros de evaluación que permiten caracterizar el sistema.

Tabla 3.1

	$H(s) = \frac{5s+18}{34s^2-6s+25}$
Ceros	$-\frac{18}{5}$
Polos	$\left\{ \frac{3+29i}{34}, \frac{3-29i}{34} \right\}$
Estabilidad	No

A partir de la expresión 3.6 que determina la función y de los parámetros ilustrados en la tabla 3.1, se puede afirmar que el sistema es estrictamente propio, dado que el grado del polinomio denominador es mayor que el grado del polinomio numerador. En cuanto a la estabilidad del sistema, el sistema es inestable según el criterio de Routh-Hurwitz, ya que hay un cambio de signo en los índices de la expresión del denominador. Por último, en función de la inestabilidad del sistema y de la presencia de polos complejos conjugados, en conjunto con la observación de su respuesta expuesta en la figura 3.1, se puede sostener que las oscilaciones continuarán indefinidamente.

3.2 DISCRETIZACIÓN DE H(S)

En la sección anterior se pudo obtener una representación continua de la respuesta de $H(s)$ ante un escalón, en esta oportunidad se procede a discretizar la función de transferencia con diferentes tiempos de muestreo.

En primer lugar, se utiliza un tiempo de muestreo requerido igual a 0,08. El proceso que dió lugar a la discretización propuesta fue a través del uso del comando *c2dm*, el cual transforma un modelo continuo a discreto, junto con el uso de parámetros como *'zoh'*, el cual es un método de discretización que supone que las entradas de control son constantes por partes durante el tiempo de muestreo especificado, y por supuesto, del sistema a trabajar.

Finalmente para la representación de la respuesta discretizada, se emplea el comando *dstep*, para obtener un cierto número de puntos de muestra, que en este caso es 200, y luego se utiliza el comando *stairs*, el cual dibuja un gráfico escalonado de los elementos del sistema, según los

puntos dados.

Dicho procedimiento se detalla en lo que sigue.

```
1 %Aplicacion del comando de discretizacion c2dm
2 [numd1, dend1] = c2dm(numc, denc, 0.08, 'zoh');
3
4 %Construccion de los puntos
5 [y1] = dstep(numd1, dend1, 200+1);
6 x1 = 0:0.08:0.08*200;
7
8 figure;
9 stairs(x1,y1); %grafico escalonado de los elementos del sistema
10 grid;
11 title('Discretizacion de respuesta al escalon de H(s) con t=0,05');
12 xlabel('Tiempo');
13 ylabel('Amplitud');
```

Con lo cual se genera la figura a continuación.



Figura 3.2: Discretización de $H(s)$ con $T_s=0,08$ en Matlab

El subsecuente tiempo de muestreo utilizado corresponde a un valor de 0,8, el cual

es 10 veces mayor al tiempo precedente. En esta ocasión, se realiza el mismo proceso descrito anteriormente, y su representación se refleja en la siguiente figura.

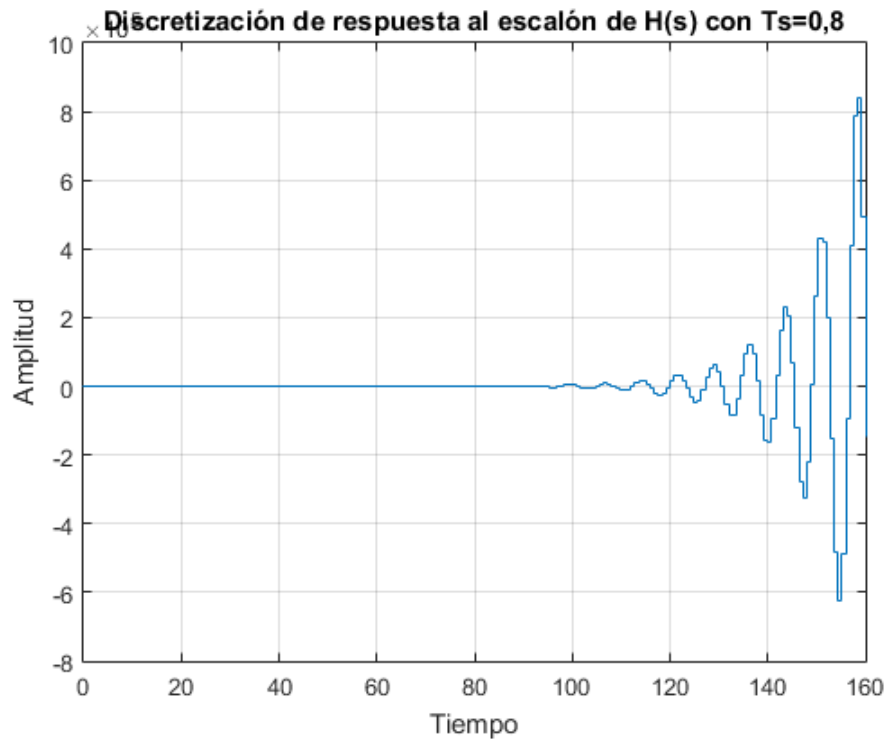


Figura 3.3: Discretización de $H(s)$ con $T_s=0,8$ en MatLab

Al realizar una comparación entre las figuras 3.2 y 3.3, se puede observar que mientras mayor es el tiempo de muestreo utilizado, menor es la información que se obtiene mediante la discretización, lo cual puede inducir a errores.

3.3 RESPUESTA AL ESCALÓN DE $H(S)$, DE DISCRETA A CONTINUA

Dada la discretización del sistema realizada en la sección anterior, ahora es el paso para realizar el proceso inverso, para lo cual se hace el paso de discreto a continuo.

El procedimiento es realizado a través del uso del comando `d2cm`, el cual transforma un modelo discreto a continuo, unido a la utilización de parámetros como `'foh'`, que es un método de interpolación lineal de las entradas que supone que las entradas de control son lineales por partes durante el período de muestreo, de manera de lograr la continuidad propuesta. Cabe

señalar que debido a que en esta ocasión se utiliza un periodo de muestreo de 0,08, se emplea como entrada el sistema discretizado con el mismo tiempo de muestreo, de manera de obtener resultados coherentes.

En lo que sigue, se emplea el comando *step*, para la representación de la respuesta esta vez continua, tal como se utilizó en secciones anteriores.

El código del proceso se muestra a continuación.

```
1 %d2cm de funcion discreta a espacio continuo
2 [numdc, dendc] = d2cm(numd2, dend2, 0.08, 'foh');
3
4 figure;
5 step(numdc, dendc);
6 grid;
7 title('Respuesta al escalon de H(s), de discreta a continua');
8 xlabel('Tiempo');
9 ylabel('Amplitud');
```

Con lo que se obtiene la siguiente figura.



Figura 3.4: Respuesta al escalón de $H(s)$ con $T_s = 0,08$, de discreta a continua en Matlab

A partir de la comparación de la figura anterior con la figura 3.1, se puede observar que los resultados obtenidos no tienen diferencia alguna, sustentado en la base de que para este proceso se utilizó el mismo tiempo de muestreo para discretizar el sistema y luego para hacer el proceso inverso. Por lo tanto, se podría inferir que el tiempo de muestreo utilizado cumple con el teorema de Shannon, que aplicado en términos de periodo, debe cumplir con que $T_s < \frac{T_{max}}{2}$.

CAPÍTULO 4. DESARROLLO: SEGUNDA PARTE

La segunda etapa de este informe fue realizada mediante la herramienta Simulink, la cual permitió realizar las conversiones entre sistemas continuos y sistemas discretos, para analizar si es que se pierde o no información luego de realizar las conversiones.

En primera instancia se diagramó el sistema indicado en el enunciado mediante Simulink. La función de transferencia utilizada fue: $H(s) = \frac{5s+18}{34s^2-6s+25}$

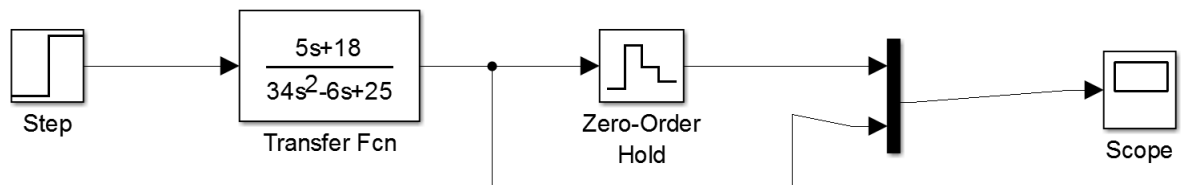


Figura 4.1: Diagrama de Discretización en Simulink

Se ingresó un tiempo de muestreo de 0.25 al bloqueador de orden cero o ZOH (Zero-Order Hold) para discretizar la función, lo que arrojó el siguiente gráfico.

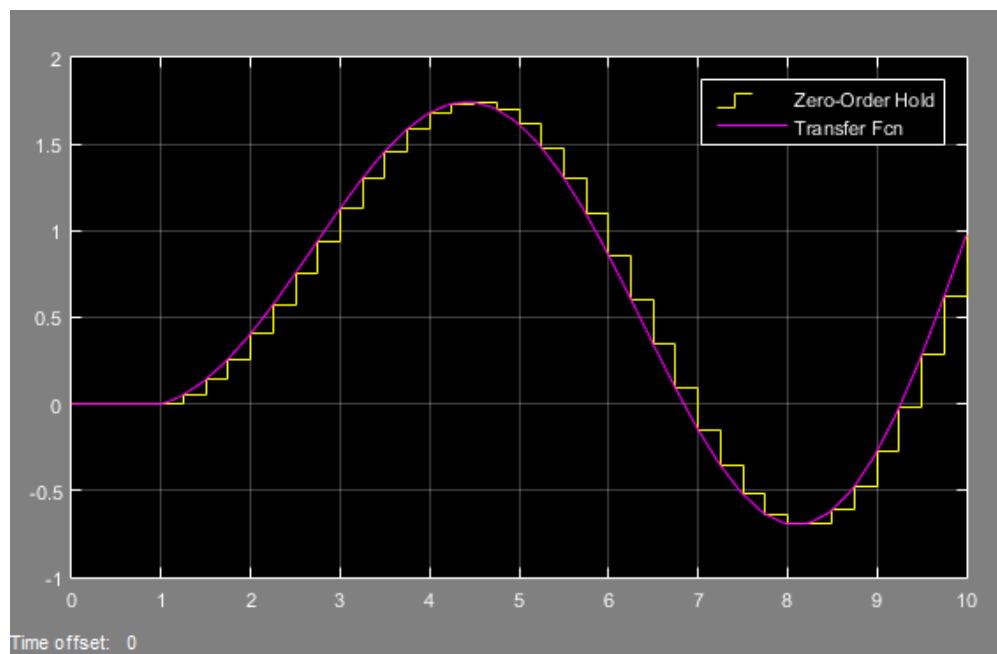


Figura 4.2: Discretización de $H(s)$ con $T_s = 0,25$ en Simulink

Luego se realizó el mismo proceso, cambiando el tiempo de muestreo a 0.08.

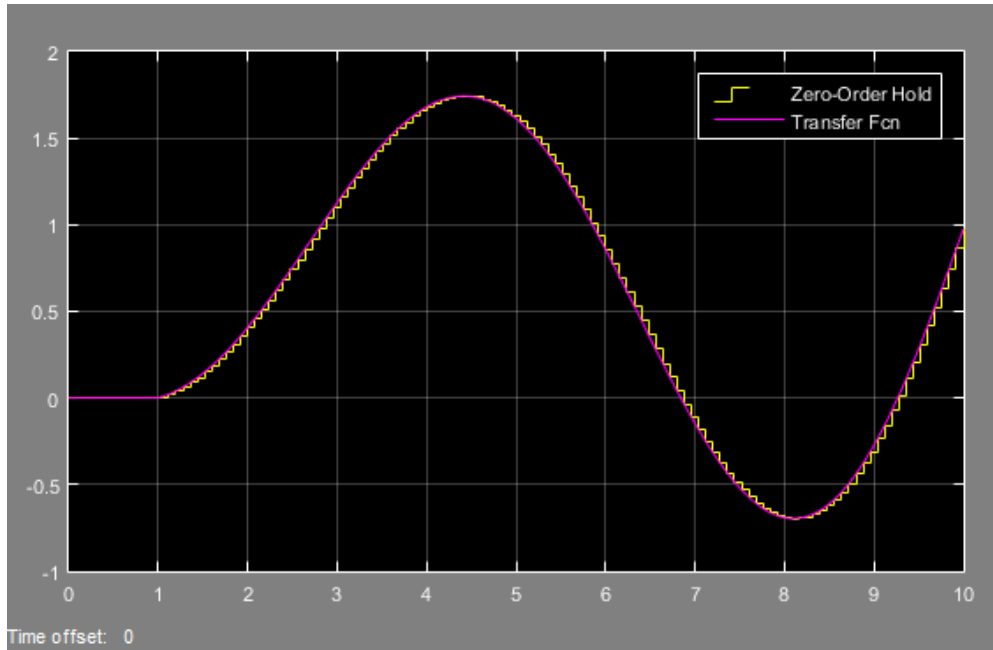


Figura 4.3: Discretización de $H(s)$ con $T_s = 0,08$ en Simulink

Obteniendo la función discretizada en dos tiempos de muestreo distintos, se debe volver a llevar a un sistema continuo para realizar el análisis estipulado anteriormente. Es por esto que se debe adherir el bloqueador de primer orden o FOH (First-Order Hold) al diagrama realizado anteriormente (Ver Figura 4-1).

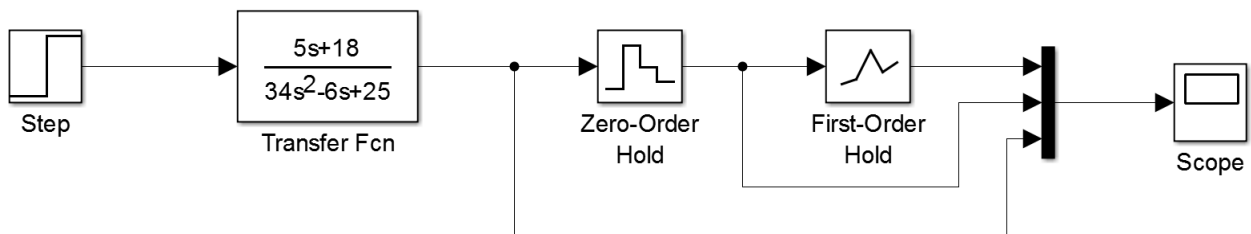


Figura 4.4: Diagrama de Paso de Discreto a Continuo en Simulink

Se ingreso un tiempo de muestreo de 0.25 al igual que la vez anterior para mantener la coherencia de esta experiencia.

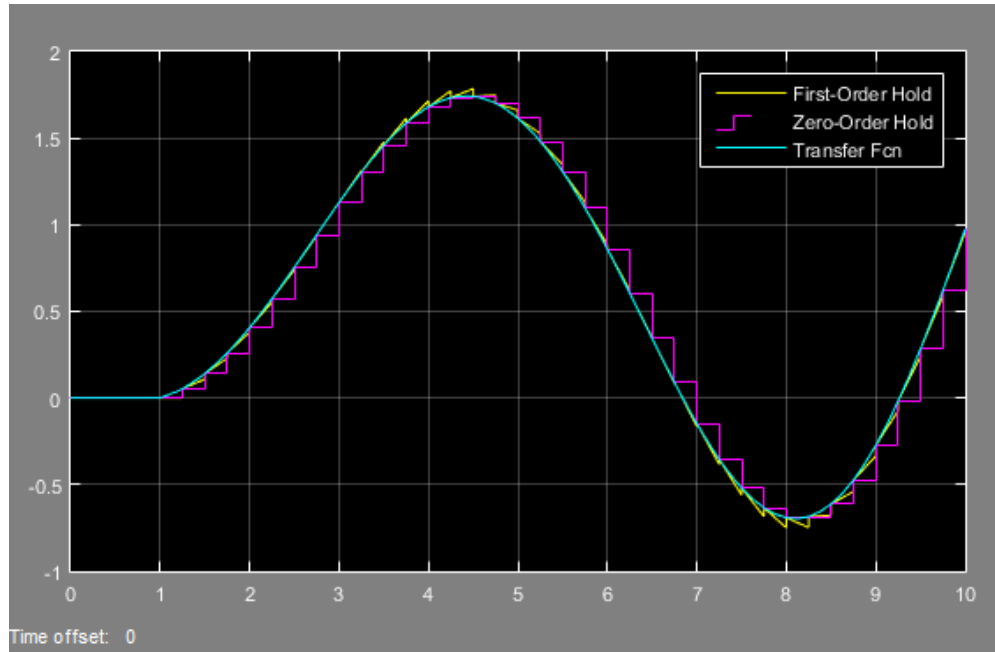


Figura 4.5: Respuesta al escalón de $H(s)$ con $T_s = 0,25$, de discreta a continua en Simulink

Finalmente se varió el tiempo de muestreo a 0.08, como lo muestra la siguiente Figura.

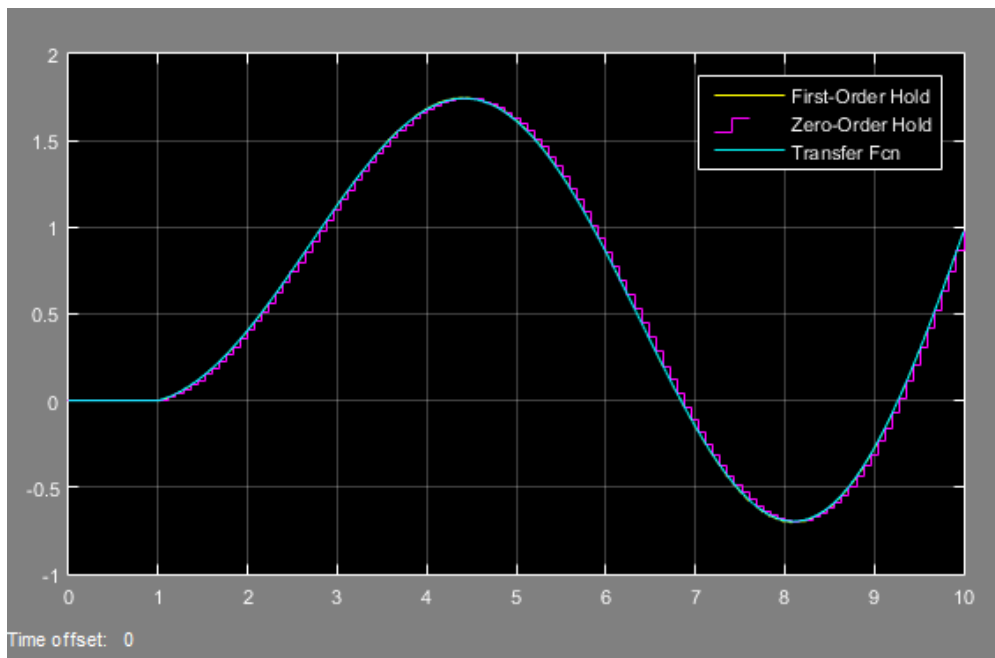


Figura 4.6: Respuesta al escalón de $H(s)$ con $T_s = 0,08$, de discreta a continua en Simulink

Luego de realizar la conversión de sistema continuo a discreto y viceversa, se puede

apreciar en las gráficas que la pérdida de información no es contundente, ya que existe relación o parecido entre las figuras iniciales y finales. Es por esto que se confirma el criterio de Nyquist, ya que los tiempos de muestreos son iguales o superiores al doble del ancho de banda de la señal analógica.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Al culminar el presente trabajo, se puede afirmar que se logró cumplir con los objetivos inicialmente planteados. Esto es que bajo el concepto de los espacios continuos y discretos, mediante el uso de MatLab y Simulink, se pudo desarrollar las distintas representaciones requeridas, analizando el porqué de los distintos resultados.

A partir de las representaciones a distintas tasas de muestreo, se verificó que si se utiliza una frecuencia menor a la establecida por el teorema de Shannon, o tal como se mencionó en capítulos anteriores, aplicado en términos de periodo, si se utiliza un tiempo de muestreo mayor al establecido por dicho teorema, se produce una distorsión conocida como aliasing o solapamiento, lo cual impide recuperar correctamente la señal y genera que la función recuperada presente pendientes muy abruptas. Y a pesar de que con los tiempos de muestreo escogidos no se tuvieron mayores problemas con el teorema de Shannon, si se pudo apreciar que a mayor tiempo de muestreo, en la reconstrucción continua de la señal se presentan pendientes algo abruptas, lo que puede resultar en pérdida de información. Sin embargo, a pesar de que a menores tiempos de muestreo, la representación final es muy similar a la versión original, la reconstrucción no es mejor ni peor que a un mayor tiempo de muestreo, ya que desde el punto de vista matemático, siempre que se cumpla con el teorema de Shannon, no aporta nada disminuir el tiempo de muestreo, la reconstrucción es similar.

Finalmente se concluye que este laboratorio ha servido para ahondar los conocimientos obtenidos en el laboratorio anterior en lo que respecta al tratamiento de señales continuas en el tiempo, además de otorgar mayor comprensión en el tratamiento de señales discretas y los procesos de discretización y paso de discreto a continua, lo que servirá de base para ahondar mayormente en la materia y entender fenómenos de mayor complejidad.

BIBLIOGRAFÍA

Departamento de Electrónica UTFSM (2015). *SISTEMAS DISCRETOS*. Recuperado desde:
http://www2.elo.utfsm.cl/elo104/informacion/resumenes/9_Transformada%20Zeta.pdf.

Ruiz, V. G. (2015). *Muestreo de señales*. Recuperado desde: <http://www.ual.es/vruiz/Docencia/Apuntes/Signals/Sampling/index.html>.