UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Informática

MODELACIÓN Y SIMULACIÓN

LABORATORIO 4

DIEGO POLANCO

DANY RUBIANO

Profesor: Gonzalo Acuña

Ayudante: Robinson Oyarzún

Santiago – Chile

2017

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 MOTIVACIÓN Y ANTECEDENTES

Un sistema puede tener varias entradas y salidas relacionadas entre sí, de forma compleja en algunos casos. Para analizar un sistema con estas características, se requiere reducir la complejidad de las expresiones matemáticas, y el método de los modelos de estado ofrece una buena representación para el análisis de estos sistemas. Mediante los modelos de estados se obtiene una representación de las ecuaciones del sistema en términos de n-ésimas ecuaciones diferenciales de primer orden, que se pueden combinar en una ecuación diferencial matricial. El uso de la notación matricial simplifica mucho la representación matemática de sistemas de ecuaciones. El aumento en la cantidad de variables de estado, de entradas o salidas, no incrementa la complejidad de las ecuaciones. De hecho es posible proseguir el análisis de sistemas complicados, con entradas y salidas múltiples, con procedimientos ligeramente más complicados que los requeridos por el análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales escalares de primer orden.

1.2 OBJETIVOS

El presente documento tiene como objetivo principal exponer al lector el resultado y análisis de distintas actividades prácticas que demuestran el uso de los modelos de estado.

1.3 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

La estructura del presente informe está constituida en primera parte por un marco teórico, en el cual se expone el sustento base del laboratorio y presenta temas sobre los modelos de estado. A continuación, se presenta el desarrollo de las actividades practicas, en las que para la primera parte se contempla la transición entre una función de transferencia a un modelo de estado y viceversa, y en lo que respecta a la segunda parte, se desarrolla un problema general cuya solución se presenta mediante este tipo de modelos. Por último se presentan las conclusiones finales de la experiencia, en conjunto con las referencias teóricas extraídas desde fuentes de información externas.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 MODELOS DE ESTADO

Una representación de modelos de estados es un modelo matemático de un sistema físico descrito mediante un conjunto de entradas, salidas y variables de estado relacionadas por ecuaciones diferenciales de primer orden que se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden. Para prescindir del número de entradas, salidas y estados, las variables son expresadas como vectores y las ecuaciones algebraicas se escriben en forma matricial. La representación mediante modelos de estado provee un modo compacto y conveniente de modelar y analizar sistemas con múltiples entradas y salidas. Con p entradas y q salidas, tendríamos que escribir qxp veces la transformada de Laplace para procesar toda la información del sistema. A diferencia de la aproximación en el dominio de la frecuencia, el uso de la representación de modelos de estado no está limitada a sistemas con componentes lineales ni con condiciones iniciales iguales a cero. El espacio de estado se refiere al espacio de n dimensiones cuyos ejes coordenados están formados por variables de estados. El estado del sistema puede ser representado como un vector dentro de ese espacio. [Wikipedia (2017)].

2.2 VARIABLES DE ESTADO

Las variables de estado son el subconjunto más pequeño de variables de un sistema que pueden representar su estado dinámico completo en un determinado instante. Estas variables de estado deben ser linealmente independientes; una variable de estado no puede ser una combinación lineal de otras variables de estado. El número mínimo de variables de estado necesarias para representar un sistema dado, n, es normalmente igual al orden de la ecuación diferencial que define al sistema. Si el sistema es representado en forma de función de transferencia, el número mínimo de variables de estado es igual al orden del denominador de la función transferencia después de haber sido reducido a una fracción propia. Cabe destacar que al convertir una representación de espacio de estado a la forma de función de transferencia puede perderse información interna sobre el sistema, pudiendo por ejemplo describir un sistema como estable aun cuando la representación de espacio de estado indica que es inestable en ciertos puntos [Wikipedia (2017)].

CAPÍTULO 3. DESARROLLO: PRIMERA PARTE

3.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA A MODELO DE ESTADO

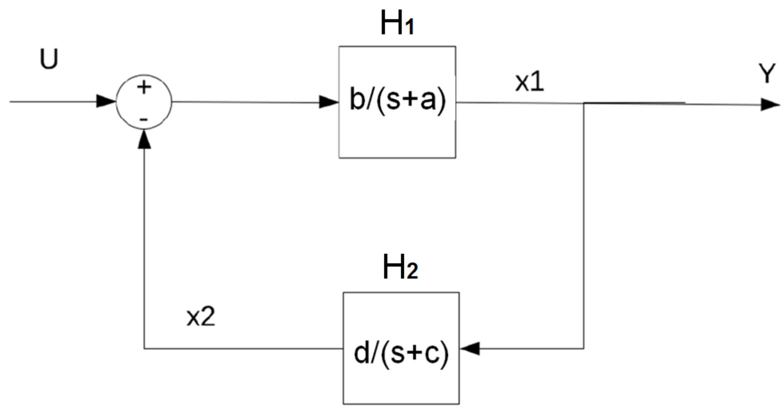

Figura 3.1: Diagrama de Bloques General

Considerando el diagrama de bloque presentado en la figura 3.1, en el cual sus funciones de transferencia H_1 y H_2 son estrictamente propias y cuyo denominador es siempre de primer orden, se enuncia a continuación la solución para su conversión a un modelo de estado.

Del álgebra de sistemas se desprende que:

$$\begin{aligned} x_1 &= H_1(u - x_2) \\ x_2 &= x_1 H_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b}{s+a}(u - x_2) \\ x_2 &= x_1\left(\frac{d}{s+c}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

De ello se obtiene que:

$$\begin{aligned} sx_1 &= -ax_1 - bx_2 + bu \\ sx_2 &= dx_1 - cx_2 + 0u \end{aligned} \tag{3.3}$$

Volviendo al tiempo:

$$\begin{gathered}\dot{x_1} = -ax_1 - bx_2 + bu \\ \dot{x_2} = dx_1 - cx_2 + 0u\end{gathered} \tag{3.4}$$

Se tiene en cuenta siempre que el modelo de estado se expresa como:

$$\begin{gathered}X = AX + BU \\ Y = CX + DU\end{gathered} \tag{3.5}$$

Se identifica A, B, C, D como:

$$\begin{gathered}A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ d & -c \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0\end{gathered} \tag{3.6}$$

Por lo tanto el modelo de estado en este caso se expresa como:

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ d & -c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \cdot U \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot U\end{gathered} \tag{3.7}$$

Entonces, en base a la construcción del modelo de estado para el caso particular del diagrama de bloques presentado, se desarrolla un programa en MatLab el cual entrega las variables del modelo de estado correspondiente según las funciones de transferencia que contemple cierto diagrama de bloques como el de la figura 3.1.

```
function [A,B,C,D] = H_to_ME(H1,H2)
    A = [-H1(2,2),-H1(1,2);H2(1,2),-H2(2,2)];
    B = [H1(1,2);0];
    C = [1 0];
    D = 0;
end
```

Los parámetros de entrada corresponden a matrices de tamaño $2x2$, donde la primera fila corresponde a los índices del polinomio numerador, mientras que la segunda fila contempla los índices del polinomio denominador.

De forma general según los polinomios contemplados, $\frac{b_1 \cdot s^1 + b_0 \cdot s^0}{a_1 \cdot s^1 + a_0 \cdot s^0}$ se representa matricialmente en MatLab como $[b_1, b_0; a_1, a_0]$, donde los corchetes "[" "]" engloban la matriz, la coma "," separa los índices de una fila, y el punto y coma ";" representa el salto hacia otra fila.

Un ejemplo específico para la ejecución del programa puede ser a través del siguiente diagrama de bloques.

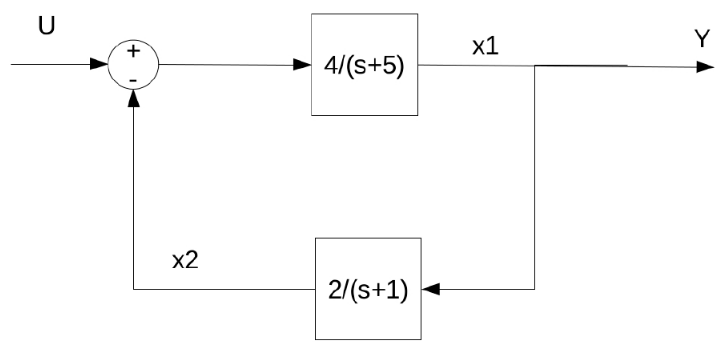

Figura 3.2: Diagrama de Bloques de Ejemplo

Donde $H_1 = \frac{4}{s+5}$ y $H_2 = \frac{2}{s+1}$

Matricialmente los parámetros serían $H_1 = [\ 0,\ 4;\ 1,\ 5\ ]$ y $H_2 = [\ 0,\ 2;\ 1,\ 1\ ]$

Por lo que el programa se ejecutaría de la siguiente manera:

$$function\ [A, B, C, D] = H\_to\_ME([0, 4; 1, 5], [0, 2; 1, 1])$$

Dados los parámetros ingresados, el resultado corresponde a:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Finalmente el modelo de estado correspondiente esta dado por:

Por lo tanto el modelo matricial en este caso se expresa como:

$$\begin{gathered}
\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot U \\
y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot U
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Cabe destacar que el programa desarrollado solo contempla dos funciones de transferencia de un diagrama de bloques como el de la figura 3.1, y estas deben ser estrictamente propias y siempre con un denominador de primer orden.

3.2 MODELO DE ESTADO A FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

A partir del modelo de estado específico encontrado en la sección anterior, se pretende encontrar la función de transferencia que describe dicho modelo.

Se parte de la base de que las estructuras y tamaño de las matrices que dan lugar a las variables del modelo de estado, conservan siempre la misma dimensión. Su estructura se detalla a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} g & h \end{bmatrix} \quad D = 0 \tag{3.9}$$

Teniendo en cuenta que el modelo de estado se expresa como:

$$X = AX + BU$$
$$Y = CX + DU \tag{3.10}$$

La función de transferencia esta determinada por:

$$H = \frac{Y}{U} = C(SI - A)^{-1}B + D \tag{3.11}$$

Donde SI corresponde a la siguiente matriz cuyo tamaño es determinada por el tamaño de la matriz A, en este caso de $2x2$.

$$SI = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Por lo que en este caso,

$$H = \begin{bmatrix} g & h \end{bmatrix} \cdot (\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} + 0 \tag{3.13}$$

Si se representa cada uno de los s de la matriz SI como $[1\ 0]$, una expresión de sus índices, se obtiene que:

$$SI - A = \begin{bmatrix} [1\ 0] & 0 \\ 0 & [1\ 0] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \quad -a] & -b \\ -c & [1 \quad -d] \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Dada la representación realizada, una multiplicación de una expresión de los índices de los polinomios con otra, sigue que $[a\ b] \cdot [c\ d] = [ac \quad ad + bc \quad bd]$, de la misma forma que $(as+b)(cs+d) = acs^2 + (ad+bc)s + bd$. Esto es de utilidad para calcular el determinante al realiza la inversa de la matriz $SI - A$, por lo que:

$$\begin{aligned} (SI - A)^{-1} &= (\begin{bmatrix} [1 \quad -a] & -b \\ -c & [1 \quad -d] \end{bmatrix})^{-1} \\ &= \frac{1}{[1 \quad -a] \cdot [1 \quad -d] - bc} \cdot \begin{bmatrix} [1 \quad -d] & b \\ c & [1 \quad -a] \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{[1 \quad -a-d \quad ad] - bc} \cdot \begin{bmatrix} [1 \quad -d] & b \\ c & [1 \quad -a] \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.15}$$

De la misma forma que a la siguiente expresión $as + b$ se le puede sumar un valor c y quedaría $as + (b + c)$, en la representación utilizada sería que $[a\ b] + c = [a \quad b + c]$, entonces:

$$(SI - A)^{-1} = \frac{1}{[1 \quad -a-d \quad ad-bc]} \cdot \begin{bmatrix} [1 \quad -d] & b \\ c & [1 \quad -a] \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Luego siguiendo con el calculo de H, se introduce la matriz C.

$$\begin{aligned} C(SI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} g & h \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{[1 \quad -a-d \quad ad-bc]} \cdot \begin{bmatrix} [1 \quad -d] & b \\ c & [1 \quad -a] \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{[1 \quad -a-d \quad ad-bc]} \cdot \begin{bmatrix} [g \quad -dg+hc] & [h \quad -ah+gb] \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.17}$$

A continuación se introduce la matriz B.

$$\begin{aligned} C(SI - A)^{-1}B &= \frac{1}{[1 \quad -a-d \quad ad-bc]} \cdot \begin{bmatrix} [g \quad -dg+hc] & [h \quad -ah+gb] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{[1 \quad -a-d \quad ad-bc]} \cdot [eg \quad -dge+hce] + [fh \quad -abf+ghf] \end{aligned} \tag{3.18}$$

Con todo ello se obtiene que:

$$H = C(SI - A)^{-1}B + D = \frac{[eg + fh \quad - deg + ceh - abf + fgh]}{[1 \quad - a - d \quad ad - bc]} \tag{3.19}$$

Obteniendo así una representación de los índices de los polinomios del numerador y denominador de la función de transferencia adquirida a través del modelo de estado enunciado en la expresión 3.8. A partir de ello, se elaboró un programa en MatLab, el cual dado el paso de las variables del modelo de estado, retorna la representación de la función de transferencia. Dicho programa se enuncia a continuación:

```
function [H] = ME_to_H(A,B,C,D)
    H = [0,B(1,1)*C(1,1)+B(2,1)*C(1,2), B(1,1)*(C(1,2)*A(2,1)-A(2,2)*C(1,1))+B(2,1)*(C
        (1,1)*C(1,2)-A(1,1)*A(1,2));1, -A(1,1)-A(2,2), A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)*A(2,1)];
end
```

Tomando como ejemplo el modelo de estado obtenido a través del ejemplo del diagrama de bloques presentado en la sección anterior, se tiene que sus variables son:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

El programa se ejecutaría de la siguiente manera:

$$function\ [H] = ME\_to\_H(\ [-5, -4; 2, -1],\ [4; 0], [1, 0], 0)$$

Cuyo resultado sería:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

Lo que es igual a $H = \frac{4(s+1)}{s^2+6s+13}$.

Para la comparación de resultados, a continuación se desarrolla la obtención de la función de transferencia total que representa al diagrama de bloques de la figura 3.2, en el cual se desprende que $H_1 = \frac{4}{s+5}$ y $H_2 = \frac{2}{s+1}$. Luego:

$$
\begin{aligned}
H = \frac{Y}{U} &= \frac{H_1}{1 + H_1 H_2} \\
&= \frac{\frac{4}{s+5}}{1 + \frac{4}{s+5}\frac{2}{s+1}} \\
&= \frac{4(s+1)}{s^2 + 6s + 13}
\end{aligned}
$$

Por lo que se condice el resultado obtenido en la ejecución del programa.

CAPÍTULO 4. DESARROLLO: SEGUNDA PARTE

En el siguiente problema se compone de 2 vasos comunicantes, donde el vaso 1 tiene un ingreso de un líquido a razón de F_0 y se ve regulado por su salida F_1, el cual a su vez es el ingreso del vaso 2, que expulsa el líquido a razón de F_2. Cada vaso comunicante tiene una altura del líquido acumulado h_1 y h_2 respectivamente. Además se tiene un área de la superficie del líquido A_1 y A_2. Todo esto se puede apreciar en la Figura 4.1.

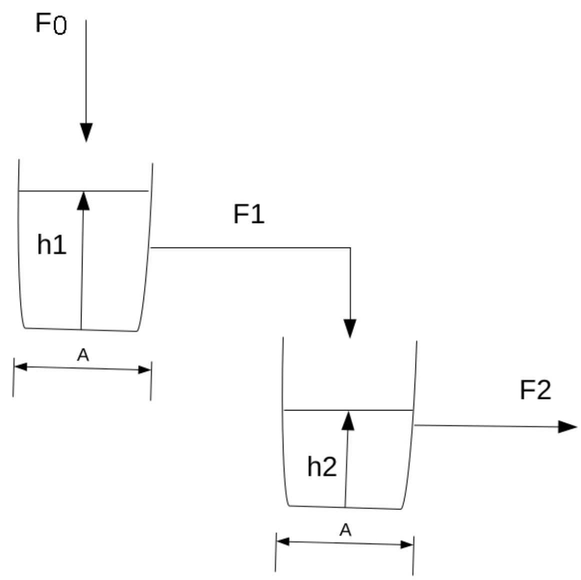

Figura 4.1: Diagrama Vasos comunicantes

En relación con el nombramiento de variables para el diagrama, se identificó a F_0 como la variable de entrada, a h_1 y h_2 como variables de estado y F_2 como variable de salida. En un comienzo, se identificó que cada vaso comunicante tiene una variación de líquido a razón del líquido que entra menos el líquido que sale.

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= F_0 - F_1 \\ \frac{dV_2}{dt} &= F_1 - F_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Esta variación de volumen en los vasos comunicantes se pueden expresar en función de las variables área y altura como: $\frac{dh_1 * A_1}{dt} = F_0 - (h_1 - h_2)$ y $\frac{dh_2 * A_2}{dt} = (h_1 - h_2) - h2$ respectivamente. Identificando que la variable F_1 equivale a $F_1 = (h_1 - h_2)$, es decir a la diferencia del líquido entrante al segundo vaso comunicante y el líquido saliente del segundo vaso comunicante. En relación a F_2, se identifica como un equivalente a la altura de líquido del segundo vaso comunicante.

Dividiendo ambas ecuaciones por A_1 y A_2 respectivamente, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= \frac{F_0}{A_1} - \frac{h_1 - h_2}{A_1} \\ \frac{dh_2}{dt} &= \frac{h1}{A_2} - \frac{2h_2}{A_2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Se tiene en cuenta siempre que el modelo de estado se expresa como:

$$\begin{aligned} X &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \tag{4.3}$$

Se identifica A,B,C,D como:

$$\begin{gathered} A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{A_1} & \frac{1}{A_1} \\ \frac{1}{A_2} & \frac{-2}{A_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0 \end{gathered} \tag{4.4}$$

Por lo tanto el modelo de estado matricial en este caso se expresa como:

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} \dot{h_1} \\ \dot{h_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{A_1} & \frac{1}{A_1} \\ \frac{1}{A_2} & \frac{-2}{A_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F_0 \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{4.5}$$

Entonces, en base al análisis matemático realizado anteriormente se desarrolla un programa sencillo en Matlab, el cual dadas las áreas de los vasos comunicantes entrega el modelo de estado correspondiente a los parámetros ingresados. Dicho programa se muestra a continuación.

```matlab
function [A,B,C,D,dh,y] = vasos(A1,A2,h1,h2,F0)
   A = [-1/A1,1/A1;1/A2,-2/A2];
   B = [1/A1;0];
   C = [0,1];
   D = 0;

```

```
    y = C * [h1;h2]; %y = C*[h1;h2] + D*F2
    dh = A*[h1;h2]+B*F0; %dh = A*[h1,h2] + B*F0
end
```

Por ejemplo si se tiene que el área del segundo vaso es el doble a la del primero y con las mismas alturas, es decir $A_2 = 2A_1$, con $h1 = h2$, con un flujo de entrada $F0 = 3[m/s]$, entonces, suponiendo que $A_2 = 4[m^2]$, $A_1 = 2[m^2]$ y $h1$, $h2 = 5[m]$ se tiene que:

$$function\ [A, B, C, D, dh, y] = vasos(2, 4, 5, 5, 3)$$

Lo que arroja el siguiente resultado:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

El modelo de estado quedaría como:

$$\begin{bmatrix} \dot{h_1} \\ \dot{h_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 \\ -2,5 \end{bmatrix}$$
$$y = 5$$

En otro caso, si se tienen dos vasos exactamente iguales con flujos entrantes igual a los salientes, es decir, que el área del segundo vaso es igual a la del primero y poseen las mismas alturas de liquido. Por lo tanto $A_2 = A_1$, con $h1 = h2$. Suponiendo que $A_2 = 4[m^2]$, $A_1 = 4[m^2]$ y $h1$, $h2 = 5[m]$, con un flujo de entrada $F0 = 4[m/s]$, se tiene que:

$$function\ [A, B, C, D, dh, y] = vasos(4, 4, 5, 5, 4)$$

Lo que arroja el siguiente resultado:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

El modelo de estado quedaría como:

$$\begin{bmatrix} \dot{h_1} \\ \dot{h_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,25 \end{bmatrix}$$

$$y = 5$$

En un último caso, si se tiene que el primer vaso es mayor al segundo vaso y además tiene una mayor altura de acumulación de líquido Por lo tanto $A_1 > A_2$, con $h1 > h2$. Suponiendo que $A_1 = 5[m^2]$, $A_2 = 4[m^2]$ y $h1 = 5[m]$, $h2 = 4[m]$, con un flujo de entrada $F0 = 2[m/s]$. se tiene que:

$$function\ [A, B, C, D, dh, y] = vasos(5, 4, 5, 4, 2)$$

Lo que arroja el siguiente resultado:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

El modelo de estado quedaría como:

$$\begin{bmatrix} \dot{h_1} \\ \dot{h_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ -0,75 \end{bmatrix}$$

$$y = 4$$

4.1 CIRCUITO ELÉCTRICO

Se propone resolver mediante a Matlab un circuito eléctrico que posee una fuente $Vs(t)$, dos resistencias eléctricas R_1 y R_2, dos condensadores C_1 y C_2 y finalmente se identifican las intensidades de corriente como I_1 e I_2, como se puede apreciar en la Figura 4.2.

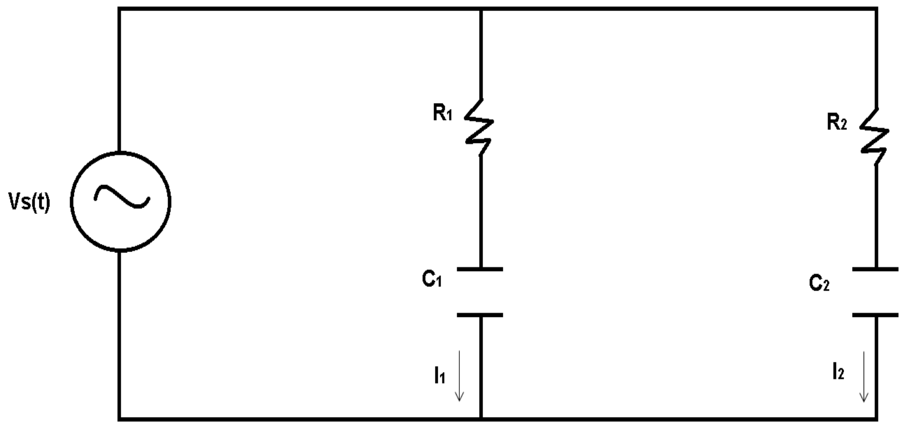

Figura 4.2: Circuito eléctrico

Se desea conocer la tensión o voltaje que circula a través del condensador, por lo tanto, en relación con el nombramiento de variables para el diagrama se identificó a Vs como la variable de entrada, a Vc_1 y Vc_2 como variables de estado y Vs como variable de salida.

Por ley de Kirchhoff y ley de Ohm se tiene que:

$$Vs(t) = R_1 * I_1 + Vc_1 = R_2 * I_2 + Vc_2 \tag{4.6}$$

Despejando ambas intensidades de corriente I_1 e I_2:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{Vs - Vc_1}{R_1} \\ I_2 &= \frac{Vs - Vc_2}{R_2} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Como se sabe que $C * \frac{dVc}{dt} = I$, reemplazamos en ambas ecuaciones anteriores para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{dVc_1}{dt} &= \frac{Vs - Vc_1}{C_1 * R_1} \\ \frac{dVc_2}{dt} &= \frac{Vs - Vc_2}{C_2 * R_2} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Por lo tanto el modelo de estado matricial en este caso se expresa como:

$$\begin{bmatrix} Vc_1' \\ Vc_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 * C_1} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R_2 * C_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Vc_1 \\ Vc_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 * C_1} \\ \frac{1}{R_2 * C_2} \end{bmatrix} \cdot Vs$$
$$y = \begin{bmatrix} Vc_1 \\ Vc_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Vc_1 \\ Vc_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot Vs \tag{4.9}$$

Entonces, en base al análisis matemático realizado anteriormente se desarrolla un programa sencillo en Matlab, el cual dado los valores de las resistencias y condensadores del circuito eléctrico realizado entrega el modelo de estado correspondiente a los parámetros ingresados. Dicho programa se muestra a continuación.

```
function [A,B,C,D,dVC,y] = circuitoRC(R1,R2,C1,C2,VC1,VC2,VS)
  A = [-1/R1*C1,0;0,-1/R2*C2];
  B = [1/R1*C1;1/R2*C2];
  C = [1,0;0,1];
  D = 0;

  y = C * [VC1;VC2]; %y = C*[VC1;VC2] + D*VS
  dVC = A*[VC1;VC2]+B*VS; %dh = A*[VC1,VC2] + B*VS
end
```

Un ejemplo sencillo que muestra el resultado de la ejecución del programa anterior, es que ingresando como parámetros a $VS = 4[volts]$, $VC1 = 2[volts]$, $VC2 = 3[volts]$, $C1 = 4[F]$, $C2 = 3[F]$, $R1 = 1[ohm]$ y $R2 = 2[ohm]$

$$function\ [A, B, C, D, dVC, y] = circuitoRC(1, 2, 4, 3, 2, 3, 4)$$

Lo que arroja el siguiente resultado:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1,5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

El modelo de estado quedaría como:

$$\begin{bmatrix} V\dot{C}1 \\ V\dot{C}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Finalizando esta experiencia se puede afirmar que se cumplió el objetivo de exponer los resultados y análisis de los problemas planteados en este laboratorio. Dentro de la primera parte se solicitó pasar un modelo transferencia a modelo de estado dado un diagrama expuesto. Para esto se utilizó el conocimiento adquirido en cátedra de la presente asignatura y se logró realizar un programa en MatLab que satisfaciera el diagrama solicitado. Luego se debía generar un programa en MatLab el cual fuera capaz de recibir como entrada el resultado obtenido de la función de transferencia trabajada anteriormente y mostrar dichas funciones de transferencias, es decir, se debía realizar el proceso inverso al realizado. El resultado obtenido en esta segunda etapa fue satisfactorio y acorde a lo que indicaba el modelo de transferencia inicial.

En una segunda parte se debía generar un programa MatLab que respondiera al diagrama de vasos comunicantes indicado en el laboratorio, identificando los diferentes tipos de variables, para luego probar dicha función mediante 3 casos diferentes a convención del grupo. El resultado obtenido en esta ocasión se trabajo de similar manera que en la primera parte, ocupando el conocimiento teórico aprendido en clases y estableciendo una función en MatLab que satisfaga este problema, lo cual dejo al grupo satisfecho. Finalmente se planteó el problema de un circuito eléctrico visto en clases, el cual se pretendía conocer el voltaje que pasa por los condensadores. Para esto se desarrollo el problema de acuerdo a la pauta y se generó el programa en MatLab para el caso.

No se advirtió ninguna dificultad en el desarrollo de esta experiencia, ya que se tenía el conocimiento necesario para desarrollar estos problemas. Se espera en la última experiencia seguir aplicando los conocimientos obtenidos en clases y lograr desarrollar sistemas que puedan dar respuesta a otro tipo de problemas.

BIBLIOGRAFÍA

Wikipedia (2017). *Espacio de Estados*. Recuperado desde: https://es.wikipedia.org/wiki/Espacio_de_estados.