Construcția unui graf cu secvența de grade dată

***Necesitatea** construcției unei model de tip rețea în care pentru fiecare nod se impun restricții asupra numărului de legături directe care trebuie stabilite din fiecare nod apare în domenii precum: c**himie** – studiul structurii posibile a unor compuși cu formula chimică dată (formula chimică = secvența de grade), **proiectare de rețele**, **biologie** – rețele metabolice, de interacțiuni între gene/proteine, **studii epidemiologice** – în care prin chestionare anonime persoanele declară numărul de persoane cu care au interacționat, în studii bazate pe simulări de rețele. În anumite cazuri este nevoie de a simula un model aleatoriu de rețea cu gradele nodurilor date sau de mai multe modele de rețea, sau de modele cu alte proprietăți precum: rețele conexe, rețele aciclice.*

Proprietăți metrice ale unei rețele - Centru, rază, diametru

Fie G = (V, E) un graf conex.

Pentru două vârfuri u şi v ale lui G, notăm cu d(u, v) **distanţa** de la vârful u la vârful v (numărul minim de muchii ale unui lanţ de la u la v).

Pentru un vârf v, **excentricitatea** lui v este distanţa maximă de la acest vârf la celelalte vârfuri:

$$e(v) = \max\{d(v, u) \mid u \in V\}$$

Excentricitatea minimă a vârfurilor se numeşte **raza** grafului:

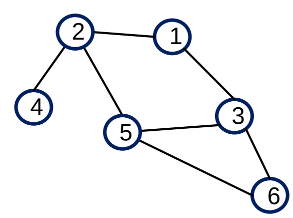
$$r(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}$$

Mulțimea vârfurilor cu excentricitatea minimă (egală cu r(G)) se numeşte **centrul** grafului:

$$c(G) = \{ v \in V \mid e(v) = r(G)\}$$

Excentricitatea maximă a vârfurilor se numeşte **diametrul** grafului; altfel spus, diametrul este cea mai mare distanță dintre două vârfuri:

$$diam(G) = \max\{e(v) \mid v \in V\} = \max\{d(u, v) \mid v, u \in V\}$$



e(1) = 2, e(2) = 2,
e(3) = 3 = d(3,4)

r(G) = 2
diam(G) = 3
c(G) = {1, 2, 5}

În analiza rețelelor există diferite măsuri care oferă informații despre cât de extinsă este rețeaua, cât de bine este conectată, ce noduri sunt importante în funcție de anumite criterii etc. O parte dintre aceste măsuri sunt legate de distanța dintre noduri, răspunzând la întrebări precum: cât de repede poate ajunge informația între două puncte ale rețelei, altfel spus cât de extinsă este rețeaua (⇒ noțiunea de diametru al rețelei), care noduri pot transmite "repede" informație în rețea (⇒ noțiuni precum centrul rețelei, mediana). Multe studii au vizat diametrul rețelelor reale din diverse domenii, efectul "small world", legat de faptul că diametrul acestor rețele este de obicei mic. https://en.wikipedia.org/wiki/Six_degrees_of_separation .
Într-o rețea, punctele din centru grafului sunt puncte în care pot fi construite clădiri de "urgențe" deoarece minimizează timpul de răspuns la o posibilă cerere venită dintr-un punct al rețelei.

Probleme

1. La încheierea anului universitar studenții dintr-o grupă completează un chestionar în care declară numărul de colegi cu care au colaborat la proiecte de-a lungul anului. Pentru a verifica dacă datele colectate sunt corecte, dar și posibile modele ale rețelei de colaborare profesională stabilită de studenți de-a lungul anului universitar, se dorește construirea unui model corespunzător datelor corectate. Se citesc din fișierul `date.in` următoarele informații: numărul de studenți n urmat de n numere d_1, d_2, …, d_n, unde d_i reprezintă numărul de colegi cu care a declarat al i-lea student că a lucrat la proiecte.

a) Construiți, dacă se poate, un model al relațiilor de colaborare stabilite între studenți care să corespundă rezultatelor din chestionar. Se vor afișa perechile de studenți care au colaborat.

b) Construiți, dacă se poate, un model arborescent al relațiilor de colaborare stabilite între studenți care să corespundă rezultatelor din chestionar.

c) Construiți, dacă se poate, un model conex corespunzător datelor.

Modelare

Se citesc din fișierul `date.in` următoarele informații: un număr natural n urmat de n numere naturale d_1, d_2, …, d_n. Să se verifice dacă există un graf G cu secvența gradelor $s(G) = \{ d_1, d_2, \ldots , d_n \}$ și, în caz afirmativ, să se afișeze **muchiile** grafului G. Se vor considera pe rând cazurile în care G este:

a) graf neorientat (**folosind algoritmul Havel-Hakimi**) – **$O(n^2)$**

date.in	**date.out (nu este unica solutia)**
6 2 3 2 3 2 2	1 2 2 3 2 4 4 5 4 6 1 3 5 6

b) arbore – **O(n)**

date.in	**date.out (nu este unica solutia)**
6 1 3 1 2 2 1	1 2 2 3 2 4 4 5 5 6

c) (SUPLIMENTAR) graf neorientat conex

http://campion.edu.ro/arhiva/index.php?page=problem&action=view&id=885

2. Centru. Rază. Diametru.

a) Implementați un algoritm eficient pentru determinarea **centrului**, **razei** şi diametrului unui arbore cu n vârfuri (informațiile despre arbore se vor citi tot din fișierul graf.in cu formatul descris în primul laborator). Se va testa dacă graful dat la intrare este arbore, altfel va fi afișat un mesaj corespunzător (complexitate **O(n)**).

https://www.infoarena.ro/problema/darb

b) Se dă o rețea de n persoane numerotate de la 1 la n și relațiile de prietenie dintre ele, prin perechi x y (relațiile sunt reciproce). Informațiile despre rețea se citesc din fișierul *retea.in* (având pe prima linie n și pe fiecare dintre următoarele linii câte o pereche de numere x y reprezentând o relație de prietenie).

Să se verifice dacă rețeaua are diametrul mai mic sau egal cu 6. **$O(nm+n^2)$**

https://en.wikipedia.org/wiki/Six_degrees_of_separation