Ecole des Métiers
Berufsfachschule
Fribourg
Maturité professionnelle

4.2.2 Opérations et compositions de fonctions

1 Opérations

Les fonctions peuvent être additionnées, soustraites, multipliées ou divisées, par exemple

$$h(x) = x^2 + \sqrt{5x+1},$$

$h(x)$ peut être interprétée comme la somme des fonctions f et g, avec

$$f(x) = x^2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{5x+1}$$

Ainsi, h est la somme de f et de g et on peut écrire $h = f + g$.

$$h(x) = (f+g)(x) = x^2 + \sqrt{5x+1}$$

De manière générale, pour deux fonctions f et g, on peut définir les fonctions suivantes :

$$\textbf{somme } f+g \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\textbf{différence } f-g \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\textbf{multiplication } f \cdot g \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\textbf{division } \frac{f}{g} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Le domaine de définition de $f+g$, $f-g$ et de $f \cdot g$ est l'intersection des domaines de définition de f et de g.

Pour $\frac{f}{g}$ on a en plus que le dénominateur doit être différent de zéro, $g(x) \neq 0$.

Exemple

Calculer $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ et donner le domaine de définition, pour :

$$f(x)=\sqrt{4-x^2} \quad \text{et} \quad g(x)=3x+1$$

Solution

Le domaine de définition de f est $D_f=[-2;2]$ et celui de g est $D_g=\mathbb{R}$, donc le domaine de définition de $f+g$, $f-g$ et $f\cdot g$ vaut $D=D_f\cap D_g=[-2;2]$.

Pour $\frac{f}{g}$, le zéro du dénominateur doit être enlevé, càd $x=-\frac{1}{3}$.

$$(f+g)(x)=\sqrt{4-x^2}+(3x+1)=\sqrt{4-x^2}+3x+1 \qquad D_{f+g}=[-2;2]$$

$$(f-g)(x)=\sqrt{4-x^2}-(3x+1)=\sqrt{4-x^2}-3x-1 \qquad D_{f-g}=[-2;2]$$

⚠ Parenthèses

$$(f\cdot g)(x)=\sqrt{4-x^2}\cdot(3x+1)=3x\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-x^2} \qquad D_{f\cdot g}=[-2;2]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{(3x+1)}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{3x+1} \qquad D_{\frac{f}{g}}=[-2;-\frac{1}{3}[\cup]-\frac{1}{3};2]$$

Remarques :

- Pour le domaine de définition de $\frac{f}{g}$, on considère les fonctions de base et non celle déjà simplifiée (voir exercice 4).
- Ici, nos exemples contiennent deux fonctions, on peut néanmoins additionner, soustraire, multiplier ou diviser autant de fonctions qu'on le souhaite.

Exercice 1 *Soient les fonctions $f(x) = x + 3$ et $g(x) = x^2$.*
Calculer :

a) $(f + g)(3) = (3)^2 + 3 + 3 = 15$

b) $(f - g)(3) \quad 3 + 3 - 9 = -3$

c) $(fg)(3) \quad x^2(x+3) = x^3 + 3x^2$
$= (3)^3 + 3(3)^2 = 27 + 27 = 54$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(3) \quad \frac{x+3}{x^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Exercice 2 *Soient les fonctions $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = 2x^2 - 1$*

a) *Calculer :*

(a) $(f + g)(x) = x^2 + 2 + 2x^2 - 1$
$= 3x^2 - 1$

(b) $(f - g)(x) = x^2 + 2 - (2x^2 - 1)$
$= -x^2 + 3$

(c) $(fg)(x) \quad (x^2 + 2)(2x^2 - 1)$
$= 2x^3 - x^2 + 4x^2 - 2 = 2x^3 + 3x^2 - 2$

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 2}{2x^2 - 1}$

$2x^2 - 1 > 0$
$2x^2 > 1$
$x > \sqrt{\frac{1}{2}}$

b) *Déterminer le domaine de définition de $f + g$, $f - g$, fg et de $\frac{f}{g}$.*

$D_{(f+g)} = \mathbb{R}$ | $D_{(f-g)} = \mathbb{R}$ | $D_{(fg)} = \mathbb{R}$ | $D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt{\frac{1}{2}}\right\}$

Exercice 3 *Soient les fonctions $f(x) = \sqrt{x + 5}$ et $g(x) = \sqrt{x + 5}$*

a) *Calculer :*

(a) $(f + g)(x)$

(b) $(f - g)(x)$

(c) $(fg)(x)$

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

b) *Déterminer le domaine de définition de $f + g$, $f - g$, fg et de $\frac{f}{g}$.*

Exercice 4 *Soient les fonctions $f(x) = \frac{2x}{x - 4}$ et $g(x) = \frac{x}{x + 5}$*

a) *Calculer :*

(a) $(f + g)(x)$

(b) $(f - g)(x)$

(c) $(fg)(x)$

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

b) *Déterminer le domaine de définition de $f + g$, $f - g$, fg et de $\frac{f}{g}$.*

2 Compositions de fonctions

La fonction $g \circ f$ est une composition de la fonction g avec la fonction f et est définie de la manière suivante :

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

La fonction $f(x)$ est introduite dans la fonction $g(x)$, càd que les variables x de la fonction g sont remplacées par l'équation de la fonction f.

Le domaine de définition de $g \circ f$ est l'ensemble de tous les x qui appartiennent au domaine de définition de f, tel que $f(x)$ se trouve dans le domaine de définition de g.

La composition $g \circ f$ se lit g rond f ou g après f.

Soient les fonctions :

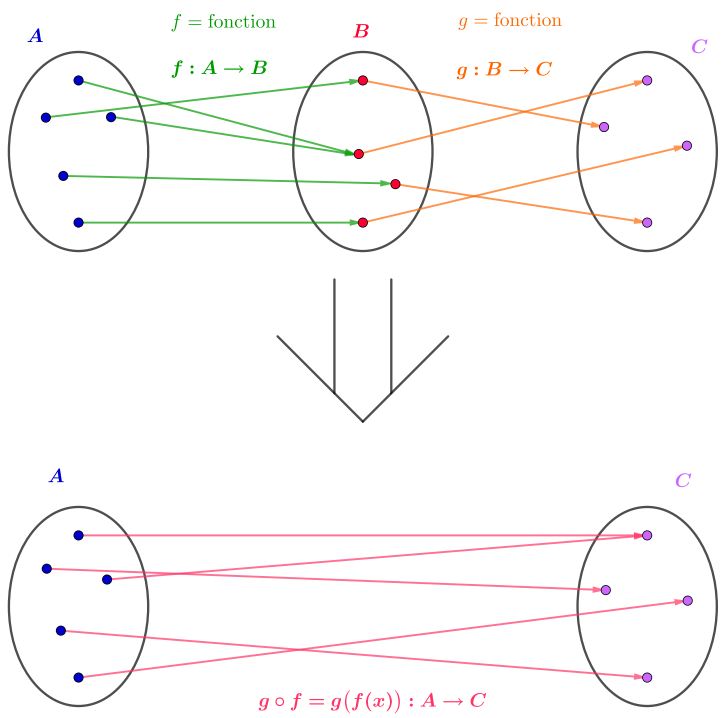
$f(x)$ avec domaine de définition $D_f = A$ et ensemble des images $Im_f = B$ et

$g(x)$ avec domaine de définition $D_g = B$ et ensemble des images $Im_g = C$, càd

$$\begin{array}{rcl} f(x) : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} g(x) : B & \longrightarrow & C \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

alors, le composition $g \circ f$ est définie de la manière suivante :

$$\begin{array}{rccccc} (g \circ f)(x) : & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}$$



Remarque

Au lieu de faire la composition de deux fonctions, on peut aussi ici en composer plusieurs, p.ex. $f \circ g \circ h$.

Exemples

a) Soient les fonctions : $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = 3x + 5$

(a) Calculer $(f \circ g)(x)$ et le domaine de définition de $(f \circ g)(x)$.

(b) Calculer $(g \circ f)(x)$ et le domaine de définition de $(g \circ f)(x)$.

(c) Calculer $f\big(g(2)\big)$ de deux manières différentes : d'abord avec les fonctions f et g séparément, puis à l'aide de la composition.

Solutions :

(a)

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f\big(g(x)\big) \\
&= f(3x+5) \\
&= (3x+5)^2 - 1 \\
&= 9x^2 + 30x + 24 \\
D_{f \circ g} &= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) \\
&= g(x^2-1) \\
&= 3(x^2-1) + 5 \\
&= 3x^2 + 2 \\
D_{g \circ f} &= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\text{Calcul de } f\big(g(2)\big) : g(2) &= 3 \cdot 2 + 5 = 11 \\
f\big(g(2)\big) &= f(11) = 11^2 - 1 = 120 \\
\text{Calcul de } f\big(g(2)\big) &\text{ à l'aide de } f \circ g : \\
(f \circ g)(x) &= f\big(g(x)\big) = 9x^2 + 30x + 24 \\
f\big(g(2)\big) &= 9 \cdot 2^2 + 30 \cdot 2 + 24 \\
&= 36 + 60 + 24 = 120
\end{aligned}$$

Ici on voit, que $f\big(g(x)\big)$ et $g\big(f(x)\big)$ ne donne pas le même résultat $f \circ g \neq g \circ f$.

b) Soient les fonctions : $f(x) = x^2 - 16$ et $g(x) = \sqrt{x}$

(a) Calculer $(f \circ g)(x)$ et le domaine de définition de $(f \circ g)(x)$.

(b) Calculer $(f \circ g)(x)$ et le domaine de définition de $(g \circ f)(x)$.

Solutions :

(a)

$$\begin{aligned} D_f = \mathbb{R} \text{ et } D_g &= [0; +\infty[\\ (f \circ g)(x) &= f\big(g(x)\big) \\ &= f\big(\sqrt{x}\big) \\ &= (\sqrt{x})^2 - 16 \\ &= x - 16 \end{aligned}$$

Attention : ne pas prendre $x - 16$ pour le domaine de définition, sinon $D = \mathbb{R}$, mais ici nous avons $D_{f \circ g} = [0; +\infty[$ qui correspond au domaine de définition de $\big(\sqrt{x}\big)^2 - 16$, donc comme précédemment, considérer la fonction qui n'a pas encore été simplifiée.

(b)

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) \\ &= g(x^2 - 16) \\ &= \sqrt{x^2 - 16} \end{aligned}$$

$D_{g \circ f} =]-\infty; -4] \cup [4; +\infty[$

***Exercice* 5** *Soient les fonctions :* $f(x) = 2x - 5$ *et* $g(x) = 3x + 7$.
Calculer

a) $(f \circ g)(x)$

$= 2(3x+7) - 5$

$= 6x + 14 - 5$

$= 6x + 9$

b) $(g \circ f)(x)$

$= 3(2x - 5) + 7$

$= 6x - 15 + 7$

$= 6x - 8$

c) $f(g(-2))$

$= 2(3(-2) + 7) - 5$

$= -3$

d) $g(f(3))$

$= 3(2(3) - 5) + 7$

$= 10$

***Exercice* 6** *Soient les fonctions :* $f(x) = 3x^2 + 4$ *et* $g(x) = 5x$.
Calculer

a) $(f \circ g)(x)$

$3(5x)^2 + 4$

$= 75x^2 + 4$

b) $(g \circ f)(x)$

$= 5(3x^2 + 4)$

$= 15x^2 + 20$

c) $f(g(-2))$

$= 3(5(-2))^2 + 4$

$= 304$

d) $g(f(3))$

$= 5(3(3)^2 + 4)$

$= 155$

***Exercice* 7** *Soient les fonctions :* $f(x) = x^2 - 3x$ *et* $g(x) = \sqrt{x+2}$

a) *Calculer* $(f \circ g)(x)$ *et le domaine de définition de* $f \circ g$.

$f(g(x)) = (\sqrt{x+2})^2 - 3(\sqrt{x+2})$

$\mathbb{D} \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow [-2; \infty[$

$x > -2$

b) *Calculer* $(g \circ f)(x)$ *et le domaine de définition de* $g \circ f$.

$g(f(x)) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

$= \sqrt{(x-1)(x-2)}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}_+ \setminus \{1; 2\}$

***Exercice* 8** *Soient les fonctions :* $f(x) = x^2 - 4$ *et* $g(x) = \sqrt{3x}$

a) *Calculer* $(f \circ g)(x)$ *et le domaine de définition de* $f \circ g$.

$f(g(x)) = (\sqrt{3x})^2 - 4$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}_+^*$

b) *Calculer* $(g \circ f)(x)$ *et le domaine de définition de* $g \circ f$.

$g(f(x)) = \sqrt{3(x^2 - 4)}$

$= \sqrt{3x^2 - 12}$

$\mathbb{D} \Rightarrow 3x^2 - 12 > 0 =]-\infty; -2] \cup [2; \infty[$

$3x^2 > 12$

$x^2 > 4$

$x = \pm 2$

3 Solutions

***Exercice* 1**

a) $(f+g)(3) = f(3)+g(3) = 3+3+3^2 = 6+9 = 15$

b) $(f-g)(3) = f(3)-g(3) = 3+3-3^2 = 6-9 = -3$

c) $(fg)(3) = f(3)\cdot g(3) = (3+3)\cdot 3^2 = 6\cdot 9 = 54$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(3) = \dfrac{f(3)}{g(3)} = \dfrac{3+3}{3^2} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

***Exercice* 2**

a) *(a)* $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = x^2+2+2x^2-1 = 3x^2+1$

(b) $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = x^2+2-(2x^2-1) = x^2+2-2x^2+1 = -x^2+3$

(c) $(fg)(x) = f(x)\cdot g(x) = (x^2+2)(2x^2-1) = 2x^4-x^2+4x^2-2 = 2x^4+3x^2-2$

(d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2+2}{2x^2-1}$

b) $D_{f+g} = \mathbb{R},\ D_{f-g} = \mathbb{R},\ D_{fg} = \mathbb{R},\ D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}\setminus\left\{\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

***Exercice* 3**

a) *(a)* $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \sqrt{x+5}+\sqrt{x+5} = 2\sqrt{x+5}$

(b) $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \sqrt{x+5}-\sqrt{x+5} = 0$

(c) $(fg)(x) = f(x)\cdot g(x) = \sqrt{x+5}\cdot\sqrt{x+5} = x+5$

(d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5}} = 1$

b) $D_{f+g} = [-5;+\infty[,\ D_{f-g} = [-5;+\infty[,\ D_{fg} = [-5;+\infty[,\ D_{\frac{f}{g}} =]-5;+\infty[$

***Exercice* 4**

a) *(a)* $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \dfrac{2x}{x-4}+\dfrac{x}{x+5} = \dfrac{2x(x+5)+x(x-4)}{(x-4)(x+5)} = \dfrac{2x^2+10x+x^2-4x}{(x-4)(x+5)} = \dfrac{3x^2+6x}{(x-4)(x+5)}$

(b) $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \dfrac{2x}{x-4}-\dfrac{x}{x+5} = \dfrac{2x(x+5)-x(x-4)}{(x-4)(x+5)} = \dfrac{2x^2+10x-x^2+4x}{(x-4)(x+5)} = \dfrac{x^2+14x}{(x-4)(x+5)}$

(c) $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{2x}{x-4} \cdot \dfrac{x}{x+5} = \dfrac{2x^2}{(x-4)(x+5)}$

(d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\dfrac{2x}{x-4}}{\dfrac{x}{x+5}} = \dfrac{2x}{x-4} \cdot \dfrac{x+5}{x} = \dfrac{2(x+5)}{x-4}$

b) $D_{f+g} = \mathbb{R} \setminus \{-5; 4\},\ D_{f-g} = \mathbb{R} \setminus \{-5; 4\},\ D_{fg} = \mathbb{R} \setminus \{-5; 4\},\ D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} \setminus \{-5; 0; 4\}$

Exercice 5

a) $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(3x+7) = 2(3x+7) - 5 = 6x + 14 - 5 = 6x + 9$

b) $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x-5) = 3(2x-5) + 7 = 6x - 15 + 7 = 6x - 8$

c) $f\big(g(-2)\big) = 6 \cdot (-2) + 9 = -12 + 9 = -3$

d) $g\big(f(3)\big) = 6 \cdot 3 - 8 = 18 - 8 = 10$

Exercice 6

a) $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(5x) = 3(5x)^2 + 4 = 3 \cdot 25x^2 + 4 = 75x^2 + 4$

b) $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(3x^2+4) = 5(3x^2+4) = 15x^2 + 20$

c) $f\big(g(-2)\big) = 75 \cdot (-2)^2 + 4 = 75 \cdot 4 + 4 = 300 + 4 = 304$

d) $g\big(f(3)\big) = 15 \cdot 3^2 + 20 = 15 \cdot 9 + 20 = 135 + 20 = 155$

Exercice 7

a) $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\sqrt{x+2}\right) = \left(\sqrt{x+2}\right)^2 - 3\sqrt{x+2} = x + 2 - 3\sqrt{x+2}$

$D_{f \circ g} = [-2; +\infty[$

b) $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2 - 3x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{x^2 - x - 2x + 2} =$
$\sqrt{x(x-1) - 2(x-1)} = \sqrt{(x-1)(x-2)}$

$D_{f \circ g} =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$

Exercice 8

a) $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\sqrt{3x}\right) = \left(\sqrt{3x}\right)^2 - 4 = 3x - 4$

$D_{f \circ g} = [0; +\infty[$

b) $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2 - 4) = \sqrt{3(x^2-4)} = \sqrt{3(x+2)(x-2)}$

$D_{g \circ f} =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$