Logarithmes: propriétés

1 Propriétés des logarithmes

Théorème 1.1
Soit $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Voici les propriétés des logarithmes à connaître « par cœur » :

$\sharp$	Propriétés	Conditions de validité
1	$\log_b(1) = 0$	
2	$\log_b(b) = 1$	
3	$\log_b(b^x) = x$	$x \in \mathbb{R}$
4	$b^{\log_b(x)} = x$	$x > 0$
5	$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$	$x > 0, y > 0$
6	$\log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$	$x > 0, y > 0$
7	$\log_b(x^p) = p \cdot \log_b(x)$	$x > 0, p \in \mathbb{R}$
8	$\log_b(x) = \dfrac{\log_d(x)}{\log_d(b)}$	$d \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ une base quelconque.

Remarque 1.2
Dans le tableau ci-dessus, vous connaissiez déjà les propriétés (1) à (4).
Dans l'activité d'introduction que vous venez de faire, vous avez trouvé les propriétés (5) à (8).

Remarque 1.3 (Facultatif)
En réalité, seules les propriétés (2) et (5) seraient nécessaires, toutes les autres étant des conséquences de celles-ci.

Remarque 1.4
Attention aux conditions de validité dans le tableau ci-dessus ! L'exemple suivant éclaire ce point.

Exemple 1.5

L'expression $\log_b(x) + \log_b(y)$ n'est définie que si $x > 0$ et $y > 0$

L'expression $\log_b(x \cdot y)$ n'est définie que si $x \cdot y > 0 \iff \begin{cases} x > 0 \text{ et } y > 0 \\ \text{ou} \\ x < 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$

Ainsi, l'égalité $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$ n'est vraie que si $x > 0$ et $y > 0$

Remarque 1.6 (Erreurs fréquentes !)

Voici encore une fois 3 propriétés présentes dans le Tableau du Théorème 1.1 :

$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$	$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$	$\log_b(x) = \frac{\log_d(x)}{\log_d(b)}$
✓	✓	✓

ATTENTION ! Éviter les confusions fréquentes entre ces règles !

$\log_b(x) \cdot \log_b(y) \neq \log_b(x \cdot y)$	$\frac{\log_b(x)}{\log_b(y)} \neq \log_b\left(\frac{x}{y}\right)$	$\frac{\log_b(x)}{\log_b(y)} \neq \frac{x}{y}$
$\log_b(x) \cdot \log_b(y) \neq \log_b(x + y)$	$\frac{\log_b(x)}{\log_b(y)} \neq \log_b(x - y)$	
$\log_b(x) + \log_b(y) \neq \log_b(x + y)$	$\log_b(x) - \log_b(y) \neq \log_b(x - y)$	

Exemple 1.7

Utilisation des propriétés des logarithmes :

- décomposons au maximum l'expression suivante (sans nous préoccuper des conditions de validité) :

$$\ln\left(\frac{x^3 \cdot \sqrt{y}}{z^2}\right) = \ln(x^3) + \ln(\sqrt{y}) - \ln(z^2)$$
$$= 3\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y) - 2\ln(z)$$

- écrivons sous la forme d'un seul logarithme :

$$\log(x\,y) + \log\left(\frac{x}{y}\right) - 3\log(x-y) = \log\left(x y \cdot \frac{x}{y}\right) - \log((x-y)^3)$$
$$= \log\left(\frac{x^2}{(x-y)^3}\right)$$

2 Série d'exercices

Exercice 2.1

Ecrivez sous la forme de sommes et différences de logarithmes simples (sans vous préoccuper des conditions de validité).

(a) $\log_3(x^2y^5)$ = $2\log_3(x) + 5\log_3(y)$

(b) $\log\left(\frac{\sqrt[3]{xy^2}}{z^3}\right)$ = $\log\left(x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}\right) - 3\log(z)$

$= \frac{1}{3}\log(x) + \frac{2}{3}\log(y) - 3\log(z)$

(c) $\ln\left(a^{-2}\sqrt{\frac{2^3a^{-2}}{b^4}}\right)$ $-2\ln(a) + \ln\left(2^{\frac{3}{2}} a^{-1}\right) - \ln(b^2)$

$= -2\ln(a) + \frac{3}{2}\ln(2) - \ln(a) - 2\ln(b)$

(d) $\log_2\left(\frac{1}{4x^{-3}}\right)$ $= \log(1) - \left(\log(2^2) - 3\log(x)\right)$

$= \log(1) - 2\log(2) + 3\log(x)$

Exercice 2.2 (Facultatif)

Si nécessaire, étudiez l'exemple 10.14, p. 211–212 du Livre [1].

Exercice 2.3

Résolvez les exercices 29 et 30 p. 216 du Livre [1].

Exercice 2.4

Ecrivez sous la forme d'un seul logarithme simplifié au maximum.

(a) $2\log_6(x^2 - 2x) + 3\log_6(z) - \left(2\log_6(z) + \log_6(x)\right)$ $= \log_6\left(x(x-2)^2 \cdot z\right)$

(b) $\ln(x) + \ln(5y) - \ln(z)$ $= \ln\left(\frac{5x}{z}\right)$

(c) $\log(x^3\,y^2) - 2\,\log(x\,\sqrt[3]{y}) - 3\,\log\left(\frac{x}{y}\right)$ $= \log\left(\frac{\frac{x^3y^2}{(x\sqrt[3]{y})^2}}{\frac{x^3}{y^3}}\right) = \frac{\cancel{x^3}\,y^2}{x^2\,y^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{y^{6/3}}{\cancel{x^3}}$

$=$

(d) $2\log_7(x^2 - 6x) + 3\log_7(y) - \log_7(xy)$

(e) $\log_2(w \cdot z) + \log_2\left(\frac{z}{w}\right)$

(f) $\log_3(2x + 2) + \log_3(4x + 12) - 4\log_3(2)$

A Réponses des exercices

2.1

(a) $2\log_3(x) + 5\log_3(y)$

(b) $\frac{1}{3}\log(x) + \frac{2}{3}\log(y) - 3\log(z)$

(c) $\frac{3}{2}\ln(2) - 3\ln(a) - 2\ln(b)$

(d) $-2 + 3\log_2(x)$

2.4

(a) $\log_6(xz(x-2)^2)$

(b) $\ln(\frac{5xy}{z})$

(c) $\log(x^{-2}y^{\frac{13}{3}})$

(d) $\log_7(xy^2(x-6)^2)$

(e) $\log_2(z^2)$

(f) $\log_3(\frac{(x+1)(x+3)}{2})$

Références

[1] FAVRE, Jean-Pierre : Maths pour la matu pro. 6e édition. Promath, 2023