Logarithmes: définition et calculs élémentaires

Table des matières

1 Série d'exercices introductifs N° 1

Exercice 1.1

Sans l'aide de la calculatrice, devinez (lorsque c'est possible) les exposants des égalités ci-dessous :

(a) $2^{\cdots\cdots} = 8$

(b) $2^{\cdots\cdots} = 1024$

(c) $3^{\cdots\cdots} = 243$

(d) $4^{\cdots\cdots} = 256$

(e) $5^{\cdots\cdots} = 25$

(f) $5^{\cdots\cdots} = -25$

(g) $5^{\cdots\cdots} = 1$

(h) $5^{\cdots\cdots} = 0$

(i) $10^{\cdots\cdots} = 1\,000\,000$

(j) $2^{\cdots\cdots} = \dfrac{1}{16}$

(k) $9^{\cdots\cdots} = 3$

(l) $10^{\cdots\cdots} = \dfrac{1}{1000} = 0.001$

(m) $3^{\cdots\cdots} = \dfrac{1}{27}$

(n) $3^{\cdots\cdots} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

(o) $128^{\cdots\cdots} = \dfrac{1}{2}$

(p) $(-3)^{\cdots\cdots} = 9$

(q) $(-3)^{\cdots\cdots} = -27$

(r) $(-3)^{\cdots\cdots} = -9$

(s) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\cdots\cdots} = \dfrac{1}{16}$

(t) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\cdots\cdots} = 2$

(u) $0^{\cdots\cdots} = 1$

(v) $0^{\cdots\cdots} = 0$

(w) $0^{\cdots\cdots} = 2$

(x) $0^{\cdots\cdots} = -10$

(y) $1^{\cdots\cdots} = 1$

(z) $1^{\cdots\cdots} = 3$

Remarque 1.2

Toutes les données de l'exercice précédent sont de la forme

$$\boxed{b^y = x}$$

où y est une valeur à deviner/trouver.

Dans cet exercice, nous avons rencontré plusieurs cas :

(1) soit il n'y a pas de valeur de y possible ;

(2) soit il y a exactement une valeur de y possible ;

(3) soit il y a une infinité de valeurs de y possible.

Exercice 1.3

Les 36 données ci-dessous sont de la forme $\boxed{b^y = x}$. Tâches à effectuer :

- **entourez** toutes celles qui ont exactement une valeur de y possible.
- **tracez** les autres données.

$(-2)^{\cdots} = 2$	$(-1)^{\cdots} = 2$	$0^{\cdots} = 2$	$(\frac{1}{2})^{\cdots} = 2$	$1^{\cdots} = 2$	$2^{\cdots} = 2$
$(-2)^{\cdots} = 1$	$(-1)^{\cdots} = 1$	$0^{\cdots} = 1$	$(\frac{1}{2})^{\cdots} = 1$	$1^{\cdots} = 1$	$2^{\cdots} = 1$
$(-2)^{\cdots} = \frac{1}{2}$	$(-1)^{\cdots} = \frac{1}{2}$	$0^{\cdots} = \frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})^{\cdots} = \frac{1}{2}$	$1^{\cdots} = \frac{1}{2}$	$2^{\cdots} = \frac{1}{2}$
$(-2)^{\cdots} = 0$	$(-1)^{\cdots} = 0$	$0^{\cdots} = 0$	$(\frac{1}{2})^{\cdots} = 0$	$1^{\cdots} = 0$	$2^{\cdots} = 0$
$(-2)^{\cdots} = -1$	$(-1)^{\cdots} = -1$	$0^{\cdots} = -1$	$(\frac{1}{2})^{\cdots} = -1$	$1^{\cdots} = -1$	$2^{\cdots} = -1$
$(-2)^{\cdots} = -2$	$(-1)^{\cdots} = -2$	$0^{\cdots} = -2$	$(\frac{1}{2})^{\cdots} = -2$	$1^{\cdots} = -2$	$2^{\cdots} = -2$

Exercice 1.4

Les mathématiciens aiment bien les choses bien définies ! Complétez le texte suivant :

Si

$b \in$ .... **et** $x \in$ ....

alors on est certain qu'il existe une valeur unique de y telle que :

$$\boxed{b^y = x}$$

Calculs trop difficiles de tête, mais possibles ?

Comme dans la Remarque 1.4 de la page précédente, considérons l'égalité $b^y = x$, avec une **base** $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, un **exposant** y et une **puissance** obtenue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

A l'avenir, même quand ces deux conditions sur b et x seront remplies, nous devrons avoir recours à la calculatrice pour calculer (plutôt que de deviner) les exposants de certaines égalités !

Exercice 1.5
De tête, essayez de donner une première estimation des exposants recherchés et affinez cette estimation avec l'aide de la calculatrice en testant successivement différentes valeurs de y :

(a) $2^y = 9 \ \Leftrightarrow \ y \approx \dots$ (b) $2^y = 63 \ \Leftrightarrow \ y \approx \dots$ (c) $2^y = 0.26 \ \Leftrightarrow \ y \approx \dots$

Exercice 1.6 (Perspective pour plus tard. . .)
Considérons dans tout cet Exemple l'égalité suivante : $\boxed{10^y = x}$.

(a) Remplissez le tableau suivant sans vous aider de la calculatrice :

x	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000
y	......	......	......	......	......	......	......

(b) Trouvez la « logique » du tableau :
- dans la ligne de x, que fait-on pour passer d'une colonne à l'autre ?
- même question pour la ligne de y.

Affirmation : $10^{1.3} \approx 20$

(c) Vérifiez cette affirmation à l'aide de votre calculatrice.

(d) Sans vous aider de la calculatrice et en suivant la même logique que dans le tableau précédent, remplissez le tableau suivant en commençant par la colonne $x = 20$:

x	0.002	0.02	0.2	2	20	200	2000
y	......	......	......	......	......	......	......

(e) Vérifiez votre tableau à l'aide de la calculatrice ; c'est-à-dire, est-ce que 10 à la puissance y donne bien x pour toutes les colonnes ?

(f) Ne trouvez-vous pas tout ceci mystérieux voire magique. . . !? ☺

Remarque 1.7
Dans l'exercice précédent, nous avons donc vu que :

$$\sqrt[10]{10^{23}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

2 Définition des logarithmes

Définition 2.1 (Logarithme de base b)

Soient ....

Le **logarithme de base b de x** est l'exposant auquel il faut élever b pour obtenir x.
On le note $\boxed{\log_b(x)}$.

....

L'égalité de gauche est la **forme logarithmique** ; celle de droite est la **forme exponentielle**.

Remarque 2.2

Calculer un logarithme revient donc à ....

Exemple 2.3

Remarque 2.4

Attention ! Il ne faut pas confondre les deux choses suivantes :

- « deviner une base » = calculer une racine ;
- « deviner un exposant » = calculer un logarithme.

Exemple 2.5
Notez bien la différence entre les deux calculs suivants :

« deviner une base » = calculer une racine : $b^3 = 8 \iff b = \sqrt[3]{8} = \underline{2}$

« deviner un exposant » = calculer un logarithme : $2^y = 8 \iff y = \log_2(8) = \underline{3}$

Chacun de ces deux cas a ses règles propres !

Remarque 2.6 (Notice historique)
Le mot **logarithme** vient du grec ancien, où "logos" signifie "raison" ou "proportion" et "arithmos" signifie "nombre". Ce terme a été introduit par le mathématicien écossais **John Napier** (1550–1617) au début du 17ème siècle, dans son ouvrage *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, publié en 1614.

Avant Napier, l'horloger, astronome et mathématicien suisse **Jost Bürgi** (1552–1632) utilisait déjà une forme de calcul logarithmique, bien qu'il n'ait pas formalisé le concept de logarithme de la même manière que John Napier. Autour de 1600, Bürgi employait déjà des tables numériques destinées à faciliter les calculs arithmétiques et géométriques. Cependant, il ne les publia qu'en 1620 sous le nom de *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen*, sans mode d'emploi, ce qui explique leur utilisation relativement limitée. L'Histoire a donc retenu Napier plutôt que Bürgi.

Définition 2.7
Cas spéciaux : Pour certaines valeurs de la base b, on utilise des notations particulières [a] :

- pour $b = 10$, on parle de **logarithme décimal** et on écrit

$$\mathbf{log}\,(\boldsymbol{x}) := \log_{10}(x)$$

- pour $b = \mathrm{e}$, on parle de **logarithme naturel** ou **logarithme népérien** [b] et on écrit

$$\mathbf{ln}\,(\boldsymbol{x}) := \log_{\mathrm{e}}(x)$$

  La base de ce logarithme est le *nombre d'Euler* ($\mathrm{e} \approx 2.718\,28$) qui est un nombre irrationnel (comme $\sqrt{2}$) et même transcendant (comme π).

- pour $b = 2$, on parle de **logarithme binaire** et on écrit (moins courant) :

$$\mathbf{lb}(\boldsymbol{x}) := \log_2(x)$$

a. Dans le contexte germanophone, le logarithme de base 10 s'écrit « $\lg$ » tandis que dans le contexte anglophone, le logarithme de base e s'écrit « $\log$ »... Suivant les livres, il faut donc toujours vérifier les notations !
b. En l'honneur de **John Napier**, parfois francisé en Jean Neper.

3 Série d'exercices N° 2

Exercice 3.1

Lorsque c'est possible (c'est-à-dire lorsque le logarithme est défini selon la Définition 2.1), calculez les valeurs suivantes sans l'aide de la calculatrice et sans vous référez à aucune des pages précédentes de ce Dossier :

(a) $\log_2(8) =$

(b) $\text{lb}(1024) =$

(c) $\log_3(243) =$

(d) $\log_4(256) =$

(e) $\log_5(25) =$

(f) $\log_5(-25) =$

(g) $\log_5(1) =$

(h) $\log_5(0) =$

(i) $\log(1\,000\,000) =$

(j) $\text{lb}\left(\frac{1}{16}\right) =$

(k) $\log_9(3) =$

(l) $\log(0.001) =$

(m) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) =$

(n) $\log_3\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) =$

(o) $\log_{128}\left(\frac{1}{2}\right) =$

(p) $\log_{-3}(9) =$

(q) $\log_{-3}(-27) =$

(r) $\log_{-3}(-9) =$

(s) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{16}\right) =$

(t) $\log_{\frac{1}{16}}(2) =$

(u) $\log_0(1) =$

(v) $\log_0(0) =$

(w) $\log_0(2) =$

(x) $\log_0(-10) =$

(y) $\log_1(1) =$

(z) $\log_1(3) =$

Exercice 3.2

Comparez les exercices 1.1 et 3.1 ainsi que leurs réponses. Attention, il y a des subtilités !

Exercice 3.3
Calculez sans l'aide de la calculatrice :

(a) $\log_3(81) = 21$

(b) $\log_4(1) = 0$

(c) $\log(10) = 1$

(d) $\log_2(32) = 5$

(e) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = 2$

(f) $\log_4(64) = 3$

(g) $\cancel{\log(0) =}$

(h) $\log_3(27) = 3$

(i) $\log_{\sqrt{e}}(e^6) = 12$

(j) $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

(k) $\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{2}) = -\frac{1}{4}$

$(2^{-2})^{x} = 2^{1/2}$

(l) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$

(m) $\cancel{\mathrm{lb}(-4) =}$

(n) $\log_1(1) = \infty$

(o) $\log_3(\sqrt{3}) = -2$

(p) $\log_{\frac{1}{2}}(8) = -3$

(q) $\log_{\sqrt{2}}(4) = 3$

(r) $\mathrm{lb}(64) = 6$

(s) $\log(10\,000) = 4$

(t) $\ln(\mathrm{e}) = 1$

(u) $\log(0.01) = -2$

(v) $\log_9(3) = 3/2$

(w) $\log_3\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -1/4$

(x) $\log_{128}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}$

(y) $\log_{0.3}(0.3^{\pi}) = \pi$

(z) $\log\left(\frac{1}{\sqrt[4]{1000}}\right) = -\frac{1}{2}$

$\cancel{1000}^{-1/4 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$

4 Premières propriétés des logarithmes

Théorème 4.1 (Premières propriétés des logarithmes)
Soit $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Alors on a :

$$\boxed{\log_b(1) = 0} \qquad \boxed{\log_b(b^x) = x \qquad (\text{pour } x \in \mathbb{R})}$$

$$\boxed{\log_b(b) = 1} \qquad \boxed{b^{\log_b(x)} = x \qquad (\text{pour } x > 0)}$$

Remarque 4.2
On voit dans les deux égalités de droite du Théorème ci-dessus que « b puissance ... » et « logarithme de base b de ... » sont des opérations qui font le « contraire » et qui « s'annulent mutuellement ». Nous reviendrons sur ce point plus tard.

Exercice 4.3
Avec votre voisin·e, expliquez pourquoi ces quatre égalités sont vraies. Pour les deux égalités de droite, commentez les domaines de validité (pour x).

5 Série d'exercices No 3

Exercice 5.1

Sans l'aide de la calculatrice, déterminez la valeur de x.

(a) $\log_x(3) = \frac{1}{2}$ ✓ $x = 9$

(b) $\log_{100}(0.0001) = x$ ✓ -2

(c) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right) = x = -3$ ✓ $e^x = e^{-3}$

(d) $\log\left(\frac{100}{\sqrt[3]{1000000}}\right) = x = -16$ ✗ $x = 0$

(e) $\ln\left(\sqrt[3]{e^5}\right) = x = 5/3$ ✓ $e^x = e^{5/3}$

(f) $\log_x\left(\frac{1}{16}\right) = 2$ ✓ $x^2 = \frac{1}{16}$, $x = \frac{1}{4}$

(g) $\log_3(x) = \frac{1}{5}$ $3^{1/5} = x$ ✓

(h) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt[n]{e^3}}\right) = x = -3/n$ $e^x = e^{-3/n}$

(i) $\log_{-x}\left(\frac{1}{64}\right) = 6$ $= -1/2$

(j) $\text{lb}\left(-\frac{1}{32}\right) = x$ ✓

(k) $\log(-10) = x$ ✓

(l) $\log_{\sqrt{\pi}}(1) = x$ $(\pi^{1/2})^x = 1$ ✗

(m) $\log_5(\sqrt{125}) = x = \frac{3}{2}$ ✓ $5^x = 5^{\frac{3}{2}}$

(n) $\log_2\left(\frac{1}{32}\right) = x = -5$ ✓ $2^x = 2^{-5}$

(o) $\log_{100}(5^0) = x = 0$ ✓

(p) $\text{lb}\left(\log_3\left(\frac{1}{81}\right)\right) = x$ ✓ $3^x = 3^{-4}$

(q) $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{9}\right) = x = \frac{1}{3}$ ✗ $(3^{1/2})^x = \frac{1}{3} = \frac{2}{18}$

(r) $\log_x(0.125) = -3$ ✗ $x^{-3} = 0{,}125$

(s) $\log_\pi\left(\frac{\pi^3}{\sqrt{\pi}}\right) = x = 5/2$ ✓ $\pi^x = \pi^{3-\frac{1}{2}} = \pi^{5/2}$

(t) $\log_{\pi^2}(\pi^3) = x = 3/2$ ✓ $(\pi^2)^x = \pi^3$, $2x = 3$, $x = 3/2$

Exercice 5.2

Déterminez la valeur de x sans vous aider de la calculatrice :

(a) $\log_6(1) = x = 0$ ✓

(b) $\log_7(7) = x = 1$ ✓

(c) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = x = -4$ ✓

(d) $\log_b\left(\frac{1}{b}\right) = x = -1$ ✓

(e) $\log_a(\sqrt[n]{a}) = x = 1/n$ ✓

(f) $\log_3(x) = -2 = 1/9$ ✓

(g) $\log_2(x) = 5 = 32$ ✓

(h) $\log_9(x) = 0.5 = 3$ ✓ $9^{1/2} = x$

(i) $\log_5(x+1) = 2 = 24$ $5^2 = x+1$

(j) $\log_2(x^2) = 4 = 8$ ✗ 4 $2^4 = x^2$

(k) $2^{\text{lb}(8)} = x = 8$ ✓

(l) $\log_x(64) = 3 = 16$ ✗ 4

(m) $\log_x(64) = 2 = 8$ ✓ $x^2 = 64$

(n) $\log_x(2) = 0$ ✓

(o) $\log_x\left(\frac{1}{25}\right) = 2 = -1$ ✗ $x^2 = \frac{1}{25} = \frac{1}{5}$

(p) $\log_{-2}(4) = x$ ✓

(q) $\log_4(-1) = x$ ✓

(r) $\log_{\sqrt{3}}(3) = x = 2$ ✓

(s) $\log_x(7) = 3 = 7^{1/3}$ ✓ $x^3 = 7$

(t) $\log_3(x^2) = 4 = 9$ ✓ $3^4 = x^2$

(u) $2 \cdot \log_3(x) = 4$ $3^2 = x = 9$ ✓

(v) $3^{\log_3(4)} = x$ ✓ $3^x = 4$

Exercice 5.3

Résolvez les exercices 25 et 26 p. 216 du Livre [1].

6 Le calcul de logarithmes avec la calculatrice

La plupart des calculatrices sont munies des deux touches suivantes :

- touche $\boxed{\text{LN}}$: logarithme de base e ;
- touche $\boxed{\text{LOG}}$: logarithme de base 10.

Sur la *hp prime*, on peut écrire `LOG(x,b)` pour calculer le logarithme de base b de x.

Exercice 6.1 (Utilisation de la calculatrice)
A l'aide de la calculatrice, vérifiez certains des calculs faits jusqu'à présent. Calculez notamment les valeurs exactes de l'Exercice 1.5, page 4.

Le but de cet exercice est que vous appreniez à manier la calculatrice pour calculer des logarithmes. Passez-y le temps qu'il faut !

A Réponses des exercices

1.1

(a) $2^{\mathbf{3}} = 8$

(b) $2^{\mathbf{10}} = 1024$

(c) $3^{\mathbf{5}} = 243$

(d) $4^{\mathbf{4}} = 256$

(e) $5^{\mathbf{2}} = 25$

(f) impossible

(g) $5^{\mathbf{0}} = 1$

(h) impossible

(i) $10^{\mathbf{6}} = 1\,000\,000$

(j) $2^{\mathbf{-4}} = \frac{1}{16}$

(k) $9^{\mathbf{\frac{1}{2}}} = 3$

(l) $10^{\mathbf{-3}} = \frac{1}{1000} = 0.001$

(m) $3^{\mathbf{-3}} = \frac{1}{27}$

(n) $3^{\mathbf{-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

(o) $128^{\mathbf{-\frac{1}{7}}} = \frac{1}{2}$

(p) $(-3)^{\mathbf{2}} = 9$

(q) $(-3)^{\mathbf{3}} = -27$

(r) impossible

(s) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathbf{4}} = \frac{1}{16}$

(t) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\mathbf{-\frac{1}{4}}} = 2$

(u) impossible

(v) tout $y \in \left]0\,;\infty\right[$

(w) impossible

(x) impossible

(y) tout $y \in \mathbb{R}$

(z) impossible

1.3 Il n'y a pas de corrigé pour cet Exercice.

1.4 Il n'y a pas de corrigé pour cet Exercice.

1.5

(a) $y \approx 3.17$

(b) $y \approx 5.977$

(c) $y \approx -1.943$

3.1

(a) 3

(b) 10

(c) 5

(d) 4

(e) 2

(f) non défini

(g) 0

(h) non défini

(i) 6

(j) -4

(k) $\frac{1}{2}$

(l) -3

(m) -3

(n) $-\frac{1}{4}$

(o) $-\frac{1}{7}$

(p) non défini

(q) non défini

(r) non défini

(s) 4

(t) $-\frac{1}{4}$

(u) non défini

(v) non défini

(w) non défini

(x) non défini

(y) non défini

(z) non défini

3.3

(a) 4
(b) 0
(c) 1
(d) 5
(e) 2
(f) 3
(g) indéfini
(h) 3
(i) 12
(j) -2
(k) $-\frac{1}{4}$
(l) -3
(m) indéfini
(n) indéfini (car $b = 1$ interdit !)
(o) $\frac{1}{2}$
(p) -3
(q) 4
(r) 6
(s) 4
(t) 1
(u) -2
(v) $\frac{1}{2}$
(w) $-\frac{1}{4}$
(x) $-\frac{1}{7}$
(y) π
(z) $-\frac{3}{4}$

5.1

(a) 9
(b) -2
(c) -3
(d) 0
(e) $\frac{5}{3}$
(f) $\frac{1}{4}$ $(-\frac{1}{4}$ à rejeter)
(g) $\sqrt[5]{3}$
(h) $-\frac{3}{n}$
(i) $-\frac{1}{2}$ $(+\frac{1}{2}$ à rejeter)
(j) non défini
(k) non défini
(l) 0
(m) $\frac{3}{2}$
(n) -5
(o) 0
(p) non défini
(q) -4
(r) 2
(s) $\frac{5}{2}$
(t) $\frac{3}{2}$

5.2

(a) 0
(b) 1
(c) -4
(d) -1 (valable si $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$)
(e) $\frac{1}{n}$ $(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, n \in \mathbb{N}^*)$
(f) $\frac{1}{9}$
(g) 32
(h) 3
(i) 24
(j) ± 4
(k) 8
(l) 4
(m) 8 $(-8$ à rejeter)
(n) impossible
(o) $\frac{1}{5}$
(p) log de base négative indéfini
(q) non défini
(r) 2
(s) $\sqrt[3]{7}$
(t) ± 9
(u) 9
(v) 4

Références

[1] FAVRE, Jean-Pierre : Maths pour la matu pro. 6e édition. Promath, 2023