« Équations puissances » (Potenzgleichungen)

Table des matières

1 Introduction : rappel sur les équations de la forme $x^2 = C$

Exemple 1.1
Résolvons les équations suivantes, de la même manière que nous le faisions en Math BF :

$$x^2 = 9 \qquad x^2 = -9 \qquad x^2 = 2$$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$
$\pm x = 3$
$x = \pm 3$
$S_x = \{\pm 3\}$

impossible
$S_x = \emptyset$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{2}$
$\pm x = \sqrt{2}$
$x = \pm\sqrt{2}$
$S_x = \{\pm\sqrt{2}\}$

Remarque 1.2
Voici une question que nous avons déjà discutée à maintes reprises :

Finalement, la racine carrée de 9, c'est 3, -3, ou les deux ?

Réponse :

Par définition de ce qu'est $\boxed{\text{la}}$ racine carrée d'un nombre positif, la racine carrée de 9 vaut 3. Point barre. Donc :

$$\sqrt{9} = 3 \ ✓ \qquad \cancel{\sqrt{9} = -3} \ ✗ \qquad \cancel{\sqrt{9} = \pm 3} \ ✗$$

Par contre, l'équation $x^2 = 9$ a deux solutions :

$$x^2 = 9 \iff x = \pm 3$$

Ce sont deux choses qui se ressemblent mais qui sont légèrement différentes !

- Dans le premier cas, on effectue une opération (qui ne peut donc admettre qu'une seule réponse, par définition).
- Dans le second cas, on résout une équation (dont le nombre de solutions peut varier comme nous l'avons vu de nombreuses fois).

2 Liens entre puissances, racines et valeur absolue

Exemple 2.1
Effectuons les huit calculs suivants :

$\sqrt{5^2} =$	5	$(\sqrt{25})^2 =$	25
$\sqrt[3]{5^3} =$	5	$(\sqrt[3]{125})^3 =$	125
$\sqrt{(-5)^2} =$	5	$(\sqrt{-25})^2 =$	$\emptyset$
$\sqrt[3]{(-5)^3} =$	-5	$(\sqrt[3]{-125})^3 =$	-125

Théorème 2.2
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors on a les égalités suivantes :

	n pair	n impair
$x > 0$	$\sqrt[n]{x^n} = x$; $\sqrt[n]{x^n} = \lvert x \rvert$	$\sqrt[n]{x^n} = \lvert x \rvert$
$x < 0$	$\sqrt[n]{x^n} = -x$	

	n pair	n impair
$x > 0$	$(\sqrt[n]{x})^n = x$	$(\sqrt[n]{x})^n = x$
$x < 0$		

Dans <u>ce</u> chapitre, nous utiliserons le tableau de gauche.

Remarque 2.3
Comme d'habitude, il ne sert à rien d'apprendre ces formules par cœur ! Mieux vaut comprendre le principe en ayant des exemples (comme en haut de la page) en tête.

Remarque 2.4
Rappel :

$$(-x)^2 = x^2 = |x|^2 = |x^2|$$

Et il en est de même pour tout exposant n <u>pair</u>.

3 Equations de la forme $x^n = C$ ou $\big(f(x)\big)^n = C$

Exemple 3.1

Résolvons les équations ci-dessous de manière rigoureuse :

$$x^2 = -25$$

$$\underbrace{\sqrt{x^2}}_{|x|} = \underbrace{\sqrt{-25}}_{\notin \mathbb{R}}$$

$$S_x = \emptyset$$

$$x^3 = -125$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-125}$$

$$x = -5$$

$$S_x = \{5\}$$

$$x^2 = 25$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

$$|x| = 5$$

$$\pm x = 5$$

$$x = \pm 5$$

$$S_x = \{\pm 5\}$$

$$x^3 = 125$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{125}$$

$$x = 5$$

$$S_x = \{5\}$$

$$(3x+1)^2 = 9$$

$$\sqrt{(3x+1)^2} = \sqrt{9}$$

$$|3x+1| = 3$$

$$3x+1 = \pm 3$$

$$3x+1 = 3 \qquad\qquad 3x+1 = -3$$

$$3x = 2 \qquad\qquad 3x = -4$$

$$x = \frac{2}{3} \qquad\qquad x = -\frac{4}{3}$$

$$S_x = \left\{-\frac{4}{3} ; \frac{2}{3}\right\}$$

$$8 \cdot (2x-3)^3 = 1$$

$$\sqrt[3]{8(2x-3)^3} = \sqrt[3]{1}$$

$$2(2x-3) = 1$$

$$2x - 3 = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{1}{2} + 3$$

$$x = \frac{\frac{1}{2} + \frac{6}{2}}{2}$$

$$x = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{7}{4}$$

$$S_x = \left\{\frac{7}{4}\right\}$$

4 Série d'exercices

4.1 Exercices de routine

Exercice 4.1

Les équations ci-après sont de la forme $\boxed{x^n = C}$ (la dernière équation peut y être facilement ramenée). Résolvez-les sans l'aide de la calculatrice.

(a) $x^3 = 64$

(b) $x^4 = -81$

(c) $x^2 = \dfrac{9}{100}$

(d) $x^5 = 10^{-5}$

(e) $x^6 = 10^{-6}$

(f) $x^4 = 3^{16}$

(g) $x^3 = 7$

(h) $x^{12} - 19 = 0$

(i) $x^{-3} = \sqrt[4]{5}$

Exercice 4.2

Les équations ci-après sont de la forme $\boxed{\big(f(x)\big)^n = C}$ (la dernière équation peut y être facilement ramenée). Résolvez-les sans l'aide de la calculatrice.

(a) $(x+1)^3 = 64$

(b) $(x-2)^4 = -81$

(c) $(x+3)^2 = 81$

(d) $(x^2+12x+13)^5 = 32$

(e) $(x^2+3x-8)^2 = 100$

(f) $|x^2+3x-8|^2 = 100$

(g) $(x^2-3x-2)^3 = 8$

(h) $|x^2-3x-2|^3 = 8$

4.2 Exercices d'approfondissement

Exercice 4.3

Résolvez les équations ci-dessous à l'aide d'un changement de variable adéquat :

(a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

(b) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

(c) $9x^4 + 50x^2 - 24 = 0$

~~(d)~~ $\cancel{x^4 - 18x^2 + 25 = 0}$

(e) $2(3x+1)^2 - 32(3x+1) + 126 = 0$

(f) $(x^2-12)^2 - (x^2-12) - 12 = 0$

(g) $(x^2+5x-2)^2 + 4(x^2+5x-2) - 32 = 0$

(h) $\left(2x + \dfrac{4}{x}\right)^2 - \left(2x + \dfrac{4}{x}\right) - 72 = 0$

(i) $x^2 + 3x - \dfrac{20}{x^2+3x} = 8$

Exercice 4.4
Résolvez les équations ci-dessous à l'aide d'un changement de variable adéquat :

(a) $x^8 - 626x^4 + 625 = 0$

(b) $x^{10} + 31x^5 - 32 = 0$

(c) $x^{16} = 9 + 8x^8$

(d) $x^6 - 42 = x^3$

(e) $8x^6 - 63x^3 - 8 = 0$

(f) $\cancel{8x^6 + 65x^3 + 8 = 0}$

Exercice 4.5
Résolvez l'équations suivante sans l'aide de la calculatrice.

$$(x^4 - 7)^{-5} = 32$$

4.3 Exercices contextualisés

Les exercices listés ci-dessous sont à résoudre à la main, en utilisant la calculatrice uniquement pour faire des opérations impossibles à faire sinon.

Exercice 4.6
Résolvez l'exercice 21, p. 92 du Livre [1].

Exercice 4.7
Résolvez l'exercice 22, p. 92 du Livre [1].

A Réponses des exercices

4.1

(a) $\mathcal{S}_x = \{4\}$

(b) $\mathcal{S}_x = \varnothing$

(c) $\mathcal{S}_x = \{\pm\frac{3}{10}\}$

(d) $\mathcal{S}_x = \{10^{-1}\}$

(e) $\mathcal{S}_x = \{\pm 10^{-1}\}$

(f) $\mathcal{S}_x = \{\pm 81\}$

(g) $\mathcal{S}_x = \{\sqrt[3]{7}\}$

(h) $\mathcal{S}_x = \{\pm \sqrt[12]{19}\}$

(i) $\mathcal{S}_x = \{\frac{1}{\sqrt[12]{5}}\} = \{\frac{\sqrt[12]{5^{11}}}{5}\}$

4.2

(a) $\mathcal{S}_x = \{3\}$

(b) $\mathcal{S}_x = \varnothing$

(c) $\mathcal{S}_x = \{-12\,;6\}$

(d) $\mathcal{S}_x = \{-11\,;-1\}$

(e) $\mathcal{S}_x = \{-6;-2;-1;3\}$

(f) $\mathcal{S}_x = \{-6;-2;-1;3\}$

(g) $\mathcal{S}_x = \{-1\,;4\}$

(h) $\mathcal{S}_x = \{-1\,;0\,;3\,;4\}$

4.3

(a) $\mathcal{S}_x = \{\pm 1\}$

(b) $\mathcal{S}_x = \{\pm 2\,;\pm 3\}$

(c) $\mathcal{S}_x = \{\pm\frac{2}{3}\}$

(d) $\mathcal{S}_x = \left\{\pm\sqrt{9 \pm 2\sqrt{14}}\right\}$.
Il y a donc 4 solutions !
Remarque : la réponse peut également s'écrire : $\mathcal{S}_x = \left\{\pm\left(\sqrt{7} \pm \sqrt{2}\right)\right\}$.
Exercice facultatif : montrez par calculs que ces deux réponses sont bien identiques !

(e) $\mathcal{S}_x = \{2\,;\frac{8}{3}\}$

(f) $\mathcal{S}_x = \{\pm 3, \pm 4\}$

(g) $\mathcal{S}_x = \{-6;-3;-2;1\}$

(h) $\mathcal{S}_x = \{-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2};\frac{1}{2};4\}$

(i) $\mathcal{S}_x = \{-5;-2;-1;2\}$

4.4

(a) $\mathcal{S}_x = \{\pm 1\,;\pm 5\}$

(b) $\mathcal{S}_x = \{-2\,;1\}$

(c) $\mathcal{S}_x = \{\pm\sqrt[4]{3}\}$

(d) $\mathcal{S}_x = \{-\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{7}\}$

(e) $\mathcal{S}_x = \{-\frac{1}{2}\,;2\}$

(f) $\mathcal{S}_x = \{-2\,;-\frac{1}{2}\}$

4.5 $\mathcal{S}_x = \{\pm\sqrt[4]{\frac{15}{2}}\}$

Références

[1] FAVRE, Jean-Pierre : Maths pour la matu pro. 6e édition. Promath, 2023