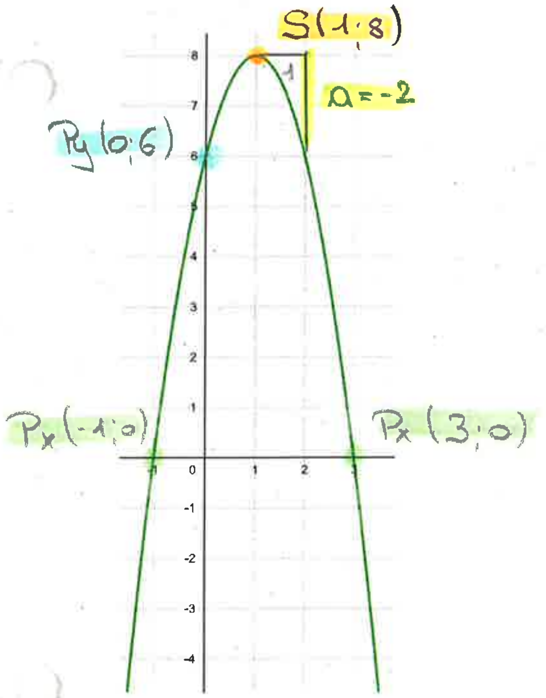
4.1.4 Potenz-, Wurzel- und Polynomfunktionen

1 Wiederholung - Quadratische Funktion

Übung 1 Für die folgende Parabel, geben Sie die 3 Formen der Funktionsgleichung an.



$y = -2(x-1)^2 + 8$

$y = -2(x+1)(x-3)$

$= -2(x^2 - 2x - 3)$

$= -2x^2 + 4x + 6$

h; x_1; x_2 $\Rightarrow$ Achtung Vorzeichen!

Übung 2 Geben Sie die 3 allgemeine Formen einer Parabel an. Was stellen die verschieden Buchstaben graphisch dar?

Scheitelform : $y = a(x-h)^2 + k$

Scheitelpunkt $S(h;k)$

Grundform : $y = ax^2 + bx + c$

$P_y(0;c)$ [b kann man nicht ablesen]

Produktform : $y = a(x-x_1)(x-x_2)$

$P_x(x_1;0)$ $P_x(x_2;0)$

$a > 0$ $\ddot{\cup}$

$a < 0$ $\ddot{\cap}$

$a > 1$ Parabel schliesst sich

$0 < a < 1$ Parabel öffnet sich

2 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind Funktionen der Form $y = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ n positiv !

Falls n negativ $n = -2 \Rightarrow y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$
↙ andere Funktion

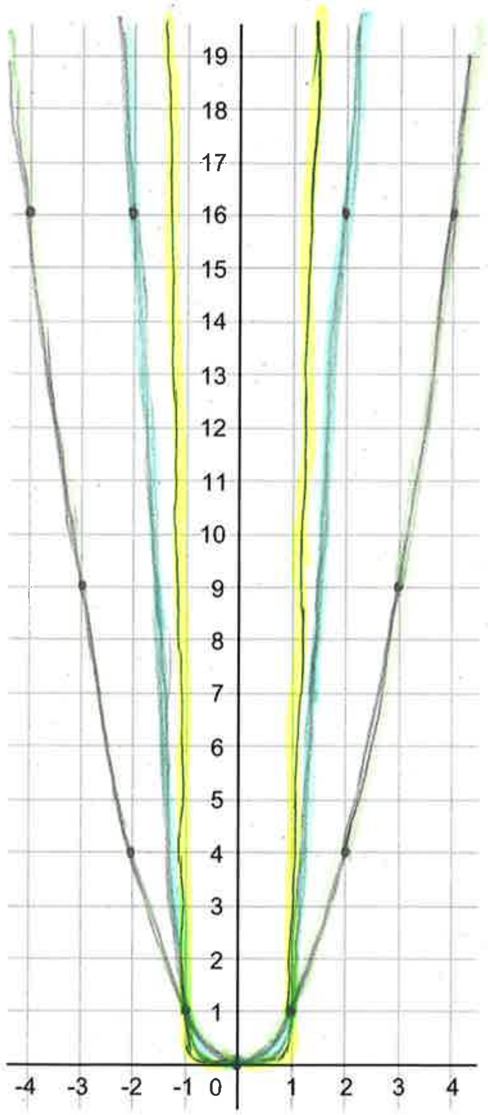
Die quadratische Funktion $y = x^2$ ist eine Potenzfunktion.

Wir analysieren jetzt was passiert wenn die Hochzahl n grösser wird. Hierzu unterscheiden wir zwischen geraden und ungeraden Hochzahlen.

2.1 Gerade Potenzfunktionen

Übung 3 Anhand des Taschenrechners oder GeoGebra, zeichnen Sie folgende Funktionen in das gegebene Koordinatensystem ein.

a) $y = x^2$ b) $y = x^4$ c) $y = x^6$



Was stellen Sie fest ? Wie verhalten sich diese Funktionen wenn n, für n gerade, immer grösser wird ? Bestimmen Sie D und W.

b)

x	0	1	2	-2	3
y	0	1	16	16	81

c)

x	0	1	2	-2
y	0	1	64	64

$D = \mathbb{R}$

$W = \mathbb{R}_+$

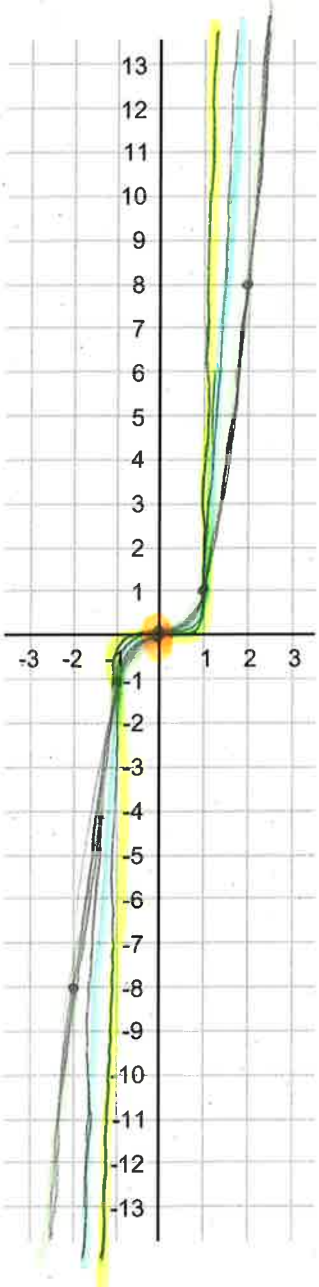
Scheitelpunkt $S(0;0)$

falls n grösser wird, wird die Parabel flacher → plat um den Scheitelpunkt und steiler für $x > 1$
↳ raide

2.2 Ungerade Potenzfunktionen

Übung 4 Anhand des Taschenrechners oder GeoGebra, zeichnen Sie folgende Funktionen in das gegebene Koordinatensystem ein.

a) $y = x^3$ b) $y = x^5$ c) $y = x^7$



Was stellen Sie fest ? Wie verhalten sich diese Funktionen wenn n, für n ungerade, immer grösser wird ? Bestimmen Sie D und W.

a)

x	0	1	-1	2	-2	3
y	0	1	-1	8	-8	27

b)

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	-1	32	-32

Wendepunkt W(0;0)

$D = \mathbb{R}$

$W = \mathbb{R}$

falls n grösser :

$x > 1$: immer steiler

$0 < x < 1$: immer flacher

2.3 Funktionsgleichung einer Potenzfunktion

Die Funktionsgleichung einer Potenzfunktion sieht folgendermassen aus :

$$y = \pm a(x-h)^n + k$$

Wie wir vorhin festgestellt haben, sehen die Graphen für n gerade oder ungerade nicht gleich aus.

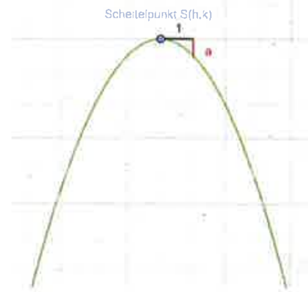
— Gerade Potenzfunktion - Eigenschaften

- Die gerade Potenzfunktion ist symmetrisch, eine Spiegelung an der y-Achse hat keinen Einfluss auf den Graphen, da $a(-(x-h))^n = a(x-h)^n$ für n gerade.
- Die gerade Potenzfunktion besitzt einen Scheitelpunkt mit den Koordinaten $S(h;k)$.

$y = +a(x-h)^n + k$

$D = \mathbb{R}$ und $W = [k; +\infty[$

$y = -a(x-h)^n + k$



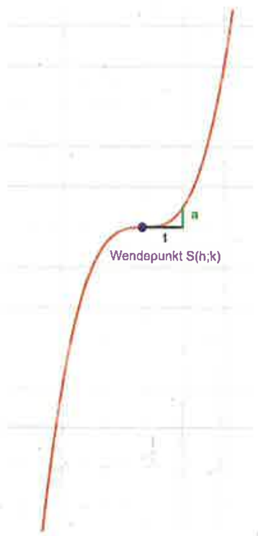
$D = \mathbb{R}$ und $W =]-\infty; k]$

— Ungerade Potenzfunktion - Eigenschaften

- Die ungerade Potenzfunktion ist nicht symmetrisch, aber eine Spiegelung an der x-Achse oder an der y-Achse ergibt den gleichen Graphen, da $a(-(x-h))^n = -a(x-h)^n$ für n ungerade.

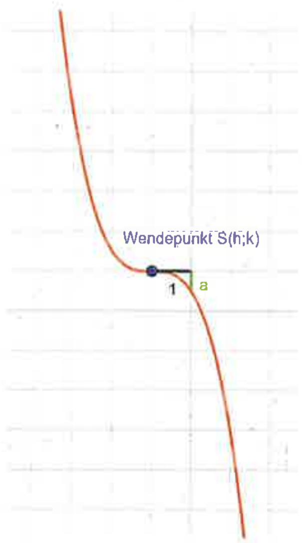
  $y = (-x+s)^3 = (-(x-s))^3 = -(x-s)^3$
- Die ungerade Potenzfunktion besitzt einen Wendepunkt mit den Koordinaten $S(h;k)$.

$y = +a(x-h)^n + k$



$D = \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}$

$y = -a(x-h)^n + k$



$D = \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}$

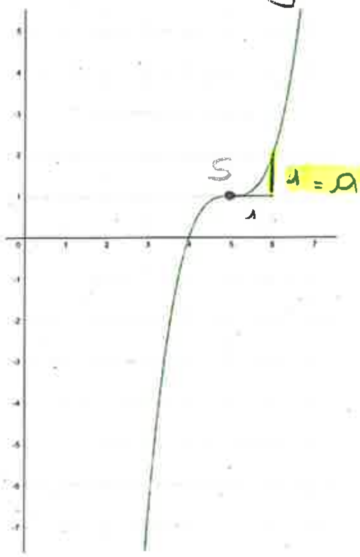
a) d) ⇒ ungerade Potenzfunktionen $n=3$

2.4 Übungen

Bemerkung : In den Übungen werden wir nur Potenzfunktionen für $n = 2, 3$ oder $n = 4$ behandeln. Die Achsensysteme sind zu klein um andere zu zeichnen.

Übung 5 Geben Sie die Funktionsgleichung folgender Graphen an. Bestimmen Sie ausserdem D, W und S.

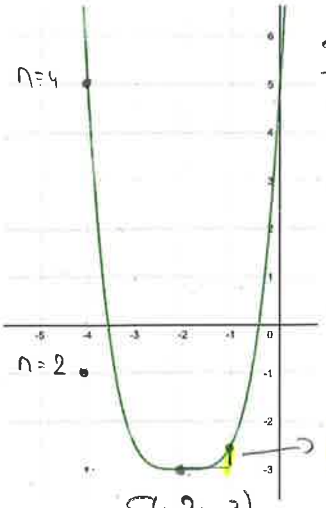
a) Keine Spiegelung



$S(5;1)$ $D = W = \mathbb{R}$

$y = (x-5)^3 + 1$

b)



$D = \mathbb{R}$

$W = [-3; +\infty[$

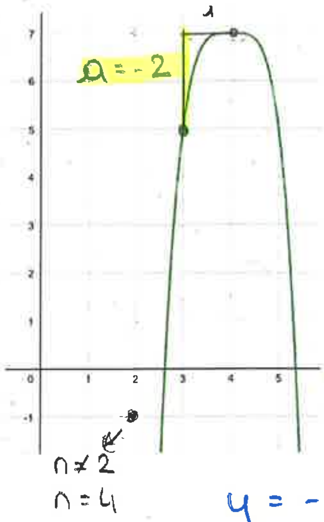
$a = \frac{1}{2}$

$S(-2;-3)$

$y = \frac{1}{2}(x+2)^4 - 3$

Keine Spiegelung

c) $S(4;7)$



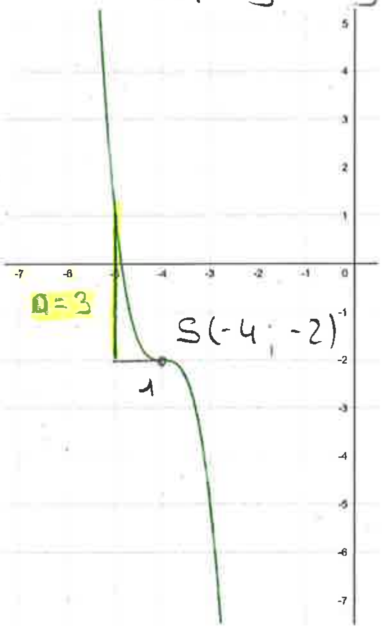
$D = \mathbb{R}$

$W =]-\infty; 7]$

Spiegelung

$y = -2(x-4)^4 + 7$

d) Spiegelung



$D = W = \mathbb{R}$

$y = -3(x+4)^3 - 2$

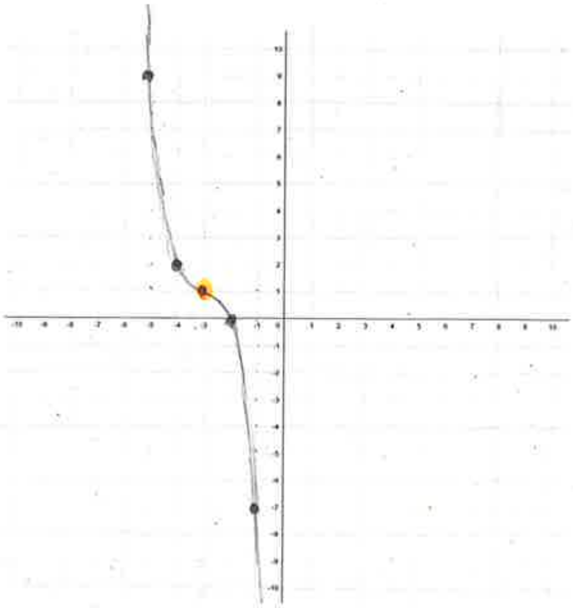
$\ulcorner y = 3(-(x+4))^3 - 2 \lrcorner$

$= 3(-x-4)^3 - 2 \lrcorner$

$(1-x)^3 = \left(-(x-1)\right)^3$
$= -(x-1)^3$

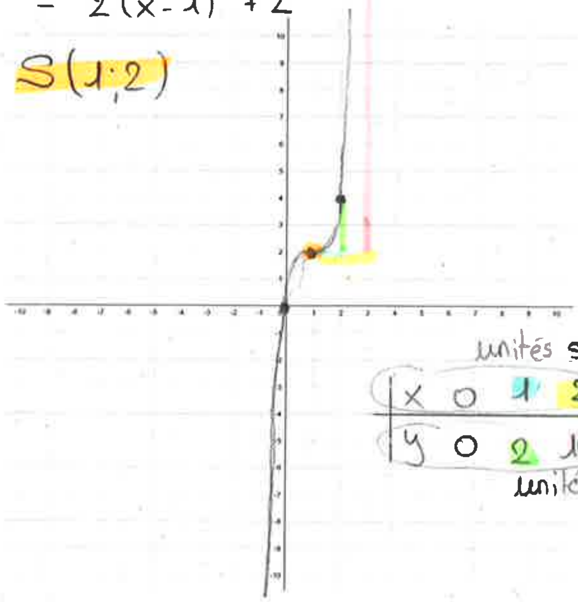
Übung 6 Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen.

a) $y = -(x+3)^3 + 1$ $S(-3;1)$



c) $y = -2(1-x)^3 + 2$
$= 2(x-1)^3 + 2$

$S(1;2)$



$2x^3$

unités sur x

x	0	1	2
y	0	2	16

unités sur y

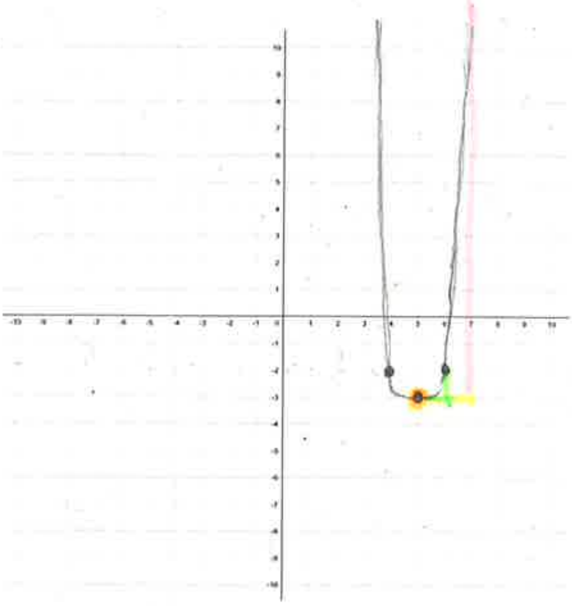
exposant pair => − tombe

$(-x+5)^4 = \left(-(x-5)\right)^4 = (x-5)^4$

$(-x-4)^4 = \left(-(x+4)\right)^4 = (x+4)^4$

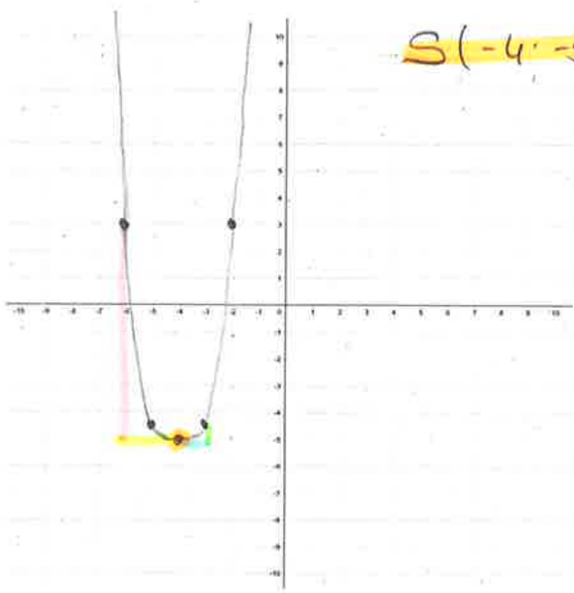
b) $y = (-x+5)^4 - 3 = (x-5)^4 - 3$

$S(5;-3)$



d) $y = \frac{1}{2}(-x-4)^4 - 5 = \frac{1}{2}(x+4)^4 - 5$

$S(-4;-5)$



$y = x^4$

x	0	1	2
y	0	1	[illegible]

$y = \frac{1}{2}x^4$

x	0	1	2
y	0	$\frac{1}{2}$	[illegible]

3 Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen sind Funktionen der Form $y = \sqrt[n]{x}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wir analysieren jetzt was passiert wenn die Wurzel n verschiedene Werte annimmt. Hierzu unterscheiden wir zwischen geraden und ungeraden Wurzeln.

3.1 Gerade Wurzelfunktionen

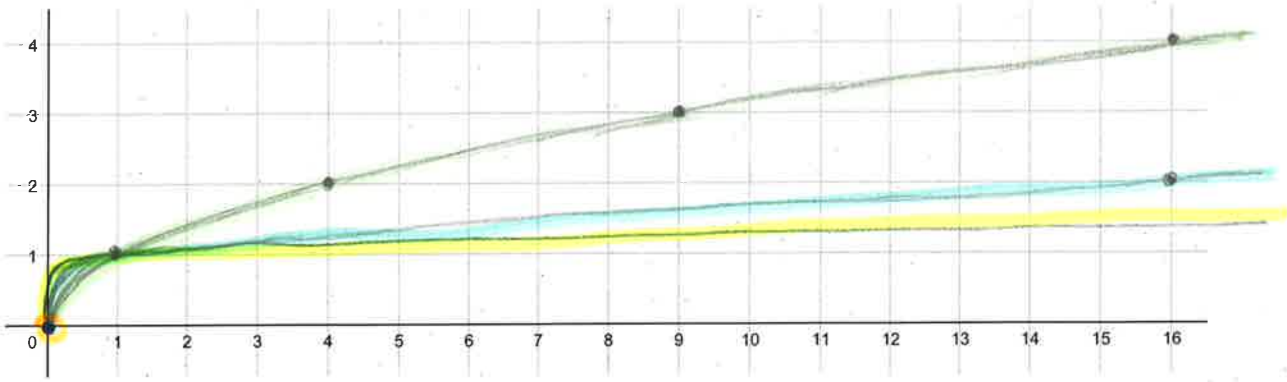
Übung 7 Füllen Sie folgende Tabelle für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ aus :

x	0	1	4	9	16	25	-1
y	0	1	2	3	4	5	/

$\sqrt{-1}$ = undef !

Anhand dieser Tabelle und dem Taschenrechner, zeichnen Sie folgende Funktionen :

a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = \sqrt[4]{x}$ c) $y = \sqrt[6]{x}$



Was stellen Sie fest ? Wie verhalten sich diese Funktionen wenn n, für n gerade, immer grösser wird ? Bestimmen Sie D und W.

b)

x	0	1	16	81	-1
y	0	1	2	3	/

c)

x	0	1	64	-1
y	0	1	2	/

$D = \mathbb{R}_+$ $W = \mathbb{R}_+$ $Im = \mathbb{R}_+$

Anfangspunkt! $S(0;0)$ point de départ

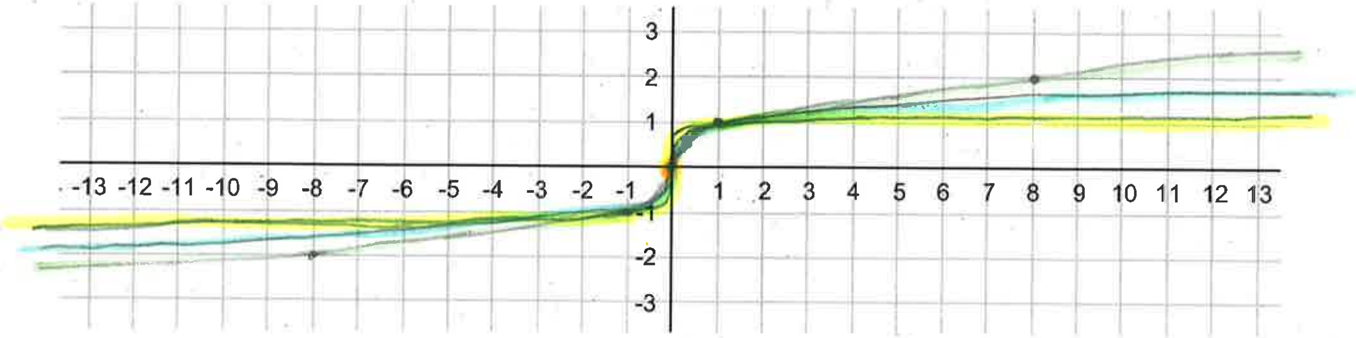
3.2 Ungerade Wurzelfunktionen

Übung 8 Füllen Sie folgende Tabelle für die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ aus :

x	0	1	8	27	-1	-8	-27
y	0	1	2	3	-1	-2	-3

Anhand dieser Tabelle und dem Taschenrechner, zeichnen Sie folgende Funktionen :

a) $y = \sqrt[3]{x}$ b) $y = \sqrt[5]{x}$ c) $y = \sqrt[7]{x}$



Was stellen Sie fest ? Wie verhalten sich diese Funktionen wenn n, für n ungerade, immer grösser wird ? Bestimmen Sie D und W.

b)

x	0	1	-1	32	-32
y	0	1	-1	2	-2

c)

x	0	1	-1	128	-128
y	0	1	-1	2	-2

$D = W = \mathbb{R} = \text{Im}$

S(0;0) $\underbrace{\text{Wendepunkt}}_{\text{point d'inflexion}}$

3.3 Funktionsgleichung einer Wurzelfunktion

Die Funktionsgleichung einer Wurzelfunktion sieht folgendermassen aus :

$$y = \pm a\sqrt[n]{\pm(x-h)} + k$$

Wie wir vorhin festgestellt haben, sehen die Graphen für n gerade oder ungerade nicht gleich aus.

— Gerade Wurzelfunktion - Eigenschaften
   - Die gerade Wurzelfunktion kann an den zwei Achsen gespiegelt werden.
   - Die gerade Wurzelfunktion besitzt einen Anfangspunkt mit den Koordinaten $S(h;k)$.

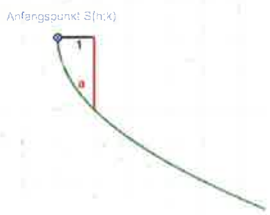
$y = +a\sqrt[n]{x-h} + k$

$D = [h; +\infty[$ und $W = [k; +\infty[$

$y = +a\sqrt[n]{-(x-h)} + k$

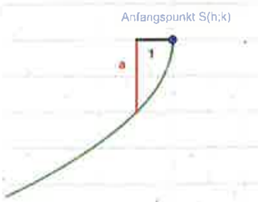
$D =]-\infty; h]$ und $W = [k; +\infty[$

$y = -a\sqrt[n]{x-h} + k$



$D = [h; +\infty[$ und $W =]-\infty; k]$

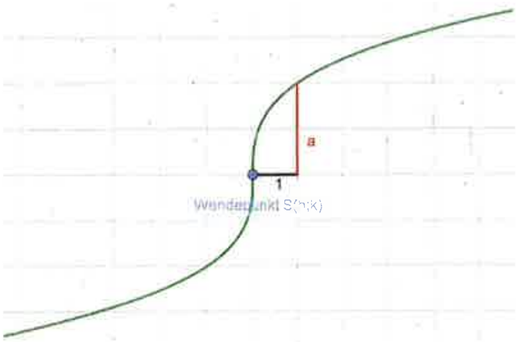
$y = -a\sqrt[n]{-(x-h)} + k$



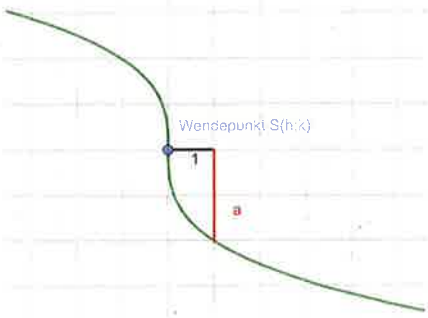
$D =]-\infty; h]$ und $W =]-\infty; k]$

— Ungerade Wurzelfunktion - Eigenschaften
   - Die ungerade Wurzelfunktion ist nicht symmetrisch, aber eine Spiegelung an der x-Achse oder an der y-Achse ergibt den gleichen Graphen, da $a\sqrt[n]{-(x-h)} = -a\sqrt[n]{x-h}$.
   - Die ungerade Wurzelfunktion besitzt einen Wendepunkt mit den Koordinaten $S(h;k)$.
   - Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R}$ und der Wertebereich ist $W = \mathbb{R}$.

$y = +a\sqrt[n]{x-h} + k$



$y = -a\sqrt[n]{x-h} + k$



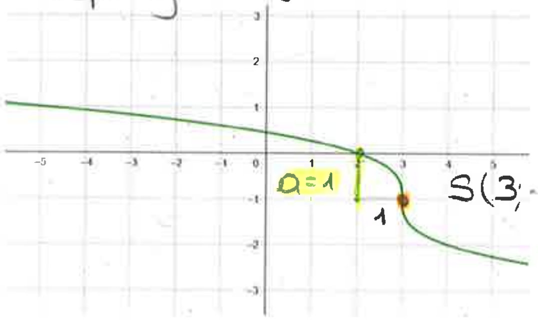
3.4 Übungen

Bemerkung : In den Übungen werden wir nur 2te und 3te Wurzeln behandeln. Die Achsensysteme sind zu klein um andere zu zeichnen.

Übung 9 Geben Sie die Funktionsgleichung folgender Graphen an. Bestimmen Sie ausserdem D, W und S.

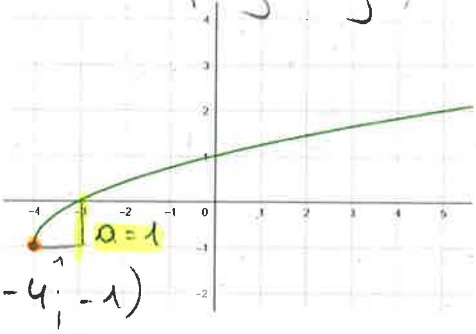
a) Spiegelung $\sqrt[3]{}$

$D = W = \mathbb{R}$



$$y = -\sqrt[3]{x-3} - 1$$
$$= \sqrt[3]{-(x-3)} - 1$$
$$= \sqrt[3]{-x+3} - 1$$

b) keine Spiegelung ; $\sqrt{}$



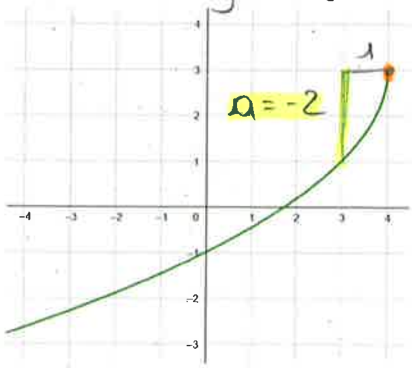
$S(-4; -1)$

$D = [-4; +\infty[$

$W = [-1; +\infty[$

$$y = \sqrt{x+4} - 1$$

c) 2 Spiegelungen $\sqrt{}$



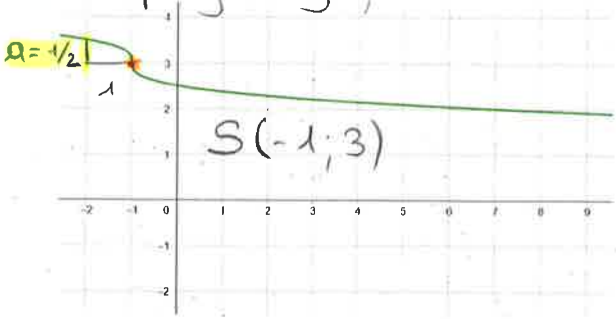
$S(4; 3)$

$D =]-\infty; 4]$

$W =]-\infty; 3]$

$$y = -2\sqrt{-(x-4)} + 3$$
$$= -2\sqrt{-x+4} + 3$$

d) Spiegelung ; $\sqrt[3]{}$



$S(-1; 3)$

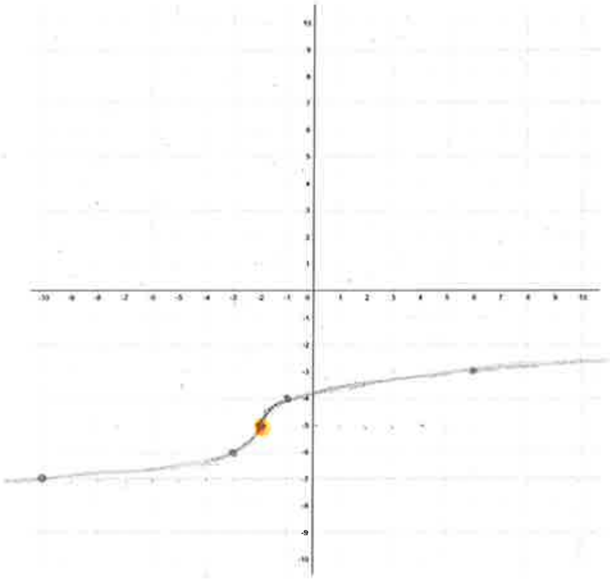
$D = W = \mathbb{R}$

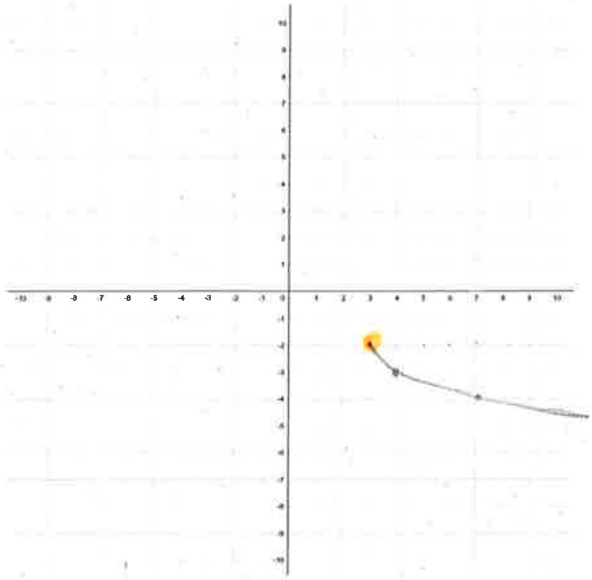
$$y = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{x+1} + 3$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{-(x+1)} + 3$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{-x-1} + 3$$

Übung 10 Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen.

a) $y = \sqrt[3]{x+2} - 5$ $\quad S(-2;-5)$

c) $y = -\sqrt{x-3} - 2$ $\quad S(3;-2)$



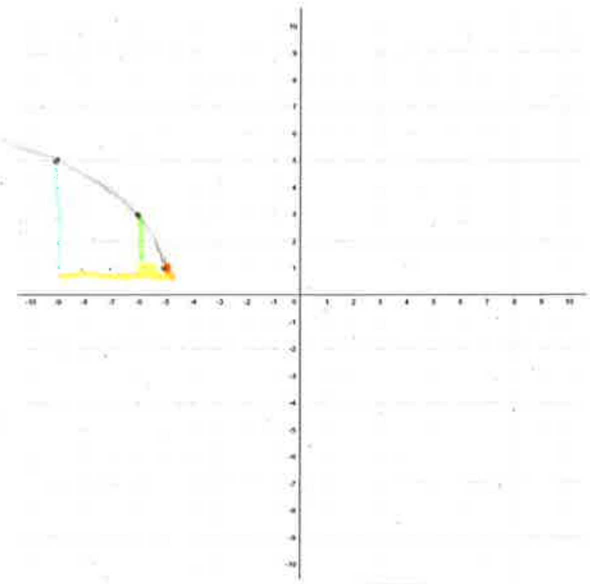


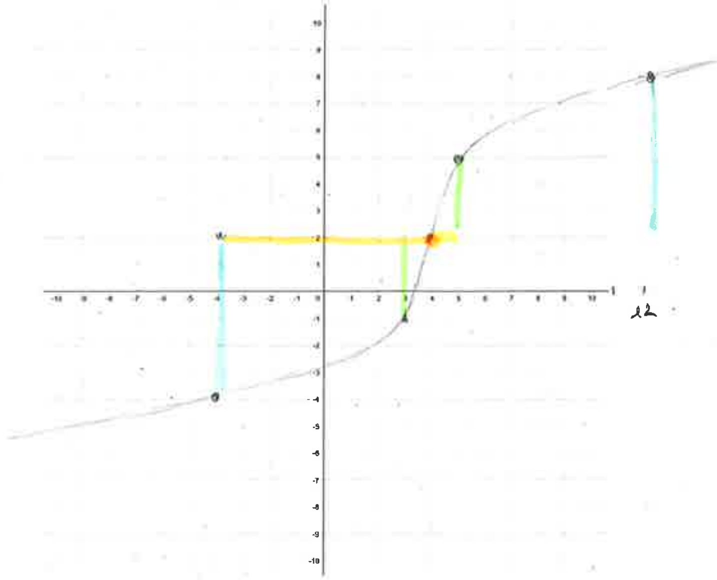
$= 2\sqrt{-(x+5)} + 1$

b) $y = 2\sqrt{-x-5} + 1$ $\quad S(-5;1)$

$S(4;2)$

d) $y = -3\sqrt[3]{-x+4} + 2 = +3\sqrt[3]{x-4} + 2$





$\sqrt{x}$

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

⇒ Schritte x-Achse

⇒ Schritte y-Achse

$\cdot 2$

$2\sqrt{x}$

x	0	1	4	9
y	0	2	4	6

$3 \cdot \sqrt[3]{x}$

x	0	1	8	-8
y	0	3	6	-6

4 Polynomfunktionen

$\Rightarrow$ höchste Potenz

$4x^3 + 7x^2 - 2x + 1$
$\Rightarrow$ Grad 3

Polynomfunktionen des n-ten Gerades sind Funktionen der Form :

$$y = \pm a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) + k$$

Die quadratische Funktion ist eine Polynomfunktion der Form $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Übung 11 Wenn Sie mit der Produktform einer Parabel vergleichen, was entspricht $x_1, x_2, \ldots, x_n$ graphisch ?

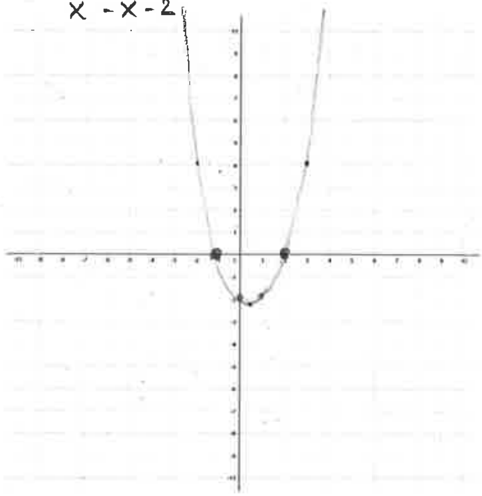
$x_1, \ldots x_n$ Schnittpunkte mit der x-Achse

$P_x(x_1;0)$; $P_x(x_2;0)$ ...

Übung 12 Anhand des Taschenrechners oder GeoGera, skizzieren Sie folgende Graphen :

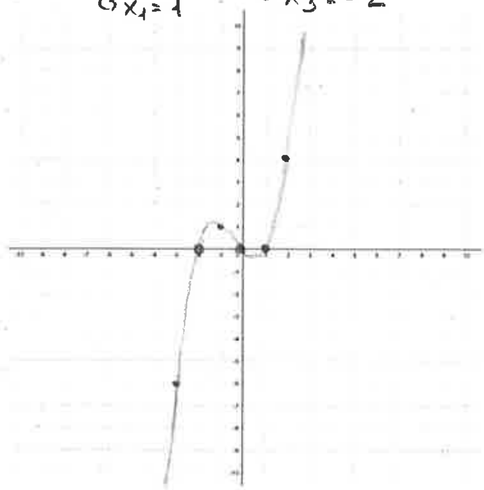
a) $y = (x - 2)(x + 1)$ $h = \frac{1}{2}$

$x^2 - x - 2$

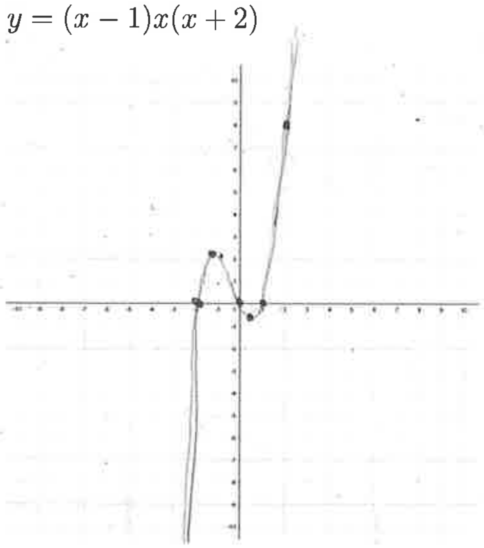


c) $y = \frac{1}{2}(x - 1)x(x + 2)$

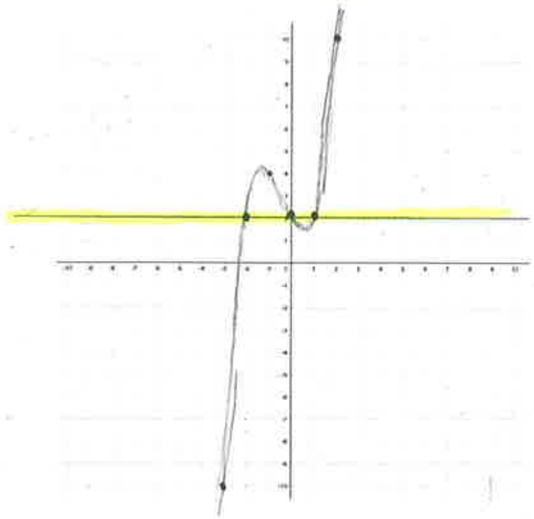
$\hookrightarrow x_2 = 0$ $\hookrightarrow x_1 = 1$ $\hookrightarrow x_3 = -2$



b) $y = (x - 1)x(x + 2)$



d) $y = (x - 1)x(x + 2) + 2$



$k = 2$

Was stellen Sie fest ?

Wir werden diese Funktionen nicht zeichnen, sondern nur ablesen :

a) k bestimmen indem man schaut ob die Funktion nach oben oder nach verschoben ist.

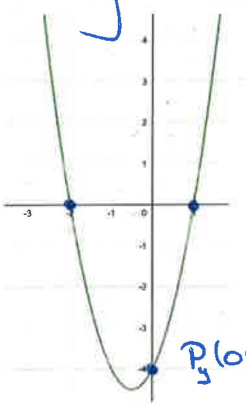
b) x_1, x_2, ... bestimmen.

c) a anhand eines weiteren Punktes berechnen. => durch Einsetzen

4.1 Übungen

Übung 13 Geben Sie die Funktionsgleichung folgender Graphen an, so wie D und W.

a) $y = 2(x+2)(x-1)$



$P_y(0;-4)$

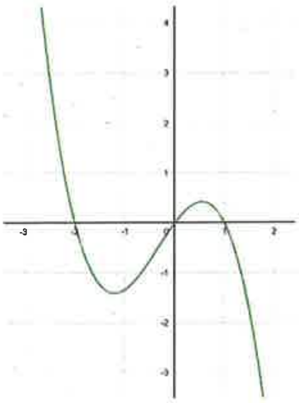
$y = a(x+2)(x-1)$

$P_y(0;-4)$ einsetzen :

$-4 = a \cdot 2 \cdot (-1)$

$-4 = -2a \Rightarrow a = 2$

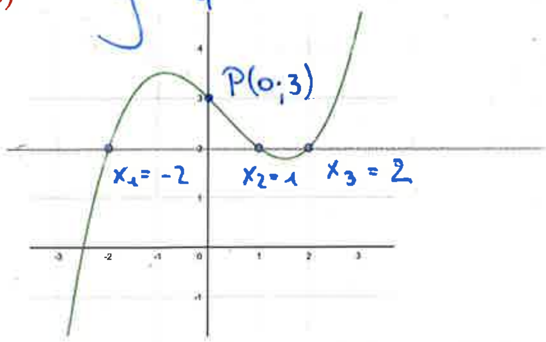
b)



$y = a(x+2)x(x-1)$

a kann man nicht berechnen, wir haben keinen weiteren Punkt

c) $y = \frac{1}{4}(x+2)(x-1)(x-2) + 2$



$P(0;3)$

$k = 2$

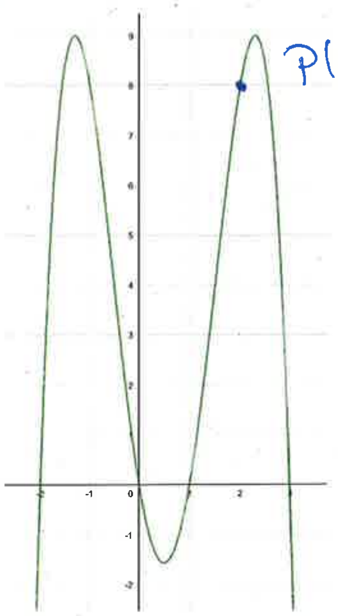
$x_1 = -2$ $x_2 = 1$ $x_3 = 2$

$y = a(x+2)(x-1)(x-2) + 2$

$3 = a \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-2) + 2$

$1 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

d)



$P(2;8)$

$y = a(x+2)x(x-1)(x-3)$

$P(2;8)$

$\hookrightarrow 8 = a \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)$

$8 = -8a$

$a = -1$

$y = -(x+2)x(x-1)(x-3)$