Équations radicales (« Wurzelgleichungen »)

Table des matières

1 Définition et exemples

Définition 1.1
Une **équation radicale** est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît dans au moins une racine n-ième, c'est-à-dire sous au moins un radical $\sqrt[n]{\dots}$

Exemple 1.2
Résolvons l'équation radicale ci-après :

$$\sqrt{3x+1} + 2x = 6$$

n'est pas une transformation équivalente

$$\sqrt{3x+1} = 6 - 2x$$
$$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2 = (6-2x)^2$$
$$3x+1 = 36 - 24x + 4x^2$$
$$0 = 4x^2 - 27x + 35$$

$m \cdot n = 4 \cdot 35 = 140$
$m + n = -27$

$m = -20$
$n = -7$

$$0 = 4x^2 - 20x - 7x + 35$$
$$0 = 4x(x-5) - 7(x+5)$$
$$0 = (4x-7)(x-5)$$

$\frac{7}{4} = x_2$ $5 = x_1$

tester x_1 :

$MG = \sqrt{3 \cdot 5 + 1} + 2 \cdot 5 = 14$
$MD = 6$
$\Big\}\ x_1 \Rightarrow$ KO

tester x_2 :

$MG = \sqrt{3 \cdot \frac{7}{4} + 1} + 2 \cdot \frac{7}{4} = 6$
$MD = 6$
$\Big\}\ x_2 \Rightarrow$ ok

$$S_x = \left\{ \frac{7}{4} \right\}$$

Exemple 1.3
Voici d'autres exemples d'équations radicales (tirées de ce Dossier) :

- $-\sqrt{3x+1} = 4$
- $2\sqrt[3]{2+x} = \sqrt{2x+6}$
- $\sqrt{x+6x\sqrt{x+6}} = x$

Remarque 1.4
Élever les deux membres d'une équation à une puissance paire n'est pas une transformation équivalente !

Mathématiquement :

$$a = b \implies a^2 = b^2 \quad , \quad a^2 = b^2 \;\not\Longrightarrow\; a = b$$

Exemples :

$$\begin{array}{rclcrcl} 3 & = & 3 & \implies & 3^2 & = & 3^2 \\ -3 & = & -3 & \implies & (-3)^2 & = & (-3)^2 \\ 3^2 & = & (-3)^2 & \text{mais} & 3 & \neq & -3 \end{array}$$

En faisant l'opération de mise au carré des deux membres d'une équation, on risque de faire apparaître des solutions étrangères. C'est exactement ce qui est arrivé dans l'Exemple 1.2 que nous avons résolu précédemment. On doit donc s'assurer que les éventuels candidats obtenus sont bien des solutions de l'équation ! Pour faire le test des candidats, nous allons présenter deux approches ; cf. (A) et (B) ci-dessous.

2 Méthode de résolution

Méthode générale de résolution des équations radicales

(1) Isoler $\boxed{\text{une}}$ racine contenant l'inconnue et se ramener à la forme

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$ positif

en gardant éventuellement le facteur multiplicatif devant la racine isolée.

(2) Élever les deux membres de l'équation à la puissance adéquate.

(3) Répéter les étapes (1) et (2) jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de racine en x.

(4) Résoudre l'équation obtenue.

(5) Si l'équation initiale a été élevée au moins une fois à une puissance paire, alors il faut :

(A) tester les candidats dans l'équation de départ ou dans une des équations précédant la première élévation des deux membres à une puissance paire ;
ou

(B) tester les candidats dans g et ne retenir que ceux pour lesquels $g(x) \geqslant 0$.

(6) Donner l'ensemble de solutions $\mathcal{S}_x$.

Remarque 2.1

Le choix de la méthode de test des candidats la plus appropriée dépend du problème. En général, on utilise le test (A) quand il y a plusieurs racines dans l'équation de départ et let test (B) quand il n'y en a qu'une seule.

Remarque 2.2

Le test (B) de la méthode présentée à la page 3 est analogue à ce que nous avons vu pour les équations avec valeur(s) absolue(s).

Cette manière de procéder est correcte, pour la raison suivante :

$$\text{pour } n \text{ pair :} \qquad \sqrt[n]{a} = b \iff \big(a = b^n \ \text{ et } \ b \geqslant 0\big)$$

$$\text{Exemple :} \qquad \sqrt{9} = 3 \iff \big(9 = 3^2 \ \text{ et } \ 3 \geqslant 0\big)$$

Dans le cas qui nous occupe, cela donne :

$$\text{pour } n \text{ pair :} \qquad \sqrt[n]{f(x)} = g(x) \iff \Big(f(x) = \big[g(x)\big]^n \ \text{ et } \ g(x) \geqslant 0\Big)$$

On remarque dans la grande parenthèse de droite le fait que $g(x) \geqslant 0$ implique que $f(x) \geqslant 0$.

Déterminer les valeurs de x qui rendent le radicande $f(x)$ positif en vue de déterminer son «domaine de définition» est donc totalement inutile !

Le domaine de définition de l'équation est déterminé par le signe de g, pas celui de f.

Exemple 2.3

Dans l'Exemple 1.2 de la page 2, on a :

$$\underbrace{\sqrt{3x+1}}_{f(x)} = \underbrace{6-2x}_{g(x)}$$

$$g(5) = 6 - 2\cdot 5 = -4 < 0 \Rightarrow 5 \text{ KO}$$

$$g\left(\tfrac{7}{4}\right) = 6 - 2\cdot\tfrac{7}{4} = \tfrac{5}{2} > 0 \Rightarrow \tfrac{7}{4} \text{ ok}$$

Remarque 2.4

Dans le Livre [1] (pages 81–83), on présente une méthode de résolution légèrement différente, avec la détermination d'un **ensemble de résolution**. (= « ensemble de définition de l'équation »).

Conséquence : les solutions des exercices du Livre auxquelles vous avez accès sont présentées à l'aide de cette méthode-là !

Exemple 2.5
Résolvons l'équation radicale suivante :

$$\sqrt{2+x}-\sqrt{10-3x}+4=0$$

$(a-b)^2$

$$\sqrt{2+x} = \sqrt{10-3x} - 4$$

$$(2+x)^2 = \left(\sqrt{10-3x} - 4\right)^2$$

$$2+x = \left(\sqrt{10-3x}\right)^2 \underline{- 2\sqrt{10-3x}\cdot 4} + 4^2$$

$$2+x = 10-3x - 8\sqrt{10-3x} + 16$$

$$8\sqrt{10-3x} = 24 - 4x$$

$$\left(2\sqrt{10-3x}\right)^2 = (6-x)^2$$

$$4(10-3x) = 36-12x+x^2$$

$$40 \cancel{-12x} = x^2 \cancel{-12x} + 36$$

$$4 = x^2$$

$$\pm x = 2$$

$$S_x = \{\pm 2\}$$

tester x_1 : MG $= \sqrt{2+2} - \sqrt{10-6} + 4 = 4$

MD $= 0$

$x_1 = 2 \Rightarrow$ ↯

tester x_2 : MG $= \sqrt{2-2} - \sqrt{10-6} + 4$
$= 0$

MD $= 0$

$x_2 = -2 \Rightarrow$ OK

$$S_x = \{-2\}$$

3 Exercices de routine

3.1 Série d'exercices N° 1

Exercice 3.1

Résolvez les équations radicales élémentaires suivantes :

(a) $\sqrt{x} = 5$ (c) $\sqrt[3]{x} = 5$ (e) $\sqrt{3x+1} = 4$ (g) $2\sqrt{1-x} = 1$

(b) $\sqrt{x} = -5$ (d) $\sqrt[3]{x} = -5$ (f) $-\sqrt{3x+1} = 4$ (h) $2\sqrt[3]{1-x} = 1$

Exercice 3.2

Résolvez les exercices suivants aux à la page 84 du Livre [1] :

- Exo 2 : tout ; ouvrez l'œil !
- Exo 3 : $\boxed{\text{uniquement}}$ (c)

Synthèse

Solution d'une équation élémentaire de la forme $\sqrt[n]{x} = C$

Soi~~en~~t $C \in \mathbb{R}$

Si n est <u>impair</u>, alors on a :

$$\sqrt[n]{x} = C \iff x = c^n$$

Si n est <u>pair</u>, alors on a :

$$\sqrt[n]{x} = C \iff \begin{cases} x = c^n & \text{si} \quad C \geqslant 0 \\ \text{impossible} & \text{si} \quad C < 0 \end{cases}$$

Solution d'une équation élémentaire de la forme $\sqrt[n]{f(x)} = C$

Soit f une fonction en x et $C \in \mathbb{R}$.

Si n est <u>impair</u>, alors on a :

$$\sqrt[n]{f(x)} = C \iff f(x) = c^n$$

Si n est <u>pair</u>, alors on a :

$$\sqrt[n]{f(x)} = C \iff \begin{cases} f(x) = c^n & \text{si} \quad C \geqslant 0 \\ \text{impossible} & \text{si} \quad C < 0 \end{cases}$$

3.2 Série d'exercices N° 2

Exercice 3.3 (Important !)

Résolvez les équations suivantes :

(a) $\sqrt{x^2+x} = \sqrt{6+2x}$ (b) $\sqrt{x^2+3x} = \sqrt{6+4x}$ (c) $\sqrt{x^2-4x} = \sqrt{6-3x}$

Exercice 3.4

Résolvez-les équations suivantes :

(a) $\sqrt{3x+1} = \sqrt{5x-1}$

(b) $\sqrt[4]{5x-7} = \sqrt[4]{1-x}$

(c) $\sqrt[7]{1+5x-x^2} = \sqrt[7]{3x-2}$

(d) $\sqrt[18]{1+5x-x^2} = \sqrt[18]{3x-2}$

Synthèse

Equations de la forme $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$

Si n est impair, alors on a :

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} \iff f(x) = g(x)$$

Si n est pair, alors on a :

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} \iff f(x) = g(x) \text{ et } f(x) \geq 0$$

$$\iff f(x) = g(x) \text{ et } g(x) \geq 0$$

à choix

3.3 Série d'exercices N° 3

Exercice 3.5

Résolvez-les équations suivantes :

(a) $\sqrt[3]{x^2+5x+6} = -\sqrt[3]{x^2+6x+8}$

(b) $\sqrt{x^2+5x+6} = -\sqrt{x^2+6x+8}$

Synthèse

Equations de la forme $\sqrt[n]{f(x)} = -\sqrt[n]{g(x)}$

Si n est impair, alors on a :

$$\sqrt[n]{f(x)} = -\sqrt[n]{g(x)} \iff f(x) = -g(x)$$

Si n est pair, alors on a :

$$\sqrt[n]{f(x)} = -\sqrt[n]{g(x)} \iff f(x) = g(x) = 0$$

$$\iff f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0$$

3.4 Série d'exercices Nº 4

Exercice 3.6

Résolvez l'équation ci-après et vérifiez les candidats à l'aide de la calculatrice :

$$2\sqrt[3]{2+x} = \sqrt{2x+6}$$

Synthèse

Equations de la forme $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)}$**, avec** $n \neq m$

Il faut élever chaque membre de l'équation à une puissance égale au PPMC

3.5 Série d'exercices Nº 5

Exercice 3.7

Résolvez les exercices suivants à la page 84 du Livre [1] :

- Exo 3, d'abord (b), puis (a)
- Exo 4 : (a) et (b)
- Exo 5 : (b)
- Exo 6 : (a)

Exercice 3.8

Résolvez les deux équations suivantes :

(a) $\sqrt{7-x} = x-5$

(b) $\sqrt{7-x} = 5-x$

Exercice 3.9

Voici la résolution d'une équation radicale d'un élève. Repérez toutes les erreurs :

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{x}+\sqrt{x+2} & = & 3 & \quad \mid \ 2 \text{ puiss} \\ x+x+2 & = & 8 & \\ 2x & = & 10 & \\ x & = & 5 & \end{array}$$

Exercice 3.10

Résolvez l'exercice 15 (d) à la page 91 du Livre [1].

4 Équations élaborées

Exercice 4.1

Résolvez les équations suivantes :

(a) $\sqrt{x-2} = \sqrt{x} - 2$

(b) $2x^{1/6} + x^{1/3} = 15$ [Indication : faites un changement de variable $y = \ldots$]

(c) $\sqrt{3x + 2\sqrt{x}} = x$ [Indication : la valeur $x = 1$ est-elle solution. . . ?]

Exercice 4.2

La méthode de mesure de la dureté des matériaux appelée **échelle de Brinell** implique la compression d'une bille en acier sur la surface du matériau à tester. On utilise une bille de diamètre spécifique et on applique une force déterminée pendant un laps de temps donné. Ensuite, on retire la bille et on mesure le diamètre de l'empreinte laissée sur le matériau.

La **dureté Brinell** ou nombre de Brinell est notée HB ou BH ; le sigle complet est BHN pour *Brinell Hardness Number*.

	Symbole	Grandeur	Unité
$\text{HB} = \dfrac{2F}{\widehat{g}\,\pi\,D\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)}$	HB	dureté Brinell	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
	F	intensité de la force appliquée	N
	$\widehat{g}$	valeur sans unité de l'accélération normale de la pesanteur terrestre : 9,806 65	–
	D	diamètre de la bille	mm
	d	diamètre de l'emprunte laissée par la bille	mm

Tâche à réaliser : Isolez D dans la formule ci-dessus.

5 Exercices challenges

Exercice 5.1

Résolvez les équations plus difficiles suivantes (presque) sans l'aide de la calculatrice :

(a) $\sqrt[3]{7x^3 - 9x^2 + 3x} = \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + x$ [Indication : élevez l'équation directement au cube]

(b) $\sqrt{x + 6x\sqrt{x+6}} = x$ [Indication : $38^2 = 1444$, $48^2 = 2304$]

(c) $\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[6]{x+3} - 2 = 0$ [Indication : faites un changement de variable]

(d) $\sqrt{10 + \sqrt{x^3 + 100}} = 10 - \sqrt{x^3 + 100}$ $[61^2 = 3721,\ 189^2 = 35721,\ 190^2 = 36100]$

(e) $\dfrac{5}{\sqrt{x-1}} + \dfrac{\sqrt{x+4}}{2} = 2\sqrt{x-1}$

A Réponses des exercices

3.1

(a) $\mathcal{S}_x = \{25\}$
(b) $\mathcal{S}_x = \varnothing$
(c) $\mathcal{S}_x = \{125\}$
(d) $\mathcal{S}_x = \{-125\}$
(e) $\mathcal{S}_x = \{5\}$
(f) $\mathcal{S}_x = \varnothing$
(g) $\mathcal{S}_x = \{\frac{3}{4}\}$
(h) $\mathcal{S}_x = \{\frac{7}{8}\}$

3.2

- Exercice 2, p. 84 :
  (a) $\mathcal{S}_x = \varnothing$ [immédiat !]
  (b) $\mathcal{S}_x = \{3\}$ [racines identiques. . .]
  (c) $\mathcal{S}_x = \{\frac{4}{25}\}$
- Exercice 3, p. 84 :
  (c) $\mathcal{S}_x = \{-4\}$

3.3

(a) $\mathcal{S}_x = \{-2\,;3\}$ (b) $\mathcal{S}_x = \{3\}$ (c) $\mathcal{S}_x = \{-2\}$

3.4

(a) $\mathcal{S}_x = \{1\}$
(b) $\mathcal{S}_x = \varnothing$ [$x = \frac{4}{3}$ KO]
(c) $\mathcal{S}_x = \{-1\,;3\}$
(d) $\mathcal{S}_x = \{3\}$ [$x = -1$ KO]

3.5

(a) $\mathcal{S}_x = \{-\frac{7}{2}\,;-2\}$
(b) $\mathcal{S}_x = \{-2\}$ [$x = -\frac{7}{2}$ KO]

3.6 $\mathcal{S}_x = \{-1\,;\sqrt{5}\}$ [$x = -\sqrt{5}$ KO]

3.7

- Exercice 3, p. 85 :
  (a) $\mathcal{S}_x = \{1;6\}$
  (b) $\mathcal{S}_x = \{-7\,;-3\}$
- Exercice 4, p. 86 :
  (a) $\mathcal{S}_x = \{-1\,;0\,;1\}$
  (b) $\mathcal{S}_x = \{-1\,;0\}$
- Exercice 5, p. 84 :
  (b) $\mathcal{S}_x = \{1\,;4\}$
- Exercice 6, p. 86 :
  (a) $\mathcal{S}_x = \{2\sqrt{2}-1\}$ [$x = -2\sqrt{2}-1$ KO]

3.8 (a) $\mathcal{S}_x = \{6\}$ [$x = 3$ KO] (b) $\mathcal{S}_x = \{3\}$ [$x = 6$ KO]

4.1

(a) $\mathcal{S}_x = [2\,;\infty[$
(b) $\mathcal{S}_x = \{729\}$
(c) $\mathcal{S}_x = \{0\,;4\}$ [1 KO]

4.2 $D = \pm\dfrac{2F}{\sqrt{4\,\mathrm{HB}\,\widehat{g}\,\pi\,F - \mathrm{HB}^2\,\widehat{g}^2\,\pi^2\,d^2}}$.

La réponse négative est à rejeter dans ce contexte (un diamètre est une valeur non négative !).

5.1

(a) $\mathcal{S}_x = \{\frac{1}{2}\,;1\}$
(b) $\mathcal{S}_x = \{0\,;43\}$ [-5 KO]
(c) $\mathcal{S}_x = \{-2\}$ [61 KO]
(d) $\mathcal{S}_x = \{-4\}$ [5 KO]
(e) $\mathcal{S}_x = \{5\}$ [$\frac{8}{3}$ KO]

Références

[1] FAVRE, Jean-Pierre : Maths pour la matu pro. 6e édition. Promath, 2023