4.2.3 Fonctions sinus et cosinus

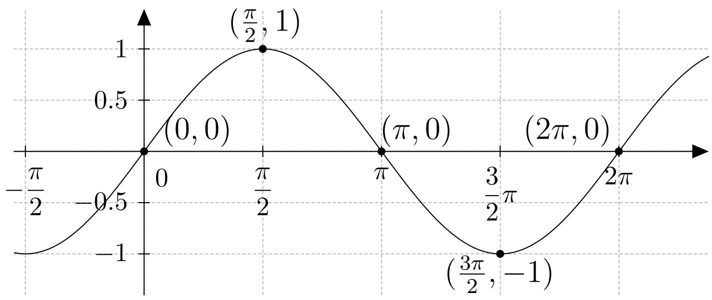
1 Fonctions trigonométriques

Nous avons vu le cercle unité pour le sinus, le cosinus et la tangente. Ici, nous ne regardons que les fonctions sinus et cosinus. Ces fonctions peuvent être tracées dans un système d'axes cartésiens. L'axe x correspond à l'angle (généralement en radians) et l'axe y correspond à la valeur de la fonction trigonométrique.

Imaginez le rayon du cercle unité. Le rayon tourne. Que se passe-t-il avec la valeur du sinus ou du cosinus ? Et si nous faisons avancer le cercle en même temps sur un axe horizontale ? La figure qui résulte de cette animation donne la fonction sinus ou cosinus.

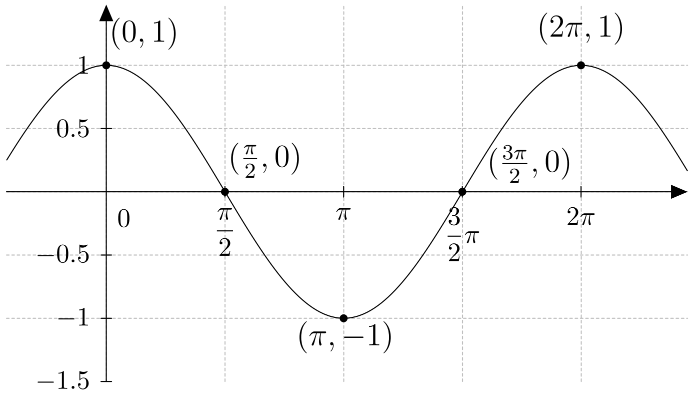
Le graphe de ces fonctions décrit une onde :

— $f(x) = \sin(x)$:



Le cosinus décrit la même onde, mais est décalé de $90° = \frac{\pi}{2}$:

— $f(x) = \cos(x)$:



Remarques :

a) Sur ce graphique, on voit très bien que les deux fonctions oscillent entre -1 et 1.

b) L'onde est infinie, elle répète la même oscillation une infinité de fois.

Nous allons maintenant modifier les graphes de cette fonction pour trouver la forme générale des fonctions trigonométriques.

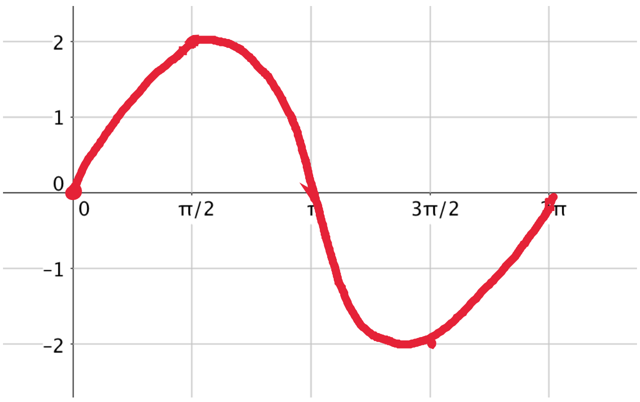
1.1 Amplitude

L'**amplitude** d'une fonction trigonométrique : $y = a\sin(x)$.

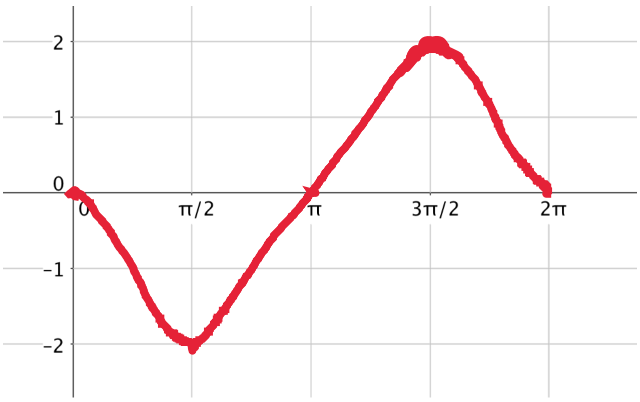
Que se passe-t-il si on multiplie la fonction par un nombre a quelconque ?

Dessiner les fonctions suivantes :

a) $y = 2\sin(x)$



b) $y = -2\sin(x)$



a est appelé **amplitude** de la fonction trigonométrique.

1.2 Longueur d'onde

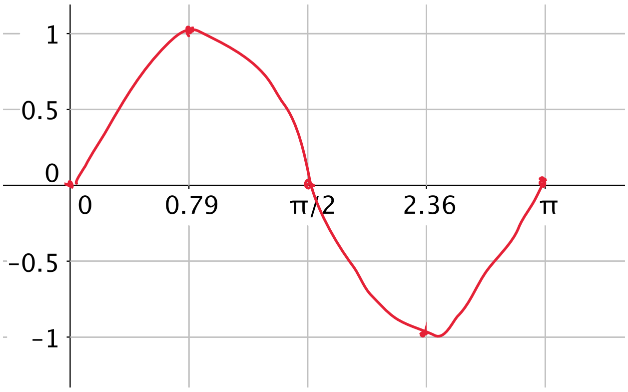
La **longueur d'onde** d'une fonction trigonométrique : $y = \sin(bx)$.

Que se passe-t-il si on multiplie x par un nombre b quelconque ?

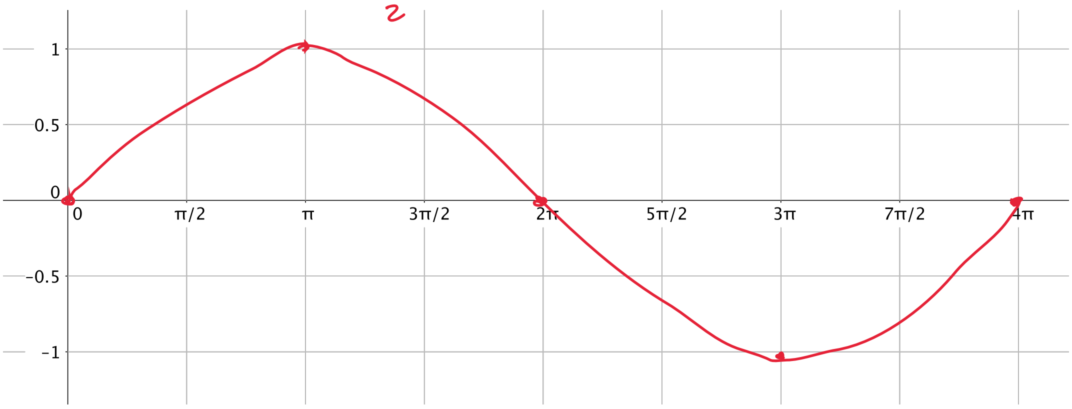
La longueur d'onde ou aussi appelé la période, est la longueur sur l'axe x d'une oscillation complète. La fonction de base a une longueur d'onde de 2π. Si nous multiplions x par un nombre b, la longueur d'onde change de la manière suivante : **Longueur d'onde** $= \dfrac{2\pi}{b}$

Dessiner les fonctions suivantes : $P = \dfrac{2\pi}{b}$

a) $y = \sin(2x)$



b) $y = \sin(\frac{1}{2}x)$ $P = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$



La longueur d'onde modifie la vitesse d'oscillation.

1.3 Déphasage

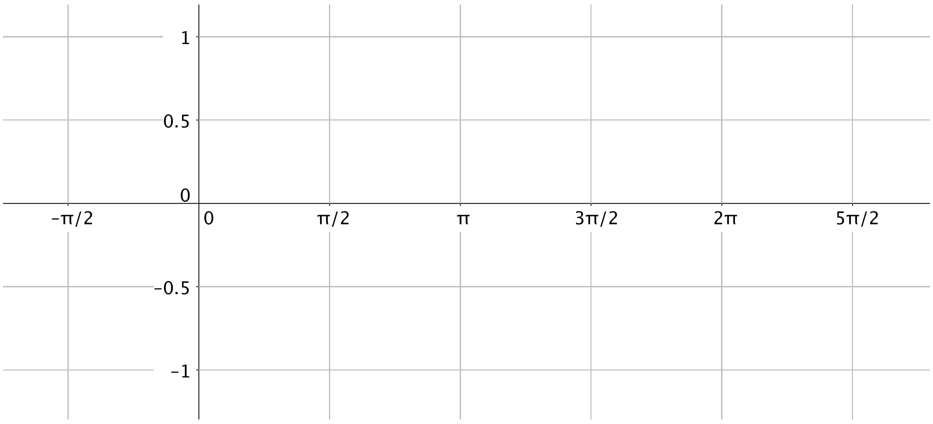
Le **déphasage** d'une fonction trigonométrique : $y = \sin(x - c)$.

Que se passe-t-il si on additionne ou soustrait un nombre c quelconque à x ?

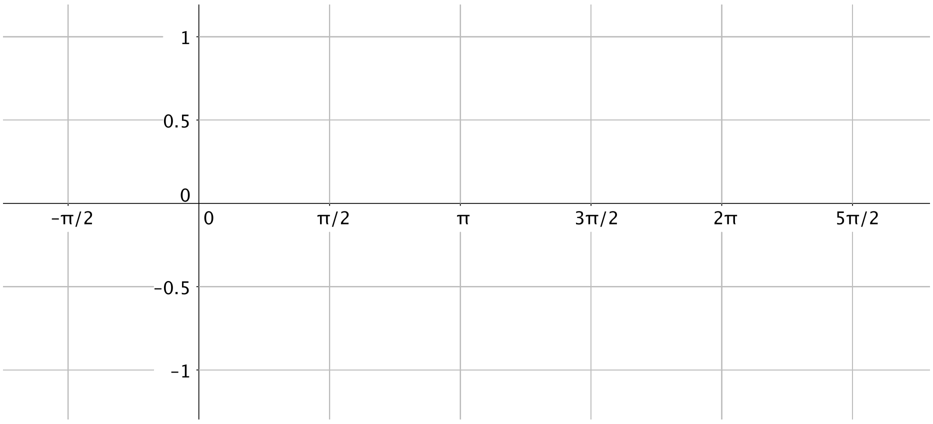
L'onde est déplacée vers la gauche ou vers la droite. Le début d'une oscillation se trouve au point $(c; 0)$.

Dessiner les fonctions suivantes :

a) $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$



b) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$



Le **déphasage** d'une fonction trigonométrique correspond au début d'une oscillation.

1.4 Hauteur

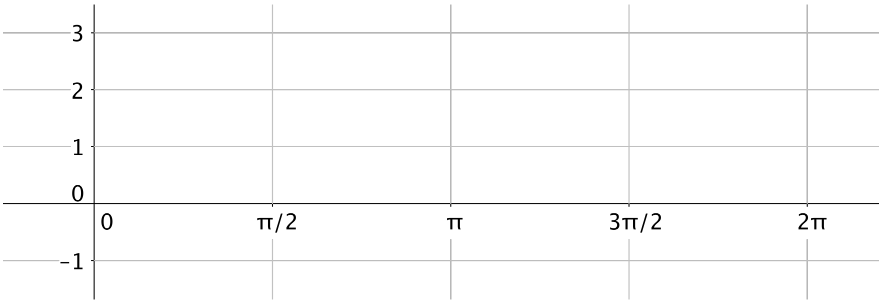
La **hauteur** d'une fonction trigonométrique : $y = \sin(x) + d$.

Que se passe-t-il si on additionne ou soustrait un nombre d quelconque de la fonction ?

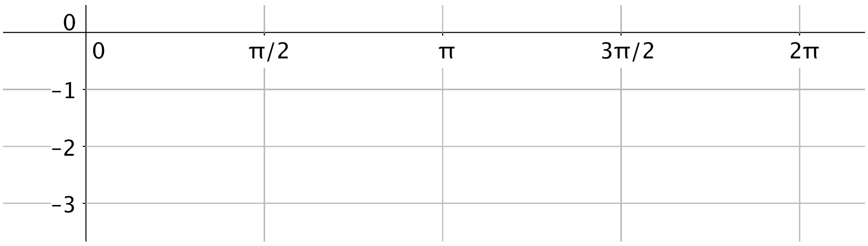
La fonction est déplacée vers le haut ou vers le bas.

Dessiner les fonctions suivantes :

a) $y = \sin(x) + 2$



b) $y = \sin(x) - 2$



d nous indique la hauteur (droite horizontale) à laquelle se trouve le centre d'une oscillation d'une fonction trigonométrique.

1.5 Forme générale d'une fonction trigonométrique

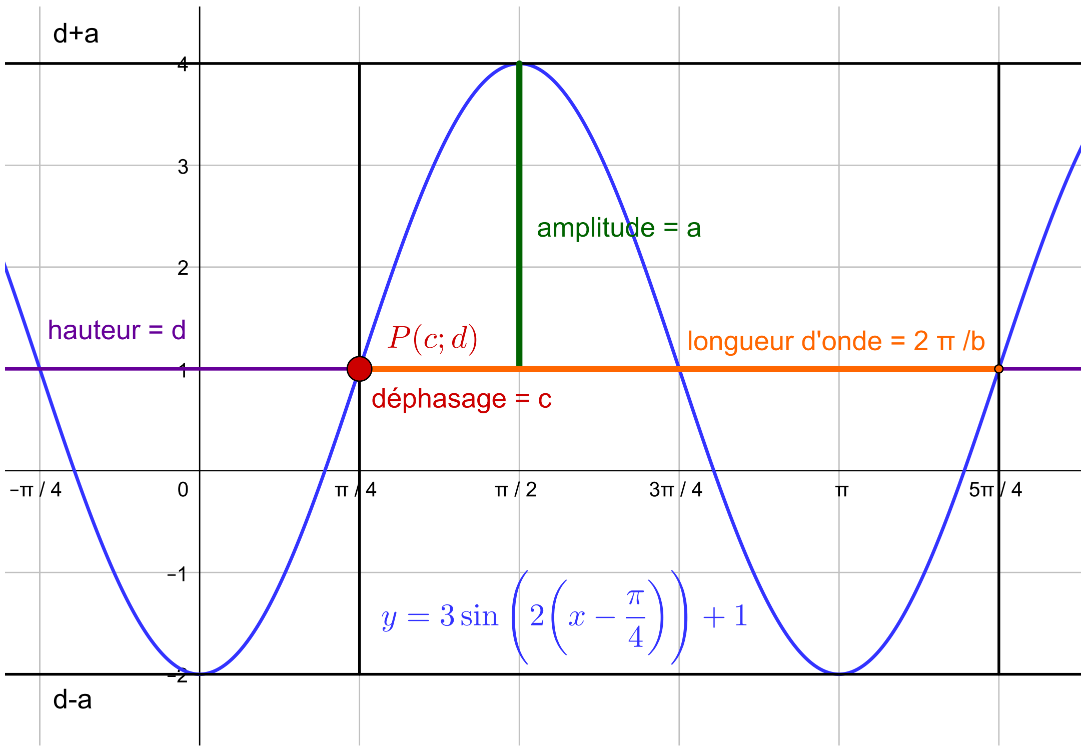
Si nous prenons maintenant ces 4 situations ensemble, nous obtenons la forme générale d'une fonction trigonométrique :

$$y = a \sin\Big(b(x-c)\Big) + d$$

avec

- a l'amplitude $\Leftrightarrow$ étirement/compression dans la direction y,
- d la hauteur de l'oscillation $\Leftrightarrow$ déplacement vers le haut/vers le bas,
- $\dfrac{2\pi}{b}$ la longueur d'onde $\Leftrightarrow$ étirement/compression dans la direction x,
- c le déphasage ou le début d'une oscillation $\Leftrightarrow$ déplacement vers la droite/vers la gauche.

Illustration :



Comment dessiner une fonction sinus ?

a) Tracez une droite horizontale à la hauteur d. Cette droite correspond au centre de l'onde.

b) A partir de cette hauteur d, nous traçons deux autres droites horizontales, une à la hauteur $d + a$ et une à la hauteur $d - a$.

a et d nous donnent une bande dans laquelle la fonction oscille.

c) Nous calculons le déphasage : mettre en évidence b.

d) Nous plaçons le point de départ d'une onde au point (déphasage ; hauteur) $= (c; d)$.

e) Nous calculons la longueur d'onde : $\frac{2\pi}{b}$.

f) En partant du point de départ, nous dessinons un segment de la longueur d'une période et avons ainsi la fin d'une oscillation.

Les trois derniers points nous indiquent la largeur d'une oscillation d'une fonction trigonométrique.

g) Maintenant, on divise la bande obtenue en quatre cases de taille égale.

h) Au début, au milieu et à la fin, la fonction est '0' (càd à la hauteur d).

En fonction du signe de a :

— $a > 0$: après un quart (1/4), la fonction est maximale et après trois quarts (3/4), elle est minimale.

— $a < 0$: après un quart (1/4), la fonction est minimale et après trois quarts (3/4), elle est maximale.

Remarque :

Le cosinus se dessine selon le même schéma, avec la différence suivante :

En fonction du signe de a :

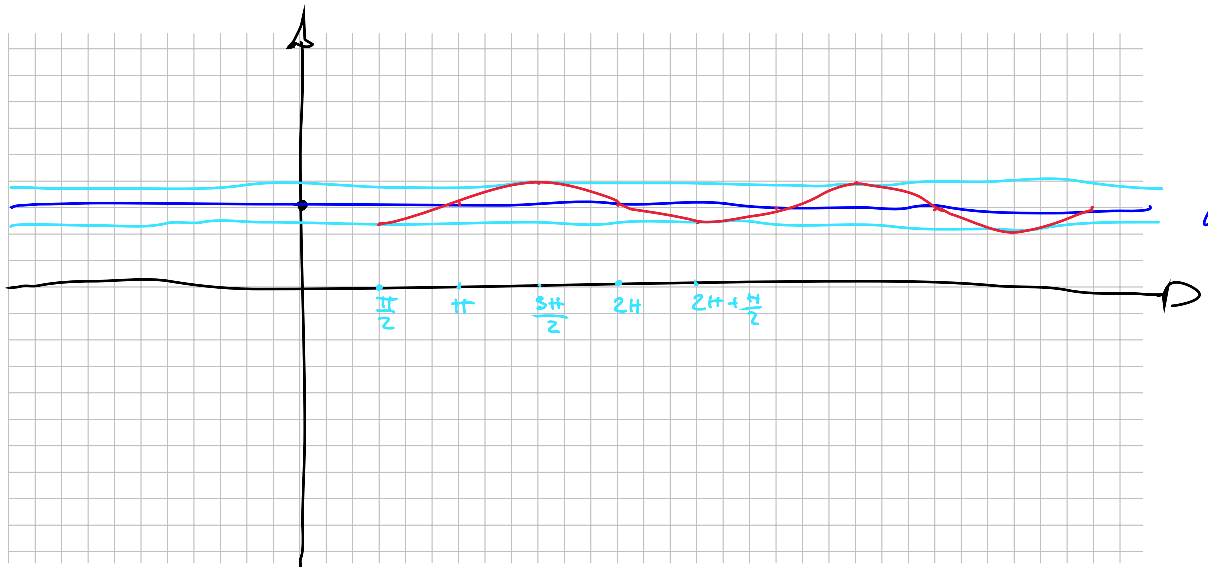
— $a > 0$: Au début et à la fin il est maximal, après 1/4 et 3/4 il est '0'(càd à la hauteur d) et au milieu il est minimal.

— $a < 0$: Au début et à la fin, il est minimal, après 1/4 et 3/4, il est '0'(càd à la hauteur d) et au milieu, il est maximal.

2 Exercices

Exercice 1 Dessiner les fonctions suivantes dans un système d'axes approprié. Calculer dans chaque cas l'amplitude, la longueur d'onde et le déphasage.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(x - \frac{\pi}{2}) + 3$

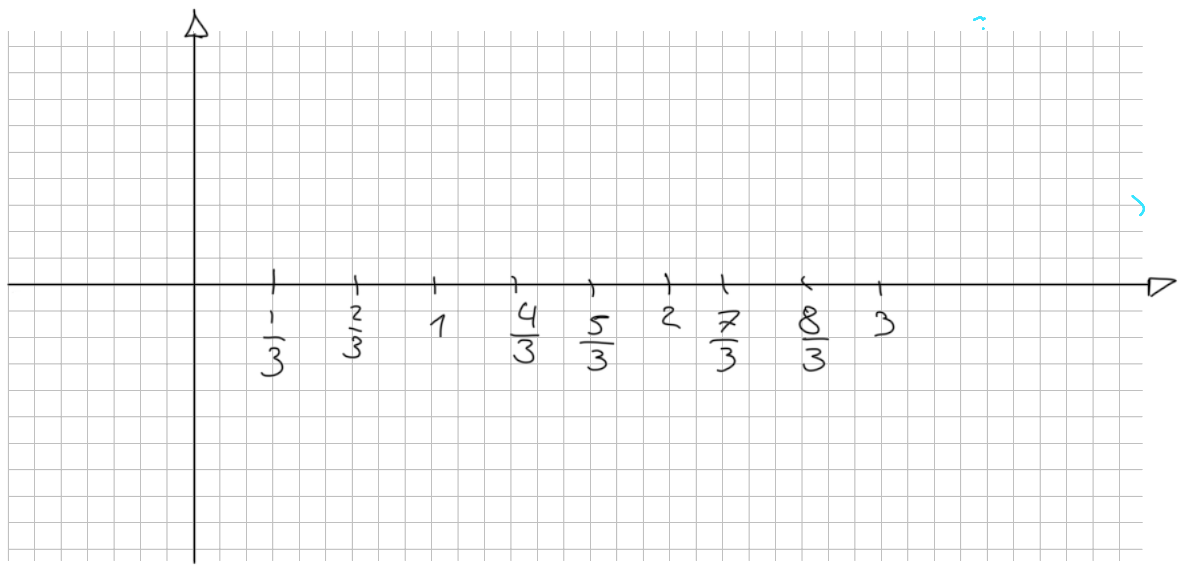


$y = 3$

$f(x) = -\frac{1}{2}\sin(x) + 3$

b) $f(x) = 3\sin(\frac{3\pi}{2}x - \frac{\pi}{3}) + 4$

$$P = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{4}{3}$$

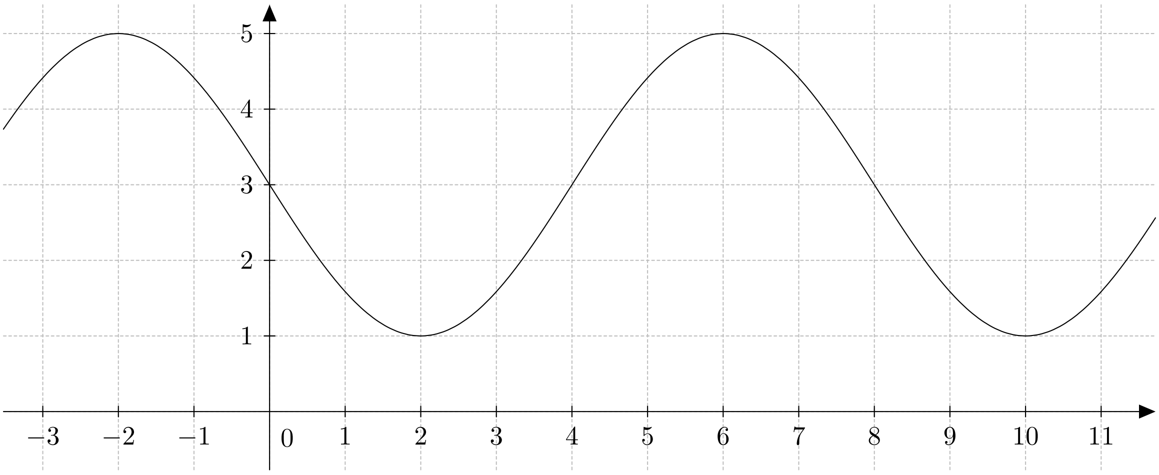


c) $f(x) = -4\sin(3x - 9\pi) + 2$

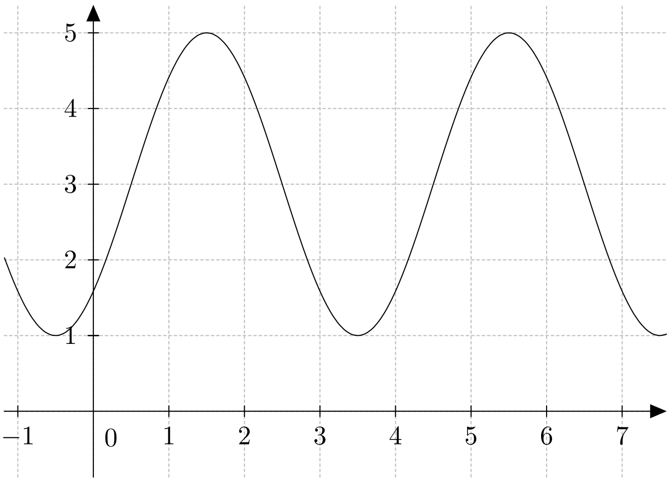
d) $f(x) = 2\cos(\pi x + \frac{3\pi}{2}) - 1$

Exercice 2 Déterminer l'équation des fonctions suivantes en indiquant l'amplitude, la longueur d'onde et le déphasage. Interpréter chaque fonction comme un sinus et un cosinus.

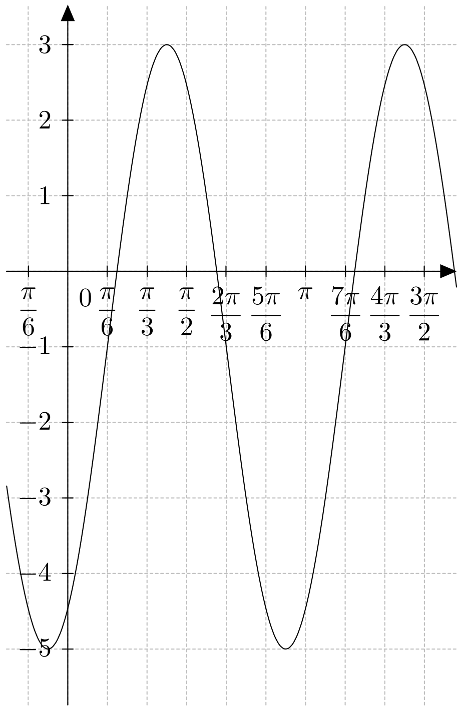
a)



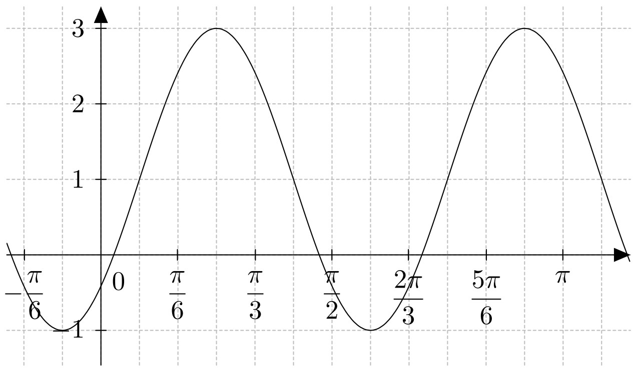
b)



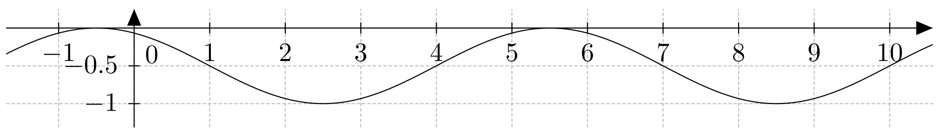
c)


3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$
π
$\frac{7\pi}{6}$
$\frac{4\pi}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$

d)


3
2
1
0
−1
$-\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$
π

e)


−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
−0.5
−1