Ecole des Métiers
Berufsfachschule
Freiburg
Berufsmaturität

3.3 Exponentielle Modelle

1 Einführungsbeispiele

1.1 Wachstumsfunktion

Zellen vermehren sich durch Kernteilung (Mitose), das heisst, eine Zelle spaltet sich und aus dieser einen Zelle entstehen zwei identische Zellen.

Übung 1 Angenommen : Ein Forscher legt eine Zelle unters Mikroskop. Die Kernteilung findet jede Stunde statt. Wie viele Zellen sieht der Forscher nach :

Anzahl Stunden t	1	2	5	10
Anzahl Zellen y	2	4	32	1024

Falls die Zeit durch t (in Stunden) beschrieben wird, stellen Sie eine Formel auf, welche die Anzahl an Zellen nach t Stunden darstellt.

$y = 2^t$

Übung 2 Angenommen : Ein Forscher legt 10 Zellen unters Mikroskop und die Kernteilung findet jede Stunde statt. Wie viele Zellen sieht der Forscher nach :

Anzahl Stunden t	1	2	5	10
Anzahl Zellen y	20	40	320	10240

$\cdot 10$

Falls die Zeit durch t (in Stunden) beschrieben wird, stellen Sie eine Formel auf, welche die Anzahl an Zellen nach t Stunden darstellt.

$y = 10 \cdot 2^t$

Übung 3 Angenommen : Ein Forscher legt 10 Zellen unters Mikroskop und die Kernteilung findet jede 3te Stunde statt. Wie viele Zellen sieht der Forscher nach :

$: 3$

Anzahl Stunden t	3	9	15	30
Anzahl Zellen y	20	80	320	10 240

Falls die Zeit durch t (in Stunden) beschrieben wird, stellen Sie eine Formel auf, welche die Anzahl an Zellen nach t Stunden darstellt.

$y = 10 \cdot 2^{t/3}$

1.2 Zerfallsfunktion

Ein Forscher hat eine Kolonie von Bakterien. Er testet ein neues Antibiotikum.

Übung 4 Angenommen : er hat eine Kolonie von 1'000'000 Bakterien. Wenn er sein Antibiotikum einsetzt, stirbt jede Stunde die Hälfte der Kolonie. Wie viele Bakterien sind dann noch vorhanden nach :

Anzahl Stunden t	1	2	5	10
Anzahl Bakterien y	500 000	250 000	31 250	976,5625 → 976

Falls die Zeit durch t (in Stunden) beschrieben wird, stellen Sie eine Formel auf, welche die Anzahl an Bakterien nach t Stunden darstellt.

$$y = \frac{1\,000\,000}{2^t} = 1\,000\,000 \cdot 2^{-t} = 1\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

2 Exponentielle Modelle

2.1 Wachstums- und Zerfallsfunktion

Wachstumsmodelle sind in der Regel abhängig von der Zeit (t). Es gibt verschiedene Modelle, wir werden hier nur eines von diesen Modellen sehen. Ein exponentielles Modell wird durch folgende Funktionsgleichung dargestellt :

$$\boxed{\underbrace{G(t)}_{y} = G_0 \cdot a^{\frac{t}{\tau}}}$$

auswendig lernen!

Wobei :

- t normalerweise die Zeit darstellt.
- G_0 den Anfangswert, d.h. die vorhandene Menge zur Zeit $t = 0$, darstellt.
- $G(t)$ den Wert oder die vorhandene Menge zur Zeit t darstellt.
- a die Wachstums- oder Zerfallskonstante darstellt.
- τ die Zeitkonstante, während der die Grösse G um den Faktor a wächst oder abnimmt darstellt.

Bemerkung : G steht für Grösse, dies kann abhängig vom Kontext aber auch durch einen anderen Buchstaben bezeichnet werden, z.B. A bei einer Fläche oder m bei einer Masse.

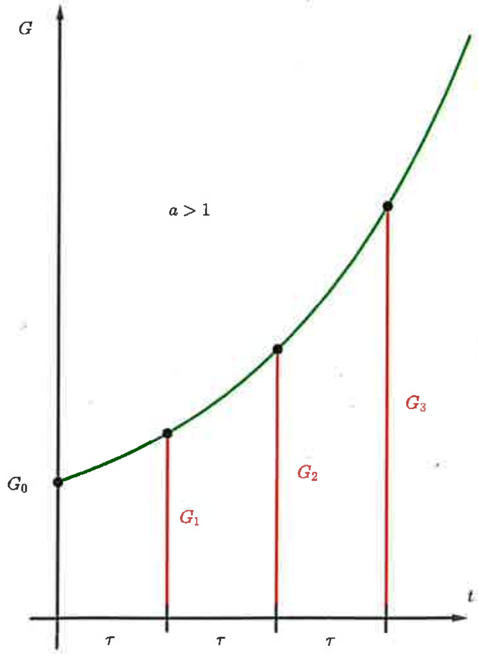
Wir unterscheiden zwischen :

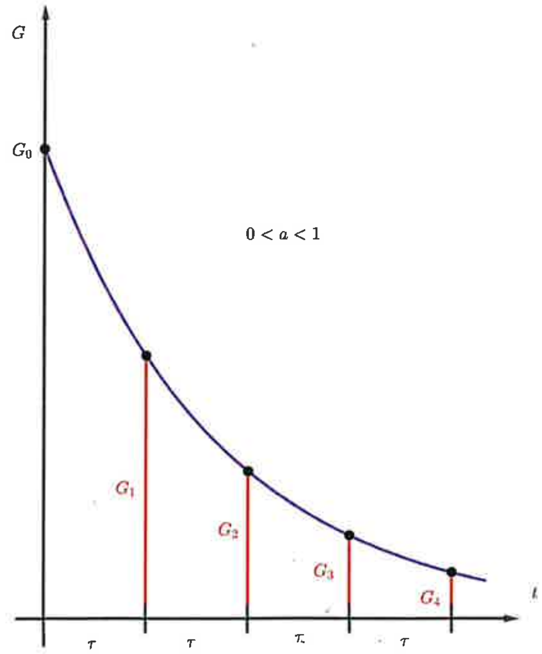
- Wachstumsfunktionen, falls die Wachstumskonstante a grösser als 1 ist : $a > 1$
- Zerfallsfunktionen, falls die Zerfallskonstante a zwischen 0 und 1 liegt : $0 < a < 1$.

  In diesem Fall gilt : $G(t) = G_0 \cdot a^{\frac{t}{\tau}}$ mit $0 < a < 1$

  oder : $G(t) = G_0 \cdot a^{-\frac{t}{\tau}} = G_0 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{t}{\tau}}$ mit $a > 1$.

Illustration :





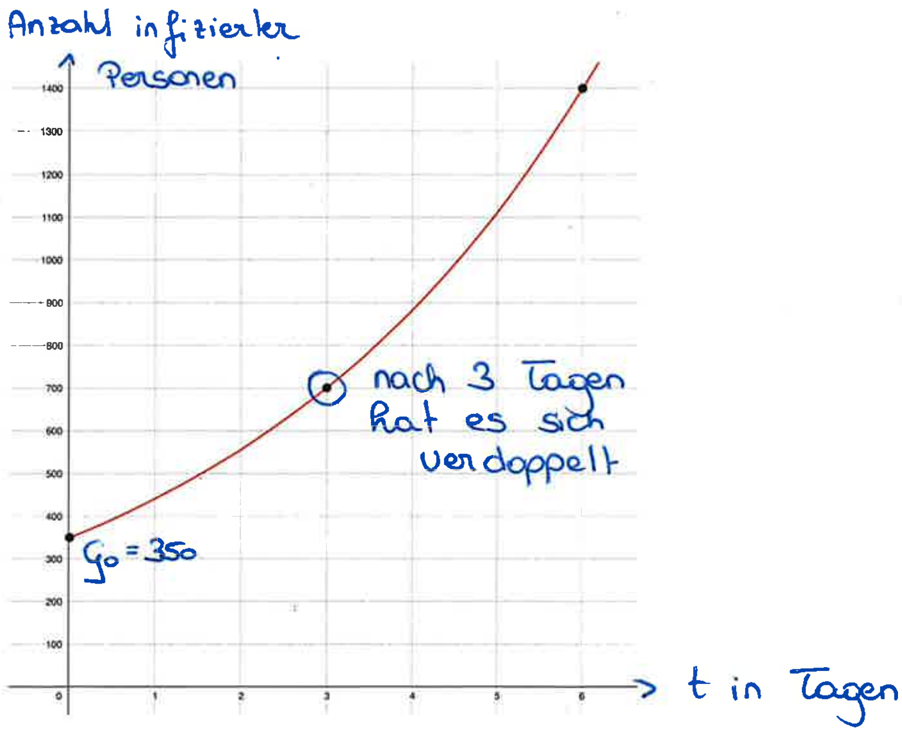
Wobei G_1, G_2, ... den vorhandenen Wert nach der Zeitspanne τ darstellt.

2.2 Beispiele

a) In der Schweiz sind heute 350 Personen vom Coronavirus infiziert. Angenommen, dass sich die Anzahl an infizierten Leuten jeden 3ten Tag verdoppelt, bestimmen Sie eine Funktionsgleichung welche die Anzahl an Infizierten in Abhängigkeit der Zeit t (in Tagen) darstellt.

Es gilt : $G_0 = 350$ $\quad a = 2 \quad$ $\tau = 3$

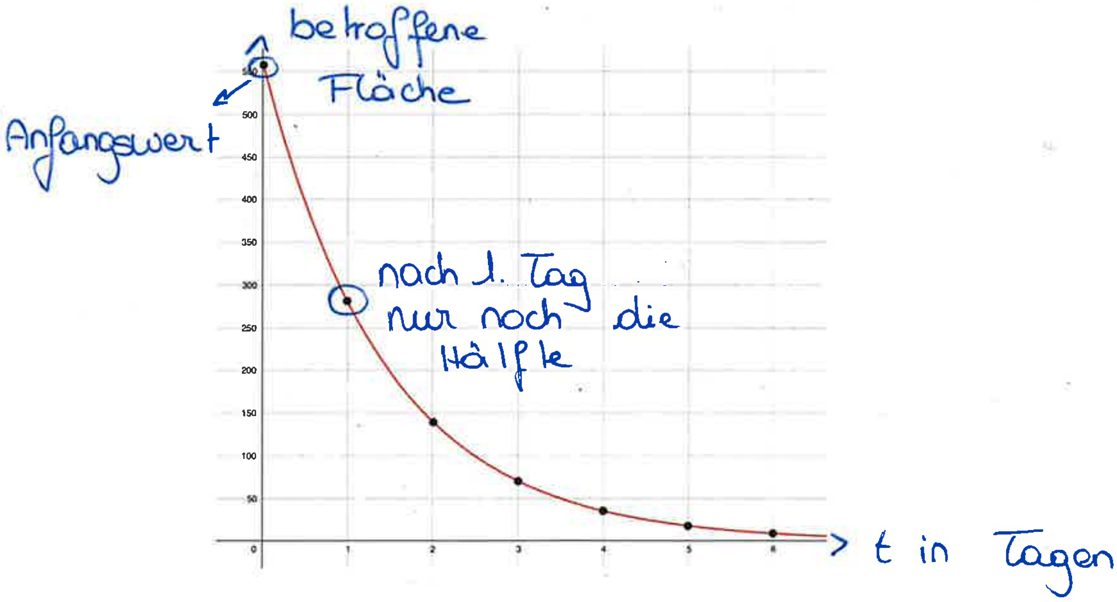
Die Wachstumsfunktion lautet also : $G(t) = 350 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$



b) Ein Teich mit der Fläche $A = 560$ m^2 ist voll mit Schilfrohr. Das Schilfrohr ist von einer Krankheit befallen und jeden Tag verringert sich die Fläche um die Hälfte. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung welche die Fläche an Schilfrohr nach t Tagen darstellt.

Es gilt : $A_0 = 560$ $\quad a = \dfrac{1}{2}$ $\quad \tau = 1$

Die Zerfallsfunktion lautet also : $A(t) = 560 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^t = 560 \cdot 2^{-t}$



2.3 Prozentuales Wachstum oder Zerfall

In verschiedene Beispielen nimmt ein Wert um einen gewissen Prozentsatz zu oder nimmt um einen Prozentsatz ab.

Beispiele :

a) Martin hat vor 10 Jahren ein Haus gebaut, welches er 700′000.– CH bezahlt hat. Angenommen der Wert des Hauses steigt um 3% jedes Jahr. Welchen Wert hatte dann das Haus :

vor (Jahren) t	9	6	2	jetzt
Wert y	721 000	787 856,17	886 739	940 741,5

Bestimmen Sie die Wachstumskonstante a. $a = 1{,}03$ $\quad g(t) = 700\,000 \cdot 1{,}03^t$

b) Peter kauft sich ein neues Auto. Er zahlt dieses Auto 30′000.– CHF. Angenommen der Wert des Autos nimmt jedes Jahr um 15 Prozent ab. Welchen Wert hat das Auto dann nach :

Jahren t	1	2	4	8
Wert y	25 500	21 675	15 660,2	8 174,7

Bestimmen Sie die Zerfallskonstante a. $a = 0{,}85$ $\quad g(t) = 30\,000 \cdot 0{,}85^t$

Sei p den Prozentsatz um den einen Wert zunimmt oder abnimmt. Dann gelten folgende Funktionsgleichungen :

— Wachstumsfunktion um p Prozent : $\boxed{G(t) = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{t}{\tau}},}$ d.h $a = 1 + \frac{p}{100}$

— Zerfallsfunktion um p Prozent : $\boxed{G(t) = G_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{\frac{t}{\tau}},}$ d.h $a = 1 - \frac{p}{100}$

Beispiele :

a) In der Schweiz leben heute 8.57 Millionen Leute. Angenommen die Population wächst um 1.5 Prozent jede 2 Jahre. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung welche die Anzahl an Personen in der Schweiz in Abhängigkeit der Zeit darstellt.

Es gilt : $G_0 = 8.57$ $\quad a = 1 + \frac{1.5}{100} = 1.015$ $\quad \tau = 2$

Die Wachstumsfunktion lautet also : $G(t) = 8.57 \cdot 1.015^{\frac{t}{2}}$ in Millionen, t in Jahren.

b) Beim Zerfall einer radioaktiven Substanz nimmt die Masse m pro Tag um 12.5 % ab. Zum Zeitpunkt $t = 0$ liegt eine Masse von $m_0 = 75.8$ g vor. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $m(t)$, welche die Masse der radioaktiven Substanz in Abhängigkeit der Zeit darstellt.

Es gilt : $m_0 = 75.8$ $\quad a = 1 - \frac{12.5}{100} = 0.875$ $\quad \tau = 1$

Die Zerfallsfunktion lautet also : $m(t) = 75.8 \cdot 0.875^t$

2.4 Halbwertszeit (demi - vie)

Die Halbwertszeit ist die Zeitspanne, nach der eine mit der Zeit abnehmende Grösse die Hälfte des anfänglichen Werts erreicht.

Bei exponentieller Abnahme einer Grösse hängt die Halbwertszeit weder von der Wahl des Anfangszeitpunkts ($t = 0$) noch von dem Anfangswert (G_0) ab.

Beispiel :

Der radioaktive Stoff Radium hat eine Halbwertszeit von 1620 Jahren. Wie gross ist die Zerfallskonstante a?

Es gilt : $G(t) = 50\%$ $\quad G_0 = 100\%$ $\quad t = 1620$

Wir können a folgendermassen berechnen :

$$\begin{aligned} 50 &= 100 \cdot a^{1620} && \mid : 100 \\ \frac{1}{2} &= a^{1620} && \mid \sqrt[1620]{} \\ a &= \sqrt[1620]{\frac{1}{2}} \\ a &= 2^{-\frac{1}{1620}} \end{aligned}$$

generell :

$a = 2^{-t/\text{Halbwertszeit}}$

Hier gilt also : $\boxed{G(t) = G_0 \cdot 2^{-\frac{t}{\tau}},}$ wobei $\tau =$ Halbwertszeit.

3 Übungen

a) In 1867, kauften die Amerikaner Alaska für CHF 7'200'000.– den Russen ab. Die Fläche von Alaska beträgt 15'000 ha. Angenommen der Wert des ha steigt um 3 % pro Jahr, bestimmen Sie den Wert von Alaska im Jahre 2010.
Hinweis : Wir setzten $t = 0$ im Jahre 1867.

Zeitspanne : 2010 - 1867 = 143 Jahre

Funktion : $G(t) = 7\,200\,000 \cdot 1{,}03^t$

$G(143) = 7\,200\,000 \cdot 1{,}03^{143}$

$= 493\,263\,979{,}19$ CHF

b) Vor 10 Jahren war das Volumen eines Waldes 5'000 m^3. In der Zwischenzeit ist der Wald auf 8'500 m^3 gewachsen. Das Wachstum kann durch folgende Formel dargestellt werden :

$B(t) = B_0 \cdot 2^{\lambda t}$, wobei λ eine Konstante ist.

(a) Berechnen Sie diese Konstante λ. (wir setzten $t = 0$ vor 10 Jahren)
(b) Wie gross wird das Volumen des Waldes in 10 Jahren sein ?
(c) Nach wie vielen Jahren (ab $t = 0$), hat sich das Volumen vervierfacht ?

a) $8500 = 5000 \cdot 2^{\lambda \cdot 10}$

$\frac{85\cancel{00}}{50\cancel{00}} = 2^{\lambda \cdot 10} \quad | \log_2$

$\log_2\left(\frac{17}{10}\right) = \lambda \cdot 10 \Rightarrow \lambda = \frac{\log_2\left(\frac{17}{10}\right)}{10} = 7{,}655 \cdot 10^{-2}$

b) $G(10) = 8500 \cdot 2^{7{,}655 \cdot 10^{-2} \cdot 10} = 14\,450 \ m^3$

c) $20\,000 = 5000 \cdot 2^{7{,}655 \cdot 10^{-2} \cdot t}$

$\underset{2^2}{4} = 2^{7{,}655 \cdot 10^{-2} \cdot t}$

$2 = 7{,}655 \cdot 10^{-2} \cdot t$

$t = \frac{200}{7{,}655} = 26{,}126$ Jahre

c) Der Körper baut Nikotin ab. Die Halbwertszeit des Nikotins beträgt 60 Minuten.

(a) Bestimmen Sie die Zerfallskonstante a.

(b) Wie viel Prozent wird jede Minute abgebaut?

(c) Wann ist nur noch 1% Nikotin im Körper vorhanden?

a) $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/60} = 2^{-t/60}$ t in Minuten

b) $2^{-1/60} = 0,9885 \Rightarrow 1,15\ \%$

c) $1 = 100 \cdot 2^{-t/60}$

$\frac{1}{100} = 2^{-t/60}$

$100 = 2^{t/60}$

$100^{60} = 2^{t}$

$t = \log_2 (100^{60})$

$t = 398,63$ Minuten

$\Rightarrow 6,64$ Stunden

d) Die Population eines Landes wächst exponentiell jedes Jahr. Nach 10 Jahren hat das Land 12′000′000 Bürger, nach 15 Jahren, 16′000′000 Bürger.

(a) Bestimmen Sie eine Funktion die die Anzahl an Bürger in Abhängigkeit der Zeit t ausdrückt. ($t = 0$ ist heute)

(b) Wann (ab heute), zählt das Land 20′000′000 Bürger?

a) $\begin{cases} 12\,000\,000 = G_0 \cdot a^{10} \\ 16\,000\,000 = G_0 \cdot a^{15} \end{cases} \Rightarrow G_0 = \frac{12\,000\,000}{a^{10}}$

$\Rightarrow 16\,000\,000 = \frac{12\,000\,000}{a^{10}} \cdot a^{15}$

$\frac{16}{12} = a^5 \Rightarrow a = \sqrt[5]{\frac{4}{3}}$

$\Rightarrow G_0 = \frac{12\,000\,000}{\left(\sqrt[5]{\frac{4}{3}}\right)^{10}} = \frac{12\,000\,000}{\left(\frac{4}{3}\right)^{2}} = 12\,000\,000 \cdot \frac{9}{16}$

$\Rightarrow G_0 = 6\,750\,000$

$\Rightarrow G(t) = 6\,750\,000 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{t/5}$

b) $20\,000\,000 = 6\,750\,000 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{t/5}$

$t = 5 \cdot \log_{4/3}\left(\frac{2000}{675}\right)$

$t = 18,88$ Jahren

e) Der Wert eines Autos nimmt exponentiell mit der Zeit ab. Jedes Jahr verliert das Auto 22% seines Neuwerts, 47'000.– CHF

(a) Geben Sie eine Funktionsgleichung an, die den Wert des Autos in Abhängigkeit der Zeit darstellt.

(b) Wie viel ist das Auto noch nach 12 Jahren nach seinem Kauf wert?

(c) Wie viele Jahre nach seinem Kauf ist das Auto nur noch 20'000.– CHF wert?

a) $G(t) = 47\,000 \cdot 0{,}78^{t}$

b) $G(12) = 47\,000 \cdot 0{,}78^{12} = 2\,383{,}6$ CHF

c) $20\,000 = 47\,000 \cdot 0{,}78^{t}$

$\frac{20}{47} = 0{,}78^{t}$

$t = \log_{0{,}78}\left(\frac{20}{47}\right) = 3{,}44$ Jahre

f) Ein Medikament wird vom Körper exponentiell mit der Zeit abgebaut. Die Halbwertszeit des Medikamentes beträgt 40 Minuten.

(a) Geben Sie eine Formel an, die die Menge des Medikamentes im Körper in Abhängigkeit der Zeit berechnet.

(b) Wie viel Prozent wird pro Minute abgebaut?

(c) Eine Dose von 2 mg wurde eingenommen. Wie viel ist noch nach 30 Minuten vorhanden?

(d) Wann sind nur noch 0.5 mg vorhanden?

a) $G(t) = G_0 \cdot 2^{-t/40}$ t in Minuten

b) $2^{-1/40} = 0{,}983$ ⇒ es wurden 1,718 % abgebaut

c) $G(30) = 2 \cdot 2^{-30/40} = 2^{1-3/4} = 2^{1/4} = 1{,}189$ mg

d) $0{,}5 = 2 \cdot 2^{-t/40} \quad | :2$

$2^{-2} = 2^{-t/40}$

$2^{2} = 2^{t/40}$

$t/40 = 2$

$t = 80$ Minuten

g) Zwei Flüssigkeiten A und B kühlen exponentiell mit der Zeit ab. Die Anfangstemperatur von A beträgt $100°C$, die von B $85°C$. Nach 50 Sekunden ist die Flüssigkeit A um die Hälfte kälter geworden, die Flüssigkeit B erst nach 2 Minuten.
Wann haben beide Flüssigkeiten die gleiche Temperatur?

$$T_A(t) = 100 \cdot 2^{-t/0{,}83}$$

$$T_B(t) = 85 \cdot 2^{-t/2}$$

t in Minuten

$$100 \cdot 2^{-t/0{,}83} = 85 \cdot 2^{-t/2}$$

$$\frac{100}{85} = \frac{2^{-t/2}}{2^{-t/0{,}83}}$$

$$\frac{20}{17} = 2^{-t/2 + t/0{,}83}$$

$$\log_2\left(\frac{20}{17}\right) = t/0{,}83 - t/2$$

$$\log_2\left(\frac{20}{17}\right) = 0{,}7\,t$$

$$t = \frac{\log_2\left(\frac{20}{17}\right)}{0{,}7}$$

$$t = 0{,}335 \text{ Minuten}$$
$$= 20{,}097 \text{ Sekunden}$$

h) Unter bestimmten Bedingungen ist der Luftdruck ρ (in mm Hg) auf der Höhe h (in m) gegeben durch $\rho(h) = 734e^{k \cdot h}$.

(a) Wenn auf 12′000 m der Luftdruck 641 mm Hg beträgt, berechnen Sie k.

(b) Wie hoch ist der Luftdruck auf 2′500 m?

Hinweis : $e = 2.718281\ldots$ und k ist eine Konstante.

a) $$641 = 734 \cdot e^{k \cdot 12\,000}$$

$$\frac{641}{734} = e^{k \cdot 12000} \Rightarrow k \cdot 12\,000 = \ln\left(\frac{641}{734}\right)$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{641}{734}\right)}{12000} = -1{,}13 \cdot 10^{-5}$$

b) $$\rho(2500) = 734 \cdot e^{-1{,}13 \cdot 10^{-5} \cdot 2500}$$
$$= 713{,}57 \text{ mm Hg}$$