4.1.1 Logarithmusfunktion

1 Einführung und Wiederholung

Wir haben die Definition eines Logarithmus gesehen :

Logarithmusform		Exponentialform
$\log_a(x) = y$	$\Longleftrightarrow$	$a^y = x$

- mit dem *Argument* oder *Numerus* $x \in \mathbb{R}_+^*$,
- der *Basis* $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$,
- und dem *Logarithmus* $y \in \mathbb{R}$.

Hier wollen wir den Logarithmus als Funktion $f(x) = \log_a(x)$ analysieren.

Übung 1 Füllen wir dazu zuerst folgende Tabelle aus für die Funktion $f(x) = \log_2(x)$:

x	1	2	4	8	16	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
y	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4

$f(1) = \log_2(1)$
$y = \log_2(1)$
$2^y = 1$
$\hookrightarrow y = 0$

$\hookrightarrow y = \log_2(\frac{1}{4})$
$2^y = \frac{1}{4} \Rightarrow y = -2$

Übung 2 Zeichnen wir die Funktion indem wir die Punkte der Tabelle einzeichnen und folgende Fragen beantworten :

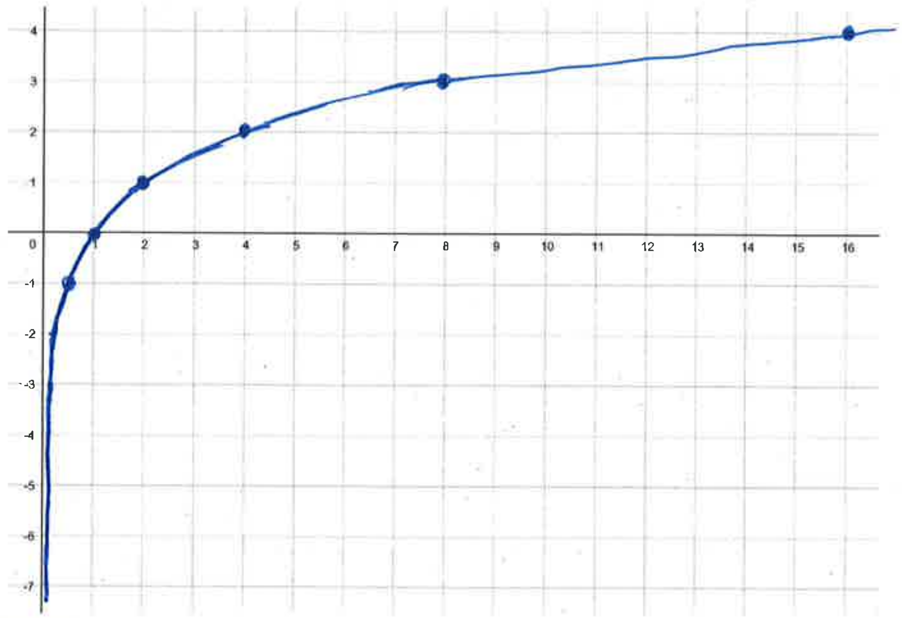
- Ist die Funktion für $x = 0$ oder x negativ definiert ? nein
- Wie verhalten sich die y-Werte wenn die x-Werte immer näher an 0 werden, d.h. falls a^n im Bruch $\frac{1}{a^n}$ immer grösser wird ? werden immer negativer
deviennent de plus en plus négatif
- Was ist die Definitionsmenge D von $f(x)$? $D = \mathbb{R}_+^*$
- Was ist der Wertebereich W von $f(x)$?

$W = Im = \mathbb{R}$

$f(x)$ W / Im

$f(x) = \log_2(x)$

Anhand dieser Angaben, zeichnen wir die Funktion $y = \log_2(x)$:



schneidet die y-Achse nicht! ne coupe pas l'axe des y!
weil / car $0 \notin D$!

2 Asymptote

Eine Gerade, an die sich der Graph einer Funktion anschmiegt, heisst **Asymptote** des Graphen. Der Begriff kommt vom griechischen *asymptotos*, was *nicht zusammenfallend bedeutet.*
Es gibt drei **Typen von Asymptoten**, wobei nur zwei Typen für uns relevant sind.

Horizontale Asymptote
Wie der Name schon vermuten lässt, handelt es sich bei horizontalen Asymptoten um horizontale (= waagrechte) Geraden. Sie verlaufen also parallel zur x-Achse. Ihre Gleichung ist von folgender Form :

$$h.A. : y = c$$

y = 2   y = 2

Dabei steht c für eine konstante Zahl. Ist die Zahl zum Beispiel gleich 5, so verläuft die Asymptote parallel zur x-Achse und schneidet die y-Achse bei $y = 5$.

Vertikale Asymptote
Auch die Gestalt vertikaler Asymptoten lässt sich aus dem Namen ableiten : sie sind vertikale (= senkrechte) Geraden. Sie verlaufen also parallel zur y-Achse. Eine vertikale Asymptote wird durch folgende Gleichung beschrieben.

$$v.A. : x = c$$

x = 2   x = 2

Eine vertikale Asymptote wird zum Teil auch als senkrechte Asymptote bezeichnet und die Zahl c wird auch Polstelle oder Definitionslücke genannt.

Alle Logarithmusfunktionen besitzen eine vertikale Asymptote.

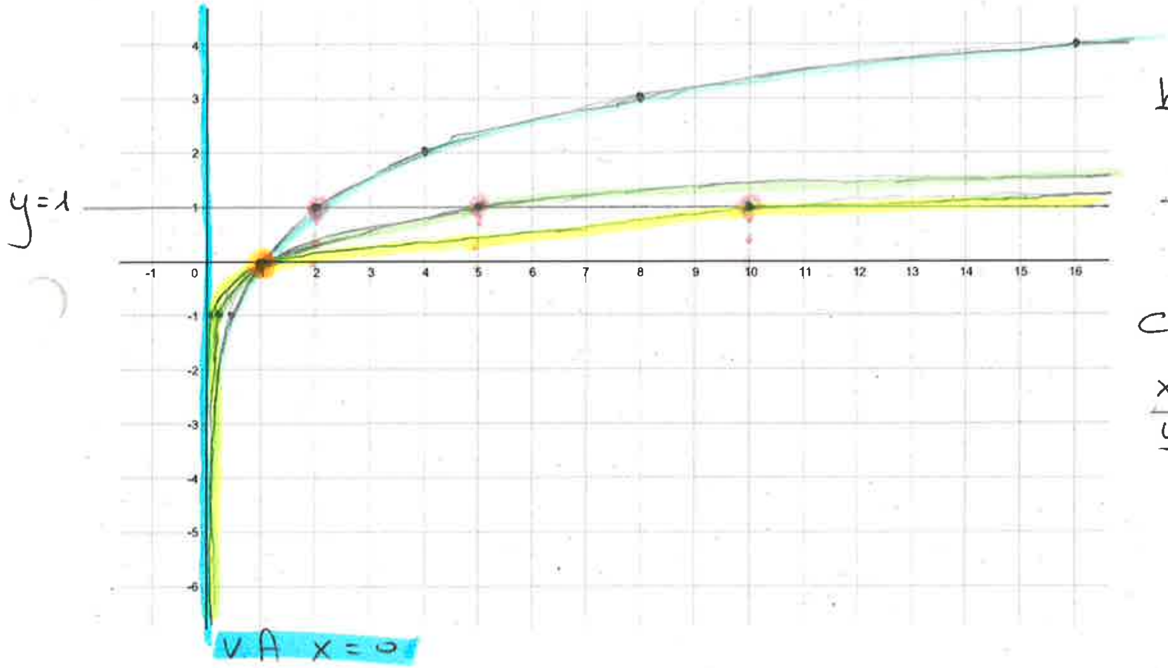
Beim obigen Beispiel ist die v.A. $x = 0$, das heisst, die Funktion läuft an der Geraden $x = 0$ vorbei ohne sie je zu schneiden oder zu berühren.

3 Basis

Wir haben die Funktion $y = \log_2(x)$ gezeichnet. Die Basis kann aber auch andere Werte annehmen.

Übung 3 Zeichnen Sie folgende Funktionen in das gegebene Koordinatensystem ein. Sie können GeoGebra oder den Taschenrechner benutzen um sich eine Idee zu machen.

a) $y = \log_2(x)$ b) $y = \log_5(x)$ c) $y = \log(x)$



b) $y = \log_5(x)$

x	1	5	25	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$
y	0	1	2	-1	-2

c) $y = \log(x)$

x	1	10	100	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
y	0	1	2	-1	-2

Was stellen Sie fest? Welche Gemeinsamkeiten gibt es?

- alle gehen durch den Punkt $P_x(1;0)$
  passent tous par le point $P(1;0)$
- je grösser a (Basis), desto weniger schnell steigt der Graf
  plus la base a est grande, moins elle monte
- alle haben die gleiche vertikale Asymptote
  V.A. $x = 0$
  elles ont la même asymptote verticale : a.v $x = 0$
- $y = \log_a(x)$ a = Basis
  der Graf geht durch den Punkt $P(a;1)$
  le graphe passe par le point $P(a;1)$
  a = base

4 Spiegelungen

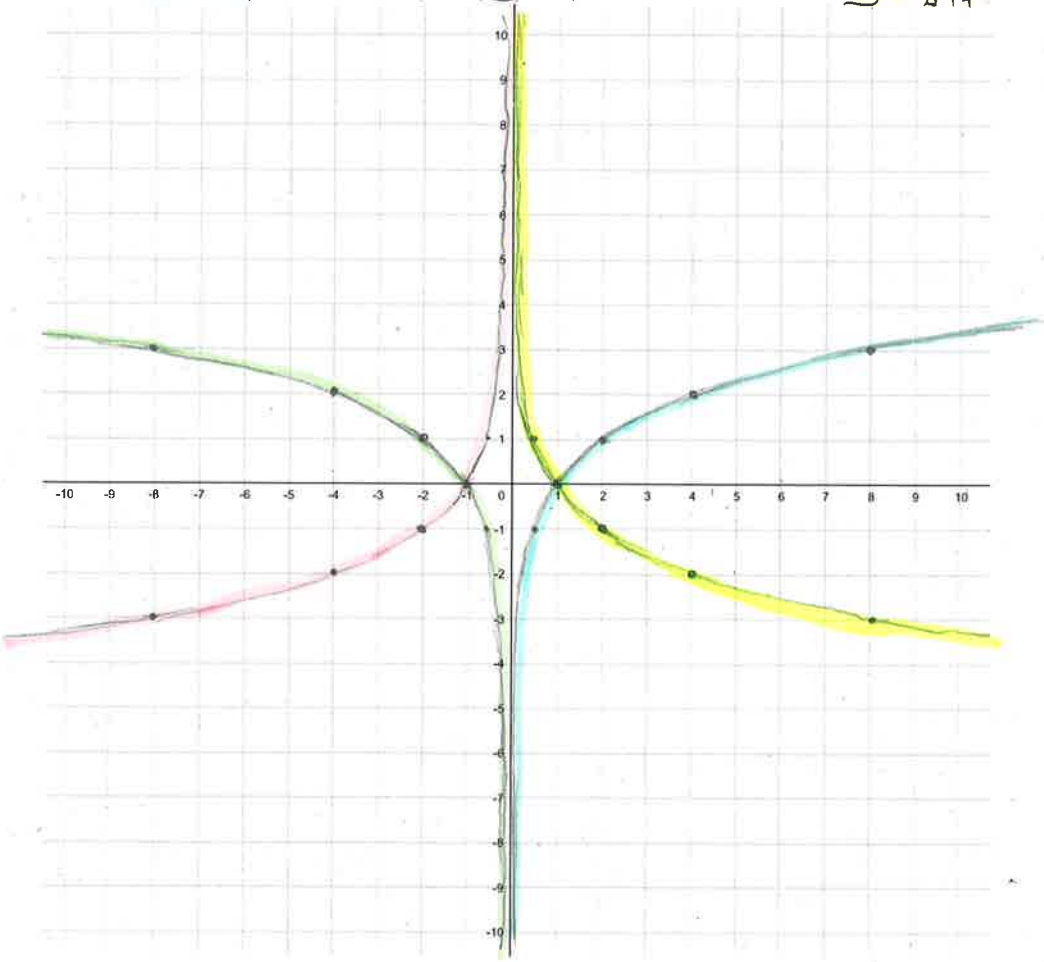
Übung 4 Zeichnen Sie folgende Funktionen in das gegebene Koordinatensystem ein. Sie können GeoGebra oder den Taschenrechner benutzen um sich eine Idee zu machen.

a) $y = \log_2(x)$ $\quad D = \mathbb{R}_+^*$

b) $y = \log_2(-x)$ $\quad D = \mathbb{R}_-^*$

c) $y = -\log_2(x)$ $\quad D = \mathbb{R}_+^*$

d) $y = -\log_2(-x)$ $\quad D = \mathbb{R}_-^*$



An welchen Achsen wird gespiegelt?

b) Spiegelung an der y-Achse
symétrie par rapport à l'axe des y
$f(x) \to f(-x)$

c) $f(x) \to -f(x)$ Spiegelung an der x-Achse
symétrie par rapport à l'axe des x

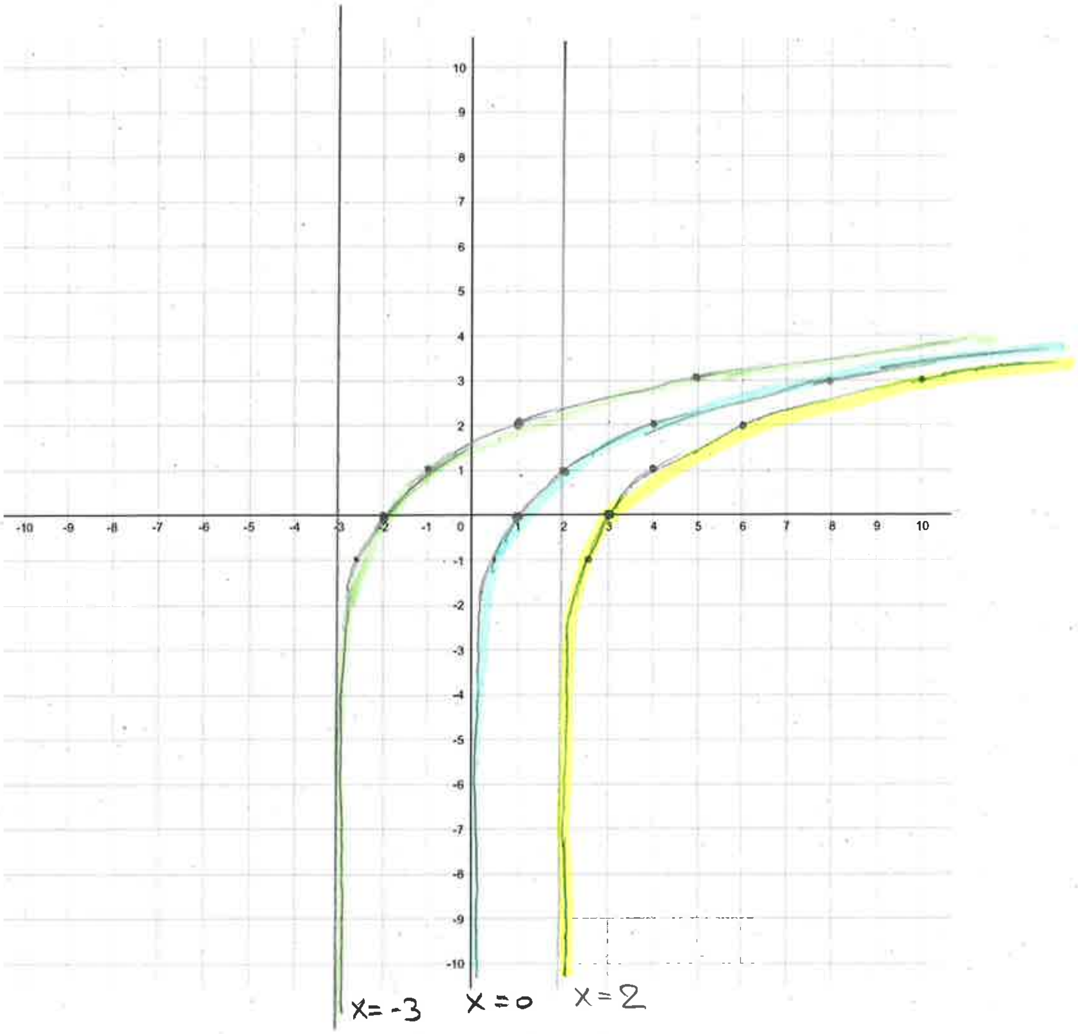
d) $f(x) \to -f(-x)$ Spiegelung an der x- und der y-Achse
symétrie par rapport à l'axe des x et des y

$y = a(x-h)^2 + k$

5 Verschiebungen - horizontal

Übung 5 Zeichnen Sie folgende Funktionen in das gegebene Koordinatensystem ein. Sie können GeoGebra oder den Taschenrechner benutzen um sich eine Idee zu machen.

a) $y = \log_2(x)$ b) $y = \log_2(x+3)$ c) $y = \log_2(x-2)$



Um welche Verschiebungen handelt es sich? Wie verhalten sich die Asymptote und die Definitionsmenge?

Verschiebung rechts (−) links (+)
déplacement droite (−) gauche (+)

a) $D = \mathbb{R}_+^*$ v. A. $x = 0$

b) D : $x+3>0 \Rightarrow x>-3$ $D =]-3; +\infty[$

v. A. $x = -3$

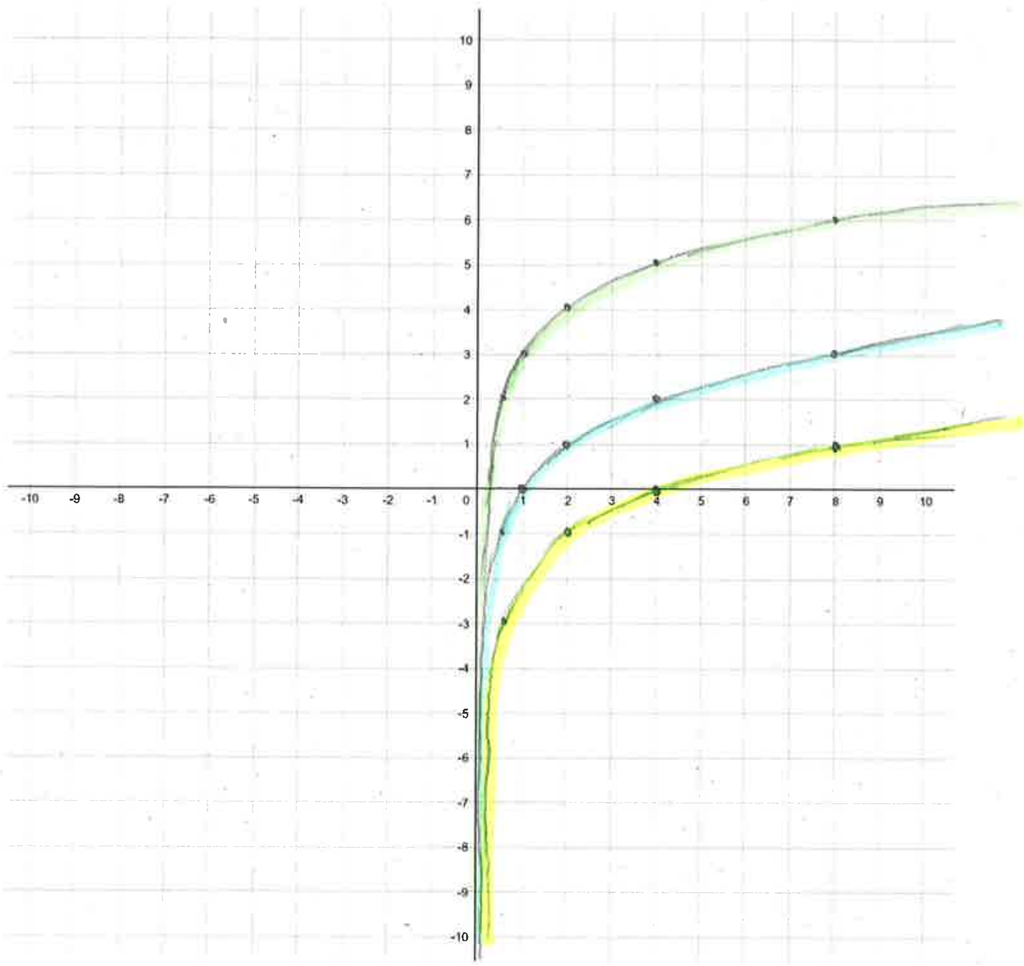
c) D : $x-2>0 \Rightarrow x>2$ $D =]2; +\infty[$

v. A. $x = 2$

6 Verschiebungen - vertikal

Übung 6 Zeichnen Sie folgende Funktionen in das gegebene Koordinatensystem ein. Sie können GeoGebra oder den Taschenrechner benutzen um sich eine Idee zu machen.

a) $y = \log_2(x)$ b) $y = \log_2(x) + 3$ c) $y = \log_2(x) - 2$



Um welche Verschiebungen handelt es sich ? Wie verhalten sich die Asymptote und die Definitionsmenge ?

Verschiebung oben (+) unten (-)

déplacement en haut (+) en bas (-)

$D = \mathbb{R}_+^*$ v.A. $x = 0$ für alle / pour tous

7 Funktionsgleichung

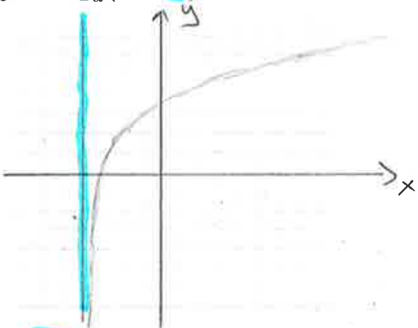
Die Funktionsgleichung einer Logarithmusfunktion sieht folgendermassen aus :

$$y = \pm \log_a \left(\pm (x - h) \right) + k$$

Übung 7 Für die folgenden Funktionen,

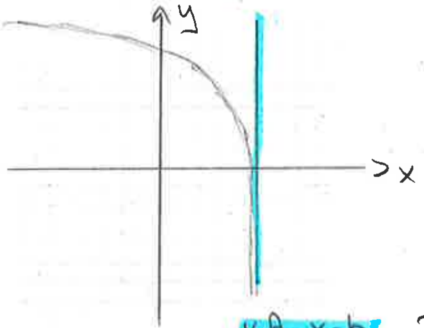
- — skizzieren Sie den Graphen,
- — zeichnen Sie die Asymptote ein,
- — geben Sie die Gleichung der Asymptote an,
- — geben Sie den Definitionsbereich an,
- — geben Sie den Wertebereich an. $W = \mathrm{Im} = \mathbb{R}$

a) $y = \log_a(x - h) + k$



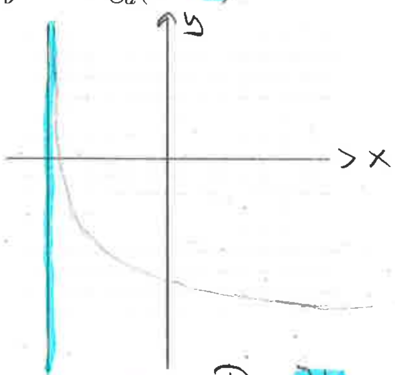
V.A. $x = h$ $D =]h ; +\infty[$

c) $y = \log_a \left(-(x - h) \right) + k$



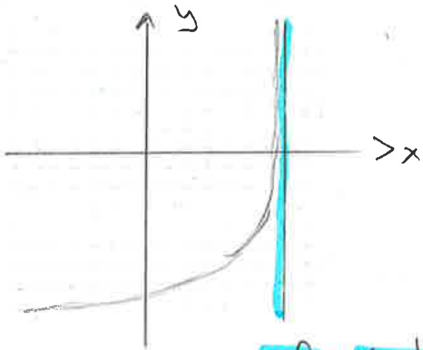
V.A. $x = h$ $D =]-\infty ; h[$

b) $y = -\log_a(x - h) + k$



V.A. $x = h$ $D =]h ; +\infty[$

d) $y = -\log_a \left(-(x - h) \right) + k$



V.A. $x = h$ $D =]-\infty ; h[$

Welche Elemente (+, −, h oder k) der Funktionsgleichung haben

a) einen Einfluss auf die Gleichung der Asymptote? h

b) einen Einfluss auf den Definitionsbereich? h / ± in der Funktion $(\pm(x-h))$

c) keinen Einfluss auf die Gleichung der Asymptote? k / ±

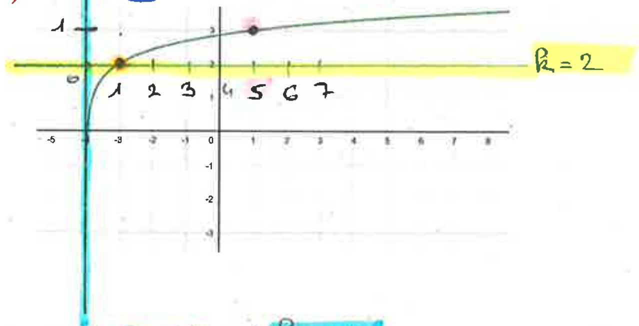
d) keinen Einfluss auf den Definitionsbereich? k / ± ausserhalb der Funktion

e) einen Einfluss auf den Wertebereich? nichts $= \mathbb{R}$

8 Funktionsgleichung ablesen $y = \pm \log_a(\pm(x-h)) + k$

Übung 8 Geben Sie die Funktionsgleichung folgender Graphen an.

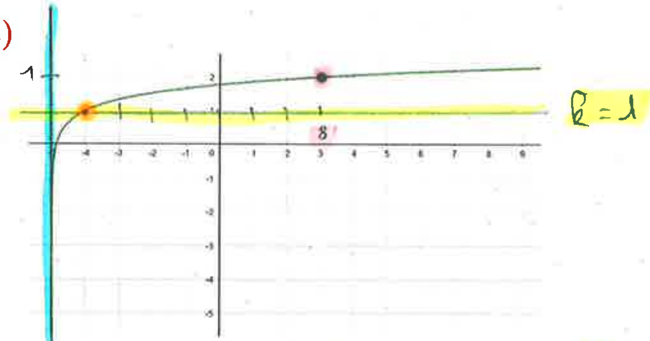
a) $y = \log_5(x+4) + 2$



a.v. $x=-4 \Rightarrow h=-4$

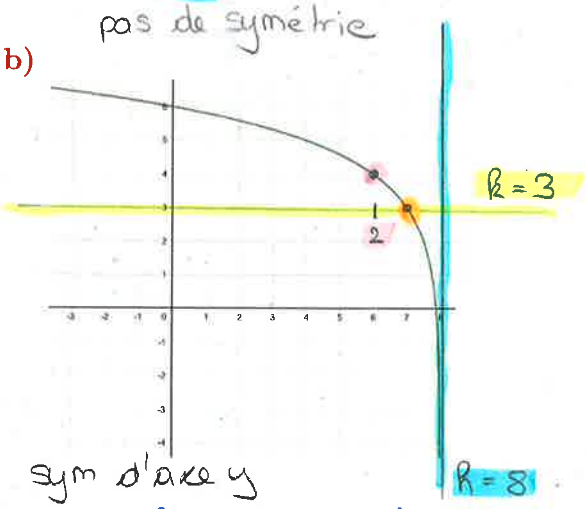
pas de symétrie

c)



$h=-5$ $y = \log_5(x+5) + 1$

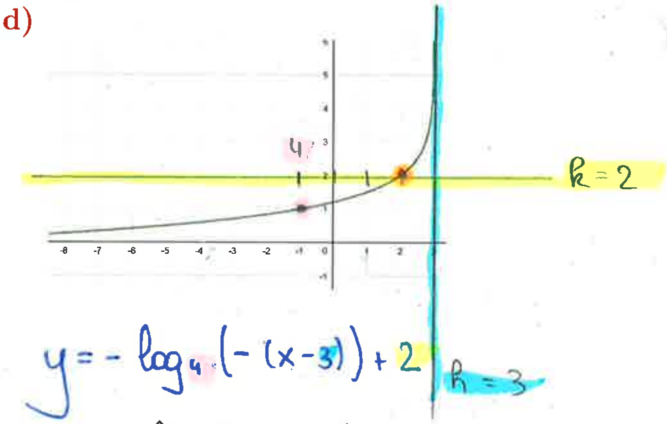
b)



sym d'axe y

$y = \log_2(-(x-8)) + 3$

d)



$y = -\log_4(-(x-3)) + 2$

les 2 symétries

Wie gehen Sie vor ? Schreiben Sie die verschiedenen Schritte auf.

— Schritt 1 :

dessiner a.v $\Rightarrow$ donne h

↳ nouvel axe y

— Schritt 2 :

dessiner le point "P(1;0)" 1 unité à droite / gauche de l'asymptote

— Schritt 3 :

à travers ce point, tirer une droite horizontale

$\Rightarrow$ donne le k $\Rightarrow$ nouvel axe x

— Schritt 4 :

graduer les nouveaux axes et définir le point "P(a;1)"

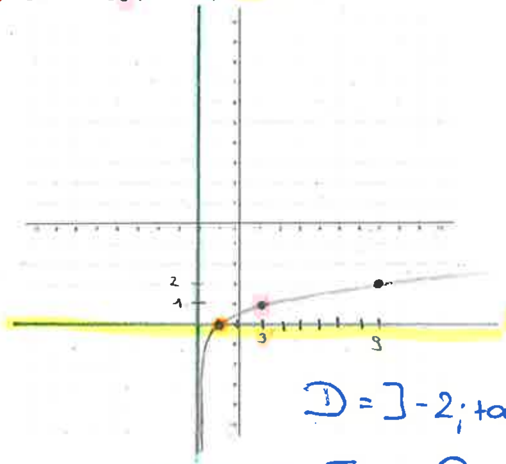
↳ a = base

9 Graph zeichnen

Übung 9 Für folgende Funktionen,

- geben Sie den Definitionsbereich an.
- geben Sie den Wertebereich an.
- geben Sie die Gleichung der Asymptote an.
- zeichnen Sie den Graphen.

a) $y = \log_3(x+2) - 5$ $h = -2$ $k = -5$



$k = -5$

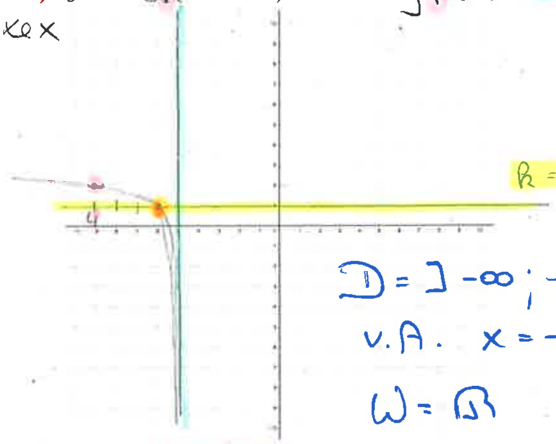
$D =]-2; +\infty[$

$h = -2$ $Im = \mathbb{R}$

a.v. $x = -2$

b) $y = \log_4(-x-5) + 1 = \log_4(-(x+5)) + 1$

sym. d'axe x



$k = 1$

$D =]-\infty; -5[$

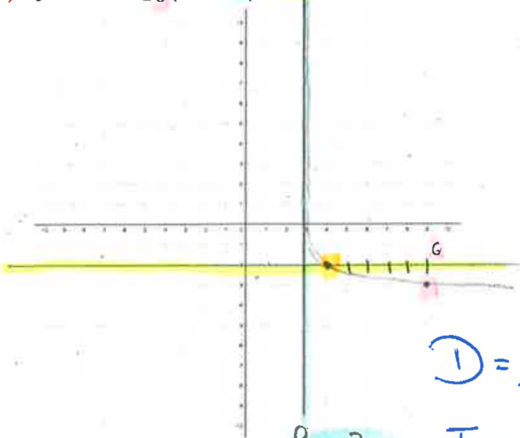
v.A. $x = -5$

$W = \mathbb{R}$

$h = -5$

c) $y = -\log_6(x-3) - 2$

sym. d'axe x



$k = -2$

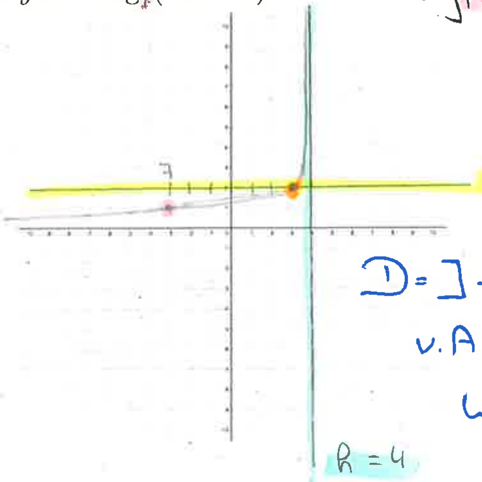
$D =]3; +\infty[$

$h = 3$ $Im = \mathbb{R}$

a.v. $x = 3$

d) $y = -\log_7(-x+4) + 2 = -\log_7(-(x-4)) + 2$

2 sym.



$k = 2$

$D =]-\infty; 4[$

v.A. $x = 4$

$W = \mathbb{R}$

$h = 4$

Zum Zeichnen, wie gehen Sie vor? Schreiben Sie die verschiedenen Schritte auf.

- Schritt 1 : $h \xrightarrow{} $ V.A. (Achtung falls - vor dem x!) und k ein zeichnen
- Schritt 2 : den Punkt "P(1;0)" ein zeichnen ⇒ Symmetrien beachten!
- Schritt 3 : den Punkt "P(a; 1)" ein zeichnen ⇒ Symmetrien beachten!
- Schritt 4 : weitere Punkte ein zeichnen, falls möglich