Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông
Khoa Công nghệ thông tin 1

Toán rời rạc 1

Giới thiệu

Nguyễn Thị Trang

Vai trò của toán rời rạc trong CNTT

- Là lĩnh vực nghiên cứu cơ bản, đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác của CNTT
  - Trí tuệ nhân tạo
  - Thuật toán
  - Lý thuyết tối ưu
  - ...
- Là môn học cơ sở trong ngành CNTT, nền tảng của nhiều môn học khác
  - Các môn học lập trình
  - Cấu trúc dữ liệu và giải thuật
  - Nhập môn trí tuệ nhân tạo
  - Cơ sở dữ liệu
  - ...

Nội dung môn học (1/5)

- Phần 1: Một số kiến thức cơ bản
  - Lý thuyết tập hợp
  - Logic mệnh đề
  - Thuật toán và độ phức tạp
  - Bài tập

Nội dung môn học (2/5)

- Phần 2: Bài toán đếm
  - Giới thiệu bài toán
  - Các nguyên lý đếm cơ bản
  - Quy về bài toán con
  - Hệ thức truy hồi
  - Phương pháp hàm sinh
  - Bài tập

Nội dung môn học (3/5)

- Phần 3: Bài toán liệt kê
  - Giới thiệu bài toán
  - Phương pháp sinh
  - Phương pháp quay lui
  - Bài tập

Nội dung môn học (4/5)

- Phần 4: Bài toán tối ưu
  - Giới thiệu bài toán
  - Thuật toán duyệt toàn bộ
  - Thuật toán nhánh cận
  - Bài tập

Nội dung môn học (5/5)

- Phần 5: Bài toán tồn tại
  - Giới thiệu bài toán
  - Phương pháp phản chứng
  - Nguyên lý Dirichlet
  - Bài tập

Thông tin môn học

- Giảng viên
  - ThS. Nguyễn Thị Trang, Bộ môn KHMT, Khoa CNTT 1
  - Email: trangnt@ptit.edu.vn, tranguyen.hust117@gmail.com
- Tài liệu tham khảo
  - Nguyễn Duy Phương. Giáo trình Toán rời rạc. Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn Thông.
  - Nguyễn Đức Nghĩa, Nguyễn Tô Thành. Toán rời rạc. Nhà xuất bản Giáo dục, 2005.
  - Đỗ Đức Giáo. Toán rời rạc. Nhà xuất bản ĐHQG Hà Nội, 2003.
- Đánh giá
  - Chuyên cần (10%)
  - Bài tập (10%)
  - Kiểm tra giữa kỳ (10%)
  - Thi cuối kỳ (70%)

Thiếu điểm thành phần hoặc nghỉ quá 20% số buổi sẽ không được thi hết môn!!!

Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông
Khoa Công nghệ thông tin 1

Toán rời rạc 1

Một số kiến thức cơ bản

Nguyễn Thị Trang

Nội dung

- Lý thuyết tập hợp
- Logic mệnh đề
- Thuật toán và độ phức tạp
- Bài tập

Một số ký hiệu tập hợp

- Tập hợp: $A, B, \dots, X, Y,..$
- Phần tử của tập hợp: $a, b, \dots, x, y, ..$
- Phần tử x thuộc (không thuộc) A: $x \in A, x \notin A$
- Số phần tử của tập hợp
  - Một tập hợp có n phần tử được gọi là một n-tập
- Tập hợp con: $A \subseteq B$
  - $x \in A \Rightarrow x \in B$
  - A = { 1, 2, 3}
  - B = {1, 2, 3, 4, 5}
- Tập hợp bằng nhau: nếu $A \subseteq B$ và $\mathrm{B} \subseteq A$ thì $A = B$
- Tập rỗng ∅:
  - Không có phần tử nào
  - Là con của mọi tập hợp

Các phép toán trên tập hợp

- Phần bù của A trong X: $\bar{A} = \{x \in X |\, x \notin A\}$
- Hợp của hai tập hợp: $A \cup B = \{x | x \in A \;\, or\, x \in B\}$
- Giao của hai tập hợp: $A \cap B = \{x | x \in A\, and\; x \in B\}$
- Hiệu của hai tập hợp: $A \setminus \mathrm{B} = \{x | x \in A\, and\; x \notin B\}$
- Luật kết hợp:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Luật giao hoán: $A \cup B = B \cup A\,, A \cap B = B \cap A$
- Luật phân bố:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Các phép toán trên tập hợp (2)

- Luật đối ngẫu: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- Tích Đề các: $\mathrm{A} \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
- A = { 1, 2, 3}
- B = { 2, 3, 4}
- ➔ AxB = { (1,2), (1,3), (1,4), (2, 2), ...}

Quan hệ

- **Quan hệ:** một quan hệ hai ngôi R trên tập $X, R(X)$ là một tập con các tích Đề các $X \times X$
- Tính chất của quan hệ:
  - Phản xạ: mọi phần tử có quan hệ với chính nó
  - Đối xứng: a có quan hệ với b kéo theo b có quan hệ với a
  - Kéo theo: a có quan hệ với b và b có quan hệ với c kéo theo a có quan hệ c
- Ví dụ:
  - $X = \{1,2,3,4,8\}$
  - $a, b \in X, a$ có quan hệ R đối với b nếu a chia hết cho b
  - R(X) ={(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (8,1), (4,2), (8,2), (8,4), (2,2), (4,4), (8,8), (3,3)}
  - Kéo theo: (8,4) , (4,2) ➔ (8,2)
  - Phản xạ, kéo theo, nhưng không đối xứng.

Quan hệ tương đương và phân hoạch

- **Quan hệ tương đương**: là một quan hệ có đủ ba tính chất, phản xạ, đối xứng, và kéo theo
- **Lớp tương đương**: một quan hệ tương đương trên tập hợp sẽ chia tập hợp thành các lớp tương đương
  - Hai phần tử thuộc cùng một lớp có quan hệ với nhau
  - Hai phần tử khác lớp không có quan hệ với nhau
  - Các lớp tương đương phủ kín tập hợp ban đầu
- **Phân hoạch**: là một họ các lớp tương đương (các tập con khác rỗng) của một tập hợp

Một quan hệ tương đương trên tập hợp sẽ xác định một phân hoạch trên tập hợp, ngược lại một phân hoạch bất Kỳ trên tập hợp sẽ tương ứng với một quan hệ tương đương trên nó.

Ví dụ quan hệ tương đương

- Xét $X = \{1,2,\dots,m\}$, m là số nguyên dương $(m > 2)$
- k là số nguyên dương, $1 < k < m$
- Định nghĩa quan hệ R trên X như sau
- Với $a, b \in X$, $\mathrm{aRb} \Leftrightarrow a \equiv b(mod\ k)$
  - a có quan hệ R với b nếu a và b có cùng số dư khi chia cho k
- R là quan hệ tương đương
  - Phản xạ, đối xứng, kéo theo

- Đặt $A_i = \{a \in X | a \equiv i(mod\ k)\}, i = 0,1,\dots,k-1$
- $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$ tạo thành một phân hoạch của X

Example

- X= {1,2,3,4,5,6} Quan hệ tương đương (phản xạ, kéo theo, đối xứng)
- R: N nếu hai số a và b cùng số dư khi chia cho 3
- R(X)_0 ={(3,6), (6,6), (6,3), (3,3)} (dư = 0)
- R(X)_1 = {(1,4), (1,1), (4,1), (4,4)} (dư =1)
- R(X)_2 = {(2,2), (5,2), (2,5), (5,5)} (dư = 2)

- Định nghĩa phân hoạch: k = 3, i (0 -> 2)
- Đặt A_1 = { a thuộc X| a và 1 (3)}) = {4, 1}
- Đặt A_2 = { a thuộc X | a và 2 (3)) = {2, 5}

Nguyên lý cộng

- Nếu A và B là hai tập rời nhau thì:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

- Nếu $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ là một phân hoạch của tập hợp X thì:

$$|X| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|$$

- Nếu A là một tập con của X :

$$|\overline{A}| = |\mathrm{X}| - |\mathrm{A}|$$

- Ví dụ:
  - Một đoàn VĐV gồm 2 môn bắn súng và bơi. Nam có 10 người. Số VĐV thi bắn súng là 14. Số nữ VĐV thi bơi bằng số nam VĐV thi bắn súng. Hỏi toàn đoàn có bao nhiêu VĐV.

Nguyên lý cộng

- Ví dụ:
- Chia đoàn thành 2 lớp: Nam và Nữ
- Nữ lại được chia làm 2: thi bắn súng và thi bơi.
- n_nữ_bơi = n_nam_bắn_súng
- n_bắn_súng = n_nam_bắn_súng + n_nữ_bắn_súng
- ==> n_bắn_súng = n_nữ_bơi + n_nữ_bắn_súng
- n_bắn_súng = 14 ➔ n_nữ =14
- N = 14 + 10 =24

Nguyên lý nhân

- Nếu mỗi thành phần a_i của bộ có thứ tự k thành phần $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ có n_i khả năng chọn, thì số bộ được tạo ra sẽ là tích các khả năng $n_1 n_2 \dots n_k$
- Hệ quả:
  - $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1||A_2| \dots |A_k|$
  - $\left|A^k\right| = |A|^k$
- Ví dụ
  - Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số được thành lập bởi các chữ số 0,1,2?

Nguyên lý nhân

- Vd:
- Chữ số đầu tiên tạo lên bởi 1 và 2
- Các chữ số còn lại: 0, 1, 2
- => 2.3.3.3.3 = 2.3^4

Chỉnh hợp lặp

- **Định nghĩa**: Một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một bộ có thứ tự gồm k thành phần, lấy từ n thành phần đã cho. Các thành phần có thể được lặp lại.
- Theo nguyên lý nhân, số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là n^k
- Ví dụ
  - Tính số tập con của một n-tập

Chỉnh hợp lặp

- VD:
- Giả sử n-tập đã cho là $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Biểu diễn mỗi tập con A của tập đã cho X bằng 1 dãy nhị phân độ dài n:
- X = (x_1, x_2, x_3, x_4) => b = (1,0,1,0) > A = {x1, x_3}
- 2*2*2*2 = 2^4 (n=4)
- $b = (b_1, b_2, .. b_n)$
- Trong đó b_i = 1 nếu phần tử x_i thuộc A và b_i = 0 (ngược lại)
- $i = (1,2 \dots, n)$
- N = 2*2*2…*2 = 2^n
- Dãy tập con là 2^n

VD2

- Tập X = { 1, 2, 3, 4}
- Số cách lấy ra k=2 phần tử, có thể lặp lại. N =4
- A = { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4),…}
- Phần tử 1 có: 4 cách chọn
- Phần tử 2 có : 4 cách chọn
- ➔ Số cách chọn : 4*4 = n^k

Chỉnh hợp không lặp

- **Định nghĩa**: Một chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử là một bộ có thứ tự gồm k thành phần, lấy từ n thành phần đã cho. Các thành phần không được lặp lại.
- Theo nguyên lý nhân, số chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử là $n(n-1)\ldots(n-k+1)$

- Ví dụ
  - Tính số đơn ánh từ một k-tập vào một n-tập (tập có n phần tử)

Đơn ánh : Tập X = (x1, x2) , f(x1) khác f(x2)

Chỉnh hợp không lặp

- Vd: *Biểu diễn mỗi đơn ánh bằng bộ ảnh k thành phần, trong đó thành phần thứ i là ảnh của phần tử thứ i (1<= i <= k). Các ảnh không được lặp lại , ta nhận được số cần tìm là n(n-1)...(n-k+1)*

- Vd2: Từ n=5 chữ số (0,1,2,3,5) tính số số nguyên dương có k=4 chữ số, (các chữ số không trùng lặp nhau)
- N= 4.4.3.2

Hoán vị

- **Định nghĩa**: Ta gọi một hoán vị của n phần tử là một cách xếp thứ tự các phần tử đó
- Một hoán vị của n phần tử là một trường hợp riêng của *chỉnh hợp không lặp khi $k = n$*
  - Số hoán vị của n phần tử là $n.(n-1)\dots 2.1 = n!$

- Ví dụ
  - Cần bố trí việc thực hiện n chương trình trên một máy vi tính. Biết rằng các chương trình thực hiện độc lập (không phụ thuộc thứ tự). Hỏi có bao nhiêu cách?

Hoán vị

- Vd:
- Đánh số các chương trình bởi 1,2,…,n Mỗi cách bố trí việc thực hiện các chương trình trên máy có thể biểu diễn một hoán vị của 1,2,..,n . Từ đó suy ra cách bố trí cần tìm là n!

Tổ hợp

- Định nghĩa: Một tổ hợp chập k của n phần tử là một bộ không kể thứ tự gồm k thành phần khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- Một số tính chất
  - $C_n^k = C_n^{n-k}$
  - $C_n^0 = C_n^n = 1$
  - $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$
- Nhị thức Newton

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$$

- X = {1, 2, 3, 4,5}
- Tổ hợp 3 phần tử từ n=5 là : (1,2,3) , (2,3,1) → 1 tổ hợp .

Bài tập 1

- Sử dụng định nghĩa chứng minh một số phép toán trên tập hợp

Bài tập 2

- Cho biết trong các hệ thức dưới đây hệ thức nào là đúng, hệ thức nào là sai?

1) $A \subseteq A \cap B$
2) $C \subseteq (A \cap B) \cup C$
3) $A \cup B \subseteq A \cap B$
4) $A \cap (B \cup A) = A \cap B$
5) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \setminus \mathrm{B}$

Bài tập 3

- Ký hiệu Z là tập hợp các số nguyên. Xét hai tập con của Z:

$$A = \{x \in Z : x = 4p - 1 \; với \; một \; p \in Z \; nào \; đó\}$$
$$B = \{y \in Z : y = 4q + 3 \; với \; một \; q \in Z \; nào \; đó\}$$

Chứng minh rằng $A = B$.

Bài tập 4

- Cho $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và xác định quan hệ R trên A bởi:
  $R = \{(0,0), (2,1), (0,3), (1,1), (3,0), (1,4), (4,1), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4), (1,2), (4,2)\}$.

1) R có phải là một quan hệ tương đương hay không?
2) Nếu câu 1) là đúng thì chỉ ra phân hoạch của A thành các lớp tương đương theo quan hệ R.

Nội dung

- Lý thuyết tập hợp
- Logic mệnh đề
- Thuật toán và độ phức tạp
- Bài tập

Một số khái niệm của logic mệnh đề

- **Mệnh đề**: là một câu khẳng định hoặc đúng hoặc sai.
- Ví dụ:
  - "Hà Nội là thủ đô của Việt Nam" là một mệnh đề đúng.
  - "(5 < 3)" là một mệnh đề sai, "(5 > 3)" là một mệnh đề đúng.
  - "(a<7)" không phải là mệnh đề vì nó không biết khi nào đúng khi nào sai.
- **Giá trị chân lý của mệnh đề**: mỗi mệnh đề chỉ có một trong 2 giá trị "**đúng**", ký hiệu là "**T**", giá trị "**sai**", ký hiệu là "**F**". Tập { T, F} được gọi là giá trị chân lý của mệnh đề.
- Ký hiệu**:** ta ký hiệu mệnh đề bằng các chữ cái in thường (a, b, p, q, r, s, t). $Mỗi$ mệnh đề còn được gọi là một công thức. Từ khái niệm về mệnh đề, giá trị chân lý của mỗi mệnh đề, ta xây dựng nên các mệnh đề phức hợp (được gọi là công thức) thông qua các phép toán trên mệnh đề.

Các phép toán của logic mệnh đề (1/2)

Cho p và q là hai mệnh đề

- Phép phủ định
  - $\neg p$ là ký hiệu mệnh đề, đọc là "Không phải p"
  - Mệnh đề cho giá trị đúng nếu p sai và cho giá trị sai nếu p đúng
- Phép hội
  - $p \wedge q$ là ký hiệu mệnh đề, đọc là "p và q"
  - Mệnh đề có giá trị đúng khi cả p và q có giá trị đúng, có giá trị sai trong các trường hợp khác còn lại
- Phép tuyển
  - $p \vee q$ là ký hiệu mệnh đề, đọc là "p hoặc q"
  - Mệnh đề có giá trị sai khi cả p và q có giá trị sai, có giá trị đúng trong các trường hợp khác còn lại

Các phép toán của logic mệnh đề (2/2)

- Phép tuyển loại
  - $p \oplus q$ là ký hiệu mệnh đề đọc là "hoặc p hoặc q"
  - Mệnh đề có giá trị đúng khi một trong p hoặc q có giá trị đúng, có giá trị sai trong các trường hợp khác còn lại
- Phép kéo theo
  - $p \Rightarrow q$ là ký hiệu mệnh đề đọc là "p kéo theo q"
  - Mệnh đề có giá trị sai khi p đúng và q sai, có giá trị đúng trong các trường hợp khác còn lại
- Phép tương đương
  - $p \Leftrightarrow q$ là ký hiệu mệnh đề đọc là "p tương đương q"
  - Mệnh đề có giá trị đúng khi p và q có cùng giá trị chân lý, có giá trị sai trong các trường hợp khác còn lại

Bảng giá trị chân lý

Bảng giá trị chân lý các phép toán mệnh đề							
p	q	$\neg p$	$p \land q$	$p \lor q$	$p \oplus q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T

Các phép toán cấp bít ứng dụng trong ngôn ngữ LT				
Giá trị của A	Giá trị của B	A **and** B	A **or** B	A **xor** B
A = 13 =1101	B = 8=1000	1000	1101	0101

Một số khái niệm

- Thỏa được
  - Một mệnh đề là thỏa được nếu nó đúng với một bộ giá trị chân lý nào đó của các mệnh đề thành phần
- Không thỏa được
  - Một mệnh đề là không thỏa được nếu nó sai với mọi bộ giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần
- Vững chắc
  - Một mệnh đề là vững chắc nếu nó đúng với mọi bộ giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần

Các mệnh đề tương đương logic (1/2)

- Hai mệnh đề a và b được gọi là tương đương logic nếu chúng có cùng giá trị chân lý với mọi bộ giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần
  - Ký hiệu: $a \equiv b$

- Một số mệnh đề tương đương cơ bản
  - $a \vee F \equiv a$
  - $a \wedge F \equiv F$
  - $a \vee T \equiv T$
  - $a \wedge T \equiv a$
  - $a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b$
  - $a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$
  - $\neg(\neg a) \equiv a$

Các mệnh đề tương đương logic (2/2)

- Luật giao hoán
  - $a \vee b \equiv b \vee a$
  - $a \wedge b \equiv b \wedge a$
- Luật kết hợp
  - $(a \vee b) \vee \mathrm{c} \equiv a \vee (b \vee \mathrm{c})$
  - $(a \wedge b) \wedge \mathrm{c} \equiv a \wedge (b \wedge \mathrm{c})$
- Luật phân phối
  - $a \wedge (b \vee \mathrm{c}) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
  - $a \vee (b \wedge \mathrm{c}) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- Luật De Morgan
  - $\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$
  - $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$

Dạng chuẩn tắc hội (1/2)

- Một câu (mệnh đề) tuyển là tuyển của các mệnh đề nguyên thủy
  - Câu tuyển có dạng $p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n$ trong đó p_i là các mệnh đề nguyên thủy

- Một công thức ở dạng chuẩn tắc hội nếu nó là hội của các câu tuyển
  - $(a \vee e \vee f \vee g) \wedge (b \vee \mathrm{c} \vee d)$

Dạng chuẩn tắc hội (2/2)

- Ta có thể biến đổi một công thức bất kỳ về dạng chuẩn tắc hội bằng cách biến đổi theo nguyên tắc sau:
  - Khử các phép tương đương: $a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$
  - Khử các phép kéo theo: $a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b$
  - Chuyển các phép phủ định vào sát các ký hiệu mệnh đề bằng cách áp dụng luật De Morgan
  - Khử phủ định kép: $\neg(\neg a) \equiv a$
  - Áp dụng luật phân phối: $a \vee (b \wedge \mathrm{c}) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Bài tập 1

- Sử dụng phương pháp bảng chân lý chứng minh sự tương đương logic giữa các mệnh đề
  - Các mệnh đề tương đương cơ bản
  - Các luật

- Sử dụng các mệnh đề tương đương cơ bản và các luật (giao hoán, kết hợp, phân phối, De Morgan) chứng minh sự tương đương logic giữa các mệnh đề

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Bài tập 2

- Chứng minh các mệnh đề sau là vững chắc

$a)\quad (p \wedge q) \Rightarrow p$

$b)\quad p \Rightarrow (p \vee q)$

$c)\quad \neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

$d)\quad (p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

$e)\quad \neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$

$f)\quad \neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg q$

g) $\neg p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$

h) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

i) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

j) $((p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow r$

Bài tập 3

- Chứng minh các tương đương logic sau

  1) $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

  2) $\neg p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \neg q$

  3) $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv \neg p \Leftrightarrow q$

Bài tập 4

- Chuẩn hóa về dạng chuẩn tắc hội

$$(p \Rightarrow q) \lor \neg(r \lor \neg s)$$

Nội dung

- Lý thuyết tập hợp
- Logic mệnh đề
- Thuật toán và độ phức tạp
- Bài tập

Khái niệm thuật toán

- Thuật toán hoặc giải thuật (algorithm)
  - Là một thủ tục giải quyết một vấn đề nào đó trong một số hữu hạn bước
  - Là một tập hữu hạn các chỉ thị được định nghĩa rõ ràng để giải quyết một vấn đề nào đó
  - Là một tập các quy tắc định nghĩa chính xác một dãy các hành động

- Mô tả thuật toán
  - Sử dụng ngôn ngữ tự nhiên
  - Sử dụng dạng giả mã (Pseudo-code)
  - Sử dụng ngôn ngữ lập trình

Ví dụ thuật toán (1/2)

- **Thuật toán**: Tìm số nguyên lớn nhất trong danh sách n số nguyên (chưa sắp xếp)

- Mô tả thuật toán sử dụng ngôn ngữ tự nhiên
  - Nếu không có số nào trong danh sách thì không có số lớn nhất
  - Giải sử số đầu tiên là số lớn nhất trong danh sách
  - Với mỗi số còn lại trong danh sách, nếu số này lớn hơn số lớn nhất hiện tại thì coi số này là số lớn nhất trong danh sách
  - Khi tất cả các số trong danh sách đều đã được xem xét, số lớn nhất hiện tại là số lớn nhất trong danh sách

Dài dòng, ít được sử dụng

Ví dụ thuật toán (2/2)

- **Thuật toán**: Tìm số nguyên lớn nhất trong danh sách n
- số nguyên (chưa sắp xếp)

- Mô tả thuật toán sử dụng dạng giả mã

- **Algorithm** LargestNumber
- **Input:** A list of numbers L.
- **Output:** The largest number in the list L.

  - *largest* ← null
    - **for each** *item* **in** L **do**

      if *item* > *largest* **then**
      - *largest* ← *item*

  return *largest*

Dễ hiểu, hay được sử dụng,
không phụ thuộc vào ngôn ngữ lập trình

Độ phức tạp thuật toán

- Hầu hết các thuật toán được thiết kế làm việc với kích thước dữ liệu đầu vào tùy ý
  - Ví dụ thuật toán ở trang trước, kích thước dữ liệu đầu vào là số phần tử trong danh sách (n)
- Độ phức tạp thời gian (time complexity)
  - Xác định lượng thời gian cần thiết để thực hiện giải thuật
    - Được tính là số phép toán cơ bản thực hiện giải thuật
- Độ phức tạp không gian (space complexity)
  - Xác định lượng bộ nhớ cần thiết để thực hiện giải thuật
    - Lượng bộ nhớ lớn nhất cần thiết để lưu các đối tượng của thuật toán tại một thời điểm thực hiện thuật toán

Thường được biểu diễn như là một hàm của kích thước dữ liệu đầu vào

Khái niệm O-lớn

- $f(n) = O(g(n))$, với n đủ lớn, $f(n)$ không quá một hằng số cố định nhân với $g(n)$
  - n là một số nguyên dương kí hiệu kích thước của dữ liệu đầu vào

$$f(n) = O\big(g(n)\big) \Leftrightarrow \exists c, n_0. \forall n \geq n_0, f(n) \leq c * g(n).$$

- Định lý
  - Nếu $lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ tồn tại và hữu hạn, thì $f(n) = O\big(g(n)\big)$

- Vd: $10n^2 + 3 = O(n^2)$
- $10n^2 + 3 \le 11n^2 + 3 \le 12n^2 = O(n^2)$

Ví dụ về độ phức tạp thuật toán

- **Thuật toán**: Tìm số nguyên lớn nhất trong danh sách n số nguyên

Algorithm LargestNumber
Input: A list of numbers L.
Output: The largest number in the list L.

largest ← null
for each *item* **in** L **do {(n phần tử) T = O(n)}**
  if *item* > *largest* **then**
    largest ← *item*
return *largest*

Độ phức tạp thời gian và không gian đều là $O(n)$

Bài tập 1

- Tìm độ phức tạp tính toán của thuật toán sắp xếp nổi bọt (bubble sort)

```
function bubble_sort(List L, number n) // n chiều dài L
    for i from n downto 2
        for j from 1 to (i - 1)
            if L[j] > L[j + 1] then //nếu chúng không đúng thứ tự
                swap(L[j], L[j + 1]) //đổi chỗ chúng cho nhau
            end if
        end for
    end for
end function
```

- 2 -> n (n – 1) lần
- Mỗi i thì có (i – 1) giá trị j.
- Tổng số phép toán: (n-1) + …+ 1 = n(n-1)/2 = O(n^2)

Bài tập 2

- Tìm độ phức tạp tính toán của thuật toán tìm kiếm nhị phân trên danh sách đã sắp xếp

function binary_search(A, x, L, R)
    if $L > R$ **then**
        return Fail
    else
        $i \leftarrow \lfloor (L + R)/2 \rfloor$
        if $A[i] == x$ **then**
            return i
        else if $A[i] > x$ **then**
            return binary_search($A, x, L, i - 1$)
        else
            return binary_search($A, x, i + 1, R$)
        end if
    end if
end function