Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông
Khoa Công nghệ thông tin 1

Toán rời rạc 1

# Bài toán đếm

Ngô Xuân Bách

# Nội dung

- Giới thiệu bài toán
- Các nguyên lý đếm cơ bản
- Quy về bài toán con
- Hệ thức truy hồi
- Phương pháp hàm sinh
- Bài tập

# Giới thiệu bài toán đếm

- Bài toán đếm
  - Là bài toán đếm xem có bao nhiêu cấu hình tổ hợp có thể được tạo ra với những quy tắc đã nêu?
  - Lời giải thường phụ thuộc vào một số tham số ban đầu và người ta cố gắng biểu diễn những phụ thuộc này bằng những công thức toán học
- Nguyên tắc chung giải bài toán đếm
  - Để đếm các cấu hình đã cho, người ta tìm cách đưa về các cấu hình quen thuộc bằng cách thiếp lập một quan hệ 1-1 giữa chúng
- Ứng dụng của bài toán đếm trong khoa học máy tính
  - Ước lượng số phép toán thực hiện trong một giải thuật, chương trình máy tính
  - Ước lượng độ phức tạp thời gian và không gian của giải thuật

# Các phương pháp giải quyết bài toán đếm

- **Sử dụng các nguyên lý đếm cơ bản**: nguyên lý cộng, nguyên lý nhân, nguyên lý bù trừ
- **Qui về các bài toán con**: Phân tích lời giải bài toán đếm phức tạp thành những bài toán con. Trong đó, mỗi bài toán con có thể giải được bằng các nguyên lý đếm cơ bản
- **Sử dụng hệ thức truy hồi**: Xây dựng công thức tính số nghiệm tổng quát bất kỳ dựa vào biểu diễn các số hạng biết trước
- **Phương pháp hàm sinh**: Sử dụng hàm sinh của một dãy số để đếm các cấu hình tổ hợp

# Nội dung

- Giới thiệu bài toán
- Các nguyên lý đếm cơ bản
- Quy về bài toán con
- Hệ thức truy hồi
- Phương pháp hàm sinh
- Bài tập

# Nguyên lý cộng (nhắc lại)

- Nếu $A$ và $B$ là hai tập rời nhau thì
$$|A \cup B| = |A| + |B|$$
- Nếu $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ là một phân hoạch của tập hợp $X$ thì
$$|X| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|$$

- Nếu có $K$ việc, việc thứ $i$ thực hiện bằng $n_i$ cách và thực hiện một cách tuần tự. Khi đó sẽ có $n_1 + n_2 + .. + n_K$ cách thực hiện một trong $K$ việc nêu trên.

# Ví dụ 1

- **Bài toán**: Giả sử $N, M$ là hai số tự nhiên đã xác định giá trị. Hãy cho biết giá trị của $S$ sau khi thực hiện đoạn chương trình.

$$S = 0;$$
**for** $(i = 1;\ i <= N; i++)$
$$S++;$$
**for** $(j = 1;\ j <= M; j++)$
$$S++;$$

# Ví dụ 1

- **Bài toán**: Giả sử $N, M$ là hai số tự nhiên đã xác định giá trị. Hãy cho biết giá trị của $S$ sau khi thực hiện đoạn chương trình.

  $S = 0;$
  **for** $(i = 1;\ i <= N; i++)$
  $\quad S++;$
  **for** $(j = 1;\ j <= M; j++)$
  $\quad S++;$

- **Lời giải**: Gọi số phép toán thực hiện trong vòng lặp thứ nhất là $T_1$, số phép toán thực hiện trong vòng lặp thứ hai là $T_2$. Vì hai vòng lặp thực hiện độc lập nhau nên theo nguyên lý cộng, giá trị của $S = T_1 + T_2 = N + M$.

# Nguyên lý nhân (nhắc lại)

- Giả sử một nhiệm vụ nào đó được tách ra làm hai việc. Việc thứ nhất có thể thực hiện bằng $n_1$ cách, việc thứ hai thực hiện bằng $n_2$ cách sau khi việc thứ nhất đã được thực hiện. Khi đó, sẽ có $n_1 n_2$ cách thực hiện nhiệm vụ nêu trên.
- Nếu mỗi thành phần $a_i$ của bộ có thứ tự $k$ thành phần $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ có $n_i$ khả năng chọn, thì số bộ được tạo ra sẽ là tích các khả năng $n_1 n_2 \dots n_k$
- Hệ quả:
  - $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1||A_2| \dots |A_k|$
  - $\left|A^k\right| = |A|^k$

# Ví dụ 2

- **Bài toán**: Giả sử $n_1, n_2$ là hai số nguyên dương đã xác định giá trị. Hãy cho biết giá trị của $S$ sau khi thực hiện đoạn chương trình dưới đây?

```
int S = 0;
for (int i = 1; i <= n1; i++)
    for (int j = 1; j <= n2; j++)
        S++;
```

# Ví dụ 2

- **Bài toán**: Giả sử $n_1, n_2$ là hai số nguyên dương đã xác định giá trị. Hãy cho biết giá trị của $S$ sau khi thực hiện đoạn chương trình dưới đây?

int $S = 0;$
**for** (int $i = 1; i <= n_1; i++)$
    **for** (int $j = 1; j <= n_2; j++)$
        $S++;$

- **Lời giải.** Với mỗi giá trị của $i = 1,2,..,n_1$ thì $S$ được cộng $n_2$ đơn vị. Do vậy, theo nguyên lý nhân, sau $n_1$ vòng lặp giá trị của $S = n_1 \times n_2$.

# Ví dụ 3

- **Bài toán**: Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số không chứa chữ số 1 và không có 2 chữ số nào giống nhau?

# Ví dụ 3

- **Bài toán**: Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số không chứa chữ số 1 và không có 2 chữ số nào giống nhau?

- **Lời giải**:
  - Xét số có 5 chữ số $a_1a_2a_3a_4a_5$
  - $a_1$ có 8 cách chọn (trừ 0 và 1)
  - $a_2$ có 8 cách chọn (trừ $a_1$ và 1)
  - $a_3$ có 7 cách chọn (trừ $a_1, a_2$, và 1)
  - $a_4$ có 6 cách chọn (trừ $a_1$, $a_2$, $a_3$, và 1)
  - $a_5$ có 5 cách chọn (trừ $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, và 1)
  - Vậy có 8x8x7x6x5 số thỏa mãn

# Ví dụ 4

- **Bài toán**: có bao nhiêu tên biến trong ngôn ngữ lập trình C độ dài 8 chỉ chứa hai chữ cái a,b và bắt đầu bởi aaa hoặc bbb?

# Ví dụ 4

- **Bài toán**: có bao nhiêu tên biến trong ngôn ngữ lập trình C độ dài 8 chỉ chứa hai chữ cái a,b và bắt đầu bởi aaa hoặc bbb?

- **Lời giải**: Tập các biến thỏa mãn đề bài được phân hoạch làm 2 tập: một tập gồm các biến bắt đầu bằng aaa, tập kia gồm các biến bắt đầu bằng bbb. Mỗi tên biến độ dài 8 bắt đầu bằng aaa (hoặc bbb) có thể được xây dựng như sau:
  - Chọn ký tự thứ 4, chọn ký tự thứ 5, …, chọn ký tự thứ 8.
  - Mỗi ký tự có 2 cách chọn: a hoặc b
  - Có tất cả $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ cách
- Toàn bộ có: $32 + 32 = 64$ biến

# Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp (nhắc lại)

- Số hoán vị của $n$ phần tử: $n.(n-1)\ldots 2.1 = n!$

- Số chỉnh hợp lặp chập $k$ của $n$ phần tử là $n^k$

- số chỉnh hợp không lặp chập $k$ của $n$ phần tử là $n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

- Số tổ hợp chập $k$ của $n$ phần tử là

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

# Ví dụ 5

- **Bài toán**: Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

# Ví dụ 5

- **Bài toán**: Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

- **Lời giải**: Số nghiệm nguyên không âm của phương trình bằng số cách chọn 11 phần tử từ 3 tập khác nhau. Ta biểu diễn 11 phần tử bằng 11 số 1 trên một đường thẳng. Sau đó sử dụng 2 số 0 để chia 11 phần tử này ra thành 3 nhóm. Số số 1 trong mỗi nhóm tương ứng số phần tử ta sẽ chọn từ tập tương ứng. Như vậy số nghiệm của phương trình chính là số cách chọn 11 vị trí để đánh số 1 trong một dãy 13 vị trí (để đánh 0 và 1).

$$C_{13}^{11} = \frac{13 \times 12}{2} = 78$$

# Ví dụ 6

- **Bài toán**: Phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

# Ví dụ 6

- **Bài toán**: Phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

- **Lời giải:** Tương tự Ví dụ 5 ta sẽ có số nghiệm nguyên không âm của phương trình là:

$$C_{n-1+k}^{k} = \frac{(n-1+k)!}{k!\,(n-1)!}$$

# Ví dụ 7

- **Bài toán:** Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3$.

# Ví dụ 7

- **Bài toán:** Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3$.

- **Lời giải**: Phương trình tương đương:

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 2) + (x_3 - 3) = 5$$

Đặt $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 2$, $y_3 = x_3 - 3$

Phương trình trở thành: $y_1 + y_2 + y_3 = 5$

Theo Ví dụ 6, số nghiệm nguyên không âm là

$$C_{3-1+5}^{5} = C_7^5 = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

# Ví dụ 8

- **Bài toán**: Phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $x_1 \geq m_1, \ldots, x_n \geq m_n$?

# Ví dụ 8

- **Bài toán**: Phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $x_1 \geq m_1, \ldots, x_n \geq m_n$?

- **Lời giải**: Phương trình tương đương

$$(x_1 - m_1) + \cdots + (x_n - m_n) = k - (m_1 + \cdots + m_n)$$

Đặt $m = k - (m_1 + \cdots + m_n)$

Bài toán quy về tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình: $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = m$

Theo Ví dụ 6: $C_{n-1+m}^{m}$

# Ví dụ 9

**Bài toán:** Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $1 \le x_1 \le 5, 3 \le x_2 \le 7$?

# Ví dụ 9

**Bài toán:** Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $1 \le x_1 \le 5, 3 \le x_2 \le 7$?

**Lời giải**: Gọi $N_1, N_2, N_3, N_4$ là số các nghiệm nguyên không âm của phương trình $(1), (2), (3), (4)$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 6, x_2 \ge 3; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 8; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24 \\ x_1 \ge 6, x_2 \ge 8; \end{cases} \quad (4)$$

# Ví dụ 9

Theo Ví dụ 8 ta có:

$$N_1 = C_{6-1+20}^{20} = C_{25}^{20} = 53130$$
$$N_2 = C_{6-1+15}^{15} = C_{20}^{15} = 15504$$
$$N_3 = C_{6-1+15}^{15} = C_{20}^{15} = 15504$$
$$N_4 = C_{6-1+10}^{10} = C_{15}^{10} = 3003$$

Vì vậy số nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$\begin{aligned} N &= N_1 - N_2 - N_3 + N_4 \\ &= 53130 - 15504 - 15504 + 3003 \\ &= 25125 \end{aligned}$$

# Bài tập 1

- Một đợt phát hành xổ số mỗi tấm vé số gồm 2 phần. Phần chữ gồm 2 chữ cái nhận giá trị từ A đến Z, phần số gồm 4 chữ số nhận giá trị từ 0 đến 9. Mỗi đợt phát hành như vậy có 1 giải đặc biệt, 2 giải nhất, 5 giải nhì, và 10 giải ba. Tính xác suất 1 tấm vé số trúng giải từ giải ba trở lên trong 2 trường hợp sau

a. Phần chữ đứng trước phần số trong mỗi tấm vé số.

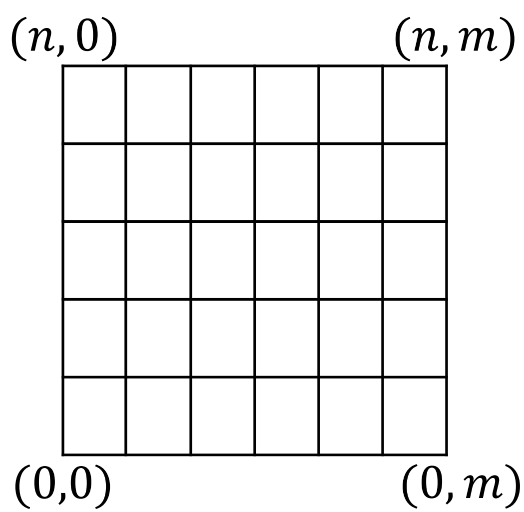
b. Phần chữ đứng tùy ý trong mỗi tấm vé số.

# Bài tập 2

- Tính số trận đấu tại mỗi vòng chung kết World Cup bóng đá.

# Bài tập 3

- Cho lưới như hình vẽ. Ta đánh số các cột từ 0 tới m (theo chiều từ trái sang phải) và các hàng từ 0 tới n (theo chiều từ dưới lên trên). Hỏi có bao nhiêu cách di chuyển từ vị trí (0,0) tới vị trí (n,m) nếu ta chỉ di chuyển dọc theo cạch các ô theo chiều từ trái sang phải và theo chiều từ dưới lên trên.



# Nguyên lý bù trừ

- Nhiều bài toán đếm phức tạp hơn có thể giải bằng nguyên lý bù trừ
- Về bản chất, nguyên lý bù trừ là trường hợp tổng quát của nguyên lý cộng
- **Nguyên lý bù trừ**: Nếu $A$ và $B$ là hai tập hợp, khi đó:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- Tổng quát, nếu $A_1, A_2, \dots, A_k$ là các tập hợp hữu hạn, khi đó:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = N_1 - N_2 + \ldots + (-1)^{k-1} N_k,$$

Trong đó, $N_i$ là tổng của tất cả các giao của $i$ tập lấy từ $k$ tập đã cho

# Ví dụ 10

- **Bài toán**: Trong tập hợp $X = \{1,2, \dots , 10000\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho bất kỳ số nào trong các số 3, 4, 7?

# Ví dụ 10

- **Bài toán**: Trong tập hợp $X = \{1,2,\dots,10000\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho bất kỳ số nào trong các số 3, 4, 7?

  **Lời giải**:

  Gọi $A_1$ là tập các số thuộc $X$ và chia hết cho 3

  $A_2$ là tập các số thuộc $X$ và chia hết cho 4

  $A_3$ là tập các số thuộc $X$ và chia hết cho 7

  Khi đó

  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

# Ví dụ 10

Tính toán trực tiếp các giá trị ta có:

$N_1 = |A_1| + |A_2| + |A_3|$

$= [10000/3] + [10000/4] + [10000/7]$

$= 3333 + 2500 + 1428 = 7261.$

$N_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|$

$= [10000/(3 * 4)] + [10000/(3 * 7)] + [10000/(4 * 7)]$

$= 833 + 476 + 357 = 1666.$

$N_3 = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = [10000/(3 * 4 * 7)] = 119$

Từ đó ta có số các số hoặc chia hết cho 3, hoặc chia hết cho 4, hoặc chia hết cho 7 là

$$N = N_1 - N_2 + N_3 = 7261 - 1666 + 119 = 5714.$$

Như vậy, số các số không chia hết cho bất kỳ số 3, 4, 7 là

$$K = 10000 - N = 4286.$$

# Ví dụ 11

- **Bài toán**: Biết rằng có 1232 sinh viên học tiếng Tây Ban Nha, 879 sinh viên học tiếng Pháp và 114 sinh viên học tiếng Nga, 103 sinh viên học cả tiếng Tây Ban Nha và tiếng Pháp, 23 sinh viên học tiếng Tây Ban Nha và tiếng Nga, 14 sinh viên học cả tiếng Pháp và tiếng Nga. Nếu tất cả có 2092 sinh viên theo học ít nhất một ngoại ngữ thì có bao nhiêu sinh viên học cả ba thứ tiếng.

# Ví dụ 12

- **Bài toán bỏ thư**: Có *n* lá thư bỏ vào *n* phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào các phong bì. Hỏi xác suất để xảy ra không một lá thư nào bỏ đúng địa chỉ là bao nhiêu?

# Ví dụ 12

- **Bài toán bỏ thư**: Có *n* lá thư bỏ vào *n* phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào các phong bì. Hỏi xác suất để xảy ra không một lá thư nào bỏ đúng địa chỉ là bao nhiêu?
- **Gợi ý**: Gọi $A_i$ là tập các cách bỏ thư thỏa mãn lá thư thứ $i$ đúng địa chỉ. Số cách bỏ thư thỏa mãn yêu cầu

$$N - |A_1 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n| = N - N_1 + N_2 \ldots + (-1)^n N_n$$

Trong đó $N = n!$ là số cách bỏ thư, $N_k$ là số tất cả các cách bỏ thư sao cho có $k$ lá thư bỏ đúng địa chỉ.

Có $C_n^k$ cách chọn ra $k$ lá thư đúng địa chỉ, với mỗi cách chọn ra $k$ lá thư đúng địa chỉ có $(n-k)!$ cách bỏ các lá thư còn lại. Do vậy $N_k = C_n^k(n-k)! = \frac{n!}{k!}$

- Xác suất: $\frac{N - N_1 + N_2 \ldots + (-1)^n N_n}{N}$

# Bài tập 1

- Có bao nhiêu cách xếp 5 người, A, B, C, D, E, đứng thành một hàng ngang sao cho A không đứng cạnh B?

# Bài tập 2

- Tính số lượng số có 5 chữ số sao cho có ít nhất hai chữ số giống nhau?

# Nội dung

- Giới thiệu bài toán
- Các nguyên lý đếm cơ bản
- Quy về bài toán con
- Hệ thức truy hồi
- Phương pháp hàm sinh
- Bài tập

# Quy về bài toán con

- Một phương pháp khác để giải bài toán đếm là quy về các bài toán con đơn giản hơn
  - Điều này không phải lúc nào cũng dễ dàng vì ta cần phải phân tích sâu sắc các cấu hình cần đếm

# Ví dụ 13

- **Bài toán**: Trong các số tự nhiên có 7 chữ số hãy đếm số các số thuận nghịch (số đối xứng) có tổng các chữ số là 18?

# Ví dụ 13

- **Bài toán**: Trong các số tự nhiên có 7 chữ số hãy đếm số các số thuận nghịch (số đối xứng) có tổng các chữ số là 18?
- **Lời giải**: Một số thỏa mãn đề bài có dạng $x_1x_2x_3x_4x_3x_2x_1 (x_1 \geq 1)$ và

  $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 18$
- Vì $2x_1, 2x_2, 2x_3$ là những số chẵn nên $x_4$ cũng phải là một số chẵn. Do đó $x_4$ có thể nhận các giá trị 0, 2, 4, 6, 8.
- Gọi $N_0, N_2, N_4, N_6, N_8$ là số nghiệm của pt ứng với các trường hợp $x_4$ nhận giá trị 0, 2, 4, 6, 8. Theo nguyên lý cộng số cần tìm là

$$N = N_0 + N_2 + N_4 + N_6 + N_8$$

# Ví dụ 13

- Ta có $N_0, N_2, N_4, N_6, N_8$ là số nghiệm của các pt tương ứng sau

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0 = 18 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2 = 18 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4 = 18 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6 = 18 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8 = 18 \\ x_1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 \geq 1 \end{cases}$$

Các bài toán con này có thể giải dễ dàng theo Ví dụ 8

# Nội dung

- Giới thiệu bài toán
- Các nguyên lý đếm cơ bản
- Quy về bài toán con
- Hệ thức truy hồi
- Phương pháp hàm sinh
- Bài tập

# Hệ thức truy hồi

- **Định nghĩa**: Hệ thức truy hồi đối với dãy số $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn $a_n$ qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy, cụ thể là $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, với $n$ nguyên và $n \geq n_0$, trong đó $n_0$ là nguyên không âm. Dãy số được gọi là lời giải hay nghiệm của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này.
- **Ví dụ 14**: Cho $\{a_n\}$ là dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$, với $n \geq 2$, và giả sử $a_0 = 3, a_1 = 5$. Tìm $a_2$ và $a_3$?
- **Lời giải**. Từ hệ thức truy hồi ta có:

$$a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2,$$
$$a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3.$$

# Mô hình hóa hệ thức truy hồi

- Sử dụng hệ thức truy hồi, ta có thể mô hình hóa được lớp rất rộng trong thực tế. Mỗi bài toán cụ thể ta có một phương pháp mô hình hóa khác nhau. Dưới đây là một số ví dụ điển hình.
- **Ví dụ 15**: Bài toán dân số. Giả sử năm 1995, dân số thế giới là 7 tỉ người. Mỗi năm, dân số thế giới tăng $3\%$. Đến năm 2020, dân số thế giới là bao nhiêu người?

# Ví dụ 15

- **Lời giải**: Gọi dân số thế giới sau $n$ năm là $P_n$. Khi đó, dân số năm thứ $n$ bằng 1.03 dân số thế giới năm trước đó. Từ đó ta có công thức truy hồi cho dãy $\{P_n\}$ như sau.

$P_n = 1.03P_{n-1}$, với $n \geq 1$ và $P_0 = 7$.

Để tính $P_n$ ta có thể sử dụng phương pháp lặp như sau:

$$P_1 = 1.03\,P_0 = 1.03.7$$
$$P_2 = 1.03.P_1 = (1.03)^2.7$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n = 1.03P_{n-1} = (1.03)^n.7$$

Từ đó ta có $P_{25} = (1.03)^{25}.7$

# Ví dụ 16

- **Bài toán Lãi kép**: Một người gửi $X$ đô la vào tài khoản của mình tại ngân hàng với lãi suất kép $11\%$ một năm. Hỏi sau 30 năm người đó có bao nhiêu tiền trong tài khoản?

# Ví dụ 17

- **Họ nhà thỏ và số Fibonacci**: Một cặp thỏ (một con đực và một con cái) được nhốt trên một hòn đảo. Giả sử một cặp thỏ chưa sinh sản được trước khi đầy hai tháng tuổi. Từ khi chúng đầy hai tháng tuổi, mỗi tháng chúng đẻ được một cặp thỏ. Hãy tìm công thức truy hồi tính số cặp thỏ sau $n$ tháng?

# Ví dụ 17

**Giải**: Gọi $f_n$ là số cặp thỏ sau $n$ tháng. Ta sẽ chỉ ra, $f_n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ chính là dãy số Fibonacci?

Vì sau hai tháng một cặp thỏ mới sinh sản được, do vậy số thỏ của tháng hiện tại bằng số thỏ của tháng trước $f_{n-1}$ cộng với số thỏ mới đẻ là $f_{n-2}$.

Do vậy, dãy $\{f_n\}$ thỏa mãn hệ thức

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2};\ n \geq 2 \text{ với } f_0 = 0, f_1 = 1.$$

| Số tháng | Số cặp sinh sản | Số cặp thỏ con | Tổng số cặp thỏ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 2 | 3 | 5 |
| 6 | 3 | 5 | 8 |

# Ví dụ 18

- **Bài toán tháp Hà Nội**: Có ba cọc (a), (b), (c). Trên cọc (a) có $n\ (n = 64)$ chiếc đĩa có đường kính giảm dần từ dưới lên. Cần phải dịch chuyển chồng đĩa từ cọc (a) sang cọc (c) tuân thủ theo qui tắc: mỗi lần chỉ được phép di chuyển một đĩa và chỉ được xếp các đĩa có đường kính nhỏ hơn lên đĩa có đường kính hơn. Trong quá trình dịch chuyển được phép sử dụng cọc (b) làm cọc trung gian. Bài toán đặt ra là, tìm số lần dịch chuyển ít nhất cho bài toán tháp Hà Nội?

# Ví dụ 18

**Lời giải**. Gọi $H_n$ là số lần dịch chuyển đĩa ít nhất từ cọc (a) sang cọc (c). Ta xây dựng công thức đệ qui để tính $H_n$.

Rõ ràng, $H_1 = 1$. Giả sử $n \geq 2$. Khi đó việc di chuyển được thực hiện thông qua các bước:

(i) Chuyển $(n-1)$ đĩa từ cọc (a) đến cọc (b) sử dụng cọc (c) làm cọc trung gian;

(ii) Chuyển 1 đĩa có đường kính lớn nhất từ cọc (a) đến cọc (c);

(iii) Chuyển $(n-1)$ đĩa từ cọc (b) đến cọc (c) sử dụng cọc (a) làm cọc trung gian;

Bước (i), (iii) ta cần giải bài toán Tháp Hà Nội với với $(n-1)$ đĩa. Bước (ii) cần dịch chuyển 1 lần. Do vậy, dãy $\{H_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi:

$$H_n = 2H_{n-1} + 1.$$

Ta có thể dùng phương pháp lặp để giải hệ thức truy hồi trên.

$$H_n = 2^n - 1$$

Nếu lấy $n = 64$ khi đó ta cần trên 500 tỉ năm mới có thể giải xong bài toán tháp Hà Nội!!!!!!!!!!!!!!

# Ví dụ 19

- Gọi $a_n$ là số xâu nhị phân độ dài $n$ không có 2 số 0 liên tiếp. Xây dựng công thức truy hồi cho $a_n$ và tính $a_6$.

# Ví dụ 19

- Gọi $a_n$ là số xâu nhị phân độ dài $n$ không có 2 số 0 liên tiếp. Xây dựng công thức truy hồi cho $a_n$ và tính $a_6$.

**Gợi ý**: Xét với $n \geq 3$.

Ta chia làm 2 trường hợp

1) Xâu nhị phân độ dài $n$ kết thúc bằng số 1 thỏa mãn yêu cầu bài ra
2) Xâu nhị phân độ dài $n$ kết thúc bằng số 0 thỏa mãn yêu cầu bài ra, suy ra số thứ $(n-1)$ phải là 1.

Dễ thấy trong trường hợp 1) có $a_{n-1}$ xâu thỏa mãn

Trường hợp 2) có $a_{n-2}$ xâu thỏa mãn

Vậy $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

# Ví dụ 20

- **Tính số từ mã**: Một hệ máy tính coi một xâu các chữ số hệ thập phân là một từ mã hợp lệ nếu nó chứa một số chẵn chữ số 0. Ví dụ từ 168304073 là hợp lệ, từ 103203044 là không hợp lệ. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho các từ mã hợp lệ có độ dài $n$?

# Ví dụ 20

- **Tính số từ mã**: Một hệ máy tính coi một xâu các chữ số hệ thập phân là một từ mã hợp lệ nếu nó chứa một số chẵn chữ số 0. Ví dụ từ 168304073 là hợp lệ, từ 103203044 là không hợp lệ. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho các từ mã hợp lệ có độ dài $n$?
- **Gợi ý**: Gọi số từ mã hợp lệ độ dài $n$ là $a_n$

Xét với $n \geq 2$, Ta chia làm 2 trường hợp

1) Xâu $(n-1)$ chữ số đầu tiên là từ mã hợp lệ, suy ra chữ số cuối cùng khác 0. Vậy có $9a_{n-1}$
2) Xâu $(n-1)$ chữ số đầu tiên không là từ mã hợp lệ, suy ra chữ số cuối cùng là 0. Vậy có $(10^{n-1} - a_{n-1})$

Vậy $a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$

# Bài tập

a) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân có độ dài n có ít nhất một dãy hai số 0 liên tiếp?
b) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n không có dãy ba số 1 liên tiếp?
c) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n không có dãy bốn số 1 liên tiếp?
d) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n có ít nhất một dãy ba số 1 liên tiếp?
e) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n có ít nhất một dãy bốn số 1 liên tiếp?
f) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n không có dãy k số 1 liên tiếp?
g) Hãy tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu tìm số các xâu nhị phân có độ dài n có ít nhất một dãy k số 1 liên tiếp?

# Phương pháp lặp giải hệ thức truy hồi

- **Phương pháp**: Lặp đến khi gặp điều kiện đầu trong các công thức truy hồi.

- **Bài tập**: Hãy tìm nghiệm của công thức truy hồi với điều kiện đầu dưới đây:
  a) $a_n = a_{n-1} + 2$ với $a_0 = 3$.
  b) $a_n = a_{n-1} + n$ với $a_0 = 1$.
  c) $a_n = a_{n-1} + 2n + 3$ với $a_0 = 4$.
  d) $a_n = a_{n-1} + 2^n$ với $a_0 = 1$.
  e) $a_n = a_{n-1} - 2n - 3$ với $a_0 = 4$.

# Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất

- **Định nghĩa**: Một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc $k$ với hệ số hằng số là hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \qquad (1)$$

trong đó, $c_1, c_2, \ldots, ck$ là các hằng số và $c_k \neq 0$.

Ta cần tìm công thức trực tiếp tính số hạng $a_n$ thõa mãn điều kiện $(1)$.

Dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn điều kiện $(1)$ sẽ được xác định duy nhất nếu nó thỏa mãn các điều kiện ban đầu như sau:

$$a_0 = C_0, a_1 = C_1, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1} \qquad (2)$$

trong đó $C_0$,…, $C_{k-1}$ là các hằng số.

# Ví dụ

- Hệ thức truy hồi $P_n = (1.11)P_{n-1}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 1
- Hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2
- Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-5}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 5
- Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + (a_{n-2})^2$ là không tuyến tính
- Hệ thức truy hồi $H_n = 2H_{n-1} + 1$ là không thuần nhất
- Hệ thức $B_n = nB_{n-1}$ không có hệ số hằng số

# Phương pháp giải

- Phương pháp chung để giải các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất là tìm nghiệm dưới dạng $a_n = r^n$, trong đó $r$ là hằng số. Chú ý rằng, $a_n = r^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi khi và chỉ khi

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k} \quad (3)$$

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_k = 0 \quad (4)$$

Phương trình đặc trưng

# Trường hợp nghiệm phân biệt

- **Định lý**: Cho $c_1, c_2$ là hai số thực. Giả sử phương trình đặc trưng

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

có hai nghiệm phân biệt $r_1, r_2$. Khi đó, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

khi và chỉ khi

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

Trong đó $\alpha_1$ và $\alpha_2$ là các hằng số.

Để tìm $\alpha_1$ và $\alpha_2$ ta sử dụng các điều kiện ban đầu.

# Ví dụ 21

- **Bài toán**: Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

với $a_0 = 2, a_1 = 7$.

# Ví dụ 21

- **Bài toán**: Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

với $a_0 = 2, a_1 = 7$.

**Giải**:

Bước 1: Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng

$$r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 2, r_2 = -1.$$

Bước 2: Xây dựng công thức tổng quát cho $\{a_n\}$

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$$

Bước 3: Xác định các hằng số dựa trên điều kiện ban đầu

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

Bước 4: Hoàn chỉnh nghiệm

$$a_n = 3.2^n - (-1)^n$$

# Bài tập 1

- Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, với điều kiện ban đầu $F_0 = 0, F_1 = 1$.

# Bài tập 2

- Tìm nghiệm của các hệ thức truy hồi với điều kiện đầu dưới đây
  1) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ với $n$≥2 và $a_0 = 3, a_1 = 6$.
  2) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ với $n$≥2 và $a_0 = 2, a_1 = 1$.
  3) $a_n = 13a_{n-1} - 22a_{n-2}$ với $n$≥2 và $a_0 = 3, a_1 = 15$.
  4) $a_n = -13a_{n-1} - 22a_{n-2}$ với $n$≥2 và $a_0 = 3, a_1 = 15$.

# Trường hợp nghiệm kép

- **Định lý**: Cho $c_1, c_2$ là hai số thực. Giả sử phương trình đặc trưng

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

có nghiệm kép $r_0 = r_1 = r_2$. Khi đó, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

khi và chỉ khi

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$$

Trong đó $\alpha_1$ và $\alpha_2$ là các hằng số.

Để tìm $\alpha_1$ và $\alpha_2$ ta sử dụng các điều kiện ban đầu.

# Ví dụ 22

- **Bài toán**: Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

với $a_0 = 1, a_1 = 6$.

# Ví dụ 22

- **Bài toán**: Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

với $a_0 = 1, a_1 = 6$.

- **Giải**:

Bước 1: Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \Leftrightarrow r_0 = r_1 = r_2 = 3.$$

Bước 2: Xây dựng công thức tổng quát cho $\{a_n\}$

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

Bước 3: Xác định các hằng số dựa trên điều kiện ban đầu

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Bước 4: Hoàn chỉnh nghiệm

$$a_n = 3^n + n3^n$$

# Bài tập

- Tìm nghiệm của các hệ thức truy hồi thỏa mãn các điều kiện ban đầu sau đây

1) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, với $n \geq 2$ và $a_0 = 4, a_1 = 1$.
2) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, với $n \geq 2$ và $a_0 = 6, a_1 = 8$.
3) $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, với $n \geq 2$ và $a_0 = 0, a_1 = 1$.
4) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, với $n \geq 2$ và $a_0 = 3, a_1 = -3$.
5) $a_n = 14a_{n-1} - 49a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3, a_1 = 35$.
6) $a_n = -14a_{n-1} - 49a_{n-2}$ với $n \geq 2$ và $a_0 = 3, a_1 = 35$.

# Trường hợp nghiệm phức

- **Định lý**: Cho $c_1, c_2$ là hai số thực. Giả sử phương trình đặc trưng

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

có hai nghiệm phức liên hợp:

$$\begin{cases} r_1 = r(\cos(\theta) + i.\sin(\theta)) \\ r_2 = r(\cos(\theta) - i.\sin(\theta)) \end{cases}$$

Khi đó, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

khi và chỉ khi

$$a_n = r^n(\alpha_1 \cos(n\theta) + \alpha_2 \sin(n\theta))$$

Trong đó $\alpha_1$ và $\alpha_2$ là các hằng số.

Để tìm $\alpha_1$ và $\alpha_2$ ta sử dụng các điều kiện ban đầu.

# Ví dụ 23

- **Bài toán**: Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 2a_{n-1} - 4a_{n-2}$$

với $a_1 = 4, a_2 = 4$.

# Ví dụ 23

Bước 1: Tìm nghiệm của phương trình đặc trưng

$$r^2 - 2r + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 2(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)) \\ r_2 = 2(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - isin\left(\frac{\pi}{3}\right)) \end{cases}$$

Bước 2: Xây dựng công thức tổng quát cho $\{a_n\}$

$$a_n = 2^n(\alpha_1 \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \alpha_2 \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right))$$

Bước 3: Xác định các hằng số dựa trên điều kiện ban đầu

$$\begin{cases} 2\left(\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2\right) = 4 \\ 4\left(-\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = 1; \alpha_2 = \sqrt{3}$$

Bước 4: Hoàn chỉnh nghiệm

$$a_n = 2^n(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right))$$

# Trường hợp tổng quát

- **Định lý**: Cho $c_1, c_2, \dots, c_k$ là các số thực. Giả sử phương trình đặc trưng

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

Có $k$ nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \dots, r_k$.

Khi đó, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

khi và chỉ khi

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \cdots + \alpha_k r_k^n$$

Trong đó $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ là các hằng số.

Để tìm $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ta sử dụng các điều kiện ban đầu.

# Bài tập

- Tìm nghiệm của các hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu sau:

1) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, với $n \geq 3$ và $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$.
2) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$, với $n \geq 3$ và $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 0$.
3) $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$, với $n \geq 3$ và $a_0 = 9, a_1 = 10, a_2 = 32$.
4) $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$, với $n \geq 3$ và $a_0 = 7, a_1 = -4, a_2 = 8$.

# Nội dung

- Giới thiệu bài toán
- Các nguyên lý đếm cơ bản
- Quy về bài toán con
- Hệ thức truy hồi
- Phương pháp hàm sinh
- Bài tập

# Định nghĩa và ví dụ

- **Định nghĩa**: Hàm sinh $g(x)$ của dãy số $\{h_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ là chuỗi vô hạn

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{+\infty} h_i\, x^i$$

Hàm $g(x)$ sinh ra dãy số đã cho như là các hệ số của nó

Chú ý: Trong trường hợp dãy số là hữu hạn thì ta sẽ biến nó thành dãy vô hạn bằng cách đưa vào các phần tử 0.

**Ví dụ**: Hàm $g(x) = (1+x)^n$ sinh ra dãy các hệ số tổ hợp

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

# Một số khai triển thường gặp

- $\frac{x^k}{1-x} = x^k(1 + x + x^2 + \cdots) = x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \cdots$
- $\frac{1-x^{k+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k.$
- $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$
- $\frac{x}{1-x^2} = x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots$

# Ví dụ 24

- **Bài toán**: Xây dựng hàm sinh giải quyết bài toán sau:

Có bao nhiêu cách chọn ra $n$ quả từ 4 loại quả táo, chuối, cam, đào, trong đó có một số chẵn quả táo, một số lẻ quả chuối, không quá 4 quả cam, và ít nhất 2 quả đào?

# Ví dụ 24

- **Bài toán**: Xây dựng hàm sinh giải quyết bài toán sau:

Có bao nhiêu cách chọn ra $n$ quả từ 4 loại quả táo, chuối, cam, đào, trong đó có một số chẵn quả táo, một số lẻ quả chuối, không quá 4 quả cam, và ít nhất 2 quả đào?

**Gợi ý**: Hàm sinh giải bài toán này như sau

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(x + x^3 + x^5 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)$$

Hay $g(x) = \left[\frac{1}{1-x^2}\right]\left[\frac{x}{1-x^2}\right]\left[\frac{1-x^5}{1-x}\right]\left[\frac{x^2}{1-x}\right]$

Số cách cần đếm chính là hệ số của $x^n$ trong triển khai $g(x)$ dưới dạng chuỗi lũy thừa.

# Ví dụ 24

- **Bài toán**: Xây dựng hàm sinh giải quyết bài toán sau:

Có bao nhiêu cách chọn ra $n$ quả từ 4 loại quả táo, chuối, cam, đào, trong đó có một số chẵn quả táo, một số lẻ quả chuối, không quá 4 quả cam, và ít nhất 2 quả đào?

**Gợi ý**: Hàm sinh giải bài toán này như sau

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(x + x^3 + x^5 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)$$

Hay $g(x) = \left[\frac{1}{1-x^2}\right]\left[\frac{x}{1-x^2}\right]\left[\frac{1-x^5}{1-x}\right]\left[\frac{x^2}{1-x}\right]$

Số cách cần đếm chính là hệ số của $x^n$ trong triển khai $g(x)$ dưới dạng chuỗi lũy thừa.

Việc tính ra đáp số cần nhiều tính toán, nhưng có thể giải quyết trên máy tính dễ dàng!

# Bài tập 1

- Tìm hàm sinh cho số cách đổi $n$ (nghìn đồng) sử dụng các loại giấy bạc mệnh giá 1 nghìn đồng, 5 nghìn đồng, 10 nghìn đồng, 50 nghìn đồng (giả thiết là ta có một số lượng không hạn chế mỗi loại giấy bạc).