Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông
Khoa Công nghệ thông tin 1

Toán rời rạc 1

Một số kiến thức cơ bản

Ngô Xuân Bách

Nội dung

- Lý thuyết tập hợp
- Logic mệnh đề
- Logic vị từ
- Thuật toán và độ phức tạp
- Bài tập

Một số ký hiệu tập hợp

- Tập hợp: $A, B, \dots, X, Y, \dots$
- Phần tử của tập hợp: $a, b, \dots, x, y, \dots$
- Phần tử x thuộc (không thuộc) A: $x \in A,\ x \notin A$
- Số phần tử của tập hợp A: $|A|$
  - Một tập hợp có n phần tử được gọi là một n-tập
- Tập hợp con: $A \subseteq B$
  - $x \in A \Rightarrow x \in B$
- Tập hợp bằng nhau: nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$ thì $A = B$
- Tập rỗng: $\emptyset$
  - Không có phần tử nào
  - Là con của mọi tập hợp

Các phép toán trên tập hợp

- Phần bù của A trong X: $\bar{A} = \{x \in X | x \notin A\}$
- Hợp của hai tập hợp: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$
- Giao của hai tập hợp: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$
- Hiệu của hai tập hợp: $A \setminus \mathrm{B} = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$
- Luật kết hợp:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Luật giao hoán: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- Luật phân bố:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Luật đối ngẫu: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- Tích Đề các: $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

Quan hệ

- **Quan hệ**: một quan hệ hai ngôi R trên tập X, $R(X)$, là một tập con của tích Đề các $X \times X$
- Tính chất của quan hệ:
  - **Phản xạ**: mọi phần tử có quan hệ với chính nó
  - **Đối xứng**: a có quan hệ với b kéo theo b có quan hệ với a
  - **Kéo theo**: a có quan hệ với b và b có quan hệ với c kéo theo a có quan hệ với c
- Ví dụ
  - $X = \{1,2,3,4\}$
  - $a, b \in X, a$ có quan hệ R đối với b nếu a chia hết cho b
  - $R(X) = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)\}$
    - **Phản xạ, kéo theo, nhưng không đối xứng**

Quan hệ tương đương và phân hoạch

- **Quan hệ tương đương**: là một quan hệ có đủ ba tính chất, phản xạ, đối xứng, và kéo theo
- **Lớp tương đương**: một quan hệ tương đương trên tập hợp sẽ chia tập hợp thành các lớp tương đương
  - Hai phần tử thuộc cùng một lớp có quan hệ với nhau
  - Hai phần tử khác lớp không có quan hệ với nhau
  - Các lớp tương đương phủ kín tập hợp ban đầu
- **Phân hoạch**: là một họ các lớp tương đương (các tập con khác rỗng) của một tập hợp

Một quan hệ tương đương trên tập hợp sẽ xác định một phân hoạch trên tập hợp, ngược lại một phân hoạch bất Kỳ trên tập hợp sẽ tương ứng với một quan hệ tương đương trên nó.

Ví dụ quan hệ tương đương

- Xét $X = \{1,2,\dots,m\}$, m là số nguyên dương $(m > 2)$
- k là số nguyên dương, $1 < k < m$
- Định nghĩa quan hệ R trên X như sau
- Với $a, b \in X$, $\mathrm{aRb} \Leftrightarrow a \equiv b(mod\ k)$
  - a có quan hệ R với b nếu a và b có cùng số dư khi chia cho k
- R là quan hệ tương đương
  - Phản xạ, đối xứng, kéo theo

- Đặt $A_i = \{a \in X | a \equiv i(mod\ k)\}, i = 0,1,\dots,k-1$
- $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$ tạo thành một phân hoạch của X

Nguyên lý cộng

- Nếu A và B là hai tập rời nhau thì
$$|A \cup B| = |A| + |B|$$
- Nếu $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ là một phân hoạch của tập hợp X thì
$$|X| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|$$
- Nếu A là một tập con của X
$$|\bar{A}| = |X| - |A|$$
- Ví dụ
  - Một đoàn VĐV gồm 2 môn bắn súng và bơi. Nam có 10 người. Số VĐV thi bắn súng là 14. Số nữ VĐV thi bơi bằng số nam VĐV thi bắn súng. Hỏi toàn đoàn có bao nhiêu VĐV?

Nguyên lý nhân

- Nếu mỗi thành phần a_i của bộ có thứ tự k thành phần $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ có n_i khả năng chọn, thì số bộ được tạo ra sẽ là tích các khả năng $n_1 n_2 \dots n_k$
- Hệ quả:
  - $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1||A_2| \dots |A_k|$
  - $\left|A^k\right| = |A|^k$
- Ví dụ
  - Có bao nhiêu số nguyên dương có 5 chữ số được thành lập bởi các chữ số 0,1,2?

Chỉnh hợp lặp

- **Định nghĩa**: Một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là một bộ có thứ tự gồm k thành phần, lấy từ n thành phần đã cho. Các thành phần có thể được lặp lại.
- Theo nguyên lý nhân, số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là n^k

- Ví dụ
  - Tính số tập con của một n-tập

Chỉnh hợp không lặp

- **Định nghĩa**: Một chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử là một bộ có thứ tự gồm k thành phần, lấy từ n thành phần đã cho. Các thành phần không được lặp lại.
- Theo nguyên lý nhân, số chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử là $n(n-1)\dots(n-k+1)$
- Ví dụ
  - Tính số đơn ánh từ một k-tập vào một n-tập

Hoán vị

- **Định nghĩa**: Ta gọi một hoán vị của n phần tử là một cách xếp thứ tự các phần tử đó
- Một hoán vị của n phần tử là một trường hợp riêng của chỉnh hợp không lặp khi $k = n$
  - Số hoán vị của n phần tử là $n.(n-1)\dots 2.1 = n!$
- Ví dụ
  - Cần bố trí việc thực hiện n chương trình trên một máy vi tính. Biết rằng các chương trình thực hiện độc lập (không phụ thuộc thứ tự). Hỏi có bao nhiêu cách?

Tổ hợp

- **Định nghĩa**: Một tổ hợp chập k của n phần tử là một bộ không kể thứ tự gồm k thành phần khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- Một số tính chất
  - $C_n^k = C_n^{n-k}$
  - $C_n^0 = C_n^n = 1$
  - $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$
- Nhị thức Newton

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots + C_n^n y^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$$

Bài tập 1

- Sử dụng định nghĩa chứng minh một số phép toán trên tập hợp

Bài tập 2

- Cho biết trong các hệ thức dưới đây hệ thức nào là đúng, hệ thức nào là sai?

1) $A \subseteq A \cap B$
2) $C \subseteq (A \cap B) \cup C$
3) $A \cup B \subseteq A \cap B$
4) $A \cap (B \cup A) = A \cap B$
5) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \setminus \mathrm{B}$

Bài tập 3

- Ký hiệu Z là tập hợp các số nguyên. Xét hai tập con của Z:

$$A = \{x \in Z: x = 4p - 1 \; với \; một \; p \in Z \; nào \; đó\}$$
$$B = \{y \in Z: y = 4q + 3 \; với \; một \; q \in Z \; nào \; đó\}$$

Chứng minh rằng $A = B$.

Bài tập 4

- Cho $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và xác định quan hệ R trên A bởi:

  $R = \{(0,0), (2,1), (0,3), (1,1), (3,0), (1,4), (4,1), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4), (1,2), (4,2)\}$.

1) R có phải là một quan hệ tương đương hay không?
2) Nếu câu 1) là đúng thì chỉ ra phân hoạch của A thành các lớp tương đương theo quan hệ R.

Nội dung

- Lý thuyết tập hợp
- Logic mệnh đề
- Logic vị từ
- Thuật toán và độ phức tạp
- Bài tập

Một số khái niệm của logic mệnh đề

- **Mệnh đề**: là một câu khẳng định hoặc đúng hoặc sai.
- Ví dụ:
  - "Hà Nội là thủ đô của Việt Nam" là một mệnh đề đúng.
  - "(5 < 3)" là một mệnh đề sai, "(5 > 3)" là một mệnh đề đúng.
  - "(a<7)" không phải là mệnh đề vì nó không biết khi nào đúng khi nào sai.
- **Giá trị chân lý của mệnh đề**: mỗi mệnh đề chỉ có một trong 2 giá trị "**đúng**", ký hiệu là "**T**", giá trị "**sai**", ký hiệu là "**F**". Tập { T, F} được gọi là giá trị chân lý của mệnh đề.
- Ký hiệu**:** ta ký hiệu mệnh đề bằng các chữ cái in thường $(a, b, p, q, r, s, t). Mỗi$ mệnh đề còn được gọi là một công thức. Từ khái niệm về mệnh đề, giá trị chân lý của mỗi mệnh đề, ta xây dựng nên các mệnh đề phức hợp (được gọi là công thức) thông qua các phép toán trên mệnh đề.

Các phép toán của logic mệnh đề (1/2)

Cho p và q là hai mệnh đề

- Phép phủ định
  - $\neg p$ là ký hiệu mệnh đề, đọc là "Không phải p"
  - Mệnh đề cho giá trị đúng nếu p sai và cho giá trị sai nếu p đúng
- Phép hội
  - $p \wedge q$ là ký hiệu mệnh đề, đọc là "p và q"
  - Mệnh đề có giá trị đúng khi cả p và q có giá trị đúng, có giá trị sai trong các trường hợp khác còn lại
- Phép tuyển
  - $p \vee q$ là ký hiệu mệnh đề, đọc là "p hoặc q"
  - Mệnh đề có giá trị sai khi cả p và q có giá trị sai, có giá trị đúng trong các trường hợp khác còn lại

Các phép toán của logic mệnh đề (2/2)

- Phép tuyển loại
  - $p \oplus q$ là ký hiệu mệnh đề đọc là "hoặc p hoặc q"
  - Mệnh đề có giá trị đúng khi một trong p hoặc q có giá trị đúng, có giá trị sai trong các trường hợp khác còn lại
- Phép kéo theo
  - $p \Rightarrow q$ là ký hiệu mệnh đề đọc là "p kéo theo q"
  - Mệnh đề có giá trị sai khi p đúng và q sai, có giá trị đúng trong các trường hợp khác còn lại
- Phép tương đương
  - $p \Leftrightarrow q$ là ký hiệu mệnh đề đọc là "p tương đương q"
  - Mệnh đề có giá trị đúng khi p và q có cùng giá trị chân lý, có giá trị sai trong các trường hợp khác còn lại

Bảng giá trị chân lý

Bảng giá trị chân lý các phép toán mệnh đề							
p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T

Các phép toán cấp bít ứng dụng trong ngôn ngữ LT				
Giá trị của A	Giá trị của B	A **and** B	A **or** B	A **xor** B
A = 13 =1101	B = 8=1000	1000	1101	0101

Một số khái niệm

- Thỏa được
  - Một mệnh đề là thỏa được nếu nó đúng với một bộ giá trị chân lý nào đó của các mệnh đề thành phần
- Không thỏa được
  - Một mệnh đề là không thỏa được nếu nó sai với mọi bộ giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần
- Vững chắc
  - Một mệnh đề là vững chắc nếu nó đúng với mọi bộ giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần

Các mệnh đề tương đương logic (1/2)

- Hai mệnh đề a và b được gọi là tương đương logic nếu chúng có cùng giá trị chân lý với mọi bộ giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần
  - Ký hiệu: $a \equiv b$

- Một số mệnh đề tương đương cơ bản
  - $a \vee F \equiv a$
  - $a \wedge F \equiv F$
  - $a \vee T \equiv T$
  - $a \wedge T \equiv a$
  - $a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b$
  - $a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$
  - $\neg(\neg a) \equiv a$

Các mệnh đề tương đương logic (2/2)

- Luật giao hoán
  - $a \vee b \equiv b \vee a$
  - $a \wedge b \equiv b \wedge a$
- Luật kết hợp
  - $(a \vee b) \vee \mathrm{c} \equiv a \vee (b \vee \mathrm{c})$
  - $(a \wedge b) \wedge \mathrm{c} \equiv a \wedge (b \wedge \mathrm{c})$
- Luật phân phối
  - $a \wedge (b \vee \mathrm{c}) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
  - $a \vee (b \wedge \mathrm{c}) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
- Luật De Morgan
  - $\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$
  - $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$

Dạng chuẩn tắc hội (1/2)

- Một câu (mệnh đề) tuyển là tuyển của các mệnh đề nguyên thủy
  - Câu tuyển có dạng $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ trong đó p_i là các mệnh đề nguyên thủy
- Một công thức ở dạng chuẩn tắc hội nếu nó là hội của các câu tuyển
  - $(a \vee e \vee f \vee g) \wedge (b \vee \mathrm{c} \vee d)$

Dạng chuẩn tắc hội (2/2)

- Ta có thể biến đổi một công thức bất kỳ về dạng chuẩn tắc hội bằng cách biến đổi theo nguyên tắc sau:
  - Khử các phép tương đương: $a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \land (b \Rightarrow a)$
  - Khử các phép kéo theo: $a \Rightarrow b \equiv \neg a \lor b$
  - Chuyển các phép phủ định vào sát các ký hiệu mệnh đề bằng cách áp dụng luật De Morgan
  - Khử phủ định kép: $\neg(\neg a) \equiv a$
  - Áp dụng luật phân phối: $a \lor (b \land \mathrm{c}) \equiv (a \lor b) \land (a \lor c)$

Bài tập 1

- Sử dụng phương pháp bảng chân lý chứng minh sự tương đương logic giữa các mệnh đề
  - Các mệnh đề tương đương cơ bản
  - Các luật

- Sử dụng các mệnh đề tương đương cơ bản và các luật (giao hoán, kết hợp, phân phối, De Morgan) chứng minh sự tương đương logic giữa các mệnh đề

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg \mathbf{q}$$

Bài tập 2

- Chứng minh các mệnh đề sau là vững chắc

$a)\quad (p \wedge q) \Rightarrow p$

$b)\quad p \Rightarrow (p \vee q)$

$c)\quad \neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

$d)\quad (p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

$e)\quad \neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$

$f)\quad \neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg q$

g) $\neg p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$

h) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

i) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

j) $((p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow r$

Bài tập 3

- Chứng minh các tương đương logic sau

  1) $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

  2) $\neg p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \neg q$

  3) $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv \neg p \Leftrightarrow q$

Bài tập 4

- Chuẩn hóa về dạng chuẩn tắc hội

$$(p \Rightarrow q) \lor \neg(r \lor \neg s)$$

Nội dung

- Lý thuyết tập hợp
- Logic mệnh đề
- Logic vị từ
- Thuật toán và độ phức tạp
- Bài tập

Đặc điểm của logic vị từ

- Logic mệnh đề
  - Khả năng biểu diễn giới hạn trong phạm vi thế giới các sự kiện
- Logic vị từ
  - Cho phép mô tả thế giới với các đối tượng, các thuộc tính của đối tượng, các mối quan hệ giữa các đối tượng
  - Đối tượng: một cái bàn, một cái cây, một con người, một cái nhà, một con số, ...
  - Tính chất: cái bàn có bốn chân, làm bằng gỗ, có ngăn kéo,...
  - Quan hệ: cha con, anh em, bạn bè (giữa con người), bên trong, bên ngoài, nằm trên, nằm dưới (giữa các đồ vật),...
  - Hàm: một trường hợp riêng của quan hệ, với mỗi đầu vào ta có một giá trị hàm duy nhất

Cú pháp của logic vị từ (1/4)

- Các ký hiệu
  - Các ký hiệu hằng: a, b, c, An, Ba, John, ...
  - Các ký hiệu biến: x, y, z, u, v, w, ...
  - Các ký hiệu vị từ: P, Q, R, S, Like, Friend, ...
    - Mỗi vị từ là vị từ của n biến ($n \geq 0$)
    - Vị từ không biến là các ký hiệu mệnh đề
  - Các ký hiệu hàm: f, g, cos, sin, mother, husband, ...
    - Mỗi hàm là hàm của n biến ($n \geq 0$)
  - Các ký hiệu kết nối logic: ∧ (hội), ∨ (tuyển), ¬ (phủ định), ⇒ (kéo theo), ⇔ (kéo theo nhau)
  - Các ký hiệu lượng tử:∀ (mọi) , ∃ (tồn tại)
  - Các ký hiệu ngăn cách: dấu phẩy, mở ngoặc, đóng ngoặc

Cú pháp của logic vị từ (2/4)

- Các hạng thức (term)
  - Là các biểu thức mô tả đối tượng, được xác định đệ quy như sau
    - Các ký hiệu hằng và các ký hiệu biến là hạng thức
    - Nếu $t_1, t_2, \ldots, t_n$ là n hạng thức, và f là một ký hiệu hàm n biến thì $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ hạng thức
  - Một hạng thức không chứa biến được gọi là một hạng thức cụ thể (ground term)
  - Hai hạng thức bằng nhau nếu cùng tương ứng với một đối tượng
    - Father(John) = Mike
- Công thức nguyên tử (câu đơn)
  - Biểu diễn tính chất của đối tượng, hoặc quan hệ giữa các đối tượng, được xác định đệ quy như sau
    - Các ký hiệu vị từ không biến (mệnh đề) là công thức nguyên tử
    - Nếu $t_1, t_2, \ldots, t_n$ là n hạng thức, và P là vị từ của n biến thì $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ công thức nguyên tử

Cú pháp của logic vị từ (3/4)

- Công thức
  - Được xây dựng từ công thức nguyên tử, sử dụng các kết nối logic và các lượng tử, theo đệ quy như sau
    - Các công thức nguyên tử là công thức
    - Nếu G và H là các công thức, thì các biểu thức sau là công thức
      - $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(\neg G)$, $(G \Rightarrow H)$, $(G \Leftrightarrow H)$
    - Nếu G là công thức và x là biến thì các biểu thức sau là công thức
      - $(\forall x G)$, $(\exists x G)$
- Một số quy ước
  - Các công thức không phải công thức nguyên tử gọi là *công thức phức hợp* (câu phức hợp)
  - Công thức không chứa biến gọi là *công thức cụ thể*
  - Khi viết công thức ta bỏ đi các dấu ngoặc không cần thiết

Cú pháp của logic vị từ (4/4)

- Lượng tử phổ dụng (∀)
  - Mô tả tính chất của cả một lớp các đối tượng, mà không cần liệt kê các đối tượng ra
  - $\forall x(Elephant(x) \Rightarrow Color(x, Gray))$
- Lượng tử tồn tại (∃)
  - Cho phép tạo ra câu nói đến một đối tượng nào đó trong một lớp đối tượng, có tính chất hoặc thỏa mãn một quan hệ nào đó
  - $\exists x(Student(x) \land Inside(x, P301))$
- Literal
  - Là công thức nguyên tử hoặc phủ định của công thức nguyên tử
  - $Play(x, Football), \neg Like(Lan, Rose)$
- Câu tuyển
  - Là tuyển của các literal
  - $Male(x) \lor \neg Like(x, Football)$

Ngữ nghĩa của logic vị từ (1/3)

- Minh họa
  - Là một cách gán cho các biến đối tượng một đối tượng cụ thể, gán cho các ký hiệu hàm một hàm cụ thể, và các ký hiệu vị từ một vị từ cụ thể
  - Ý nghĩa của công thức trong một thế giới hiện thực nào đó
- Ngữ nghĩa của câu đơn
  - Trong một minh họa, mỗi câu đơn sẽ chỉ định một sự kiện cụ thể, có thể đúng (True) hoặc sai (False)
    - $Student(Lan)$
- Ngữ nghĩa của câu phức
  - Được xác định dựa trên ngữ nghĩa của các câu đơn và các kết nối logic
    - $Student(Lan) \wedge Like(An, Rose)$
    - $Like(An, Rose) \vee \neg Like(An, Tulip)$

Ngữ nghĩa của logic vị từ (2/3)

- Ngữ nghĩa của câu chứa lượng từ
  - Công thức $\forall x G$ là đúng nếu và chỉ nếu mọi công thức nhận được từ G bằng cách thay x bởi một đối tượng trong miền đối tượng đều đúng
    - Ví dụ: Miền đối tượng {An, Ba, Lan}, ngữ nghĩa của câu $\forall x Student(x)$ được xác định là ngữ nghĩa của câu
    - $Student(An) \wedge Student(Ba) \wedge Student(Lan)$
  - Công thức $\exists x G$ là đúng nếu và chỉ nếu một trong các công thức nhận được từ G bằng cách thay x bởi một đối tượng trong miền đối tượng đều đúng
    - Ví dụ: ngữ nghĩa của câu $\exists x Student(x)$ được xác định là ngữ nghĩa của câu
    - $Student(An) \vee Student(Ba) \vee Student(Lan)$
- Các khái niệm công thức thỏa được, không thỏa được, vững chắc, mô hình, tương tự logic mệnh đề

Ngữ nghĩa của logic vị từ (3/3)

- Các lượng tử lồng nhau
  - Có thể sử dụng đồng thời nhiều lượng tử trong câu phức hợp

$$\forall x \forall y Sibling(x,y) \Rightarrow Relationship(x,y)$$
$$\forall x \exists y Love(x,y)$$

  - Nhiều lượng tử cùng loại có thể được viết gọn bằng một ký hiệu lượng tử

$$\forall x, y Sibling(x,y) \Rightarrow Relationship(x,y)$$

  - Không được phép thay đổi các lượng tử khác loại trong câu

$\forall x \exists y Love(x,y)$ Mọi người đều có ai đó yêu

$\exists y \forall x Love(x,y)$ Có ai đó mà tất cả mọi người đều yêu

Bài tập

- Chuyển các câu sau sang logic vị từ cấp 1
  1. An không cao
  2. An không cao nhưng bố An cao
  3. An và Ba là anh em
  4. Tất cả nhà nông đều thích mặt trời
  5. Mọi cây nấm đỏ đều không có độc
  6. Có học sinh thích hoa hồng

Nội dung

- Lý thuyết tập hợp
- Logic mệnh đề
- Logic vị từ
- Thuật toán và độ phức tạp
- Bài tập

Khái niệm thuật toán

- Thuật toán hoặc giải thuật (algorithm)
  - Là một thủ tục giải quyết một vấn đề nào đó trong một số hữu hạn bước
  - Là một tập hữu hạn các chỉ thị được định nghĩa rõ ràng để giải quyết một vấn đề nào đó
  - Là một tập các quy tắc định nghĩa chính xác một dãy các hành động
- Mô tả thuật toán
  - Sử dụng ngôn ngữ tự nhiên
  - Sử dụng dạng giả mã (Pseudo-code)
  - Sử dụng ngôn ngữ lập trình

Ví dụ thuật toán (1/2)

- **Thuật toán**: Tìm số nguyên lớn nhất trong danh sách n số nguyên (chưa sắp xếp)

- Mô tả thuật toán sử dụng ngôn ngữ tự nhiên
  - Nếu không có số nào trong danh sách thì không có số lớn nhất
  - Giải sử số đầu tiên là số lớn nhất trong danh sách
  - Với mỗi số còn lại trong danh sách, nếu số này lớn hơn số lớn nhất hiện tại thì coi số này là số lớn nhất trong danh sách
  - Khi tất cả các số trong danh sách đều đã được xem xét, số lớn nhất hiện tại là số lớn nhất trong danh sách

Dài dòng, ít được sử dụng

Ví dụ thuật toán (2/2)

- **Thuật toán**: Tìm số nguyên lớn nhất trong danh sách n số nguyên (chưa sắp xếp)

- Mô tả thuật toán sử dụng dạng giả mã

Algorithm LargestNumber
Input: A list of numbers L.
Output: The largest number in the list L.

largest ← null
for each *item* **in** L **do**
    if *item* > *largest* **then**
        largest ← *item*
return *largest*

Dễ hiểu, hay được sử dụng,
không phụ thuộc vào ngôn ngữ lập trình

Độ phức tạp thuật toán

- Hầu hết các thuật toán được thiết kế làm việc với kích thước dữ liệu đầu vào tùy ý
  - Ví dụ thuật toán ở trang trước, kích thước dữ liệu đầu vào là số phần tử trong danh sách (n)
- Độ phức tạp thời gian (time complexity)
  - Xác định lượng thời gian cần thiết để thực hiện giải thuật
    - Được tính là số phép toán cơ bản thực hiện giải thuật
- Độ phức tạp không gian (space complexity)
  - Xác định lượng bộ nhớ cần thiết để thực hiện giải thuật
    - Lượng bộ nhớ lớn nhất cần thiết để lưu các đối tượng của thuật toán tại một thời điểm thực hiện thuật toán

Thường được biểu diễn như là một hàm của kích thước dữ liệu đầu vào

Khái niệm O-lớn

- $f(n) = O(g(n))$, với n đủ lớn, $f(n)$ không quá một hằng số cố định nhân với $g(n)$
  - n là một số nguyên dương kí hiệu kích thước của dữ liệu đầu vào

$$f(n) = O\big(g(n)\big) \Leftrightarrow \exists c, n_0. \forall n \geq n_0, f(n) \leq c * g(n).$$

- Định lý
  - Nếu $lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ tồn tại và hữu hạn, thì $f(n) = O\big(g(n)\big)$

Ví dụ về độ phức tạp thuật toán

- **Thuật toán**: Tìm số nguyên lớn nhất trong danh sách n số nguyên

Algorithm LargestNumber
Input: A list of numbers L.
Output: The largest number in the list L.

largest ← null
for each *item* **in** L **do**
    if *item* > *largest* **then**
        largest ← *item*
return *largest*

Độ phức tạp thời gian và không gian đều là $O(n)$

Bài tập 1

- Tìm độ phức tạp tính toán của thuật toán sắp xếp nổi bọt (bubble sort)

```
function bubble_sort(List L, number n) // n chiều dài L
    for i from n downto 2
        for j from 1 to (i - 1)
            if L[j] > L[j + 1] then //nếu chúng không đúng thứ tự
                swap(L[j], L[j + 1]) //đổi chỗ chúng cho nhau
            end if
        end for
    end for
end function
```

Bài tập 2

- Tìm độ phức tạp tính toán của thuật toán tìm kiếm nhị phân trên danh sách đã sắp xếp

function binary_search(A, x, L, R)
    if $L > R$ **then**
        return Fail
    else
        $i \leftarrow \lfloor (L + R)/2 \rfloor$
        if $A[i] == x$ **then**
            return i
        else if $A[i] > x$ **then**
            return binary_search($A, x, L, i - 1$)
        else
            return binary_search($A, x, i + 1, R$)
        end if
    end if
end function