ĐỀ THI THỬ THEO ĐỀ MINH HỌA
ĐỀ SỐ 04
(Đề thi có 08 trang)

ĐỀ THI THỬ TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2021
Bài thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút không kể thời gian phát đề

Họ, tên thí sinh: ……………………………………………………
Số báo danh: ………………………………………………………

Câu 1. Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính r bằng

A. πrl. **B.** $2\pi rl$. **C.** $\frac{1}{3}\pi rl$. **D.** $4\pi rl$

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=2$ và $u_2=8$. Công sai của cấp số cộng bằng

A. -6. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 6.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-4;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(0;1)$.

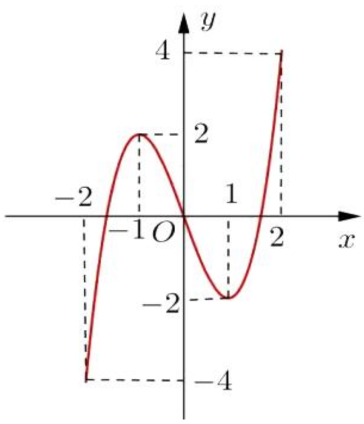
Câu 4. Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 8 học sinh?

A. 8^2. **B.** C_8^2. **C.** A_8^2. **D.** 2^8.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x=2$ và $\int_1^5 g(x)\,\mathrm{d}x=-4$. Giá trị của $\int_1^5\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$ là

A. -2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** -6.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?



A. $x=-1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Câu 7. Cho a là số thực dương tùy ý, $\ln\frac{e}{a^2}$ bằng

A. $2(1+\ln a)$ **B.** $1-\dfrac{1}{2}\ln a$ **C.** $2(1-\ln a)$ **D.** $1-2\ln a$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}=\dfrac{y-3}{2}$. Một vectơ chỉ phương của d là

A. $\overrightarrow{u_4}(1;-3;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_1}(1;-1;2)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}(1;2;-1)$. **D.** $\overrightarrow{u_2}(-1;1;3)$.

Câu 9. Nghiệm của phương trình $2^{x-3}=\dfrac{1}{2}$ là

A. 0 **B.** 2 **C.** -1 **D.** 1

Câu 10. Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới đây. Số nghiệm của phương trình $3f\left(x\right)+1=0$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 11. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ là

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=1$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $\left(P\right):x-2y+2z-1=0$. Khoảng cách từ điểm $A\left(1;-2;1\right)$ đến mặt phẳng $\left(P\right)$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

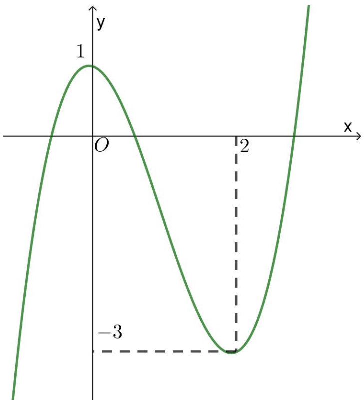
Câu 13. Phần ảo của số phức $z=-1+i$ là

A. $-i$ **B.** 1 **C.** -1 **D.** i

Câu 14. Cho biểu thức $P=\sqrt[4]{x^5}$ với $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=x^{\frac{5}{4}}$ **B.** $P=x^{\frac{4}{5}}$ **C.** $P=x^9$ **D.** $P=x^{20}$

Câu 15. Một trong bốn hàm số cho trong các phương án A,B,C,D sau đây có đồ thị như hình vẽ



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+1$. **B.** $y=x^3-3x^2+1$. **C.** $y=x^3+3x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x^2+1$.

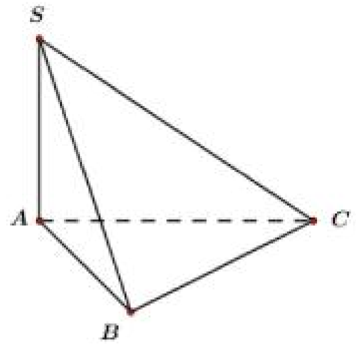
Câu 16. Thể tích khối tứ diện đều có cạnh bằng 2.

A. $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Câu 17. Cho d là đường thẳng đi qua điểm $A\left(1;2;3\right)$ và vuông góc với mặt phẳng $\left(\alpha\right):4x+3y-7z+1=0$. Phương trình chính tắc của d là

A. $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-7}$. **B.** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-7}$.**C.** $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+7}{3}$.**D.** $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{-7}$.

Câu 18. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), SA=\sqrt{3}$. Tam giác ABC đều, cạnh a. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng:



A. 30^0 **B.** 60^0 **C.** 45^0 **D.** 90^0

Câu 19. Cho a,b,x là các số thực dương thỏa mãn $\log_5 x=2\log_{\sqrt{5}} a+3\log_{\frac{1}{5}} b$. Mệnh đề nào là đúng?

A. $x=\dfrac{a^4}{b}$. **B.** $x=4a-3b$. **C.** $x=\dfrac{a^4}{b^3}$. **D.** $x=a^4-b^3$.

Câu 20. Tìm các số thực a và b thỏa mãn $2a+(b+i)i=1+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $a=0,b=2$ **B.** $a=\dfrac{1}{2},b=1$ **C.** $a=0,b=1$ **D.** $a=1,b=2$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(2;-1;1)$ và tiếp xúc mặt phẳng (Oyz) có phương trình là:

A. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4$. **B.** $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$.

C. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=2$. **D.** $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$.

Câu 22. Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2-3i$. Tính mô đun của số phức z_1+z_2

A. $|z_1+z_2|=1$ **B.** $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$ **C.** $|z_1+z_2|=\sqrt{13}$ **D.** $|z_1+z_2|=5$

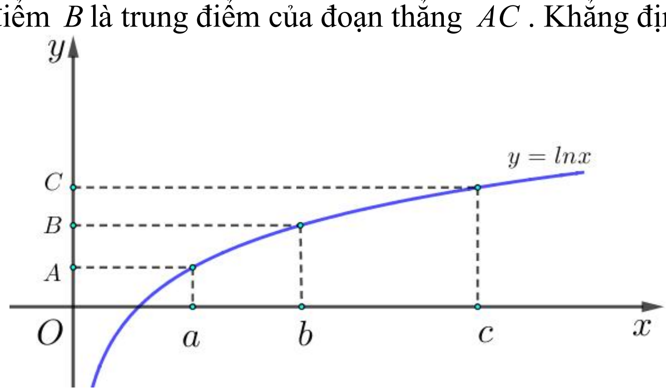
Câu 23. Nếu hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=2$ thì thể tích của khối tứ diện $AB'C'D'$ bằng

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{16}{3}$.

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x^2-1)\geq 3$ là

A. $[-2;2]$ **B.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ **D.** $[-3;3]$

Câu 25. Trong hình dưới đây, điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a+c=2b$. **B.** $ac=b^2$. **C.** $ac=2b^2$. **D.** $ac=b$.

Câu 26. Nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{1-x}$ là:

A. $F(x)=\ln|x-1|+C$. **B.** $F(x)=-\ln|1-x|+C$.

C. $F(x)=-\ln(1-x)+C$. **D.** $F(x)=\ln|1-x|+C$.

Câu 27. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D, $AD=CD=a$, $AB=2a$. Quay hình thang $ABCD$ quanh cạnh AB, thể tích khối tròn xoay thu được là :

A. πa^3. **B.** $\dfrac{5\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$.

Câu 28. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0\le x\le 3)$ là một hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{9-x^2}$.

A. 16 **B.** 17 **C.** 19 **D.** 18

Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z}+2z=3+i$. Giá trị của biểu thức $z+\dfrac{1}{z}$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$ **B.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ **C.** $\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$ **D.** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

Câu 30. Trong không gian $oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=25$ và mặt phẳng $(P):x+2y+2z-12=0$. Tính bán kính đường tròn giao tuyến của (S) và (P).

A. 4. **B.** 16. **C.** 9. **D.** 3.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x+2y+3z-6=0$ và đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\Delta\perp(\alpha)$. **B.** Δ cắt và không vuông góc với (α).

C. $\Delta\subset(\alpha)$. **D.** $\Delta//(\alpha)$.

Câu 32. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}$ là:

A. $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$ **B.** $2\ln|x+1|+\ln|x+2|+C$

C. $2\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$ **D.** $-\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$

Câu 33. Cho không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$ và hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=-1-2t\\z=2+t\end{cases}$, $d_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và song song với hai đường thẳng d_1,d_2.

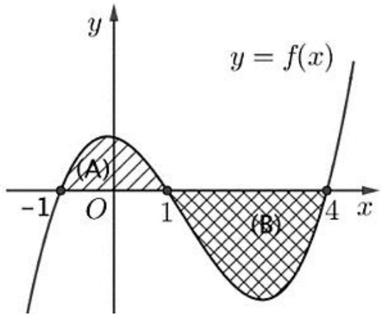
A. $(\alpha):x+3y+5z-13=0$. **B.** $(\alpha):x+2y+z-13=0$.

C. $(\alpha):3x+y+z+13=0$. **D.** $(\alpha):x+3y-5z-13=0$.

Câu 34. Tìm tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y=x^3+(3m-1)x^2+m^2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

A. $\{5;1\}$. **B.** $\{5\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $\{1\}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các hình phẳng (A), (B) lần lượt bằng 3 và 7. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f(5\sin x-1)dx$ bằng

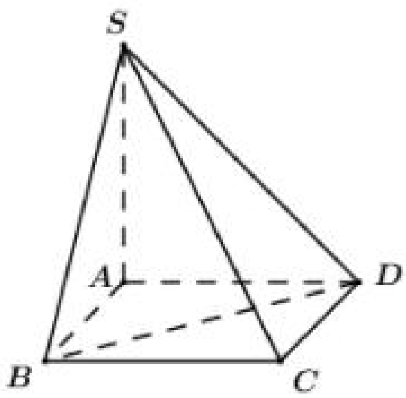


A. $-\frac{4}{5}$ **B.** 2 **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** -2

Câu 36. Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2021;2021]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2007. **B.** 2010. **C.** 2009. **D.** 2008.

Câu 37. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a, AD=a\sqrt{2}, SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$ (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng:



A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ **B.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{5}$

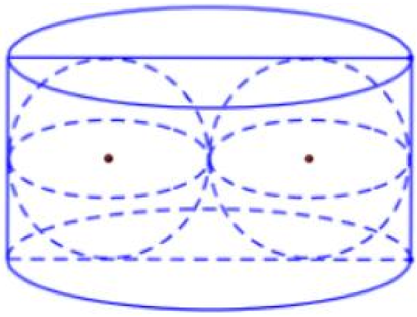
Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-xf(x)=0, f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Giá trị của $f(1)$ bằng?

A. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **B.** $\frac{1}{e}$. **C.** $\sqrt{e}$. **D.** e.

Câu 39. Bất phương trình $\log_2^2 x-(2m+5)\log_2 x+m^2+5m+4<0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[2;4)$ khi và chỉ khi

A. $m\in[0;1)$. **B.** $m\in[-2;0)$. **C.** $m\in(0;1]$. **D.** $m\in(-2;0]$

Câu 40. Người ta xếp hai quả cầu có cùng bán kính r vào một chiếc hộp hình trụ sao cho các quả cầu đều tiếp xúc với hai đáy, đồng thời hai quả cầu tiếp xúc với nhau và mỗi quả cầu đều tiếp xúc với đường sinh của hình trụ (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích khối trụ là 120 cm^3, thể tích của mỗi khối cầu bằng



A. 10 cm³ **B.** 20 cm³ **C.** 30 cm³ **D.** 40 cm³

Câu 41. Một lớp có 36 chiếc ghế đơn được xếp thành hình vuông 6×6. Giáo viên muốn xếp 36 học sinh của lớp, trong đó có em Kỷ và Hợi ngồi vào số ghế trên, mỗi học sinh ngồi một ghế. Xác suất để hai em Kỷ và Hợi ngồi cạnh nhau theo hàng dọc hoặc hàng ngang là

A. $\frac{1}{21}$ **B.** $\frac{1}{7}$ **C.** $\frac{4}{21}$ **D.** $\frac{2}{21}$

Câu 42. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)-mx+3$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

A. $m\ge\frac{1}{4}$. **B.** $m\ge 4$. **C.** $m\le\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{4}\le m<4$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(1;1;1\right)$. Mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua M và cắt chiều dương của các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm $A\left(a;0;0\right),B\left(0;b;0\right),C\left(0;0;c\right)$ thỏa mãn $OA=2OB$ và thể tích khối tứ diện OABC đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S=2a+b+3c$.

A. $\frac{81}{16}$ **B.** 3 **C.** $\frac{45}{2}$ **D.** $\frac{81}{4}$

Câu 44. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và M, N là hai điểm lần lượt trên cạnh CA, CB sao cho MN song song với AB và $\frac{CM}{CA}=k$. Mặt phẳng $\left(MNB'A'\right)$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai phần có thể tích V_1 (phần chứa điểm C) và V_2 sao cho $\frac{V_1}{V_2}=2$. Khi đó giá trị của k là

A. $k=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $k=\frac{1}{2}$. **C.** $k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

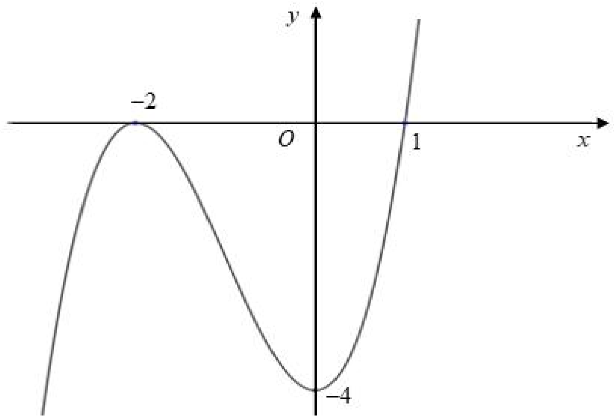
Câu 45. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ thỏa mãn $c>2019$, $a+b+c-2018<0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)-2019\right|$ là

A. $S=3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

Câu 46. Cho số phức z có $\left|z\right|=2$ thì số phức $w=z+3i$ có modun nhỏ nhất và lớn nhất lần lượt là:

A. 2 *và* 5 **B.** 1 *và* 6 **C.** 2 *và* 6 **D.** 1 *và* 5

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5;5)$ để phương trình $f^2(x)-(m+4)|f(x)|+2m+4=0$ có 6 nghiệm phân biệt

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 48. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2a-4b=4$. Tính $P=a+2b+3c$ khi biểu thức $|2a+b-2c+7|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=7$. **B.** $P=3$. **C.** $P=-3$. **D.** $P=-7$.

Câu 49. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x)=-x.f'(x); \quad f(x)=-x.g'(x) \end{cases}$. Tính $I=\int_1^4 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $8\ln 2$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $4\ln 2$.

Câu 50. Cho hai số thực x,y thay đổi thỏa mãn $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$.Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-3\left(x^2+y^2\right)$ là $\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b$.

A. $T=8$. **B.** $T=141$. **C.** $T=148$. **D.** $T=151$.

---------------------------- HẾT ------------------------------

ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.B	4.B	5.D	6.A	7.D	8.C	9.B	10.C
11.B	12.A	13.B	14.B	15.B	16.C	17.B	18.B	19.C	20.D
21.D	22.C	23.C	24.B	25.B	26.B	27.D	28.D	29.A	30.D
31.C	32.C	33.A	34.B	35.A	36.B	37.B	38.C	39.B	40.B
41.D	42.A	43.D	44.A	45.B	46.D	47.D	48.B	49.A	50.D

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính r bằng

A. πrl. **B.** $2\pi rl$. **C.** $\frac{1}{3}\pi rl$. **D.** $4\pi rl$

Lời giải

Chọn A

Ta có: Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh l và bán kính r là $S_{xq} = \pi rl$.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 8$. Công sai của cấp số cộng bằng

A. -6. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 6.

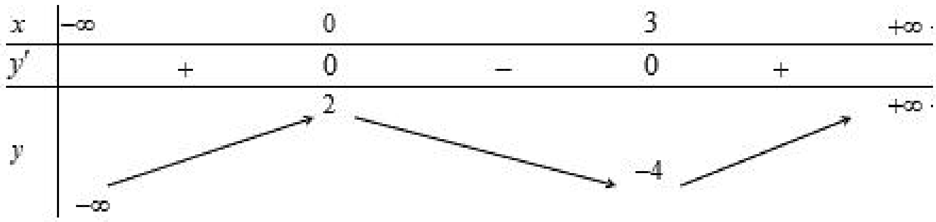
Lời giải

Chọn D

Ta có: $d = u_2 - u_1 = 8 - 2 = 6$.

Vậy công sai của cấp số cộng là: $d = 6$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-4;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn B

Theo bài ra, ta có: Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 4. Có bao nhiêu cách chọn hai học sinh từ một nhóm gồm 8 học sinh?

A. 8^2. **B.** C_8^2. **C.** A_8^2. **D.** 2^8.

Lời giải

Chọn B

Mỗi cách chọn 2 học sinh từ một nhóm 8 học sinh là một tổ hợp chập 2 của 8.

Vậy số cách chọn là C_8^2.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_1^5 g(x)\mathrm{d}x=-4$. Giá trị của $\int_1^5 [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x$ là

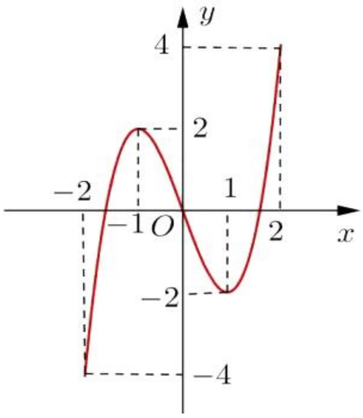
A. -2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** -6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_1^5 [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x=\int_1^5 g(x)\mathrm{d}x-\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=-4-2=-6$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?



A. $x=-1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Chọn A

Nhìn vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Câu 7. Cho a là số thực dương tùy ý, $\ln\frac{e}{a^2}$ bằng

A. $2(1+\ln a)$ **B.** $1-\frac{1}{2}\ln a$ **C.** $2(1-\ln a)$ **D.** $1-2\ln a$

Lời giải

Chọn D

$\ln\frac{e}{a^2}=1-2\ln a.$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{z-1}{-1}=\frac{y-3}{2}$. Một vectơ chỉ phương của d là

A. $\overrightarrow{u_4}(1;-3;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_1}(1;-1;2)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}(1;2;-1)$. **D.** $\overrightarrow{u_2}(-1;1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình chính tắc của d được viết lại: $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{-1}$

Suy ra, vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{u_3}(1;2;-1)$.

Câu 9. Nghiệm của phương trình $2^{x-3}=\frac{1}{2}$ là

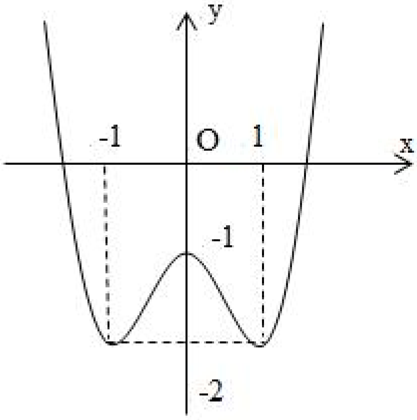
A. 0 **B.** 2 **C.** -1 **D.** 1

Chọn B

Ta có: $2^{x-3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2^{x-3}=2^{-1}\Leftrightarrow x-3=-1\Leftrightarrow x=2$

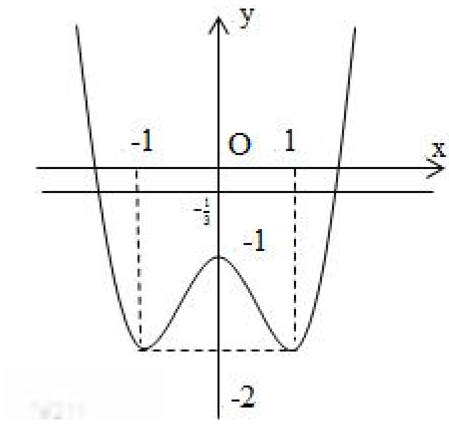
Câu 10. Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới đây. Số nghiệm của phương trình $3f\left(x\right)+1=0$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.



Lời giải

Chọn C



Ta có: $3f\left(x\right)+1=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\frac{1}{3}$ $^{(1)}$.

Phương trình $\left(1\right)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ (hình vẽ) và đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{3}$ là đường thẳng vuông góc với trục tung tại điểm có tung độ bằng $-\frac{1}{3}$. Do đó số nghiệm của phương trình $\left(1\right)$ là số giao điểm của hai đồ thị.

Từ đồ thị (hình vẽ) suy ra $\left(1\right)$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Vậy số nghiệm của phương trình đã cho là 2.

Câu 11. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ là

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Chọn B

+) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x-1}{x+1}=-\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x-1)=-2<0\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0\\ x+1>0\ khi\ x>-1\end{cases}$.

+) $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x-1}{x+1}=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x-1)=-2<0\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-}(x+1)=0\\ x+1<0\ khi\ x<-1\end{cases}$.

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=-1$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-1=0$. Khoảng cách từ điểm $A(1;-2;1)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $d\left(A,(P)\right)=\dfrac{\left|1-2.(-2)+2.1-1\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=2$.

Câu 13. Phần ảo của số phức $z=-1+i$ là

A. $-i$ **B.** 1 **C.** -1 **D.** i

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z=-1+i\Rightarrow$ Phần ảo của z là 1.

Câu 14. Cho biểu thức $P=\sqrt[4]{x^5}$ với $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

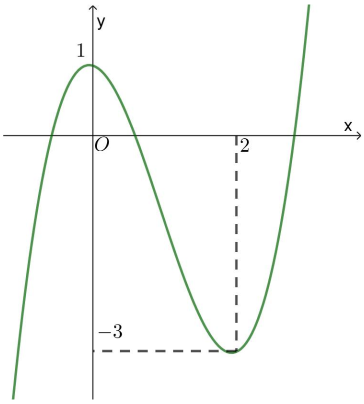
A. $P=x^{\frac{5}{4}}$ **B.** $P=x^{\frac{4}{5}}$ **C.** $P=x^9$ **D.** $P=x^{20}$

Lời giải

Chọn B

$P=\sqrt[4]{x^5}=x^{\frac{5}{4}}$.

Câu 15. Một trong bốn hàm số cho trong các phương án A,B,C,D sau đây có đồ thị như hình vẽ



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$. **B.** $y=x^3-3x^2+1$. **C.** $y=x^3+3x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x^2+1$.

Lời giải

Chọn B

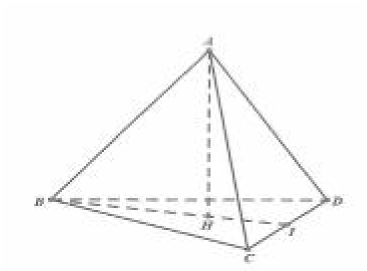
Từ đồ thị hàm số, ta suy ra $y'=0$ có hai nghiệm là $x=0$ và $x=2$ và trong khoảng $(0;2)$ hàm số nghịch biến nên suy ra chọn đáp án B

Câu 16. Thể tích khối tứ diện đều có cạnh bằng 2.

A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Đáp án C



Xét tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 2.

Gọi I là trung điểm CD, H là tâm trực tâm (cũng là trọng tâm) của ΔBCD. Khi đó $AH\perp(BCD)$. Thể tích của tứ diện đều $V=\frac{1}{3}.S_{\Delta BCD}.AH$.

Ta có $BH=\frac{2}{3}BI=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$; $S_{\Delta BCD}=\sqrt{3}$.

Vậy $V=\frac{1}{3}.S_{\Delta BCD}.AH=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 17. Cho d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha):4x+3y-7z+1=0$. Phương trình chính tắc của d là

A. $\frac{x-1}{-4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{-7}$. **B.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-7}$. **C.** $\frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+7}{3}$. **D.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+3}{-7}$.

Lời giải

Chọn B

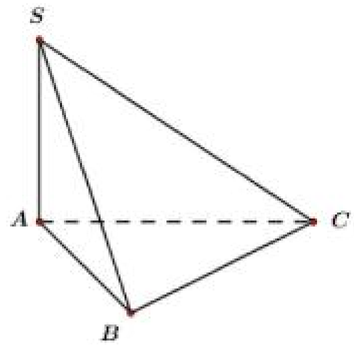
Ta có $(\alpha): 4x+3y-7z+1=0 \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)}=(4;3;-7)$ là VTPT của mặt phẳng (α).

Mà đường thẳng $d \perp (\alpha)$ $\Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)}=(4;3;-7)$ là VTCP của đường thẳng d.

Ta lại có $A(1;2;3) \in d$.

Suy ra phương trình chính tắc của đường thẳng d là: $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-7}$

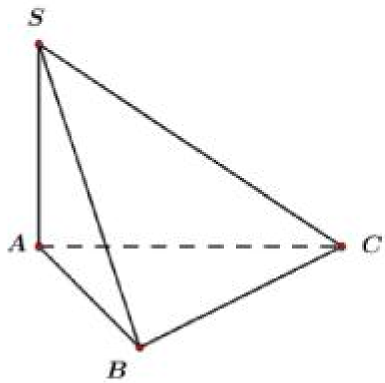
Câu 18. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), SA=\sqrt{3}$. Tam giác ABC đều, cạnh a. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng:



A. 30^0 **B.** 60^0 **C.** 45^0 **D.** 90^0

Lời giải

Chọn B



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow$ AC là hình chiếu của SC trên (ABC).

$\angle(SC,(ABC)) = \angle(SC, AC) = \angle SCA$

Xét ΔSAC vuông tại A ta có:

$\tan \angle SAC = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \angle SCA = 60^0$.

Câu 19. Cho a,b,x là các số thực dương thỏa mãn $\log_5 x = 2\log_{\sqrt{5}} a + 3\log_{\frac{1}{5}} b$. Mệnh đề nào là đúng?

A. $x=\frac{a^4}{b}$. **B.** $x=4a-3b$. **C.** $x=\frac{a^4}{b^3}$. **D.** $x=a^4-b^3$.

Lời giải

Chọn C

Với a,b,x là các số thực dương. Ta có:

$\log_5 x = 2\log_{\sqrt{5}} a + 3\log_{\frac{1}{5}} b \Leftrightarrow \log_5 x = 4\log_5 a - 3\log_5 b \Leftrightarrow \log_5 x = \log_5 a^{4} - \log_5 b^{3}$

$\Leftrightarrow \log_5 x = \log_5 \frac{a^4}{b^3} \Leftrightarrow x = \frac{a^4}{b^3}$

Câu 20. Tìm các số thực a và b thỏa mãn $2a + (b+i)i = 1 + 2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $a = 0, b = 2$ **B.** $a = \frac{1}{2}, b = 1$ **C.** $a = 0, b = 1$ **D.** $a = 1, b = 2$

Lời giải

Chọn D

$2a + (b+i) = 1 + 2i \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a - 1 = 1 \\ b = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = 1, b = 2.$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(2;-1;1)$ và tiếp xúc mặt phẳng (Oyz) có phương trình là:

A. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$. **B.** $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2$.

C. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2$. **D.** $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (Oyz) có phương trình là: $x = 0$.

Mặt cầu tâm $I(2;-1;1)$ và tiếp xúc mặt phẳng (Oyz) có bán kính $R = d(I,(Oyz)) = 2$

Suy ra phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$

Câu 22. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính mô đun của số phức $z_1 + z_2$

A. $|z_1 + z_2| = 1$ **B.** $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$ **C.** $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$ **D.** $|z_1 + z_2| = 5$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1 + z_2 = (1+i) + (2-3i) = (1+2) + (1-3)i = 3 - 2i$

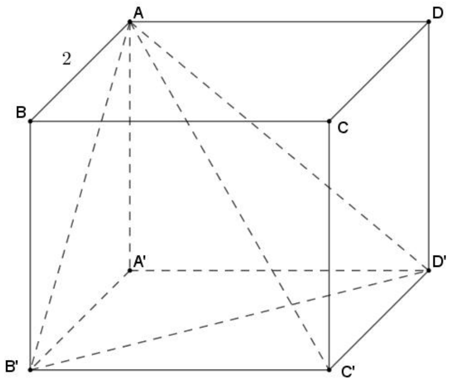
Vậy $|z_1 + z_2| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

Câu 23. Nếu hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$ thì thể tích của khối tứ diện $AB'C'D'$ bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Thể tích của khối tứ diện $AB'C'D'$ là $V_{AB'C'D'} = \frac{1}{3}.AA'.S_{B'C'D'} = \frac{1}{3}.2.\frac{1}{2}.2.2 = \frac{4}{3}$.

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x^2-1\right) \geq 3$ là

A. $\left[-2;2\right]$ **B.** $\left(-\infty;-3\right]\cup\left[3;+\infty\right)$ **C.** $\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)$ **D.** $\left[-3;3\right]$

Lời giải

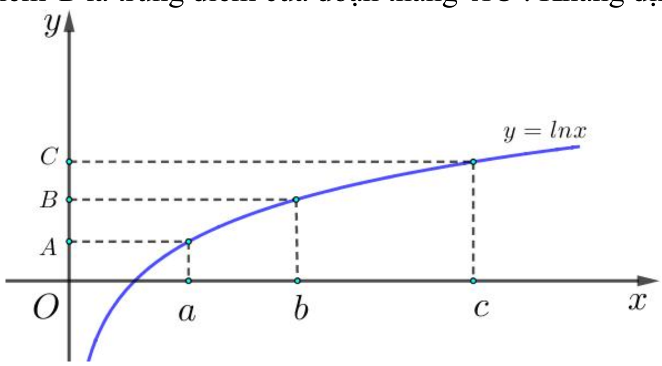
Chọn B

Điều kiện: $\log_2\left(x^2-1\right) \geq 3 \Leftrightarrow x^2-1 \geq 2^3 \Leftrightarrow x^2-1 \geq 8 \Leftrightarrow x^2 \geq 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq 3 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq 3 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty;-3\right]\cup\left[3;+\infty\right)$

Câu 25. Trong hình dưới đây, điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a+c=2b$. **B.** $ac=b^2$. **C.** $ac=2b^2$. **D.** $ac=b$.

Lời giải

Chọn B

Điểm A,B,C lần lượt là tung độ của các điểm có hoành độ a,b,c.

Suy ra tung độ của A,B,C lần lượt là: $\ln a;\ln b;\ln c$.

Theo giả thiết B là trung điểm đoạn thẳng

$AC \Rightarrow \ln b = \frac{\ln a+\ln c}{2} \Leftrightarrow 2\ln b = \ln a + \ln c \Leftrightarrow \ln b^2 = \ln\left(a.c\right) \Leftrightarrow b^2 = ac$.

Vậy $ac=b^2$.

Câu 26. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{1-x}$ là:

A. $F(x)=\ln|x-1|+C$.

B. $F(x)=-\ln|1-x|+C$.

C. $F(x)=-\ln(1-x)+C$.

D. $F(x)=\ln|1-x|+C$.

Lời giải

Đáp án B

$$F(x)=\int\frac{1}{1-x}dx=-\int\frac{1}{1-x}d(1-x)=-\ln|1-x|+C.$$

Câu 27. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D, $AD=CD=a$, $AB=2a$. Quay hình thang $ABCD$ quanh cạnh AB, thể tích khối tròn xoay thu được là :

A. πa^3.

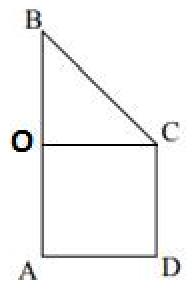
B. $\frac{5\pi a^3}{3}$.

C. $\frac{\pi a^3}{3}$.

D. $\frac{4\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi V_1 là thể tích của khối trụ có được bằng cách quay hình vuông $ADCO$ quanh trục AO.

$\Rightarrow V_1=\pi AD^2.CD=\pi a^3$.

Gọi V_2 là thể tích của khối nón có được bằng cách quay tam giác OBC quanh trục BO.

$$\Rightarrow V_2=\frac{1}{3}\pi.CO^2.OB=\frac{\pi a^3}{3}$$

Thể tích cần tìm là $V=V_1+V_2=\frac{4\pi a^3}{3}$.

Câu 28. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x(0\le x\le 3)$ là một hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{9-x^2}$.

A. 16

B. 17

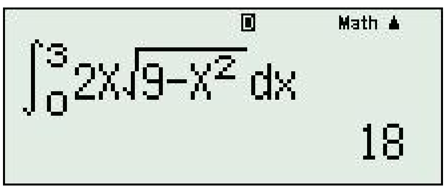
C. 19

D. 18

Lời giải

Chọn D

Nếu S(x) là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox thì thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng x =a và x = b là $V=\int_a^b S(x)dx.$



Câu 29. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z}+2z=3+i$. Giá trị của biểu thức $z+\frac{1}{z}$ bằng

A. $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$ **B.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ **C.** $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ **D.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$ ta có:

$a-bi+2(a+bi)=3+i\Leftrightarrow 3a+bi=3+i\Leftrightarrow\begin{cases}3a=3\\b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\Rightarrow z=1+i$

Khi đó $z+\frac{1}{z}=1+i+\frac{1}{1+i}=1+i+\frac{1-i}{1-i^2}=1+i+\frac{1-i}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$

Câu 30. Trong không gian $oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=25$ và mặt phẳng $(P):x+2y+2z-12=0$. Tính bán kính đường tròn giao tuyến của (S) và (P).

A. 4. **B.** 16. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: (S) có $\begin{cases}\text{Tâm : O}(0;0;0)\\\text{Bán kính : }R=5\end{cases}$

$\Rightarrow d(O;(P))=\frac{|-12|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=4<5=R$. Suy ra (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C).

Gọi r là bán kính của (C) ta có: $r=\sqrt{R^2-d^2(O;(P))}=\sqrt{25-16}=3$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x+2y+3z-6=0$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\Delta\perp(\alpha)$. **B.** Δ cắt và không vuông góc với (α).

C. $\Delta\subset(\alpha)$. **D.** $\Delta//(\alpha)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;2;3)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(-1;-1;3)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-1;-1;1)$.

Ta có: $\begin{cases}\vec{n}.\vec{u}=1.(-1)+2.(-1)+3.1=0\\M(-1;-1;3)\in(\alpha)\end{cases}\Rightarrow\Delta\subset(\alpha)$.

Câu 32. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x+3}{x^2+3x+2}$ là:

A. $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$ **B.** $2\ln|x+1|+\ln|x+2|+C$

C. $2\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$ **D.** $-\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$

Lời giải

Đáp án C

$$I=\int f(x)dx=\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx=\int \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx$$

$$=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=2\ln|x+1|-\ln|x+2|+C.$$

Câu 33. Cho không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$ và hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+t\\ y=-1-2t\\ z=2+t\end{cases}$, $d_2:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua A và song song với hai đường thẳng d_1,d_2.

A. $(\alpha):x+3y+5z-13=0$.
B. $(\alpha):x+2y+z-13=0$.
C. $(\alpha):3x+y+z+13=0$.
D. $(\alpha):x+3y-5z-13=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: Vectơ chỉ phương của hai đường thẳng d_1,d_2 lần lượt là $\overrightarrow{a_1}=(1;-2;1)$; $\overrightarrow{a_2}=(2;1;-1)$.

Vì mặt phẳng (α) song song với hai đường thẳng d_1,d_2 nên:

$$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_1};\overrightarrow{a_2}\right]=(1;3;5).$$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là:

$1(x-0)+3(y-1)+5(z-2)=0.$
$\Leftrightarrow x+3y+5z-13=0.$

Câu 34. Tìm tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y=x^3+(3m-1)x^2+m^2x-3$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

A. $\{5;1\}$.
B. $\{5\}$.
C. $\varnothing$.
D. $\{1\}$.

Chọn B

Kiến thức cần nhớ: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp một trên $(a;b)$ chứa điểm x_0 và $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai khác 0 tại x_0, khi đó:

+ Nếu $\begin{cases}f'(x_0)=0\\ f''(x_0)>0\end{cases}$ thì hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0.

+ Nếu $\begin{cases}f'(x_0)=0\\ f''(x_0)<0\end{cases}$ thì hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

Áp dụng ta có $y'=3x^2+2(3m-1)x+m^2$; $y''=6x+2(3m-1)$.

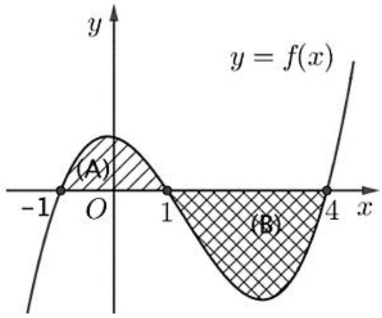
Xét phương trình $y'(-1)=0\Leftrightarrow 3(-1)^2-2(3m-1)+m^2=0\Leftrightarrow m^2-6m+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=5\end{array}\right.$

Với $m=1\Rightarrow y''=6x+4\Rightarrow y''(-1)=-2<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Với $m=5\Rightarrow y''=6x+28\Rightarrow y''(-1)=22>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Vậy $m=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các hình phẳng (A), (B) lần lượt bằng 3 và 7. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f\left(5\sin x-1\right)dx$ bằng



A. $-\frac{4}{5}$ **B.** 2 **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** -2

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=5\sin x-1 \Rightarrow dt=5\text{cosxdx} \Rightarrow \text{cosxdx}=\frac{1}{5}dt.$

Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=-1; x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=4.$

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f(5\sin x-1)dx=\int_{-1}^{4} f(t).\frac{1}{5}dt=\frac{1}{5}\int_{-1}^{4} f(t)dt=\frac{1}{5}\left(\int_{-1}^{1} f(t)dt+\int_{1}^{4} f(t)dt\right).$

Mặt khác $\begin{cases} 3=\int_{-1}^{1}\left|f(t)\right|dt=\int_{-1}^{1} f(t)dt \\ 7=\int_{1}^{4}\left|f(t)\right|dt=-\int_{1}^{4} f(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{-1}^{1} f(t)dt=3 \\ \int_{1}^{4} f(t)dt=-7 \end{cases}$

Vậy $I=\frac{1}{5}\left(3-7\right)=-\frac{4}{5}.$

Câu 36. Tìm số giá trị nguyên thuộc đoạn $\left[-2021;2021\right]$ của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. 2007. **B.** 2010. **C.** 2009. **D.** 2008.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=\frac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m}.$

+) TXĐ: $D=\left[3;+\infty\right)$

+) $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2+x-m} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{m}{x^2}} = 0$. Do đó ĐTHS có 1 tiệm cận ngang $y=0$.

+) Để ĐTHS có 2 đường tiệm cận thì phải có thêm 1 tiệm cận đứng. Vậy yêu cầu bài toán trở thành: Tìm điều kiện để phương trình $x^2+x-m=0$ phải có 1 nghiệm lớn hơn hoặc bằng 3.

Trường hợp 1: Phương trình $x^2+x-m=0$ phải có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 3 < x_2$.

$\Leftrightarrow a.f(3) < 0 \Leftrightarrow 12-m<0 \Leftrightarrow m>12.$

Trường hợp 2: Phương trình $x^2+x-m=0$ có nghiệm $x=3$ thì $m=12$.

Với $m=12$ phương trình trở thành: $x^2+x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-4 \end{array}\right.$(tmđk)

Trường hợp 3: Phương trình $x^2+x-m=0$ có nghiệm kép $x>3$.

Khi $m=\dfrac{-1}{4}$ thì phương trình có nghiệm $x=\dfrac{-1}{2}$.(không thỏa mãn)

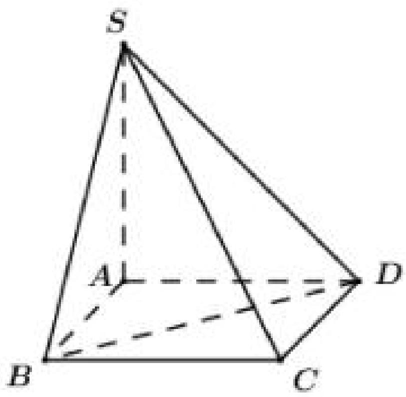
Theo đề bài $m\in[-2021;2021], m$ nguyên do đó $m\in[12;2021]$.

Vậy có $(2021-12)+1=2010$ giá trị của m .

Ý kiến phản biện:

Có thể nhận xét phương trình $x^2+x-m=0\,(1)$ nếu có nghiệm thì $x_1+x_2=-1$ do đó (1) luôn có ít nhất một nghiệm âm. Vậy đk bài toán chỉ thỏa mãn khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1<0<3\le x_2 \Leftrightarrow af(3)\le 0 \Leftrightarrow m\ge 12$.

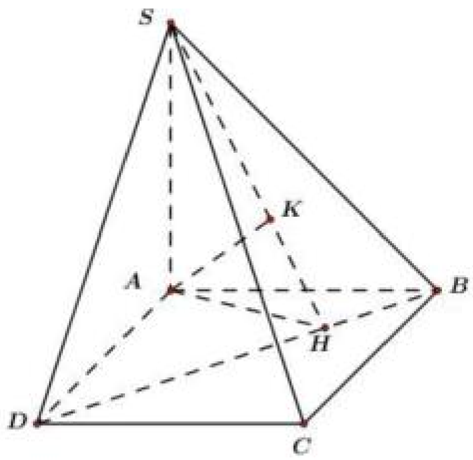
Câu 37. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a, AD=a\sqrt{2}, SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$ (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng:



A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$

Lời giải

Chọn B



Trong $(ABCD)$, kẻ $AH \perp BD$

Trong (SAH), kẻ $AK \perp SH$

Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAH) \Rightarrow BD \perp AK$

Ta có: $\begin{cases} AK \perp SH \\ AK \perp BD \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBD) \Rightarrow d\left(A;(SBD)\right) = AK.$

Áp dụng hệ thức lượng cho ΔABD vuông tại A và có đường cao AH ta có:

$$AH = \frac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Áp dụng hệ thức lượng cho ΔABD vuông tại A và có đường cao AK ta có:

$$AK = \frac{SA.AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \frac{a.\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \frac{a\sqrt{10}}{5}$$

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) - xf(x) = 0, f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Giá trị của $f(1)$ bằng?

A. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. **B.** $\frac{1}{e}$. **C.** $\sqrt{e}$. **D.** e.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có: $\frac{f'(x)}{f(x)} = x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int xdx$

$\Rightarrow \ln\left[f(x)\right] = \frac{1}{2}x^2 + C.$ (do $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

Do đó $\ln\left[f(0)\right] = \frac{1}{2}.0^2 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow f(1) = \sqrt{e}.$

Câu 39. Bất phương trình $\log_2^2 x - (2m+5)\log_2 x + m^2 + 5m + 4 < 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [2;4)$ khi và chỉ khi

A. $m\in[0;1)$. **B.** $m\in[-2;0)$. **C.** $m\in(0;1]$. **D.** $m\in(-2;0]$

Lời giải

Chọn B

Có yêu cầu bài toán tương đương với

$\log_2^2 x-(2m+5)\log_2 x+m^2+5m+4<0,\forall x\in[2;4)\Leftrightarrow m+1<\log_2 x<m+4,\forall x\in[2;4)$

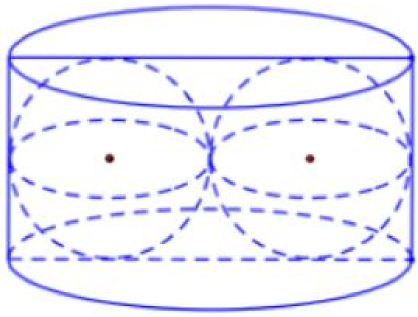
$\begin{cases} m<\log_2 x-1\forall x\in[2;4) \\ m>\log_2 x-4\forall x\in[2;4) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m<\log_2 2-1=0 \\ m\geq\log_2 4-4=-2 \end{cases}\Leftrightarrow m\in[-2;0)$.

*Chú ý bấm máy phương trình bậc hai

$t^2-(2m+5)t+m^2+5m+4=0(m=100)$ có hai nghiệm

$t_1=1001=m=1;t_2=1004=m+4$.

Câu 40. Người ta xếp hai quả cầu có cùng bán kính r vào một chiếc hộp hình trụ sao cho các quả cầu đều tiếp xúc với hai đáy, đồng thời hai quả cầu tiếp xúc với nhau và mỗi quả cầu đều tiếp xúc với đường sinh của hình trụ (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích khối trụ là 120 cm^3, thể tích của mỗi khối cầu bằng



A. 10 cm^3 **B.** 20 cm^3 **C.** 30 cm^3 **D.** 40 cm^3

Lời giải

Chọn B

Dựa vào dữ kiện bài toán và hình vẽ $\Rightarrow$ Hình trụ có chiều cao $h=2r$ và bán kính đáy $R=2r$

$\Rightarrow$ Thể tích khối trụ là $V=\pi(2r)^2 2r=8\pi r^3=120\Leftrightarrow r^3=\frac{120}{8\pi}=\frac{15}{\pi}$

Vậy thể tích mỗi khối cầu là $V_c=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi.\frac{15}{\pi}=20(cm^3)$

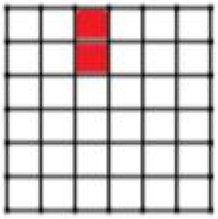
Câu 41. Một lớp có 36 chiếc ghế đơn được xếp thành hình vuông 6×6. Giáo viên muốn xếp 36 học sinh của lớp, trong đó có em Kỷ và Hợi ngồi vào số ghế trên, mỗi học sinh ngồi một ghế. Xác suất để hai em Kỷ và Hợi ngồi cạnh nhau theo hàng dọc hoặc hàng ngang là

A. $\frac{1}{21}$ **B.** $\frac{1}{7}$ **C.** $\frac{4}{21}$ **D.** $\frac{2}{21}$

Lời giải

Xếp 36 em học sinh vào 36 ghế $\Rightarrow$ Không gian mẫu $n(\Omega)=36!$.

Gọi A là biến cố: “Hai em Kỷ và Hợi ngồi cạnh nhau theo một hàng ngang hoặc một hàng dọc”.



Chọn 1 hàng hoặc cột để xếp Kỷ và Hợi có 12 cách.

Trên mỗi hàng hoặc cột xếp 2 em Kỷ và Hợi gần nhau có 5.2 = 10 cách.

Sắp xếp 34 bạn còn lại có 34! cách.

$\Rightarrow n(A) = 12.10.34!$.

Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{12.10.34!}{36!} = \dfrac{2}{21}$.

Chọn D

Câu 42. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+4) - mx + 3$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $m \ge \dfrac{1}{4}$. **B.** $m \ge 4$. **C.** $m \le \dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{4} \le m < 4$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+4) - mx + 3$ có tập xác định $D = (-\infty;+\infty)$.

Ta có $y' = \dfrac{x}{x^2+4} - m$.

Khi đó hàm số $y = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+4) - mx + 3$ nghịch biến trên $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (-\infty;+\infty)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+4} - m \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+4} \le m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \ge \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ với $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ ta có: $f'(x) = \dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

BBT

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	0	↘	$\dfrac{-1}{4}$	↗	$\dfrac{1}{4}$	↘	0

Từ BBT ta suy ra: $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(2) = \dfrac{1}{4}$. Suy ra các giá trị của tham số m cần tìm là: $m \ge \dfrac{1}{4}$

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt chiều dương của các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ thỏa mãn $OA = 2OB$ và thể tích khối tứ diện OABC đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $S = 2a + b + 3c$.

A. $\frac{81}{16}$ **B.** 3 **C.** $\frac{45}{2}$ **D.** $\frac{81}{4}$

Lời giải

Chọn D

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

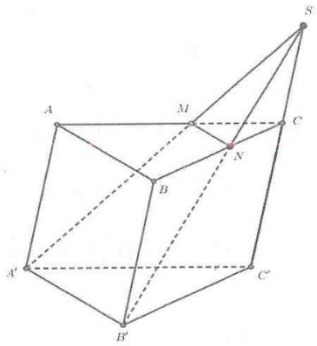
Vì (P) đi qua M nên $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Mặt khác $OA = 2OB$ nên $a = 2b$ nên $\frac{3}{2b}+\frac{1}{c}=1$.

Thể tích khối tứ diện OABC là $V=\frac{1}{6}abc=\frac{1}{3}b^2c$.

Ta có

$\frac{3}{2b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{4b}+\frac{3}{4b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{9}{16b^2c}} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{9}{16b^2c}}\le\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{16b^2c}{9}\ge 27\Rightarrow V =$



$$\Rightarrow \min V=\frac{81}{16} \text{ khi } \begin{cases}\frac{3}{4b}=\frac{1}{c}=\frac{1}{3}\\ a=2b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{9}{2}\\ b=\frac{9}{4}\\ c=3\end{cases}.$$

Vậy $S=2a+b+3c=\frac{81}{4}$.

Câu 44. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và M, N là hai điểm lần lượt trên cạnh CA, CB sao cho MN song song với AB và $\frac{CM}{CA}=k$. Mặt phẳng $(MNB'A')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai phần có thể tích V_1 (phần chứa điểm C) và V_2 sao cho $\frac{V_1}{V_2}=2$. Khi đó giá trị của k là

A. $k=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $k=\frac{1}{2}$. **C.** $k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Đáp án A

+ Vì ba mặt phẳng $(MNB'A').(ACC'A'),(BCC'B')$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt $A'M, B'N, CC'$ và $A'M, CC'$ không song song nên $A'M, B'N, CC'$ đồng qui tại S.

Ta có $k=\frac{CM}{CA}=\frac{MN}{AB}=\frac{MN}{A'B'}=\frac{SM}{SA'}=\frac{SN}{SB'}=\frac{SC}{SC'}$

+ Từ đó $V_{S.MNC}=k^3V_{S.A'B'C'}\Rightarrow V_1=V_{MNC.A'B'C'}=(1-k^3)V_{S.A'B'C'}$.

+ Mặt khác $\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{V_{S.A'B'C'}}=\dfrac{3CC'}{SC'}=\dfrac{3\left(SC'-SC\right)}{SC'}=3\left(1-k\right)\Rightarrow V_{S.A'B'C'}=\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{3\left(1-k\right)}$

Suy ra $V_1=\left(1-k^3\right)\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{3\left(1-k\right)}=\dfrac{\left(k^2+k+1\right).V_{ABC.A'B'C'}}{3}$.

+ Vì $\dfrac{V_1}{V_2}=2$ nên $V_1=\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}\Rightarrow\dfrac{k^2+k+1}{3}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow k^2+k-1=0\Rightarrow k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}(k>0)$.

Vậy $k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 45. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$ thỏa mãn $c>2019$, $a+b+c-2018<0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)-2019\right|$ là

A. $S=3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=2$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f(x)-2019=x^3+ax^2+bx+c-2019$.

Hàm số $g\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vì $\begin{cases}c>2019\\a+b+c-2018<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(0)>0\\g(1)<0\end{cases}$

$\Rightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $\left(0;1\right)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành có hoành độ nằm trong khoảng $(0;1)$. (1)

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty\\g(0)>0\end{cases}\Rightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-\infty;0)$.

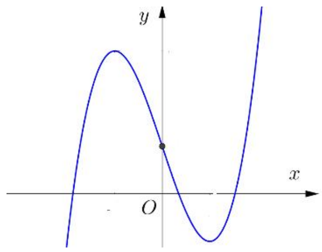
$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành có hoành độ nằm trong khoảng $(-\infty;0)$. (2)

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty\\g(1)<0\end{cases}\Rightarrow$ phương trình $g(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1;+\infty)$.

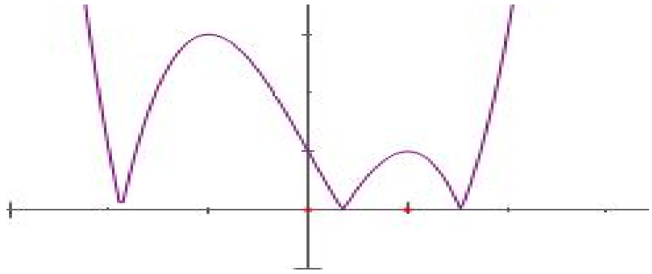
$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có ít nhất một giao điểm với trục hoành có hoành độ nằm trong khoảng $(1;+\infty)$. (3)

Và hàm số $g\left(x\right)$ là hàm số bậc 3

Nên từ (1), (2), (3) đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ có dạng



Do đó đồ thị hàm số $y=\left|f(x)-2019\right|$ có dạng



Vậy hàm số $y=\left|f(x)-2019\right|$ có 5 điểm cực trị

Câu 46. Cho số phức z có $\left|z\right|=2$ thì số phức $\mathrm{w}=z+3i$ có modun nhỏ nhất và lớn nhất lần lượt là:

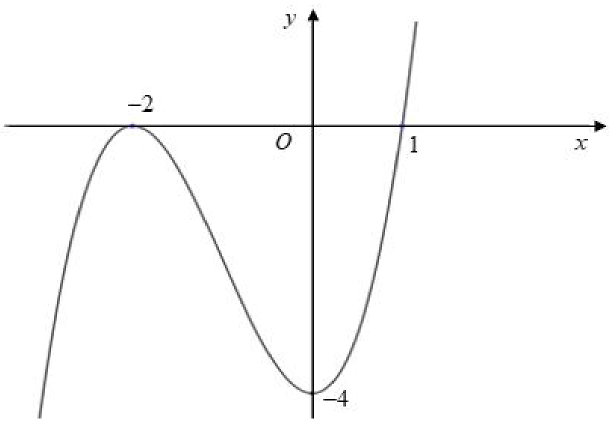
A. 2 *và* 5 **B.** 1 *và* 6 **C.** 2 *và* 6 **D.** 1 *và* 5

Lời giải

Đáp án D

$\mathrm{w}=z+3i \Leftrightarrow z=\mathrm{w}-3i \Rightarrow \left|z\right|=\left|\mathrm{w}-3i\right| \Rightarrow 3-\left|z\right| \le \left|\mathrm{w}\right| \le 3+\left|z\right| \Leftrightarrow 1 \le \left|\mathrm{w}\right| \le 5.$

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left(-5;5\right)$ để phương trình $f^2(x)-(m+4)\left|f(x)\right|+2m+4=0$ có 6 nghiệm phân biệt

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

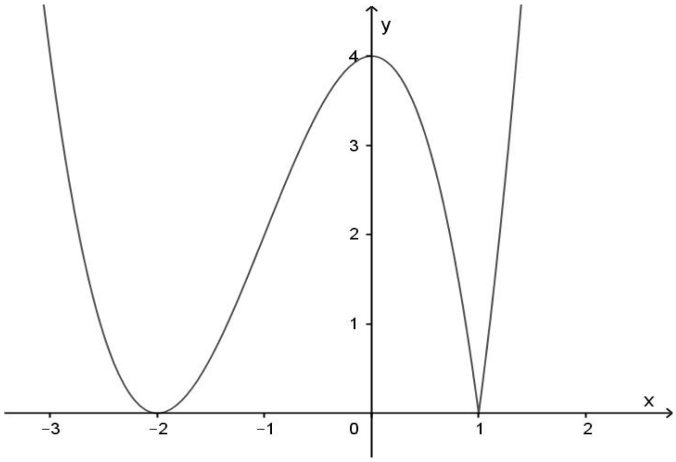
Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình $f^2\left(x\right)-\left(m+4\right)\left|f\left(x\right)\right|+2m+4=0$

$\Leftrightarrow\left(\left|f\left(x\right)\right|-2\right)\left(\left|f\left(x\right)-m-2\right|\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\left|f\left(x\right)\right|=2 & (1)\\ \left|f\left(x\right)\right|=m+2 & (2)\end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ như sau:



Từ đồ thị trên, ta có phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt và khác các nghiệm của (1).

Suy ra $\left[\begin{array}{l} m+2>4 \\ m+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Vì m nguyên và $m\in(-5;5)\Rightarrow m\in\{-2;3;4\}$.

Câu 48. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-2a-4b=4$. Tính $P=a+2b+3c$ khi biểu thức $|2a+b-2c+7|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=7$. **B.** $P=3$. **C.** $P=-3$. **D.** $P=-7$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: phương pháp đại số.

Ta có: $a^2+b^2+c^2-2a-4b=4 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b-2)^2+c^2=9$.

Áp dụng bất đẳng thức giá trị tuyệt đối và bất đẳng thức BCS, ta có kết quả sau:

$$|2a+b-2c+7|=|2(a-1)+(b-2)-2c+11|\le|2(a-1)+(b-2)-2c|+11$$
$$\overset{BCS}{\le}\sqrt{\left[(a-1)^2+(b-2)^2+c^2\right]\left[2^2+1^2+(-2)^2\right]}+11=20.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} 2(a-1)+(b-2)-2c>0 \\ \dfrac{a-1}{2}=\dfrac{b-2}{1}=\dfrac{c}{-2} \\ (a-1)^2+(b-2)^2+c^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \\ c=-2 \end{cases}$

Khi đó: $P=a+2b+3c=3+2.3+3.(-2)=3.$

Cách 2: phương pháp hình học.

Trong không gian $Oxyz$, gọi mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;0)$, bán kính $R=3$. Khi đó:

$(S):(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y=4.$

và mặt phẳng $(P):2x+y-2z+7=0$.

Gọi $M(a;b;c)$, ta có: $d(M;(P))=\dfrac{|2a+b-2c+7|}{3}$.

Vì $a^2+b^2+c^2-2a-4b=4\Rightarrow M\in(S)$.

Bài toán đã cho trở thành: Tìm $M\in(S)$ sao cho $d(M;(P))$ lớn nhất.

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc $(P)\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=-2t\end{cases}$.

Điểm M cần tìm chính là 1 trong 2 giao điểm của Δ với $(S):M_1(3;3;-2),M_2(-1;1;2)$.

Ta có: $d(M_1;(P))=\dfrac{20}{3}>d(M_2;(P))=\dfrac{2}{3}\Rightarrow Maxd(M;(P))=\dfrac{20}{3}\Leftrightarrow M\equiv M_1$.

Vậy $P=a+2b+3c=3+2.3+3.(-2)=3$.

Câu 49. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases}f(1)+g(1)=4\\g(x)=-x.f'(x);\quad f(x)=-x.g'(x)\end{cases}$. Tính $I=\int\limits_1^4[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

A. $8\ln 2$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $4\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $f(x)+g(x)=-x[f'(x)+g'(x)]\Leftrightarrow\dfrac{f(x)+g(x)}{f'(x)+g'(x)}=-\dfrac{1}{x}$

$\Leftrightarrow\int\dfrac{f(x)+g(x)}{f'(x)+g'(x)}\mathrm{d}x=-\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow\ln|f(x)+g(x)|=-\ln|x|+C$

Theo giả thiết ta có $C-\ln|1|=\ln|f(1)+g(1)|\Rightarrow C=\ln 4$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}f(x)+g(x)=\dfrac{4}{x}\\f(x)+g(x)=-\dfrac{4}{x}\end{array}\right.$, vì $f(1)+g(1)=4$ nên $f(x)+g(x)=\dfrac{4}{x}$

$\Rightarrow I=\int\limits_1^4[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Cách 2: Ta có $f(x)+g(x)=-x[f'(x)+g'(x)]$

$\Rightarrow\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=-\int x[f'(x)+g'(x)]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=-x[f(x)+g(x)]+\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow -x[f(x)+g(x)]=C\Rightarrow f(x)+g(x)=-\dfrac{C}{x}$. Vì $f(1)+g(1)=-C\Rightarrow C=-4$

Do đó $f(x)+g(x)=\dfrac{4}{x}$. Vậy $I=\int\limits_1^4\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Câu 50. Cho hai số thực x,y thay đổi thỏa mãn $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$.Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-3\left(x^2+y^2\right)$ là $\dfrac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b$.

A. $T=8$. **B.** $T=141$. **C.** $T=148$. **D.** $T=151$.

Lời giải

Chọn D

Chú ý với hai căn thức ta có đánh giá sau: $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge\sqrt{a+b}$ và $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2(a+b)}$.

Vậy theo giả thiết,ta có $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)\ge 2\sqrt{x+y+1}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+y+1=0\\ x+y+1\ge 4\end{array}\right.$

Và $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)\le 2\sqrt{2(x+y+1)}\Rightarrow x+y+1\le 8$.

Nếu $x+y+1=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-3\end{cases}\Rightarrow S=-\dfrac{9476}{243}$.

Nếu $t=x+y\in[3;7]$,ta có

$x^2\ge 2x\,(x\ge 2);(y-1)^2\ge 0\Rightarrow y^2\ge 2y-1\Rightarrow x^2+y^2\ge 2(x+y)-1$.

Vì vậy $S\le 3^{x+y-4}+(x+y+1)2^{7-x-y}-6(x+y)+3$.

Xét hàm số $f(t)=3^{t-4}+(t+1)2^{7-t}-6t+3$ trên đoạn $[3;7]$ ta có:

$f'(t)=3^{t-4}\ln 3+2^{7-t}-(t+1)2^{7-t}\ln 2-6$.

$f''(t)=3^{t-4}\ln^2 3+2^{7-t}\ln 2-\left(2^{7-t}-(t+1)2^{7-t}\ln 2\right)\ln 2$

$=3^{t-4}\ln^2 3+\left[(t+1)\ln 2-2\right]2^{7-t}\ln 2>0,\forall t\in[3;7]$.

Mặt khác $f'(3)f'(7)<0\Rightarrow f'(t)=0$ có nghiệm duy nhất $t_0\in(3;7)$.

Vậy ta lập được bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như dưới đây:

t	3		t_0		7
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\dfrac{148}{3}$	$\searrow$	$f(t_0)$	$\nearrow$	-4

Suy ra $\max S=\max\limits_{[3;7]}f(t)=f(3)=\dfrac{148}{3}$.Dấu bằng đạt tại $x=2;y=1$.

Do đó $T=148+3=151$.