

交巡警服务平台的设置与调度

摘要

本文针对问题，建立了回溯算法等多种模型，解决了交巡警服务平台的设置与调度问题。

针对问题一，对三公里路程内进行搜索，

针对问题二，

针对问题三，

针对问题四，

针对问题五，

关键字：

1 问题背景与重述

1.1 问题背景

“有困难找警察”，是家喻户晓的一句流行语。警察肩负着刑事执法、治安管理、交通管理、服务群众四大职能。为了更有效地贯彻实施这些职能，需要在市区的一些交通要道和重要部位设置交巡警服务平台。每个交巡警服务平台的职能和警力配备基本相同。由于警务资源是有限的，如何根据城市的实际情况与需求合理地设置交巡警服务平台、分配各平台的管辖范围、调度警务资源是警务部门面临的一个实际课题。试就某市设置交巡警服务平台的相关情况，建立数学模型分析研究下面的问题：

1.2 问题表述

- (1) 问题一：附件1中的附图1给出了该市中心城区A的交通网络和现有的20个交巡警服务平台的设置情况示意图，相关的数据信息见附件2。请为各交巡警服务平台分配管辖范围，使其在所管辖的范围内出现突发事件时，尽量能在3分钟内有交巡警（警车的时速为60km/h）到达事发地。
- (2) 问题二：对于重大突发事件，需要调度全区20个交巡警服务平台的警力资源，对进出该区的13条交通要道实现快速全封锁。实际中一个平台的警力最多封锁一个路口，请给出该区交巡警服务平台警力合理的调度方案。
- (3) 问题三：根据现有交巡警服务平台的工作量不均衡和有些地方出警时间过长的实际情况，拟在该区内再增加2至5个平台，请确定需要增加平台的具体个数和位置。
- (4) 问题四：针对全市（主城六区A, B, C, D, E, F）的具体情况，按照设置交巡警服务平台的原则和任务，分析研究该市现有交巡警服务平台设置方案（参见附件）的合理性。如果有明显不合理，请给出解决方案。
- (5) 问题五：如果该市地点P（第32个节点）处发生了重大刑事案件，在案发3分钟后接到报警，犯罪嫌疑人已驾车逃跑。为了快速搜捕嫌疑犯，请给出调度全市交巡警服务平台警力资源的最佳围堵方案。

2 问题分析

2.1 问题一分析

对于问题一，为解决划分辖区这一问题，需满足交巡警平台管辖的范围内出现突发事件时，尽量能在3分钟内抵达事发地这一条件，可从三分钟内抵达入手，将其作为约束条件，进行搜索，由此根据附图1中的交通网络，现有的二十个交巡警服务平台的设置情况示意图和附件2中的相关数据信息，划分管辖区域。

2.2 问题二分析

首先，这是一个指派问题，为解决需对进出该区的13条交通要道实现快速全封锁这一问题，需要通过调度全区警力资源以最快速度完成封锁。为此，我们需建立最优调度方案使这一目标最快实现。

2.3 问题三分析

基于问题一已建立的扩散搜索模型，引入工作量判定函数，综合考虑A区每个交巡警平台范围内的路径长度与节点发案率，为使平台工作量均衡并且尽量保证出警时间在三分钟内，最终确定增加平台的位置与数目，以达到最优设置方案。

2.4 问题四分析

2.5 问题五分析

对于该问题

3 模型假设

- (1)
- (2) 交巡警服务平台管辖范围不能重叠。
- (3) 不考虑交通拥堵，假设各节点，路段通畅。
- (4) 假设问题二中总平台数不可变。

4 符号说明

符号	意义	单位
符号	意义	单位

5 模型建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 问题一模型的建立

首先，读取文件并进行数据预处理，为解决划分辖区这一问题，需满足交巡警平台管辖的范围内出现突发事件时尽量能在3分钟内抵达事发地这一条件，可将交巡警平台在三分钟内抵达该路口节点作为约束条件。以交巡警平台作为起始点向外延伸三公里进行搜索，由此根据附图1中的交通网络所给出的二十个现有的交巡警服务平台的设置情况示意图和附件2中的相关数据信息，划分管辖区域。

5.1.2 数据预处理

首先读取文件，根据区域名称将节点坐标，节点间连接关系，平台所在节点和路口所在节点从附件二中提取出，并格式化和建立数据库，进而计算连接节点间的欧几里得距离，考虑到点对间存在一定关系，即点与点之间存在连接，并包含点之间的距离信息，构建节点网络地图。

5.1.3 Dijkstra算法的原理

设有一个图 $G = (V, E)$, 其中 V 是节点集合, E 是边集合, 权重函数 $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ 定义每条边的非负权重。起始节点为 s , 目标是找到从 s 到所有其他节点的最短路径。

1. 初始化:

$$\forall v \in V, \text{dist}[v] = \infty$$

$$\text{dist}[s] = 0$$

2. 每次选择距离最小的未访问节点 u :

$$u = \arg \min_{v \in Q} \text{dist}[v]$$

3. 更新邻接节点的距离: 对于每个邻接节点 v :

$$\text{alt} = \text{dist}[u] + w(u, v)$$

如果 $\text{alt} < \text{dist}[v]$, 则:

$$\text{dist}[v] = \text{alt}$$

并更新前驱节点:

$$\text{prev}[v] = u$$

4. 重复上述过程, 直到所有节点都被访问过。

Dijkstra算法通过上述步骤有效地找到从源点到所有其他节点的最短路径, 其时间复杂度在使用二叉堆实现优先队列时为 $O((|E| + |V|) \log |V|)$ 。

5.1.4 指定深度的DFS模型的建立

为了得出平台3km距离内所有的路口, 引入深度优先搜索模型:

给定一个图 $G = (V, E)$, 其中 V 是顶点集合, E 是边集合。DFS 算法的步骤如下:

1. 初始化: 标记所有节点为未访问状态。

2. 选择起始节点: 从起始节点 $v \in V$ 开始搜索。

3. 递归搜索:

$$\text{DFS}(v) = \begin{cases} \text{visited}(v) = \text{true}, & \text{if } v \text{ is the starting node} \\ \text{DFS}(u), & \text{for each neighbor } u \text{ of } v \text{ and } \text{visited}(u) = \text{false} \end{cases}$$

4. 利用递归, 搜索出3km路程内的点集, 并将其标示在图上。

5.1.5 去除重叠区域与优化

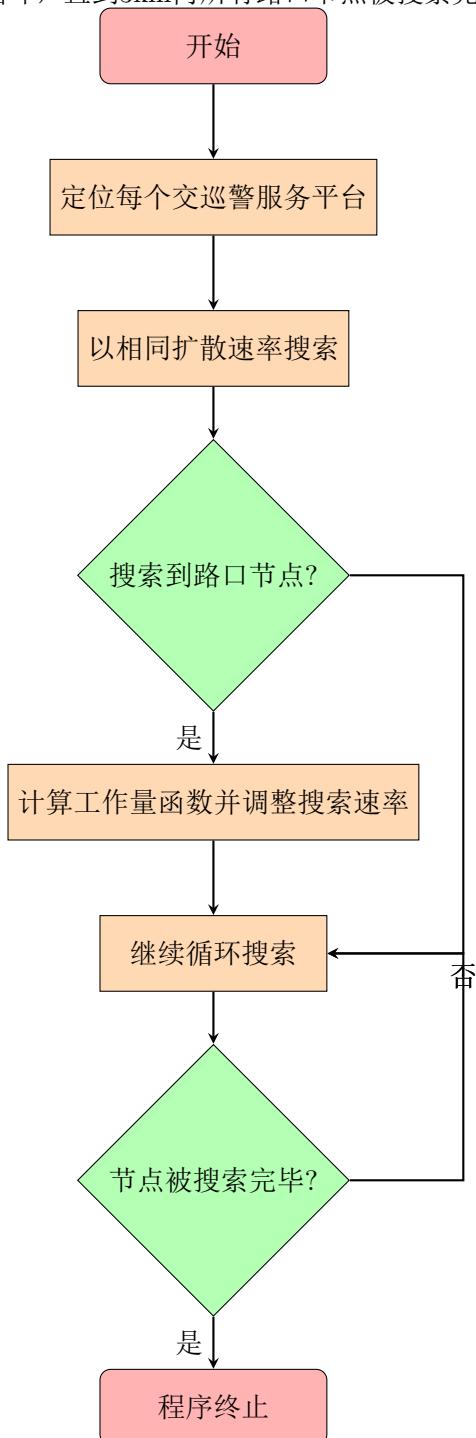
由于深度优先搜索算法有可能使某些路口无人管辖或邻近交巡警服务平台的管辖区域存在重叠, 而在现实中, 不同警局的执法范围一般不会重叠, 为避免此现象发生, 需要对该模型进行优化。

但是深度优先搜索算法会搜索某一深度内的所有节点, 进而导致同一路口节点被不同交巡警平台多次覆盖。

为解决这一问题，从各平台同时进行向外扩散搜索，当一个节点被某一平台纳入管辖范围，就不能被其他平台搜索到，为此引入扩散搜索模型。

5.1.6 扩散模型的引入

定位每一个交巡警服务平台，对所有平台，以相同扩散速率进行搜索，若搜索到的节点未被其他平台添加到管辖区域内，则将其加入自己的管辖区。在每一轮增加搜索距离之前，计算各个平台工作量之和，根据计算结果，调整该交巡警平台的扩散搜索速率。重复此循环，直到3km内所有路口节点被搜索完毕，程序终止。



1. 定位每一个交巡警服务平台：

设交巡警服务平台集合为 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, 路口节点集合为 $N = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ 。

2. 以相同速率进行扩散搜索, 直到搜索到路口节点:

对每一个交巡警服务平台 $p_i \in P$, 设初始搜索速率为 v_0 , 在时间 t 内的搜索半径为 $r_i(t) = v_0 \cdot t$ 。搜索半径 r_i 满足:

$$r_i(t) = \min\{r \mid \exists n_j \in N, \text{dist}(p_i, n_j) \leq r\}$$

3. 继续重复此循环, 直到3km内所有路口节点被搜索完毕, 程序终止:

设搜索终止距离为 $R = 3$ km, 程序在满足以下条件时终止:

$$\forall n_j \in N, \text{dist}(p_i, n_j) \leq R \text{ for some } p_i \in P$$

优点在于无需去除重叠区域且到案时间更短。

放张图!

5.1.7 结果的检验

虽然任意平台无法在3分钟内抵达28, 29, 38, 39, 61, 92这六个节点, 但可通过延长搜索时间覆盖所有节点。

路口节点	28	29	38	39	61	92
警局节点	A15	A15	A16	A2	A7	A20
抵达时间	4.8	5.7	3.4	3.7	4.2	3.6

5.1.8 问题的结论

交巡警平台	管辖节点
A1	1、67、68、69、71、72、73、74、75、76、78
A2	2、39、40、43、44、70
A3	3、54、55、65、66
A4	4、57、60、62、63、64
A5	5、49、50、51、52、53、56、58、59
A6	6
A7	7、30、32、47、48、61
A8	8、33、46
A9	9、31、34、35、45
A10	10
A11	11、26、27
A12	12、25
A13	13、21、22、23、24
A14	14
A15	15、28、29
A16	16、36、37、38
A17	17、41、42
A18	18、80、81、82、83
A19	19、77、79
A20	20、84、85、86、87、88、89、90、91、92

5.2 问题二模型的建立与求解

5.2.1 问题二的模型建立

为解决这一指派问题，需对进出该区的13条交通要道实现快速全封锁，通过调度全区警力资源以最快速度完成封锁。为此，我们需建立最优调度方案使这一目标最快实现。

为实现对进出该区的13条交通要道快速全封锁，即指派交巡警服务平台到交通要道，目标为封锁完成的时间最短。据此建立最大流二分查找模型，规划出最佳封锁方案。

5.2.2 最大流算法的模型建立

最大流问题是在给定一个源点（source）和汇点（sink）的流网络中，找到从源点到汇点的最大流量。网络中每条边都有一个容量限制，表示该边能通过的最大流量。最大流算法的目标是找到一种流量分配方式，使得从源点到汇点的总流量最大。

1. 流量守恒约束

在网络的每个节点 v （除了源点和汇点）处，流量守恒原则要求：

$$\sum_{u \in V} f(u, v) = \sum_{w \in V} f(v, w)$$

其中， $f(u, v)$ 表示从节点 u 到节点 v 的流量， V 表示节点集合。

2. 边容量约束

每条边的流量不能超过其容量限制：

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$$

其中， $c(u, v)$ 表示边 (u, v) 的容量。

3. 最大流量

最大流问题的目标是最大化从源点 s 到汇点 t 的总流量 $|f|$ ：

$$\max |f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$$

4. 二分查找法

二分查找法是一种在有序数组中查找目标值的高效算法。其基本思想是通过逐步缩小查找范围，将问题规模减半，直到找到目标值或确定目标值不存在。

5. 二分查找算法步骤

(1) 初始化左右边界 T_{\min} 和 T_{\max} 。

(2) 计算中点 T_{mid} ：

$$T_{\text{mid}} = \frac{T_{\min} + T_{\max}}{2}$$

(3) 判断 T_{mid} 是否满足条件。如果满足，则更新右边界：

$$T_{\max} = T_{\text{mid}}$$

否则，更新左边界：

$$T_{\min} = T_{\text{mid}}$$

(4) 重复步骤2和3，直到左右边界足够接近。

6. 最大流二分查找法结合

我们通过二分查找法找到一个最小的时间 T ，使得在此时间内警察能够封锁所有关键交通要道。对于每个给定的 T ，通过最大流算法判断是否能满足封锁要求。

7. 具体数学模型

目标函数：

$$\min T$$

约束条件：

$$\text{s.t. } \begin{cases} \sum_{i \in P} x_{ij} \geq 1, & \forall j \in K \\ \sum_{j \in K} x_{ij} \leq 1, & \forall i \in P \\ x_{ij} \cdot d_{ij} \leq T, & \forall i \in P, \forall j \in K \\ \text{flow}(T) \geq |K| \end{cases}$$

其中， P 为警察局集合， K 为关键交通要道集合， d_{ij} 为警察局 i 到路口 j 的时间， x_{ij} 为二元决策变量，表示是否由警察局 i 封锁路口 j 。

5.2.3 模型的求解

$$\min T$$

s.t.

$$\begin{cases} \sum_{i \in P} x_{ij} \geq 1, & \forall j \in K \\ \sum_{j \in K} x_{ij} \leq 1, & \forall i \in P \\ x_{ij} \cdot d_{ij} \leq T, & \forall i \in P, \forall j \in K \\ \text{flow}(T) \geq |K| \end{cases} \quad (1)$$

5.2.4 模型求解的结果

匹配对: [(2, 16), (4, 48), (7, 29), (8, 30), (10, 12), (11, 24), (12, 22), (13, 23), (14, 21), (15, 28), (16, 14), (19, 38), (20, 62)]

A2	A4	A7	A8	A10	A11	A12
16	48	C	D	E	F	G
A13	A14	A15	A16	A19	A20	
1	2	3	4	5	6	

5.2.5 结果的检验

5.2.6 问题的结论

5.2.7 模型检验与分析

5.2.8 误差分析

5.2.9 灵敏度分析

5.2.10 稳定性分析

5.2.11 小结

5.3 问题三模型的建立与求解

5.3.1 模型建立

基于问题一已建立的扩散搜索模型，引入工作量判定函数，综合考虑A区每个交巡警平台范围内的路径长度与节点发案率，将平台工作量均衡并且尽量保证出警时间在三分钟内作为优化目标，最终确定增加平台的位置与数目，以达到最优设置方案。

5.3.2 工作量函数的建立

工作量由工作时间决定，即出警时间与办案时间，其中，出警时间是路程/速度，办案时间由所调查资料可知，平均时长为30分钟。

对于每一个交巡警服务平台：

设交巡警服务平台集合为 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, 路口节点集合为 $N = \{n_1, n_2, \dots, n_n\}$ 。

要计算警察完成附近路口任务的总工作量, 我们可以定义如下的工作量函数 W , 而 W_{pi} 是指第 i 个路口的工作量, 综合考虑多个因素:

$$W_{pi} = \sum_{j=1}^n \left(R_j \times T_{\text{case}} + 2 \times \frac{D_j}{V} \right) \quad (2)$$

其中:

- N 是路口数量
- R_j 是第 j 个路口的发案率
- T_{case} 是处理每个案件的固定时间, 设为 30 分钟 (0.5 小时)
- V 是警察行进的速度 (单位: 公里/小时)
- D_j 是从起点到第 j 个路口的距离 (单位: 公里)

5.3.3 基于优化函数的扩散算法

1. 定位每一个交巡警服务平台, 对所有平台, 以相同速率进行扩散搜索, 直到搜索到第一个路口节点。
2. 搜索到第一个路口节点后, 进行工作量函数的计算, 根据计算结果, 调整该交巡警平台的扩散搜索速率。
3. 继续重复此循环, 直到 3km 内所有路口节点被搜索完毕, 程序终止。

优点在于无需去除重叠区域且工作量分配更加均匀。

1. 以相同速率进行扩散搜索, 直到搜索到第一个路口节点:

对每一个交巡警服务平台 $p_i \in P$, 设初始搜索速率为 v_0 , 在时间 t 内的搜索半径为 $r_i(t) = v_0 \cdot t$ 。搜索半径 r_i 满足:

$$r_i(t) = \min\{r \mid \exists n_j \in N, \text{dist}(p_i, n_j) \leq r\}$$

2. 每扩张一次距离, 进行一次工作量函数的计算, 根据计算结果调整该交巡警平台的扩散搜索速率:

设工作量函数为 $W(p_i)$, 则新的搜索速率 v_i 为:

$$v_i = f(W(p_i))$$

其中, 函数 f 根据具体工作量计算结果调整搜索速率。

3. 继续重复此循环, 直到 3km 内所有路口节点被搜索完毕, 程序终止:

设搜索终止距离为 $R = 3$ km, 程序在满足以下条件时终止:

$$\forall n_j \in N, \text{dist}(p_i, n_j) \leq R \text{ for some } p_i \in P$$

5.3.4 模型结果的评价

由于方差受平均值影响，不能准确反映数据偏离平均值的程度，故引入变异系数作为工作分配是否平均的评判指标。

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \quad (3)$$

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad (4)$$

5.3.5 模型在原平台情况求解的结果

交巡警平台	管辖节点
A1	1, 69, 74, 78, 75, 73, 71, 68
A2	2, 70, 43, 44, 72
A3	3, 55, 65, 66, 64, 54, 67
A4	4, 62, 63, 60, 57
A5	5, 49, 50, 53, 51
A6	6, 47, 59, 52, 58, 56
A7	7, 30, 32, 48
A8	8, 33, 46
A9	9, 35, 34, 45
A10	10
A11	11, 26, 27
A12	12, 25
A13	13, 21, 22, 23, 24
A14	14
A15	15, 28, 29
A16	16, 36, 37, 38
A17	17, 41, 42
A18	18, 80, 81, 82, 83
A19	19, 77, 79
A20	20, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92

证明了基于工作量函数优化的负反馈扩散算法，在解决平均工作量问题上更有优越性。

站台号	原始工作量	第二个数据的工作量
A1	352.565165	263.525661
A2	237.864546	264.434508
A3	179.697283	234.691742
A4	210.248267	183.150163
A5	311.188695	206.311966
A6	75.000000	234.426678
A7	283.580091	231.482092
A8	154.549541	154.549541
A9	258.540947	203.962655
A10	48.000000	48.000000
A11	142.789285	142.789285
A12	125.724334	125.724334
A13	272.766606	223.183326
A14	75.000000	126.141904
A15	63.000000	120.498126
A16	159.735949	159.735949
A17	164.137680	164.137680
A18	189.512156	195.590621
A19	104.291359	165.873061
A20	338.864981	308.987194

表 1: 工作量对比表

5.3.6 基于蒙特卡洛的新平台设置方案

假设我们需要计算某个函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分:

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (5)$$

在区间 $[a, b]$ 上生成 N 个随机样本 x_1, x_2, \dots, x_N 。

对函数 $f(x)$ 在这些随机样本点上的值取平均:

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (6)$$

积分 I 可以近似为:

$$I \approx (b - a) \cdot \bar{f} \quad (7)$$

利用蒙特卡洛算法得出新平台设置方案后, 分别计算每种方案的方差, 即可知最优新增平台策略。

A1	A2	A3	A4	σ_W^2
92	61	27	38	3573
92	61	28	38	3572
92	61	28	39	3575
92	48	28	39	3821
91	61	28	38	4541
87	61	28	38	2959

由此，我们新设置的平台为A21 87

A22 61

A23 28

A24 38

添加完平台后，各平台工作量方差减小为2959。

5.3.7 结果的检验

在满足了3分钟内全覆盖的基础上，且工作量更为平均。

5.3.8 问题的结论

由此，我们新设置的平台为A21 87

A22 61

A23 28

A24 38

添加完平台后，各平台工作量方差减小为2959。

5.4 问题四模型的建立与求解

5.4.1 数据预处理

首先，我们读取文件，根据区域名称提取出节点坐标、节点间连接关系、平台所在节点和路口所在节点等信息，并将这些数据进行格式化和存入数据库。然后，我们计算连接节点间的欧几里得距离。考虑到点与点之间存在连接关系，并包含距离信息，我们构建了节点网络地图。

5.4.2 评价现有平台设置方式

工作量由工作时间决定，即出警时间与办案时间，其中，出警时间是路程/速度，出警时间由所调查资料可知，平均时长为30分钟。

$$W_p = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(R_j \times T_{\text{case}} + 2 \times \frac{D_j}{V} \right) \quad (8)$$

W_p 为全市平台总工作量。

$$\bar{W} = \frac{1}{m} W_p \quad (9)$$

\bar{W} 为全市平台平均工作量。

计算工作量的方差 σ_W^2

$$\sigma_W^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (W_{pi} - \bar{W})^2 \quad (10)$$

在原平台部署方式下，基于第三问负反馈扩散计算模型所得到的各平台总工作量的方差：10483.69。三分钟内未覆盖的路口节点有98个，故可以看出原平台部署方案还有优化空间。

5.4.3 模型建立

根据对原平台部署方案的分析，其部署方案存在同一区域交巡警平台重复部署，偏远地区未部署交巡警平台等问题。分别以该市所有路口节点为中心，计算该节点三公里内的总工作量，得到由各节点总工作量组成的列表，由大到小排序后，通过计算密度函数验证其基本服从卡方分布。基于减小方差的目的每次选取平台位置都选择最靠近平均数的节点，以保证在该次选取的数据集中方差最小。选取平台后，从可选点中扣除平台所在点及其三公里所有可选点，以避免平台管辖区域的冗余。之后在重新计算剩余各点工作量的平均数，重复以上步骤，直到选出八十个平台为止。

5.4.4 平台部署模型的建立

1. 计算每个节点三公里内的总工作量

对于每个节点 n_i ，计算其三公里内的总工作量 W_{n_i} ：

$$W_{n_i} = \sum_{j \in \{j \mid d(n_i, n_j) \leq 3 \text{ km}\}} \left(R_j \times T_{\text{case}} + 2 \times \frac{D_j}{V} \right) \quad (11)$$

2. 将各节点总工作量列表排序

对所有节点的总工作量进行排序，得到排序后的列表 W_{sorted} ：

$$W_{\text{sorted}} = \text{sort}(\{W_{n_i}\}_{i=1}^n) \quad (12)$$

3. 计算密度函数并验证其分布 给定数据样本 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ，核密度估计函数 $\hat{f}(x)$ 定义为：

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{x - x_i}{h} \right) \quad (13)$$

其中：

- n 是数据点的数量。
- h 是带宽（平滑参数）。
- K 是核函数，通常使用高斯核函数，高斯核函数定义为：

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) \quad (14)$$

计算密度函数，并验证其基本服从卡方分布。

4. 选择平台位置

每次选取的平台位置选择最靠近当前工作量平均数的节点，以减小方差。

计算当前平均数

$$\bar{W} = \frac{1}{|N|} \sum_{i \in N} W_{n_i} \quad (15)$$

选择最靠近平均数的节点

$$n_{\text{selected}} = \arg \min_{n_i \in N} |W_{n_i} - \bar{W}| \quad (16)$$

5. 扣除平台所在点及其三公里内所有可选点

选取平台后，从可选点中扣除平台所在点及其三公里所有可选点：

$$N = N \setminus \{n_i \mid d(n_{\text{selected}}, n_i) \leq 3 \text{ km}\} \quad (17)$$

6. 重新计算剩余各点工作量的平均数，重复步骤

重复以上步骤，直到选出八十一个平台为止。

5.4.5 模型求解的结果

以下是新部署方案下的具体平台管辖分配。

5.4.6 模型检验与分析

5.4.7 结果的检验

在对原平台部署方案优化后得到新方案的变异系数（即工作量不平均特征）减少11%，未覆盖节点数量减少44.90%，故可得到现部署方案比原部署方案更合理。

5.4.8 问题的结论

在不改变平台数量的情况下，原始部署方案有98个节点未被覆盖（即三分钟内无法到达），而修改后的结果只有54个节点未被覆盖，原变异系数:0.46，现变异系数:0.41。

5.5 问题五模型的建立与求解

5.5.1 模型建立

5.5.2 最大流算法的模型建立

5.5.3 敏感度分析

5.5.4 模型建立

5.5.5 模型的求解

5.5.6 模型求解的结果

5.5.7 结果的检验

5.5.8 模型检验与分析

5.5.9 问题的结论

最大流问题是在给定一个源点（source）和汇点（sink）的流网络中，找到从源点到汇点的最大流量。网络中每条边都有一个容量限制，表示该边能通过的最大流量。最大流算法的目标是找到一种流量分配方式，使得从源点到汇点的总流量最大。

1. 流量守恒约束

在网络的每个节点 v （除了源点和汇点）处，流量守恒原则要求：

$$\sum_{u \in V} f(u, v) = \sum_{w \in V} f(v, w)$$

区域	节点
A3	3, 44, 55, 65, 66, 64, 54, 63
A5	5, 49, 50, 53, 47, 48
A11	11, 26, 27
A24	24, 25, 13
A33	33, 32, 34, 8, 9, 7, 31, 35, 46, 36, 45, 37, 16
A40	40, 39, 2
A42	42, 43, 17, 70, 72, 41
A57	57, 60, 58, 56, 59, 52, 51, 4, 62, 6
A75	75, 76, 68, 77, 67, 1, 69, 78, 74, 19, 71
A81	81, 82, 18, 83, 80, 79, 73
A86	86, 20, 85, 84
A92	92, 91, 87, 88, 90, 89
B100	100, 132, 133, 134, 135, 96, 138
B110	110, 109, 112, 94, 111, 108, 107, 106, 113, 105, 114, 104, 115, 95
B123	123, 122, 120, 124, 126, 119, 121, 125, 127, 128, 118, 130, 117, 129, 116, 131
B152	152, 151, 150, 153, 147, 149, 146, 145, 148, 141, 142, 139, 140, 144, 99
B157	157, 158, 155, 162, 159, 154, 156, 160
B165	165, 98, 164, 163
C174	174, 220, 219, 221, 213, 212, 211, 214
C176	176, 188, 187, 184, 185, 186
C193	193, 192, 194, 191, 195, 189, 190, 168
C197	197, 196, 175, 198
C208	208, 209, 207, 199, 210, 206, 205
C225	225, 170, 226, 223, 224, 222, 172, 218, 217
C231	231, 171, 244, 232, 216, 233, 245, 228, 227
C237	237, 236, 235, 173, 234, 30, 247, 238
C241	241, 242, 246, 243, 230, 240, 253, 229
C249	249, 258, 167, 260, 250, 259, 248
C265	265, 262, 166, 261, 263
C268	268, 269, 270, 267, 266, 257
C272	272, 182, 294, 271, 293, 292, 256
C274	274, 275, 273, 276, 278, 179
C282	282, 281, 283, 280, 291, 277, 284
C290	290, 289, 285, 288, 296, 279, 286, 295, 287, 297
C304	304, 314, 299, 303, 305, 300, 302, 315, 298, 301, 316
C307	307, 180, 310, 308, 306, 311, 309
C319	319, 318, 313, 317, 312, 181
D322	322, 361, 367
D327	327, 341, 338, 343, 342, 340, 326
D329	329, 330, 390, 331
D333	333, 336, 334, 339, 335, 328
D345	345, 323, 344
D348	348, 349, 347, 320, 350, 368
D360	360, 357, 353, 359, 346, 356, 358, 352, 354, 321, 355, 351
D363	363, 324, 364, 365, 366, 325
E372	372, 22, 23, 21, 457, 456
E375	375, 429, 424, 430, 425, 428, 431, 426, 432, 433, 374, 427, 434, 435, 436
E377	377, 376
E380	380, 396, 441, 397
E382	382, 101, 403, 93, 102, 103
E393	393, 392, 391, 394
E399	399, 400, 381, 401, 405, 398, 406
E407	407, 404, 438, 408
E413	413, 412, 414, 409, 410, 415, 416, 161, 411, 402
E421	421, 417
E423	423, 379, 422, 378
E437	437, 373
E440	440, 442, 395, 439, 443
E444	444, 447, 386
E445	445, 446, 455, 448

区域	节点
D363	363, 324, 364, 365, 366, 325
E372	372, 22, 23, 21, 457, 456
E375	375, 429, 424, 430, 425, 428, 431, 426, 432, 433, 374, 427, 434, 435, 436
E377	377, 376
E380	380, 396, 441, 397
E382	382, 101, 403, 93, 102, 103
E393	393, 392, 391, 394
E399	399, 400, 381, 401, 405, 398, 406
E407	407, 404, 438, 408
E413	413, 412, 414, 409, 410, 415, 416, 161, 411, 402
E421	421, 417
E423	423, 379, 422, 378
E437	437, 373
E440	440, 442, 395, 439, 443
E444	444, 447, 386
E445	445, 446, 455, 448
E452	452, 451, 453, 464, 450, 462, 454, 465
E460	460, 383, 461
E469	469, 470, 463, 468
E472	472, 384, 471, 466, 467
E473	473, 385, 474, 449
F478	478, 542, 537, 538, 543, 544, 539
F479	479, 580, 576, 577, 581, 579, 573
F480	480, 567, 568, 562, 566
F486	486, 487, 491, 458, 493
F490	490, 481, 531, 489
F501	501, 497, 477, 530, 498, 496, 500, 492, 495, 499
F503	503, 519, 502, 518, 520, 521, 517, 529, 516, 494
F506	506, 505, 509, 507, 508, 504
F525	525, 514, 527, 524, 528, 526, 523, 515, 513, 522, 512
F535	535, 534, 545, 546, 533, 476, 536
F548	548, 532, 549, 547, 552, 553
F557	557, 475, 564, 556, 555, 554, 563, 565
F559	559, 550, 558, 551
F561	561, 38
F570	570, 569, 571, 484

表 3: 节点分布表

其中, $f(u, v)$ 表示从节点 u 到节点 v 的流量, V 表示节点集合。

2.边容量约束

每条边的流量不能超过其容量限制:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$$

其中, $c(u, v)$ 表示边 (u, v) 的容量。

3.最大流量

最大流问题的目标是最大化从源点 s 到汇点 t 的总流量 $|f|$:

$$\max |f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$$

4.二分查找法

二分查找法是一种在有序数组中查找目标值的高效算法。其基本思想是通过逐步缩小查找范围, 将问题规模减半, 直到找到目标值或确定目标值不存在。

5.二分查找算法步骤

(1) 初始化左右边界 T_{\min} 和 T_{\max} 。

(2) 计算中点 T_{mid} :

$$T_{\text{mid}} = \frac{T_{\min} + T_{\max}}{2}$$

(3) 判断 T_{mid} 是否满足条件。如果满足, 则更新右边界:

$$T_{\max} = T_{\text{mid}}$$

否则, 更新左边界:

$$T_{\min} = T_{\text{mid}}$$

(4) 重复步骤2和3, 直到左右边界足够接近。

6.最大流二分查找法结合

我们通过二分查找法找到一个最小的时间 T , 使得在此时间内警察能够封锁所有关键交通要道。对于每个给定的 T , 通过最大流算法判断是否能满足封锁要求。

7.具体数学模型

目标函数:

$$\min T$$

约束条件:

$$\text{s.t. } \begin{cases} \sum_{i \in P} x_{ij} \geq 1, & \forall j \in K \\ \sum_{j \in K} x_{ij} \leq 1, & \forall i \in P \\ x_{ij} \cdot d_{ij} \leq T, & \forall i \in P, \forall j \in K \\ \text{flow}(T) \geq |K| \end{cases}$$

其中, P 为警察局集合, K 为关键交通要道集合, d_{ij} 为警察局 i 到路口 j 的时间, x_{ij} 为二元决策变量, 表示是否由警察局 i 封锁路口 j 。

5.5.10 模型的求解

$$\min T$$

s.t.

$$\begin{cases} \sum_{i \in P} x_{ij} \geq 1, & \forall j \in K \\ \sum_{j \in K} x_{ij} \leq 1, & \forall i \in P \\ x_{ij} \cdot d_{ij} \leq T, & \forall i \in P, \forall j \in K \\ \text{flow}(T) \geq |K| \end{cases} \quad (18)$$

5.5.11 模型求解的结果

匹配对: [(2, 16), (4, 48), (7, 29), (8, 30), (10, 12), (11, 24), (12, 22), (13, 23), (14, 21), (15, 28), (16, 14), (19, 38), (20, 62)]

A2	A4	A7	A8	A10	A11	A12
16	48	C	D	E	F	G
A13	A14	A15	A16	A19	A20	
1	2	3	4	5	6	

5.5.12 模型建立的准备

5.5.13 模型的求解

参考文献

- [1] 何晓群.多元统计分析.北京: 中国人民大学出版社, 2012.
- [2] 徐维超. 相关系数研究综述[J]. 广东工业大学学报, 2012, 29(3):12-17.

6 附录