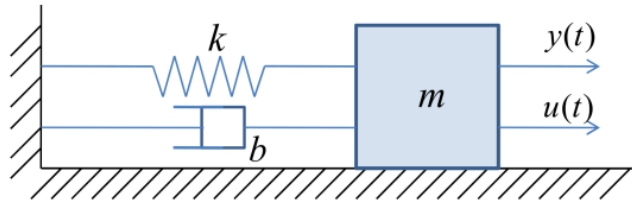


1 Σύστημα ελατηρίου-μάζας-αποσβεστήρα

Γραμμικά παραμετροποιημένο μοντέλο

Θα μοντελοποιήσουμε μαθηματικά το σύστημα μάζας (m), ελατηρίου (σταθεράς k) και αποσβεστήρα (σταθεράς b), με είσοδο εξωτερική δύναμη u και έξοδο τη μετατόπιση y της μάζας.



Σχήμα 1: Σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα.

Από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα:

$$\sum F = m\ddot{y} \Leftrightarrow u - ky - b\dot{y} = m\ddot{y} \Leftrightarrow \ddot{y} = \left(\frac{1}{m}\right)(-ky - b\dot{y} + u)$$

Θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, παραμετροποιούμε γραμμικά το σύστημα ως εξής:

1. Ομαδοποιούμε τις άγνωστες παραμέτρους στο διάνυσμα $\theta^* = \left[\frac{b}{m} \quad \frac{k}{m} \quad \frac{1}{m}\right]^T$ και τα σήματα εισόδου-εξόδου στο διάνυσμα $\Delta = \begin{bmatrix} -\dot{y} & y & u \end{bmatrix}$, φέρνοντας το σύστημα στη μορφή $\ddot{y} = \theta^{*T} \Delta$

2. Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και έχουμε: $s^2 y = \theta^{*T} \Delta$, όπου $\Delta = \begin{bmatrix} -\Delta_1^T(s)y & \Delta_0^T(s)u \end{bmatrix}$ και $\Delta_i = \begin{bmatrix} s^i & s^{i-1} & \dots 1 \end{bmatrix}$

3. Φιλτράρουμε και τα δύο μέλη με ευσταθές φίλτρο με αρνητικές πραγματικές ρίζες $\Lambda(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2$.

4. Προκύπτει $z = \theta^{*T} \zeta$ όπου $z = \frac{s^2 y}{\Lambda(s)}$ και $\zeta = \begin{bmatrix} \frac{-s}{\Lambda(s)} y & \frac{-1}{\Lambda(s)} y & \frac{1}{\Lambda(s)} u \end{bmatrix}$
Για $\lambda = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix}$ τέτοιο ώστε $\theta_\lambda = \begin{bmatrix} \theta_1^{*T} - \lambda^T & \theta_2^{*T} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \theta_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} + (\lambda_1 + \lambda_2) & \frac{k}{m} - \lambda_1\lambda_2 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}^T$, καταλήγουμε στη γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή του συστήματος: $y = \theta_\lambda^T \zeta$.

Εφαρμογή Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων

Έχοντας τη γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή του συστήματος και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων, μπορούμε τώρα να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του συστήματος.

Μετρούμε μόνο τη μετατόπιση και την εξωτερική δύναμη που εφαρμόζεται στη μάζα. Έστω, λοιπόν $Y = [y(1) \ y(2) \ \dots y(N)]^T$ μετρήσεις τις εξόδου. Εκτιμούμε σύστημα της μορφής $\hat{y} = \theta\Phi$, όπου \hat{y} η εκτιμώμενη έξοδος και Φ το διάνυσμα οπισθοδρόμησης.

$$\text{Ορίζουμε, λοιπόν, τον πίνακα } \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \dots & \varphi_N(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \dots & \varphi_N(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \dots & \varphi_N(N) \end{bmatrix}$$

Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του σφάλματος εκτίμησης, που δίνεται από τη σχέση $e = Y - \hat{Y} = Y - \theta\Phi$. Το ζητούμενο θ που ελαχιστοποιεί το σφάλμα δίνεται από το $\arg \min_{\theta} \frac{|e|^2}{2}$.

Αναζητούμε, λοιπόν, το μοναδικό ολικό ελάχιστο της κυρτής, λόγω της γραμμικά παραμετροποιημένης μορφής, συνάρτησης:

$$V = \left| \frac{Y - \theta\Phi}{2} \right|^2$$

$$\text{Παραγωγίζουμε την } V: \quad \left. \frac{dV}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0$$

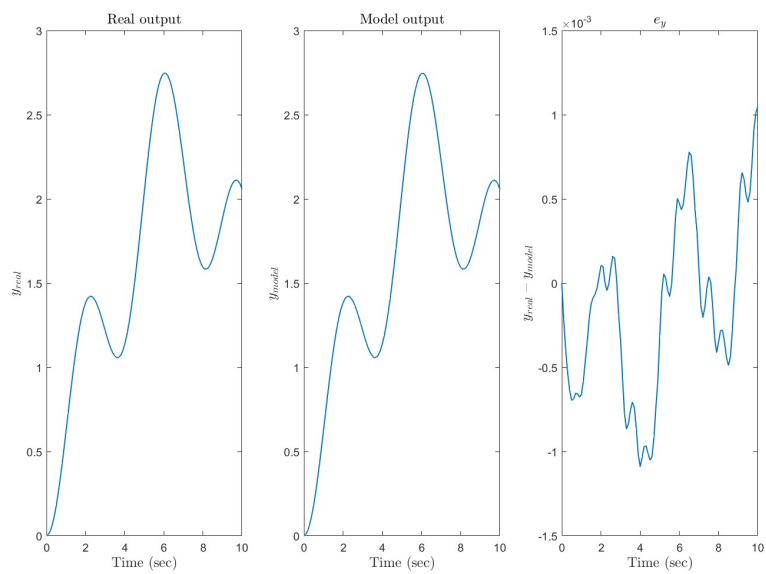
$$(Y - \Phi\theta)^T(-\Phi) = 0$$

$$\theta_0^T \Phi^T \Phi = Y^T \Phi$$

$$\text{Τελικά, το ζητούμενο } \theta: \theta_0^T = Y^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1}$$

Αποτελέσματα Προσομοίωσης στο MATLAB

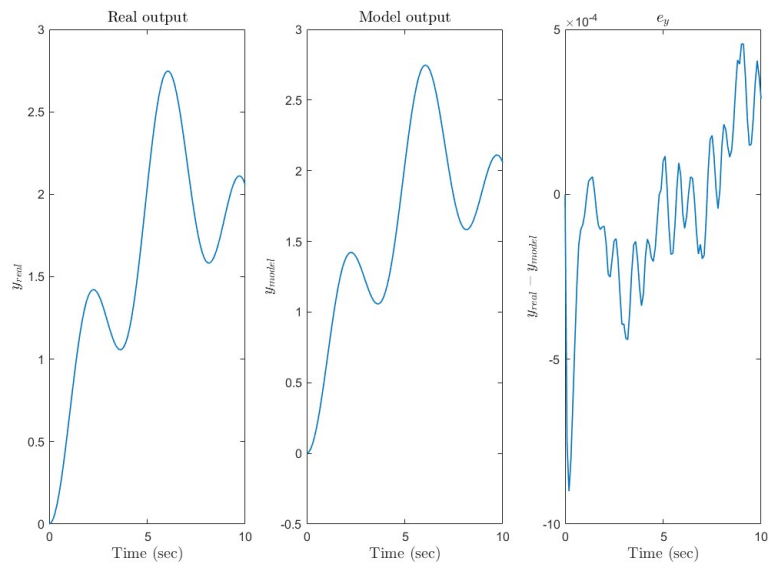
Για την υλοποίηση του αλγορίθμου θέτουμε: $m = 8.5[kg]$, $b = 0.65[kg/s]$, $k = 2[kg/s^2]$ και $u(t) = 10\cos(0.5\pi t) + 3[N]$. Προσομοιώνουμε το σύστημα για χρονικό διάστημα t από 0 έως 10 sec με βήμα 0.1 sec. Για το ευσταθές φίλτρο παρουσιάζονται δοκιμές με διπλούς πόλους $\lambda_1 = \lambda_2$ στις τιμές 1, 5 και 10. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης είναι τα εξής:



Σχήμα 1: Αποτελέσματα προσωμοίωσης για $\Lambda(s) = (s + 1)^2$

Παράμετρος	Εκτιμώμενη τιμή
m	8.4905
b	0.6403
k	2.0003

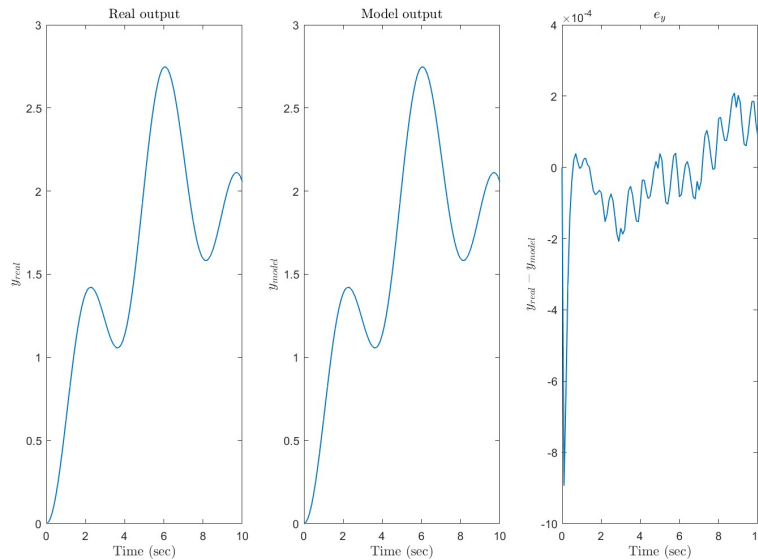
Πίνακας 1: Εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων του συστήματος από τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων για $\Lambda(s) = (s + 1)^2$



Σχήμα 2: Αποτελέσματα προσωμοίωσης για $\Lambda(s) = (s + 5)^2$

Παράμετρος	Εκτιμώμενη τιμή
m	8.6705
b	0.5080
k	2.0056

Πίνακας 2: Εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων του συστήματος από τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων για $\Lambda(s) = (s + 5)^2$



Σχήμα 3: Αποτελέσματα προσωμοίωσης για $\Lambda(s) = (s + 10)^2$

Παράμετρος	Εκτιμώμενη τιμή
m	9.2410
b	0.3545
k	2.0119

Πίνακας 3: Εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων του συστήματος από τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων για $\Lambda(s) = (s + 10)^2$

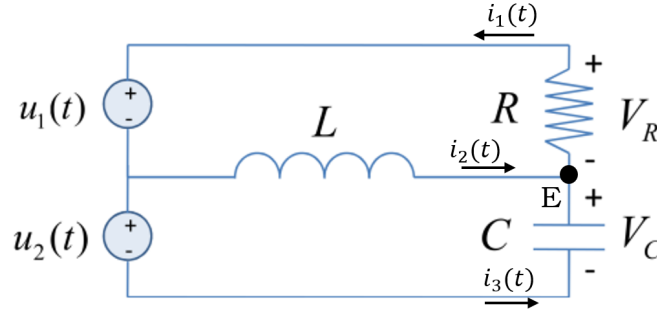
Και για τις 3 επιλογές του $\Lambda(s)$, δεν παρατηρούμε ιδιαίτερες διαφορές ανάμεσα στα γραφήματα της εξόδου του πραγματικού συστήματος και της εκτίμησής μας. Το σφάλμα εκτίμησης είναι σε κάθε περίπτωση εξαιρετικά χαμηλό. Ωστόσο, για πιο αρνητικές τιμές των πόλων βλέπουμε το σφάλμα να μειώνεται παρότι οι εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων αποκλίνουν από τις πραγματικές.

Αυτό είναι ενδεικτικό του γεγονότος ότι ο αλγόριθμος των ελαχίστων τετραγώνων δεν επιδιώκει την βέλτιστη εκτίμηση του μοντέλου ως προς τις τιμές των παραμέτρων του σε σχέση με το πραγματικό μοντέλο, αλλά μόνο ως προς την ελαχιστοποίηση του σφάλματος εκτίμησης.

2 Κύκλωμα RLC

Εκτίμηση πίνακα μεταφοράς του συστήματος

Αρχικά, πρέπει να εφαρμόσουμε κυκλωματική ανάλυση, προκειμένου να εξάγουμε το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος. Εισόδους του συστήματος αποτελούν τα u_1 , u_2 , ενώ οι εξοδοί είναι V_R και V_C .



Σχήμα 2: Κύκλωμα RLC.

Θεωρούμε Ε τον κόμβο, ο οποίος σημειώνεται στο Σχήμα 2 και στον οποίο ενώνονται το πηνίο, ο πυκνωτής και η αντίσταση. Η τάση σε αυτόν είναι ίση με V_E . Τότε, από KCL έχουμε:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$$

$$\frac{V_R(t)}{R} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t V_E(t) dt + C \dot{V}_C(t)$$

$$\frac{V_R(t)}{R} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t (V_C(t) - u_2(t)) dt + C \dot{V}_C(t)$$

$$\begin{cases} \frac{V_R(t)}{R} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t (V_C(t) - u_2(t)) dt + C \dot{V}_C(t) \\ \frac{V_R(t)}{R} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t (u_1(t) - V_R(t)) dt + C \dot{V}_C(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{u_1(t) + u_2(t) - V_C(t)}{R} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t (V_C(t) - u_2(t)) dt + C \dot{V}_C(t) \\ \frac{V_R(t)}{R} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t (u_1(t) - V_R(t)) dt + C \dot{V}_C(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{V}_C(t) + \frac{\dot{V}_C(t)}{RC} + \frac{V_C(t)}{LC} = \frac{\dot{u}_1(t)}{RC} + \frac{\dot{u}_2(t)}{RC} + \frac{u_2(t)}{LC} \\ \ddot{V}_R(t) + \frac{\dot{V}_R(t)}{RC} + \frac{V_R(t)}{LC} = \ddot{u}_1(t) + \frac{u_1(t)}{LC} + \ddot{u}_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \ddot{V}_C(t) = -\frac{\dot{V}_C(t)}{RC} - \frac{V_C(t)}{LC} + \frac{\dot{u}_1(t)}{RC} + \frac{\dot{u}_2(t)}{RC} + \frac{u_2(t)}{LC} \\ \ddot{V}_R(t) = -\frac{\dot{V}_R(t)}{RC} - \frac{V_R(t)}{LC} + \ddot{u}_1(t) + \frac{u_1(t)}{LC} + \ddot{u}_2(t) \end{cases} \quad (2)$$

Προκειμένου να βρεθεί ο πίνακας μεταφοράς του συστήματος, θα εφαρμόσουμε μετασχηματισμό Laplace στην (1), θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες. Τότε:

$$\begin{cases} s^2 V_C(t) + \frac{sV_C(t)}{RC} + \frac{V_C(t)}{LC} = \frac{su_1(t)}{RC} + \frac{su_2(t)}{RC} + \frac{u_2(t)}{LC} \\ s^2 V_R(t) + \frac{sV_R(t)}{RC} + \frac{V_R(t)}{LC} = s^2 u_1(t) + \frac{u_1(t)}{LC} + s^2 u_2(t) \end{cases} \quad (3)$$

το οποίο σε μορφή πίνακα γράφεται ως εξής: $\begin{bmatrix} V_C \\ V_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} & \frac{\frac{\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}} \\ \frac{\frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}} & \frac{\frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

όπου $H(s) = \begin{bmatrix} \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} & \frac{\frac{\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}} \\ \frac{\frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}} & \frac{\frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}} \end{bmatrix}$ ο πίνακας μεταφοράς του συστήματος.

Γραμμικά παραμετροποιημένο μοντέλο

Για την εκτίμηση του γραμμικά παραμετροποιημένου μοντέλου του συστήματος θα χρειαστούμε μόνο μια εκ των διαφορικών εξισώσεων της (2). Μας εξυπηρετεί η επιλογή της εξίσωσης που περιλαμβάνει το V_C , καθώς έχει λιγότερους αγνώστους.

Σε αυτό το σημείο θα εφαρμόσουμε την ίδια ανάλυση με την προηγούμενη άσκηση, μέσω της οποίας θα καταλήξουμε στη μορφή $y = \theta_\lambda^T \zeta$.

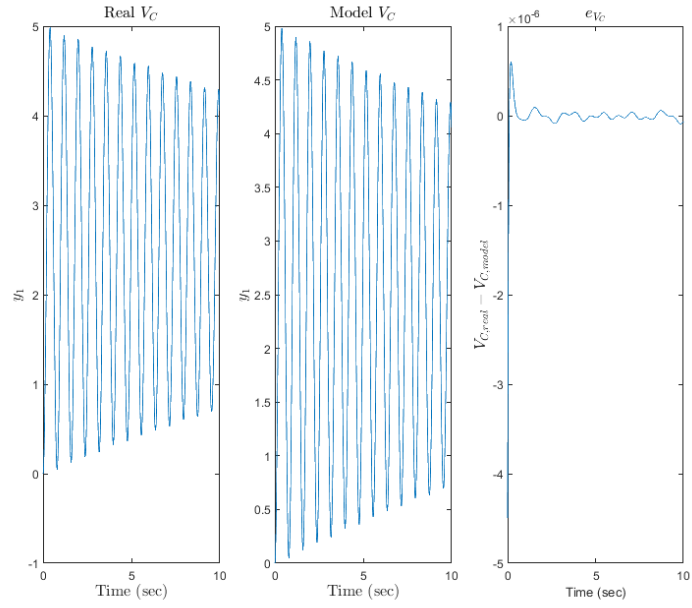
Θα είναι $\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{[s \ 1]}{\Lambda(s)} y & \frac{[s \ 1]}{\Lambda(s)} u_1 & \frac{[s \ 1]}{\Lambda(s)} u_2 \end{bmatrix}$ και $\theta_\lambda = [\theta_1^{*T} - \lambda^T \quad \theta_2^{*T}]$

όπου $\lambda = [-(\lambda_1 + \lambda_2) \quad \lambda_1 \lambda_2]$, λ_1, λ_2 οι αρνητικές πραγματικές ρίζες του ευσταθούς φίλτρου $\Lambda(s)$. Το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων που θέλουμε να εκτιμήσουμε είναι το $\theta^* = [\theta_1^* \quad \theta_2^*]^T = [\frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \quad \frac{1}{RC} \quad 0 \quad \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC}]^T$

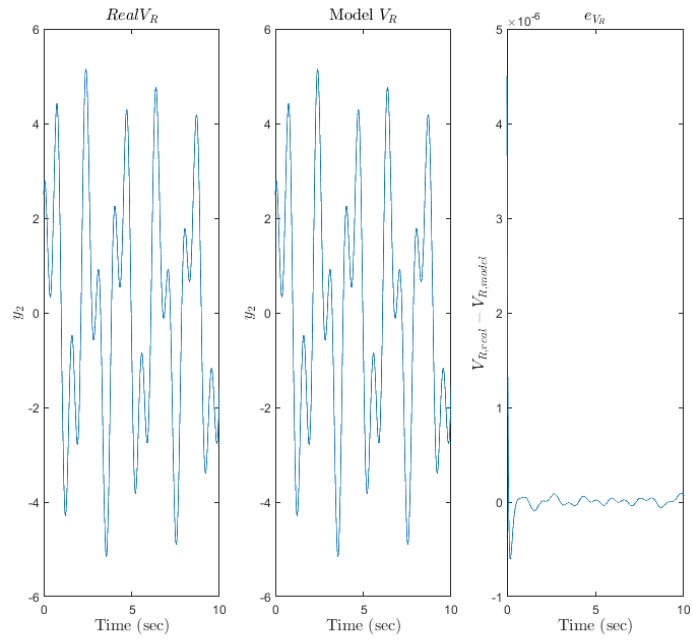
Εφαρμογή Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων στο MATLAB

Μπορούμε τώρα, με χρήση του MATLAB, να προσωμοιώσουμε το σύστημα εκτιμώντας τις παραμέτρους με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Όπως και στη προηγούμενη άσκηση, θα υπολογίσουμε το θ^* από τη σχέση $\theta_0^T = Y^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1}$, έχοντας αυτή τη φορά όλα τα δεδομένα εισόδου-εξόδου του συστήματος.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε $u_1(t) = 3 \sin(\pi * t)$ [V], $u_2(t) = 2.5$ [V], ενώ οι μετρήσεις των τάσεων V_C, V_R αντλούνται από το αρχείο v.p. Ως περίοδος δειγματοληψίας επιλέχθηκαν οι χρονικές στιγμές από $t = 0$ έως 10 sec με βήμα 0.01 sec. Επιλέχθηκε διπλός πόλος $\Lambda(s) = (s + 10)$.



Σχήμα 4: Αποτελέσματα προσωμοίωσης του V_C για $\Lambda(s) = (s + 10)^2$



Σχήμα 5: Αποτελέσματα προσωμοίωσης του V_R για $\Lambda(s) = (s + 10)^2$

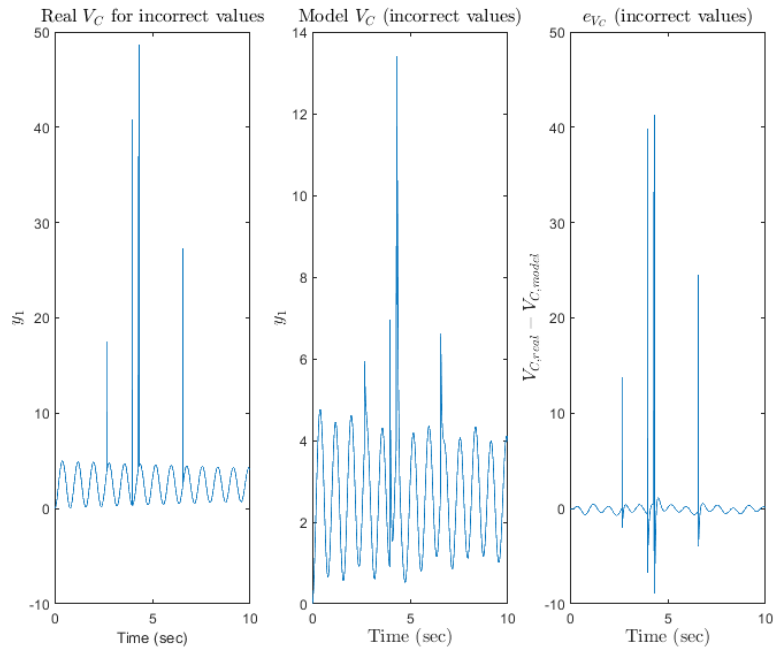
Παράμετρος	Εκτιμώμενη τιμή
1/RC1	0.059048
1/RC2	0.069429
1/RC3	-0.010427
1/LC1	62.481164
1/LC2	62.481165

Πίνακας 4: Εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων του συστήματος από τη Μεθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων

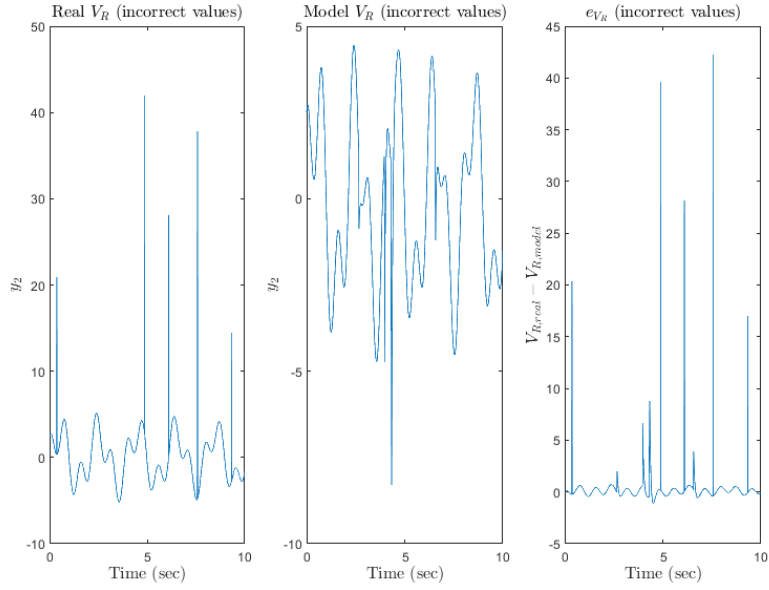
Μια σημαντική παρατήρηση, αποτελεί το γεγονός πως οι παράμετροι $\frac{1}{RC}$ και $\frac{1}{LC}$ εμφανίζονται πολλαπλές φορές στο διάνυσμα θ^* . Όπως και είναι επιθυμητό για μία ορθή εκτίμηση, φαίνεται στον πίνακα εκτίμησης των παραμέτρων πως οι κοινοί όροι θ^* δεν αποκλίνουν σημαντικά μεταξύ τους.

Σύστημα με σφάλμα μέτρησης (outliers)

Προκειμένου να παρατηρηθεί η συμπεριφορά του μοντέλου, προστέθηκαν σε 5 τυχαία σημεία του διαστήματος δειγματοληψίας τεχνητά εσφαλμένες τιμές μεγέθους $10 - 50V$. Παρακάτω τα αποτελέσματα του μοντέλου σε αυτή τη περίπτωση:



Σχήμα 6: Αποτελέσματα προσωμοίωσης του V_C για $\Lambda(s) = (s + 10)^2$



Σχήμα 7: Αποτελέσματα προσωμοίωσης του V_C για $\Lambda(s) = (s + 10)^2$ και

Παράμετρος	Εκτιμώμενη τιμή
1/RC1	1.010344
1/RC2	-0.041181
1/RC3	0.478328
1/LC1	69.500594
1/LC2	71.667768

Πίνακας 5: Εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων του συστήματος από τη Μεθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων (προσθήκη σφάλματος)

Εύκολα παρατηρούμε πως εισάγοντας αυτές τις τιμές που αποτελούν θόρυβο για το σύστημά μας, το μοντέλο παρέχει μια σημαντική απόκλιση στην εκτίμηση των παραμέτρων, καθώς αδυνατεί να παρακολουθήσει τις γρήγορες αλλαγές σε ακραίες τιμές που επιφέρει ο θόρυβος. Μάλιστα, όσο πιο μεγάλες είναι οι τιμές των outliers, τόσο χειρότερη είναι η εκτίμηση του μοντέλου στη περιοχή που εμφανίζονται.

Παρατηρώντας και τις εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων στον Πίνακα 5, βλέπουμε πως σε αντίθεση με τη προηγούμενη περίπτωση, εμφανίζουν πιο σημαντική διαφορά μεταξύ τους, γεγονός ενδεικτικό μιας λιγότερο ορθής εκτίμησης του συστήματος.

Γίνεται επομένως αντιληπτό, πως η αποτελεσματικότητα της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από την ποιότητα των δεδομένων καταγραφής που παρέχονται. Για πιο ακριβείς εκτιμήσεις, είναι σημαντικό να γίνεται προεπεξεργασία των δεδομένων και να αφαιρούνται τιμές που αποκλίνουν σημαντικά από τη πραγματική συμπεριφορά του συστήματος.