Τεχνικές Βελτιστοποίησης - 3η Εργαστηριακή Άσκηση

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

Δάφνη Νικολαΐδου ΑΕΜ:10546

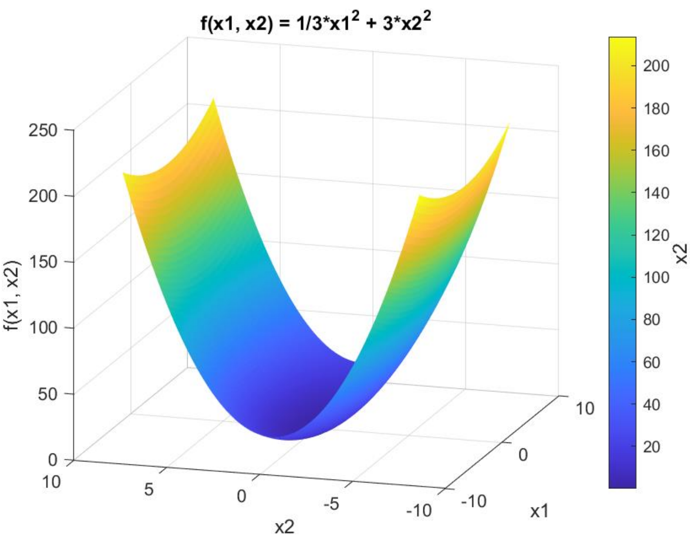
Σε αυτή την άσκηση υλοποιούνται στο MATLAB η μέθοδος μέγιστης καθόδου χωρίς περιορισμούς για 4 διαφορετικά βήματα γκ, καθώς και η μέθοδος μέγιστης καθόδου με προβολή για διαφορετικά γκ, sκ και σημεία εκκίνησης.

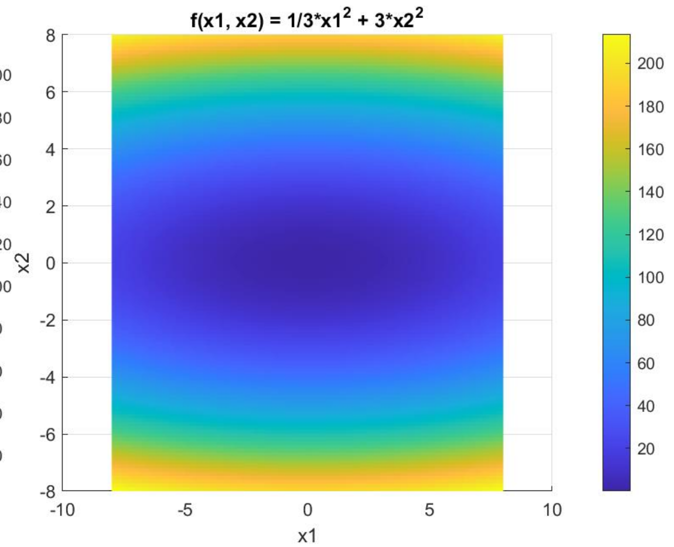
Η εφαρμογή αυτών των μεθόδων έχει, ως γνωστόν, σκοπό την ελαχιστοποίηση της δοθείσας συνάρτησης:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{3}x_1^2 + 3x_2^2,\ x = [x_1\ x_2]^T.$$

Αρχικά, ας σχεδιάσουμε την f, ώστε να έχουμε μια εικόνα της μορφής της στον τρισδιάστατο χώρο και στο επίπεδο x-y.

Το αρχείο MATLAB για την σχεδίασή της έχει όνομα fgraph.m



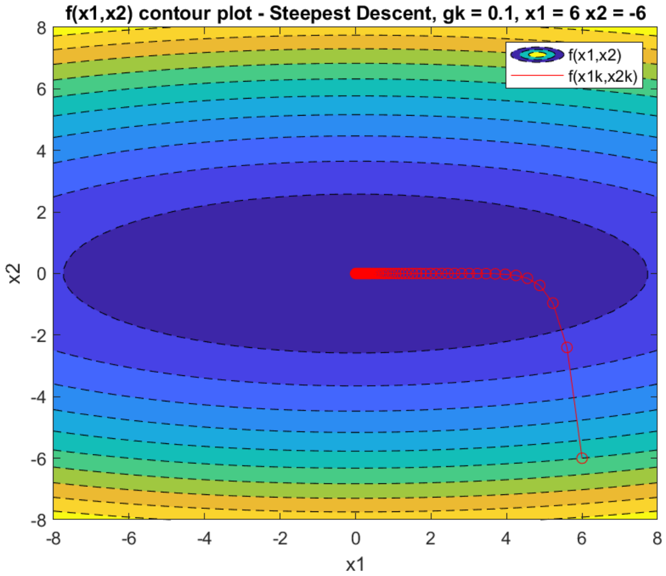


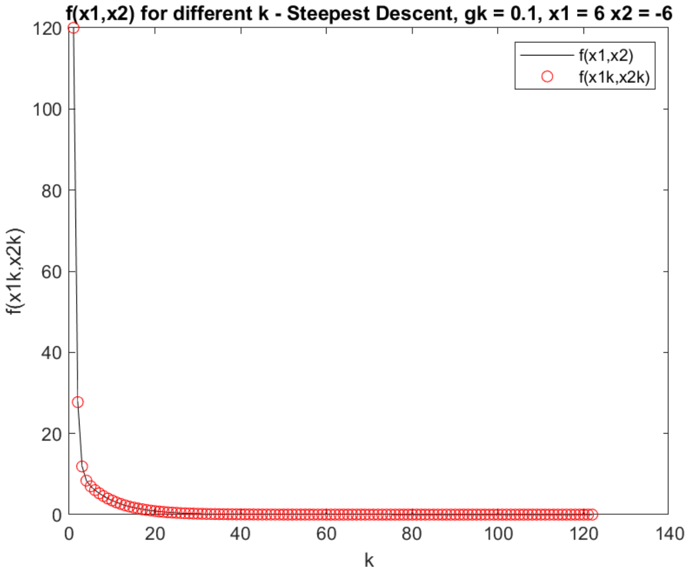
Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου

Η υλοποίηση βρίσκεται στο αρχείο με όνομα thema1.m.

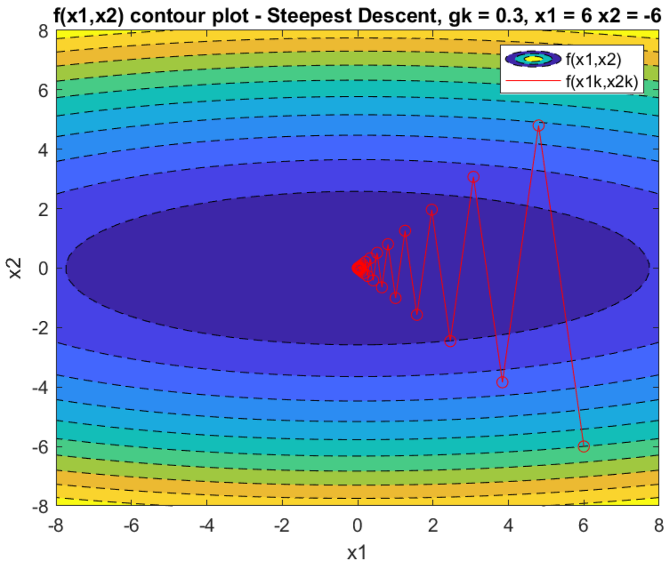
Επιλέγοντας σημείο εκκίνησης το (x1, x2) = (-6, 6), υλοποιούμε τη μέθοδο, όπως είχαμε κάνει στην Εργαστηριακή Άσκηση 2, χωρίς περιορισμούς, για ακρίβεια ε = 0.001 και για τις παρακάτω περιπτώσεις βήματος γκ:

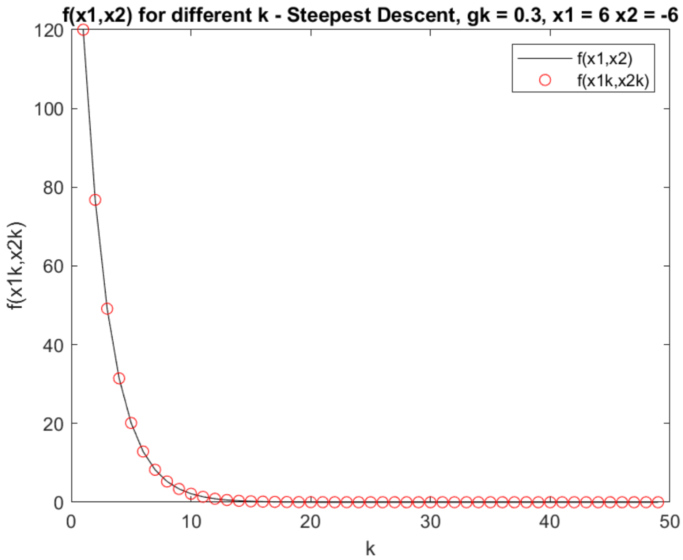
- γκ = 0.1


f(x1,x2) contour plot - Steepest Descent, gk = 0.1, x1 = 6 x2 = -6
f(x1,x2)
f(x1k,x2k)
x1
x2

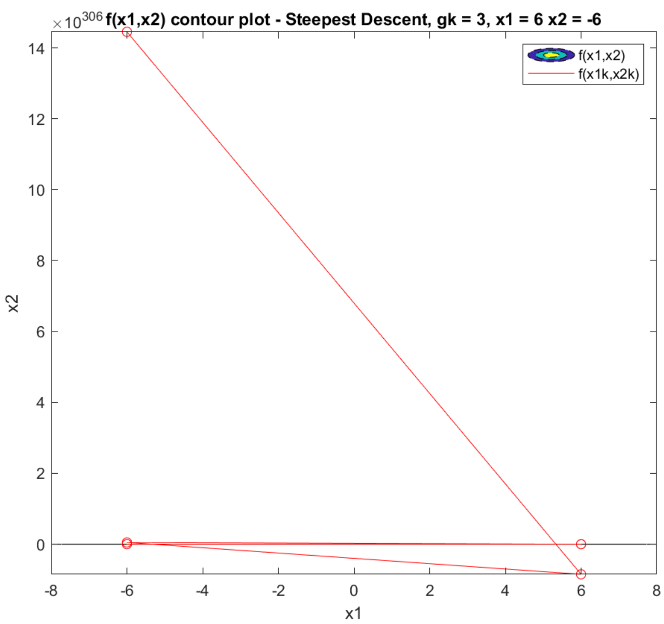

f(x1,x2) for different k - Steepest Descent, gk = 0.1, x1 = 6 x2 = -6
f(x1,x2)
f(x1k,x2k)
k
f(x1k,x2k)

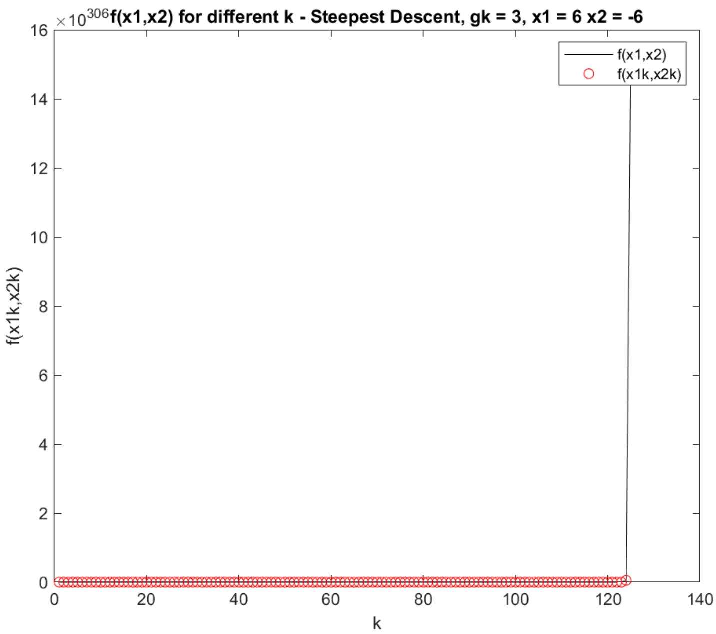
- γκ = 0.3


f(x1,x2) contour plot - Steepest Descent, gk = 0.3, x1 = 6 x2 = -6
f(x1,x2)
f(x1k,x2k)
x1
x2

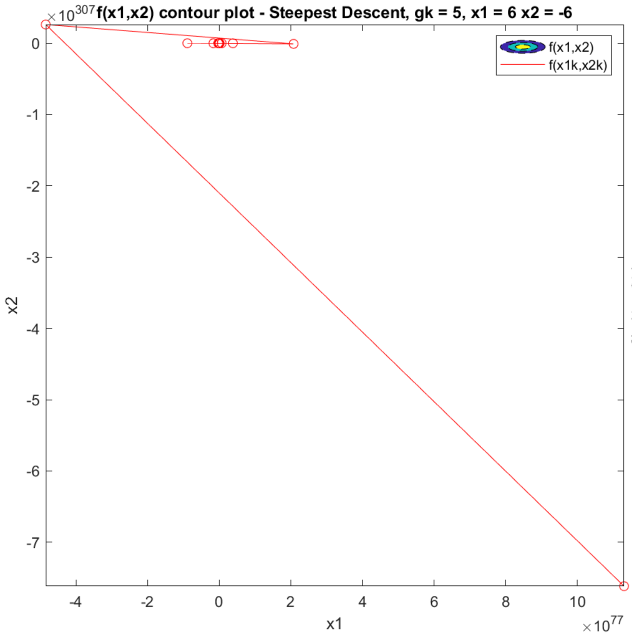

f(x1,x2) for different k - Steepest Descent, gk = 0.3, x1 = 6 x2 = -6
f(x1,x2)
f(x1k,x2k)
k
f(x1k,x2k)

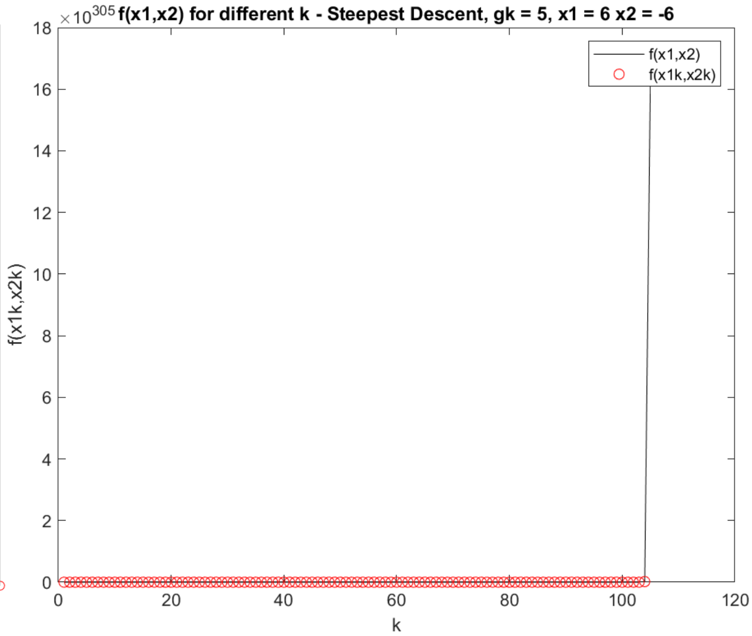
- γκ = 3


×10^306
f(x1,x2) contour plot - Steepest Descent, gk = 3, x1 = 6 x2 = -6
f(x1,x2)
f(x1k,x2k)
x1
x2


×10^306
f(x1,x2) for different k - Steepest Descent, gk = 3, x1 = 6 x2 = -6
f(x1,x2)
f(x1k,x2k)
k
f(x1k,x2k)

- γκ = 5





Διαπιστώνουμε ότι η Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου καταφέρνει στις δύο πρώτες περιπτώσεις επιλογής του βήματος γk να συγκλίνει στο ολικό ελάχιστο της f. Δεν συμβαίνει το ίδιο όμως για γκ = 3 και γκ = 5.

Μπορούμε να καταλάβουμε γιατί, εφαρμόζοντας την παρακάτω μαθηματική ανάλυση:

Έχουμε $f(x_1,x_2) = \frac{1}{3}{x_1}^2 + 3{x_2}^2$ η κλίση της οποίας είναι $\nabla f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x_1 \\ 6x_2 \end{bmatrix}$

Το βήμα της μεθόδου δίνεται από τη σχέση $X_{k+1} = X_k - \gamma_\kappa \nabla f(x_{1k}, x_{2k})$, η οποία με αντικατάσταση των

παραπάνω μας δίνει $X_{k+1} = X_k - \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\gamma_\kappa x_{1k} \\ 6\gamma_\kappa x_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{3}\gamma_\kappa \\ 1 - 6\gamma_\kappa \end{bmatrix} X_k$

Για να συγκλίνει η μέθοδος στο ελάχιστο της f πρέπει κάθε επόμενο βήμα να οδηγεί σε μικρότερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$\left|\frac{x_{1,\kappa+1}}{x_{1,\kappa}}\right| < 1 \text{ και } \left|\frac{x_{2,\kappa+1}}{x_{2,\kappa}}\right| < 1$$

Άρα,

$$\left|1 - \frac{2}{3} * \gamma_\kappa\right| < 1 \Rightarrow 0 < \gamma_\kappa < 3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; |1 - 6 * \gamma_\kappa| < 1 \Rightarrow 0 < \gamma_\kappa < \frac{1}{3}$$

Δηλαδή, να ισχύει η ανισοτική σχέση $0 < \gamma_\kappa < \frac{1}{3} = 0.333.$

Για αυτό λοιπόν, στις περιπτώσεις που γ_κ = 0.1 και γ_κ = 0.3 όπου γ_κ < 0.333 ο αλγόριθμος καταφέρνει να φτάσει στο ελάχιστο της f, ενώ στις περιπτώσεις των γ_κ = 3 και γ_κ = 5 η μέθοδος δεν συγκλίνει αφού ισχύει γ_κ > 0.333.

Αν συγκρίνουμε, τώρα την απόδοση της μεθόδου για γ_κ = 0.1 και γ_κ = 0.3, θα διαπιστώσουμε ότι ο αλγόριθμος απαιτεί πολύ περισσότερα βήματα για γ_κ = 0.1, αφού το βήμα σε αυτή τη περίπτωση είναι πολύ μικρό.

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

Ο κώδικας για τα θέματα 2,3,4 που αφορούν τη μέθοδο αυτή βρίσκεται στο αρχείο thema2_3_4.m

Στη μέθοδο μέγιστης καθόδου με προβολή έχουμε $X_{k+1} = X_k + \gamma_\kappa(\overline{X_k} - X_k)$,

όπου $\overline{X_k} = \mathrm{Prx}\,\{X_k - s_\kappa \nabla f(X_k)\}$

Αν, όμως, το $X_k - s_\kappa \nabla f(X_k)$ είναι εφικτό, τότε η μέθοδος ταυτίζεται με τη μέθοδο μέγιστης καθόδου χωρίς περιορισμούς, δηλαδή $\overline{X_k} = X_k - s_\kappa \nabla f(x_{1k}, x_{2k})$ και $X_{k+1} = X_k - \gamma_\kappa s_\kappa \nabla f(X_k)$

Σύμφωνα με τη συνθήκη που θέσαμε στο προηγούμενο ερώτημα, θα πρέπει και σε αυτή τη περίπτωση να ισχύει η ανισότητα $0 < \gamma_\kappa s_\kappa < 0.333$.

Εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις:

Θέμα 2 : σημείο εκκίνησης (5, −5), sκ = 5, γκ = 0.5 και ακρίβεια ε = 0.01

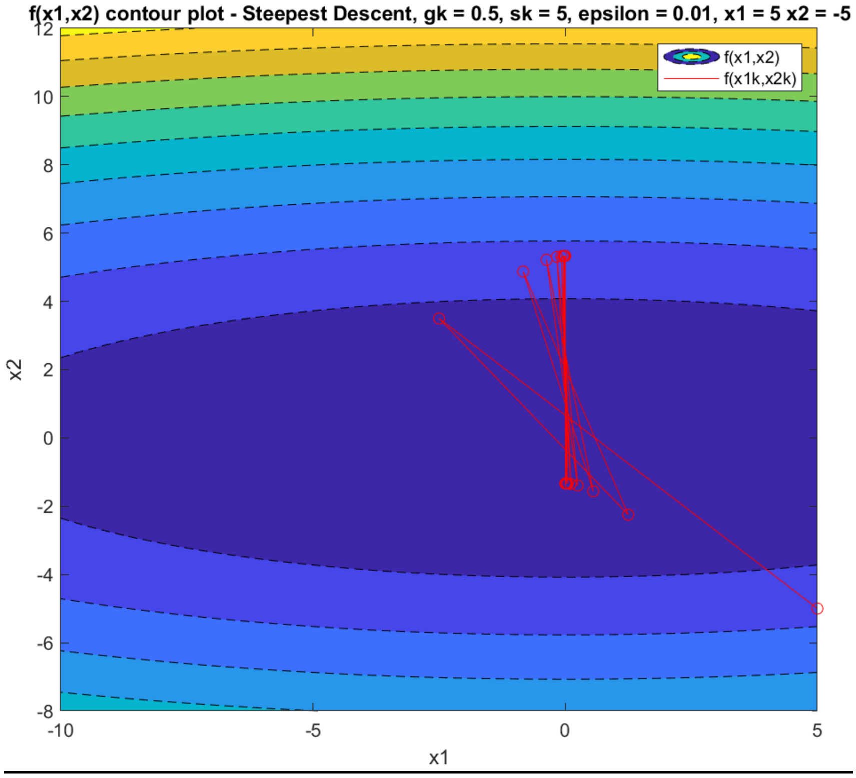
Θέμα 3 : σημείο εκκίνησης (-5, 10), sκ = 15, γκ = 0.1 και ακρίβεια ε = 0.01

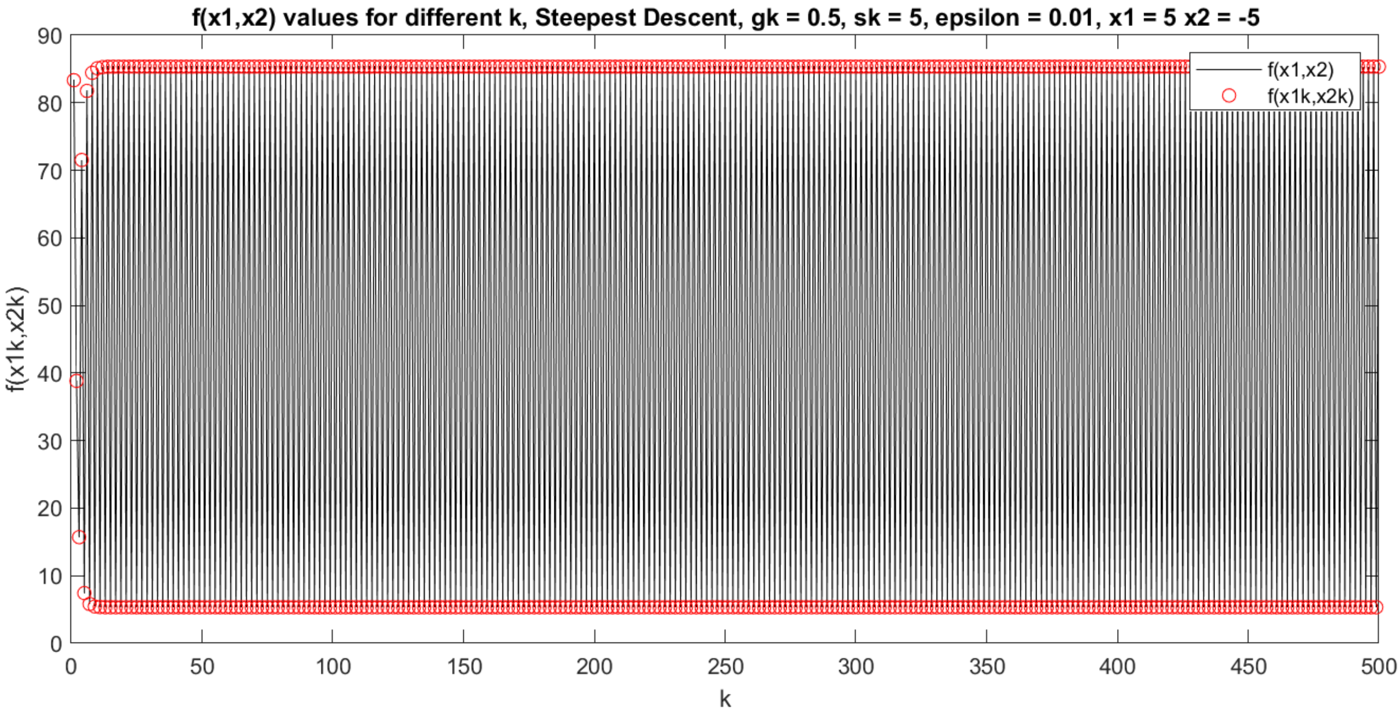
Θέμα 4 : σημείο εκκίνησης το (8, −10), sκ = 0.1, γκ = 0.2 και ακρίβεια ε = 0.01

Επιπλέον θέτουμε τον περιορισμό:

$$-10 \le X_1 \le 5 \text{ και } -8 \le X_2 \le 12$$

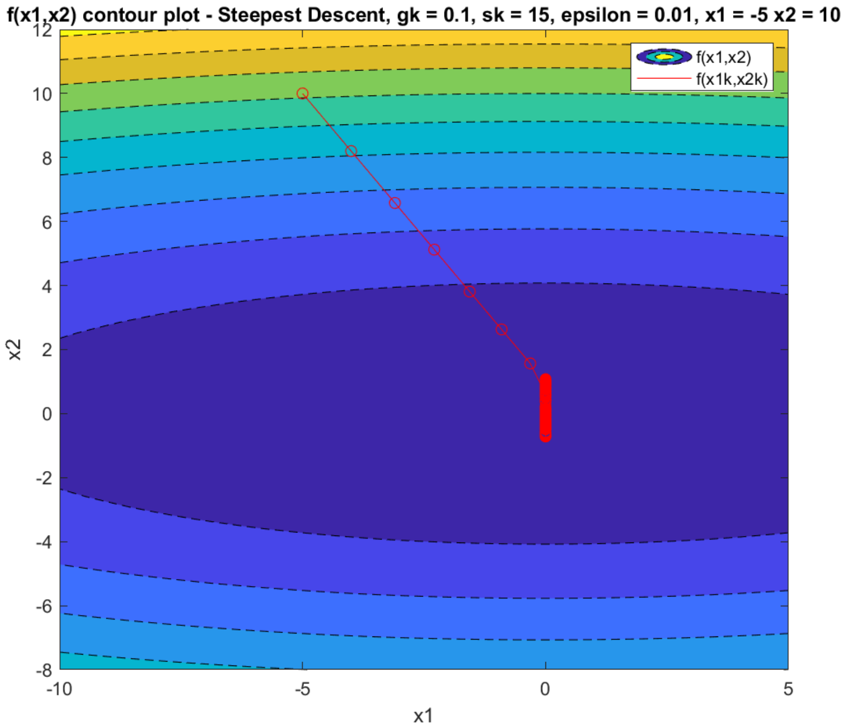
Θέμα 2

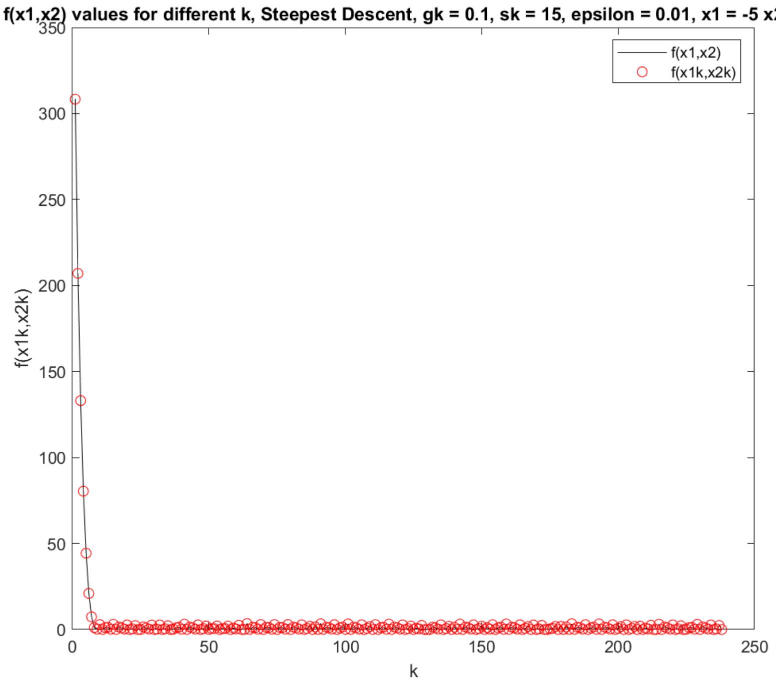




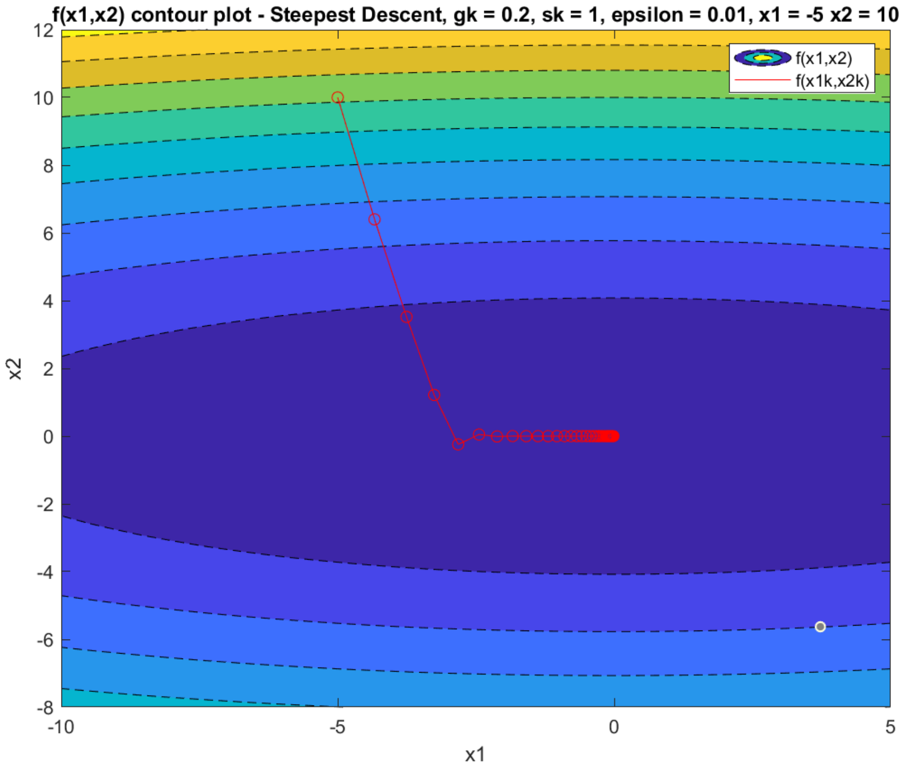
Σε αυτή τη περίπτωση, τα αρχικά σημεία βρίσκονται εντός των περιορισμών και άρα δεν χρησιμοποιείται κάποια προβολή, οπότε ο αλγόριθμος τρέχει σαν την Μέθοδο Μέγιστης Καθόδου χωρίς περιορισμούς. Όμως δεν ικανοποιείται η συνθήκη $0 < s_k\gamma_\kappa < 0.333$, αφού χρησιμοποιούμε s_κ = 5 και $\gamma_\kappa = 0{,}5$ και $s_k\gamma_\kappa = 2.5 > 0.333$. Έτσι η μέθοδος δεν συγκλίνει ποτέ και ταλαντώνεται μεταξύ δύο σημείων μέχρι να διακοπεί αναγκαστικά από τον χρήστη, όπως φαίνεται και στο παραπάνω διάγραμμα.

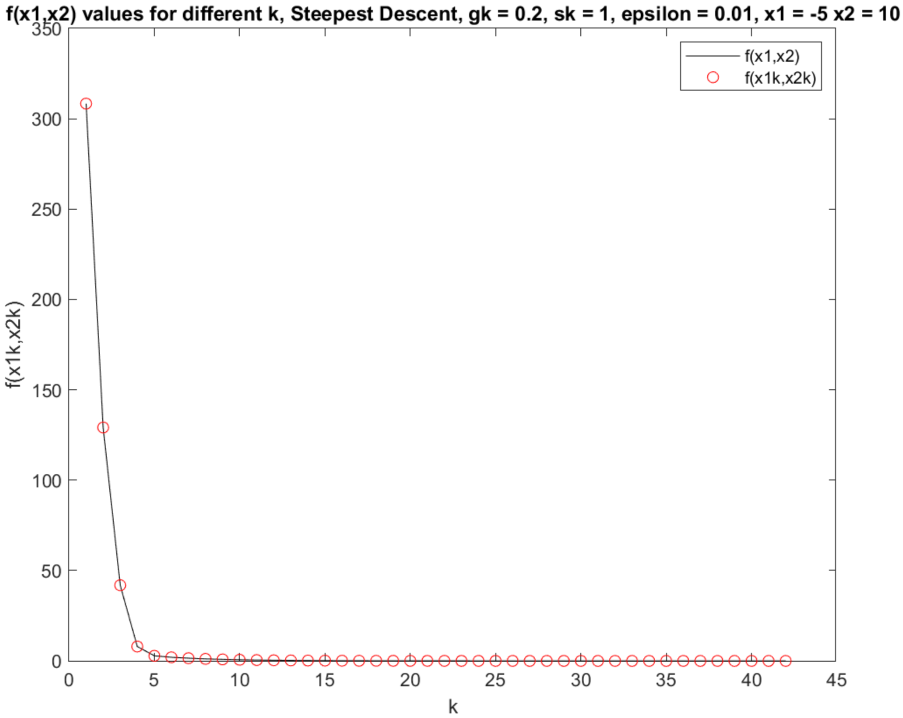
<u>Θέμα 3</u>



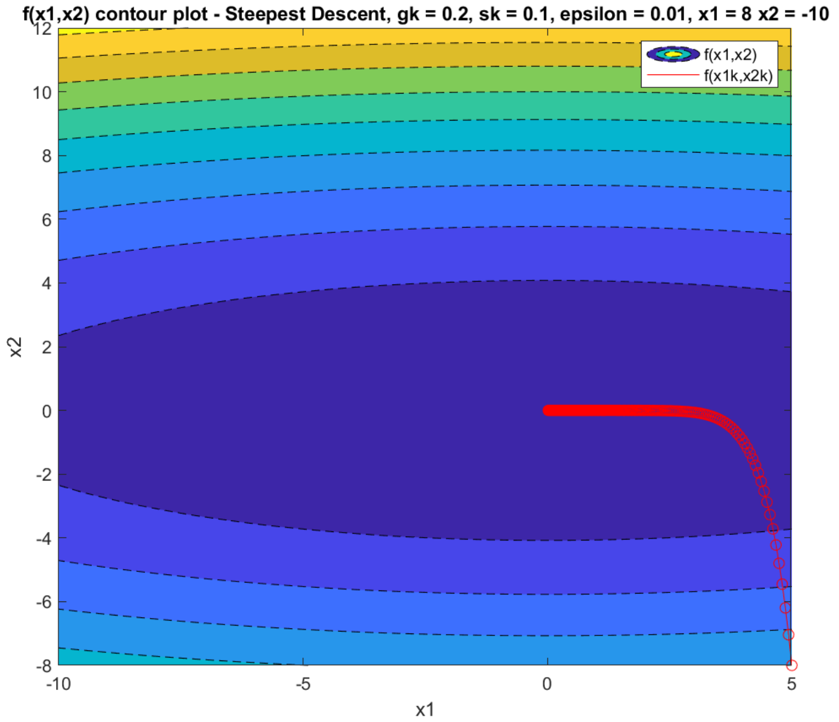


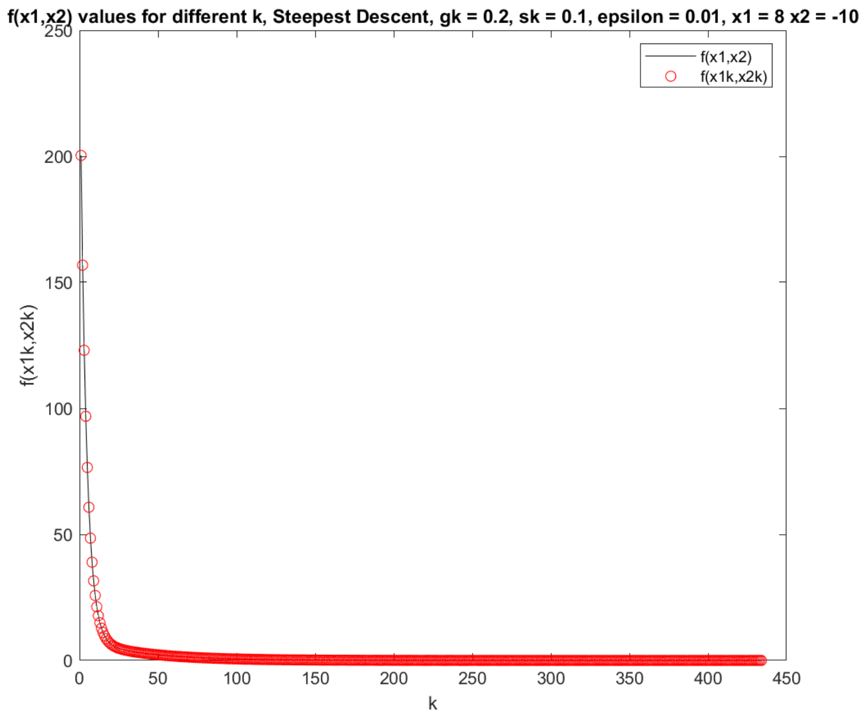
Στην δεύτερη περίπτωση, χρησιμοποιούμε sκ = 15 και $\gamma_\kappa = 0.1$, δηλαδή έχουμε $s_k * \gamma_\kappa = 1.5 > 0.333$ και δεν τηρείται η συνθήκη. Όμως, όπως βλέπουμε, αφού ταλαντωθεί για αρκετές επαναλήψεις γύρω από το ελάχιστο, ο αλγόριθμος συγκλίνει. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι τηρείται η πρώτη εκ των δύο ανισότητα ($0 < s_k * \gamma_\kappa < 3$). Η, απλά λόγω τύχης ο αλγόριθμος να “πέφτει” πάνω στο ελάχιστο σε κάποιο βήμα. Παρατηρούμε, ωστόσο, ότι η μέθοδος συγκλίνει εξαιρετικά αργά, σε σχεδόν 250 επαναλήψεις. Εάν χρησιμοποιηθεί κάποιος συνδυασμός s_k, γ_κ ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $0 < s_k * \gamma_\kappa < 3$, έστω sκ = 1 και $\gamma_\kappa = 0.2$ τότε η μέθοδος συγκλίνει πολύ πιο γρήγορα, όπως διαπιστώνουμε από τα παρακάτω διαγράμματα.


f(x1,x2) contour plot - Steepest Descent, gk = 0.2, sk = 1, epsilon = 0.01, x1 = -5 x2 = 10
f(x1,x2)
f(x1k,x2k)
x1
x2


f(x1,x2) values for different k, Steepest Descent, gk = 0.2, sk = 1, epsilon = 0.01, x1 = -5 x2 = 10
f(x1,x2)
f(x1k,x2k)
k
f(x1k,x2k)

Θέμα 4





Στην τρίτη και τελευταία περίπτωση που μελετούμε, παρατηρούμε ότι το σημείο εκκίνησης δεν είναι εφικτό. Έτσι ο αλγόριθμος παίρνει την προβολή του για να μας επαναφέρει στον χώρο των εφικτών σημείων, η οποία στη περίπτωση του σημείου (8,-10) είναι το (5,-8). Τότε η μέθοδος επιτυγχάνει να φτάσει στο ελάχιστο της f εντός των αρχικών περιορισμών, καθώς έχουμε χρησιμοποιήσει s_κ = 0.1 και $\gamma_\kappa = 0.2$ και ισχύει η συνθήκη $s_k * \gamma_\kappa = 0.02 < 0.333$. .Λόγω του πολύ μικρού βήματος ,όμως ο αλγόριθμος χρειάζεται πολύ χρόνο για να φτάσει στο ελάχιστο της f.