

# Funciones de Utilidad

Daniela Pinto Veizaga

7 de septiembre de 2019

## 1 Introducción

Lo que se presenta a continuación es una transcripción de lo abarcado por Mas-Collel en su libro *Microeconomic Theory* en las páginas 8 y 9, junto con una explicación de cada uno de los conceptos que presenta el autor (en tinta azul).

## 2 Definición

En Economía, usualmente describimos las relaciones de preferencia por medio de funciones de utilidad. Una función de utilidad  $u(x)$  asigna un valor numérico a cada elemento en  $X$ , ranqueando los elementos de  $X$  de acuerdo con las preferencias de cada individuo. Esto se define de manera precisa a continuación:

Una función  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de utilidad representando una relación de preferencia  $\succeq$  si, para cada  $x, y \in X$ ,

$$x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y).$$

La expresión anterior quiere decir que  $x$  es al menos tan bueno como  $y$  si y solo si la utilidad de  $x$  es mayor o igual que la utilidad de  $y$ .

Note que la función de utilidad que representa una relación de preferencia  $\succeq$  no es única. Para cada función estrictamente creciente  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v(x) = f(u(x))$  es una nueva función de utilidad que representa las mismas preferencias que  $u(\cdot)$ . Entonces, solo importa el orden de las alternativas.

Las propiedades de las funciones de utilidad que son indiferentes para cualquier transformación estrictamente creciente se conocen como *ordinal*. Las propiedades de *cardinalidad* son aquellas **no** preservadas bajo todas esas transformaciones. En consecuencia, **la relación de preferencia asociada con una función de utilidad es una propiedad ordinal**.

Por otra parte, los valores numéricos asociados con las alternativas en  $X$  y, por lo tanto, la magnitud de cualquier diferencia en la utilidad medida entre las alternativas, son propiedades

cardinales.

La posibilidad de representar las preferencias mediante un función de utilidad está relacionado con la suposición de racionalidad. En particular, tenemos el resultado mostrado en la siguiente Proposición.

## 2.1 Proposición

**Una relación de preferencia  $\succeq$  puede ser representada por una función de utilidad solo si es racional.**

*En teoría microeconómica, los objetivos del tomador de decisiones son representados mediante relaciones de preferencia, denotadas normalmente por  $\succeq$ . En este sentido, la hipótesis de racionalidad del individuo es consecuencia del cumplimiento de los axiomas de completitud y transitividad en la preferencias.*

**Demostración.** Para probar esta proposición, demostramos que si hay una función de utilidad que representa preferencias  $\succeq$ , entonces  $\succeq$  tiene que ser completa y transitiva.

*Si se demuestra que función de utilidad representa relaciones de preferencia débiles, entonces las relaciones de preferencia débiles deben de ser completas y transitivas (dando lugar al supuesto de racionalidad).*

**Axioma de Completitud.** Como  $u(\cdot)$  es una función de valor real definida en  $X$ , entonces para cualquier  $x, y \in X$  se cumple o  $u(x) \geq u(y)$  o  $u(y) \geq u(x)$ . Pero como  $u(\cdot)$  es una función de utilidad representando  $\succeq$ , esto implica que o  $x \succeq y$  o  $y \succeq x$ . Entonces,  $\succeq$  tiene que ser completa.

*Lo anterior, implica, analíticamente, que la función de utilidad representa las relaciones de preferencias del consumidor; la relación de preferencias del individuo representativo está **bien definido** entre dos posibles alternativas. En términos de conductuales, significa que la función de utilidad representa las relaciones de preferencias de un consumidor que tiene **capacidad** de comparar.*

**Transitividad.** Supon que  $x \succeq y$  y  $y \succeq z$ . Como  $u(\cdot)$  representa  $\succeq$ ,  $u(x) \geq u(y)$  y  $u(y) \geq u(z)$ . Entonces,  $u(x) \geq u(z)$ . Como  $u(\cdot)$  representa  $\succeq$ ,  $x \succeq z$ . En consecuencia, hemos demostrado que  $x \succeq y$  y  $y \succeq z$  implica  $x \succeq z$ , y entonces así se estableció la transitividad.

*Es decir, la función de utilidad representa la relación de preferencias del consumidor representativo que tiene capacidad de jerarquizar las cestas; es decir, el conjunto de preferencias del individuo está **ordenado**. Además, la función de utilidad representa las relaciones de preferencias un consumidor **consecuentista**. Es decir, si el individuo prefiere  $A$  a  $B$  y  $B$  a  $C$ , entonces,  $A$  va a ser más preferido a  $C$ .*

*Se ha demostrado que solo cuando se cumplen los supuestos de transitividad y completitud en las relaciones de preferencias (que dan lugar al principio de racionalidad), se pueden representar estas relaciones de preferencias en términos de una función de utilidad.*

□

## References

- [1] MAS-COLELL, ANDREU WHINSTON, MICHAEL D. GREEN, JERRY R. *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995.