Teorema 1. Idempotencia. Sean A, B, conjuntos, entonces:

$$(A \cap A) = A.$$

Proof. Demostrando la doble contención:

1. A$\cap A \subseteq A$

$$\begin{aligned} Sea \;\; x \in (A \cap A) &\Leftrightarrow x \in A \;\; y \;\; x \in A \\ &\Rightarrow x \in A. \end{aligned}$$

Dado que los conectores son del tipo "sí solo sí", se demuestra la primera y segunda contención. Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

2. A $\subseteq (A \cap A)$

$$\begin{aligned} Sea \;\; x \in A &\Rightarrow x \in A \;\; y \;\; x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap A). \end{aligned}$$

■

Teorema 2. Idempotencia. Sean A, B conjuntos, entonces:

$$(A \cup A) = A.$$

Proof. Demostrando la doble contención:

1. (A $\cup A) \subseteq A$

$$\begin{aligned} Sea \;\; x \in (A \cup A) &\Leftrightarrow (x \in A) \;\; o \;\; (x \in A) \\ &\Rightarrow x \in A. \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

2. A $\subseteq (A \cup A)$

$$\begin{aligned} Sea \;\; x \in A &\Rightarrow (x \in A \;\; o \;\; x \in A) \\ &\Leftrightarrow (x \in (A \cup A). \end{aligned}$$

∎

Teorema 3. Conmutatividad. Sean A, B conjuntos, entonces:

$$(A \cap B) = (B \cap A).$$

Proof. Demostrando la doble contención:

1. (A $\cap B) \subseteq (B \cap A)$

$$\begin{aligned} Sea \;\; x \in (A \cap B) &\Leftrightarrow (x \in A) \;\; y \;\; (x \in B) \\ &\Rightarrow (x \in B) \;\; y \;\; (x \in A) \\ &\Leftrightarrow x \in (B \cap A). \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

2. (B $\cap A) \subseteq (A \cap B)$

$$\begin{aligned} Sea \;\; x \in (B \cap A) &\Leftrightarrow x \in B \;\; y \;\; x \in A \\ &\Rightarrow x \in A \;\; y \;\; x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B). \end{aligned}$$

∎

Teorema 4. Conmutatividad. Sean A, B conjuntos, entonces:

$$(A \cup B) = (B \cup A).$$

Proof. Demostrando la doble contención:

1. (A $\cup B) \subseteq (B \cup A)$

$$\begin{aligned} Sea\ \ x \in (A \cup B) &\Leftrightarrow (x \in A)\ \ o\ \ (x \in B) \\ &\Rightarrow x \in B\ \ o\ \ x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in (B \cup A) \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

2. (B $\cup A) \subseteq (A \cup B)$

$$\begin{aligned} Sea\ \ x \in Aox \in B &\Rightarrow (x \in A\ \ o\ \ x \in A) \\ &\Leftrightarrow (x \in (A \cup A). \end{aligned}$$

$\blacksquare$