

Demostración del Teorema 1. Propiedad de la Idempotencia. Sean A y B , conjuntos, entonces:

$$(A \cap A) = A.$$

Si $A \cap A$ o A son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen (ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto). Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

$$1.1. A \cap A \subseteq A$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in (A \cap A) &\Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in A. \end{aligned}$$

Dado que los conectores son del tipo "sí solo sí", se demuestra la primera y segunda contención. Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

$$1.2. A \subseteq (A \cap A)$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in A &\Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap A). \end{aligned}$$



Demostración del Teorema 2. Propiedad de Idempotencia. Sean A y B conjuntos, entonces:

$$(A \cup A) = A.$$

Si $(A \cup A)$ o A son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen (ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto). Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

$$2.1. (A \cup A) \subseteq A$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in (A \cup A) &\Leftrightarrow (x \in A) \text{ o } (x \in A) \\ &\Leftrightarrow x \in A. \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

2.2. $A \subseteq (A \cup A)$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in A &\Leftrightarrow (x \in A \text{ o } x \in A) \\ &\Leftrightarrow (x \in (A \cup A)). \end{aligned}$$



Demostración del Teorema 3. Propiedad Conmutativa. Sean A y B conjuntos, entonces:

$$(A \cap B) = (B \cap A).$$

Si $(A \cap B)$ o $(B \cap A)$ son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen (ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto). Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

3.1. $(A \cap B) \subseteq (B \cap A)$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in (A \cap B) &\Leftrightarrow (x \in A) \text{ y } (x \in B) \\ &\Leftrightarrow (x \in B) \text{ y } (x \in A) \\ &\Leftrightarrow x \in (B \cap A). \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

3.2. $(B \cap A) \subseteq (A \cap B)$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in (B \cap A) &\Leftrightarrow x \in B \text{ y } x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B). \end{aligned}$$



Demostración del Teorema 4. Propiedad Conmutativa. Sean A, B conjuntos, entonces:

$$(A \cup B) = (B \cup A).$$

Si $(A \cup B)$ o $(B \cup A)$ son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen (ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto). Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

$$4.1. (A \cup B) \subseteq (B \cup A)$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in (A \cup B) &\Leftrightarrow (x \in A) \text{ o } (x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in B \text{ o } x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in (B \cup A) \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

$$4.2. (B \cup A) \subseteq (A \cup B)$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in (B \cup A) &\Leftrightarrow x \in B \text{ o } x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ o } x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B). \end{aligned}$$



Demostración del Teorema 5. Propiedad Asociativa. Sean A, B y C conjuntos, entonces:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

$$5.1. (A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in (A \cap B) \cap C &\Leftrightarrow [x \in (A \cap B)] \text{ y } (x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \in B \text{ y } x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \in (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

5.2. $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in [A \cap (B \cap C)] &\Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \in (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \in B \text{ y } x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ y } x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in [(A \cap B) \cap C] \end{aligned}$$



Demostración del Teorema 6. Propiedad Asociativa. Sean A , B y C conjuntos, entonces:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Si $(A \cup B) \cup C$ o $A \cup (B \cup C)$ son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen (ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto). Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

6.1. $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in (A \cup B) \cup C &\Leftrightarrow [x \in (A \cup B)] \text{ o } (x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ o } x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

6.2. $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in [A \cup (B \cup C)] &\Leftrightarrow x \in A \text{ o } x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ o } x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in [(A \cup B) \cup C] \end{aligned}$$



Demostración del Teorema 7. Propiedad Distributiva. Sean A , B y C conjuntos, entonces:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Si $A \cap (B \cup C)$ o $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen (ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto). Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

$$7.1. A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ y } (x \in B \text{ o } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ y } x \in B) \text{ o } (x \in A \text{ y } x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ o } x \in (A \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

$$7.2. (A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) &\Leftrightarrow [x \in A \cap B] \text{ o } [x \in A \cap C] \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ y } x \in B) \text{ o } (x \in A \text{ y } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ o } x \in A) \text{ y } (x \in B \text{ o } x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ y } x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cup C) \end{aligned}$$



Demostración del Teorema 8. Propiedad Distributiva. Sean A , B y C conjuntos, entonces:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Si $A \cup (B \cap C)$ o $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen (ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto). Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

$$\mathbf{8.1.} \quad A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ o } x \in (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ o } (x \in B \text{ y } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ y } (x \in A \text{ o } x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ y } x \in (A \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

$$\mathbf{8.2.} \quad (A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \text{ y } x \in (A \cup C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ y } (x \in A \text{ o } x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ y } x \in A) \text{ o } (x \in B \text{ y } x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ o } x \in (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

