Daniela Pinto Veizaga

Facultad de Economía

Universidad Nacional Autónoma de México

CURSO: MATEMÁTICAS II
SEMESTRE: FEB-MAY 2020

PROF. MARCO ANTONIO NIETO VÁZQUEZ

1. Demuestra la Regla de Fermat para máximos y mínimos locales
   (Valor 20/100)
   (Tiempo estimado de respuesta 15 minutos)

2. Demuestra el teorema de los multiplicadores de Lagrange
   (Valor 20/100)
   (Tiempo estimado de respuesta 20 minutos)

3. Demuestra que si $X \in \mathbb{R}^n$; $f: X \to \mathbb{R}$ convexa; $x_1,\ x_2, \dots\ x_n\ \in X;\ r_1,\ r_2, \dots r_n\ \in \mathbb{R}^{++}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$, entonces $f(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i)$ (Desigualdad de Jensen para funciones Convexas).
   (Valor 20/100)
   (Tiempo estimado de respuesta 15 minutos)

4. Una empresa fabrica dos artículos diferentes en cantidades (x, y). Los costos de fabricación vienen determinados por la expresión:
   $C(x, y) = x^2 + 4xy + 5y^2 + 23$
   Los precios de venta son 36 y 86 pesos respectivamente y el mercado no puede absorber más de nueve unidades en total. Sabemos que el proceso de fabricación requiere que la cantidad producida del primer artículo sea al menos el doble de la del segundo. Determinar las cantidades que se han de fabricar de cada artículo para maximizar el beneficio.
   (Valor 20/100)
   (Tiempo estimado de respuesta 20 minutos)

5. Demuestra el teorema Local-Global de Funciones Cóncavas y de Funciones Convexas.
   (Valor 20/100)
   (Tiempo estimado de respuesta 20 minutos)

1. Demuestra la Regla de Fermat para máximos y mínimos locales
(Valor 20/100)
(Tiempo estimado de respuesta 15 minutos)

Teorema: Si $c \in (a,b)$ es un mínimo o máximo local de una función derivable $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(c) = 0$.

Demostración

Si c es un mínimo local, para x cercano a c se tiene que $f(x) \geq f(c)$. Usando la regla del sandwich para límites, tenemos:

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \leq \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

$$\Rightarrow f'(c) = 0$$

Si c es un máximo local, para x cercano a c se tiene que $f(x) \leq f(c)$. Usando la regla del sandwich para límites, tenemos:

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \geq \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

$$\Rightarrow f'(c) = 0$$

2. Demuestra el teorema de los multiplicadores de Lagrange (Valor 20/100)
(Tiempo estimado de respuesta 20 minutos)

Teorema. Sean $f, g_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m < n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto tales que $f, g_1, \ldots, g_m \in C^1(A)$. Sea

$$D = \{ x \in A \mid g_i(x) = 0,\ 1 < i \leq m \}$$

Si $a \in D$ y $f(x) \geq f(a)$ $\forall\ x \in D \cap B(a,r)$, entonces existen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ no todos no nulos tales que:

$$\lambda_0 \nabla f(a) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(a) = 0 \quad \text{es decir,}$$

$$\lambda_0 D_j f(a) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i D_j g_i(a) = 0 \qquad 1 \leq j \leq n$$

Si además los vectores $\nabla g_i(a)$, $1 \leq i \leq m$, son linealmente independientes, podemos elegir $\lambda_0 = 1$

Demostración:

Sin pérdida de generalidad supongamos $a = 0$ y $f(a) = 0$. Sea $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < r$ tal que $B_{\varepsilon_1}(0) \subset A$.

$\boxed{\text{Paso 1}}$. Demostrar que $\forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ $\exists M \in \mathbb{R}$ t.q. si $x \in A$, $\|x\| = \varepsilon$, entonces

$$f(x) + \|x\|^2 + M \sum_{i=1}^{m} g_i(x)^2 > 0$$

Por contradicción: asumir que existe $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon_1)$ t.q.

$$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists x^m \in A, \ \|x^m\| = \varepsilon_0 \quad y$$

$$f(x^m) + \|x^m\|^2 + m \sum_{i=1}^{m} g_i(x^m)^2 \leq 0.$$

Sea $\{m_k\}$ una sucesión de números positivos tales que $m_k \to \infty$

Sea $\{x^{m_k}\}$ la sucesión de vectores asociada.

Tal sucesión se encuentra en $\overline{B}_{\varepsilon_0}(0)$. Extraemos una subsucesión denotada por y^k convergente a $x^* \in B_{\varepsilon_0}(0)$. Es decir, $\|x^*\| = \varepsilon_0$. Llamamos a $\{N_k\}$ la sucesión de escalares asociada a $\{y^k\}$, tenemos que:

$$f(y^k) + \|y^k\|^2 + N_k \sum_{i=1}^{m} g_i(y^k)^2 \leq 0$$

por tanto.

$$\frac{f(y^k) + \|y^k\|^2}{-N_k} \geq \sum_{i=1}^{m} g_i(y^k)^2$$

Cuando $k \to \infty$

$$f(y^k) \to f(x^*)$$

$$\|y^k\|^2 \to \varepsilon_0^2$$

$$g_i(y^k) \to g_i(x^*)$$

De dónde tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{m} g_i(x^*)^2 \leq 0 \Rightarrow g_i(x^*) = 0 \qquad 1 \leq i \leq m$$

Luego

$$x^* \in D \cap B_c(0) \Rightarrow f(x^*) \geq 0$$

Por otra parte:

$$f(y^k) + \|y^k\|^2 \leq -N_k \sum_{i=1}^{m} g_i(y^k)^2 \leq 0$$

Se tiene que:

$$f(y^k) \leq -\|y^k\|^2 = \varepsilon_0^2$$

$$f(x^*) \leq -\varepsilon_0^2 < 0$$

Lo que es una contradicción.

Paso 2

Vamos a demostrar que $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ existe $\overline{x}$ con $\|\overline{x}\| < \varepsilon$ y unos escalares $m_0, m_1 \ldots m_m \in \mathbb{R}$ $\sum_{i=1}^{m} m_i^2 = 1$ tales que:

$$m_0(D_j f(\overline{x}) + 2\overline{x}_j) + \sum_{i=1}^{m} m_i D_j g_i(\overline{x}) = 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

En efecto, $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, sea $m \in \mathbb{R}$ la del paso 1.

La función $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = f(x) + \|x\|^2 + m \sum_{i=1}^{m} g_i(x)^2$$

es continua en $\overline{B}_\varepsilon(0)$, por lo que alcanza un mínimo absoluto. Como $F(x) > 0$ en la frontera y $f(0) = 0$, entonces el mínimo se alcanza en el interior. Como F es diferenciable en $B_\varepsilon(0)$ debe ser que $DF(\overline{x}) = 0$, de donde se tiene

$$D_j f(\overline{x}) + 2\overline{x}_j + \sum_{i=1}^{m} 2m g_i(\overline{x}) D_j g_i(\overline{x}) = 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

Considere:

$$L = \left(1 + \sum_{i=1}^{m} (2m g_i(\overline{x}))^2\right)^{1/2}, \quad m_0 = 1/4$$

$$m_i = \frac{2m\, g_i(\overline{x})}{L}, \quad 1 < i \leq m$$

para concluir que $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} m_i^2 = 1$ y

$$m_0 (D_j f(\overline{x}) + 2\overline{x}_j) + \sum_{i=1}^{m} m_i D_j g_i(\overline{x}) = 0 \quad , 1 \leq j \leq m$$

Tercer paso

Sea $\{\varepsilon_k\}$ una sucesión de números positivos decrecientes a cero. De acuerdo con lo probado anteriormente, sean $\{\overline{x}^k\} \subset B_{\varepsilon_k}(0)$

y $\mu_{0,k}, \mu_{1,k}, \ldots, \mu_{m,k} \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^{m} \mu_{i,k}^{2} = 1$ y

$$\mu_{0,k} \left(D_j f(\overline{x}^k) + 2 \overline{x}_j^{\,k} \right) + \sum_{i=1}^{m} \mu_{i,k} D_j g_i (\overline{x}^k) = 0 \quad , 1 \leq j \leq n$$

3. Demuestra que si $X \in \mathbb{R}^n$; $f: X \to \mathbb{R}$ convexa; $x_1, x_2, \dots x_n \in X$; $r_1, r_2, \dots r_n \in \mathbb{R}^{++}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$, entonces $f(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i)$ (Desigualdad de Jensen para funciones Convexas).
(Valor 20/100)
(Tiempo estimado de respuesta 15 minutos)

Por inducción sobre n. Para $n=1$, la desigualdad es evidente

$$f(1x_1) \leq 1 f(x_1)$$

Supongamos que la desigualdd se cumple para $m \geq 1$. Demostraremos que se cumple para $m+1$.

Definimos $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{m+1} x_{m+1}$, con $x_1, \dots, x_{m+1} \in X$
$r_1, \dots, r_{m+1} \geq 0$ y $r_1 + \dots + r_{m+1} = 1$. Por lo que al menos un r_i es menor a 1.

Sin pérdida de generalidad digamos que es $\lambda_{m+1} < 1$. Definimos $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1 - \lambda_{m+1}$. Note que $\lambda > 0$. También definimos:

$$y = \frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda} x_m, \text{ con } \frac{\lambda_1}{\lambda} + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda} = 1.$$

Así, por hipótesis de inducción, se tiene:

$$F(y) = f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda} x_m\right) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda} f(x_m)$$

Por la convexidad de f tenemos

$$f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{m+1} x_{m+1})$$

$$= f(\lambda y + \lambda_{m+1} x_{m+1})$$

$$\leq \lambda f(y) + \lambda_{m+1} f(x_{m+1})$$

$$\leq \lambda f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \dots + \frac{\lambda_m x_m}{\lambda}\right) + \lambda_{m+1} f(x_{m+1})$$

$$\leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{m+1} f(x_{m+1})$$

$\blacksquare$

4. Una empresa fabrica dos artículos diferentes en cantidades (x, y). Los costos de fabricación vienen determinados por la expresión:
$C(x, y) = x^2 + 4xy + 5y^2 + 23$
Los precios de venta son 36 y 86 pesos respectivamente y el mercado no puede absorber más de nueve unidades en total. Sabemos que el proceso de fabricación requiere que la cantidad producida del primer artículo sea al menos el doble de la del segundo. Determinar las cantidades que se han de fabricar de cada artículo para maximizar el beneficio.
(Valor 20/100)
(Tiempo estimado de respuesta 20 minutos)

$$\Pi(x,y) = I(x,y) - C(x,y)$$
$$= 36x + 86y - (x^2 + 4xy + 5y^2 + 23)$$

problema

$$\max_{x,y} \{ 36x + 86y - x^2 - 4xy - 5y^2 - 23 \}$$

s.a.

$$x + y \leq 9$$
$$x \geq 2y$$

Que es lo mismo que:

$$\max_{x,y} \{ 36x + 86y - x^2 - 4xy - 5y^2 - 23 \}$$

s.a.

$$x + y \leq 9$$
$$2y - x \leq 0$$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = 36x + 86y - x^2 - 4xy - 5y^2 - 23 + \lambda_1(9 - x - y) + \lambda_2(x - 2y)$$

(1) $\mathcal{L}_x = 36 - 2x - 4y - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$

(2) $\mathcal{L}_y = 86 - 4x - 10y - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$

(3) $\lambda_1 (x + y - 9) = 0$

(4) $\lambda_2 (2y - x) = 0$

(5) $\lambda_1 \geq 0$

(6) $\lambda_2 \geq 0$

(7) $x + y \leq 9$

(8) $2y - x \leq 0$

$\boxed{\text{Caso 1}}$

$(\lambda_1 = 0 \; , \; \lambda_2 = 0)$

De (1) y (2)

$36 - 2x - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad 18 - 2y = x$

$86 - 4x - 10y = 0 \quad \Rightarrow \quad 86 - 4(18 - 2y) - 10y = 0$

$\Rightarrow \quad y = 7$

$\Rightarrow \quad x = 18 - 2(7) = 4$

verificamos (7) y (8)

$x + y \leq 9 \quad \Rightarrow \quad 7 + 4 \leq 9$!!!

$\boxed{\text{Caso 2. } (\lambda_1 = 0 \; , \; \lambda_2 > 0)}$

De (4) $\quad 2y - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2y$

De (1) y (2)

$$2x + 4y - 36 = 43 - 2x - 5y$$
$$x = 2y$$
$$4y + 4y - 36 = 43 - 4y - 5y$$
$$8y - 36 = 43 - 4y - 5y$$
$$17y = 79$$
$$y = 79/17$$
$$x = 158/17$$

De (1) $36 - 2\left(\frac{158}{17}\right) - 4\left(79/17\right) = -\lambda_2$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 7/6$$

De (3) $x + y - 9 = \frac{158}{17} + \frac{7}{9} - 9 > 0$ no se cumple !!!

$\boxed{\text{caso 3 } (\lambda_1 > 0 \text{ , } \lambda_2 = 0)}$

De (3) $x + y = 9$

De (1) y (2) $36 - 2x - 4y = \lambda_1 = 86 - 4x - 10y$

$$\Rightarrow \quad 2x = 50 - 6y$$
$$x = 25 - 3y$$
$$x = 25 - 3(9 - x)$$
$$x = 25 - 27 + 3x$$
$$x = -2 + 3x$$
$$x - 3x = -2$$
$$x = 1 \text{ \& } y = 8$$

De (1) $36-2x-4y=\lambda_1$

$36-2(1)-4(8)=\lambda_1$

$2=\lambda_1>0$

De (8) $2y-x\leq 0$

$16-1\leq 0$!!! no se cumple

$\boxed{\text{Caso 4 } (\lambda_1>0\ ,\ \lambda_2>0)}$

de (3) y (4) $x+y-9=0$

$2y-x=0$

$\Rightarrow$ $x=2y$

$2y+y-9=0$

$y=3 \Rightarrow x=6$

de (1) y (2)

$36-2x-4y-\lambda_1+\lambda_2=0$

$86-4x-10y-\lambda_1-2\lambda_2=0$

$36-2(6)-4(3)-\lambda_1+\lambda_2=0 \Rightarrow 12-\lambda_1+\lambda_2=0$

$86-4(6)-10(3)-\lambda_1-2\lambda_2=0 \Rightarrow 26-\lambda_1-2\lambda_2=0$

$\lambda_1=12+\lambda_2$

$26-12-\lambda_2-2\lambda_2=0$

$\lambda_2=14/3>0$

$\lambda_1=12+14/3>0$

Solución:

$(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)=(6, 3, 50/3, 14/3)$

(Tiempo estimado de respuesta 20 minutos)

5. Demuestra el teorema Local-Global de Funciones Cóncavas y de Funciones Convexas. (Valor 20/100)
(Tiempo estimado de respuesta 20 minutos)

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se dice que es convexa si

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y) \qquad (1)$$

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\forall\, \lambda$ con $0 \leq \lambda \leq 1$

Sea x un óptimo local de una función convexa f. Entonces, tenemos que $f(z) \geq f(x)$ para cada z en una vecindad U en x.

Para cada y, $z = \lambda x + (1-\lambda) y$ pertenece a U para $\lambda < 1$ suficientemente cerca a 1. y se sigue de (1) que

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y) = f(z) \geq f(x)$$

Esto implica que $f(y) \geq f(x)$ $\blacksquare$

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se dice que es cóncavo si

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq f(\lambda x + (1-\lambda) y) \qquad (1)$$

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\forall\, \lambda$ con $0 \leq \lambda \leq 1$

Sea x un óptimo local de una función convexa f. Entonces, tenemos que $f(z) \leq f(x)$ para cada z en una vecindad U en x.

Para cada y, $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ pertenece a U para $\lambda < 1$ suficientemente cerca a 1. Y se sigue de (1) que

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq f(\lambda x + (1-\lambda) y) = f(z) \leq f(x)$$

Esto implica que $f(y) \leq f(x)$ $\blacksquare$