Modelo de Romer: Externalidades del Capital (1986)

Paul Romer introdujo una función con externalidades del capital, surgen por:

- Aprendizaje en la práctica "*learning by doing*"
- Desbordamiento de conocimientos "*knowledge spillovers*"

Cuando una empresa incrementa su stock de capital a través de la inversión no sólo aumenta su producción sino también la de las empresas que la rodean.

Las empresas que invierten adquieren conocimientos y experiencias, los cuales pueden ser utilizados por otras empresas.

La función de producción

$$\textbf{(1)}\ Y_t = AK_t^{\alpha} L^{1-\alpha} \kappa_t^{\eta}$$

Donde:

Y: producción en términos agregados

A: índice de tecnología

K: capital en términos agregados

κ: externalidad

η: indica la importancia de la externalidad, entre mayor sea ésta, más importante es la externalidad

α: elasticidad producto respecto del capital

$1-\alpha$:

Si $\eta = 0$ La función de producción es tipo Cobb-Douglas

$\eta > 0$ Expresa la elasticidad producto respecto de la externalidad del capital

Para Romer la externalidad es igual al stock de capital porque la inversión de cualquier empresa ayuda a aumentar la experiencia y conocimientos. Por lo tanto:

$$\textbf{(2)}\ \kappa_t = \mathrm{K}_t$$

A. Siguiendo a Lucas, tenemos que:

Para Lucas la externalidad es igual al capital per cápita.

$$\textbf{(3)}\ \kappa_t = \mathrm{k}_t$$

Sustituimos (3) en (1)

$$Y_t = AK_t^{\alpha} L^{1-\alpha} \mathrm{k}_t^{\eta}$$

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} \quad \left(\frac{K}{L}\right)^{\eta}$$

$$Y = AK^{\alpha}K^{\eta}\, L^{1-\alpha} \quad L^{-\eta}$$

(4) Reexpresión de la función de producción $Y = AK^{\alpha+\eta} \;\; L^{1-\alpha-\eta}$

Expresando (1) en términos per cápita para incorporar en ecuación fundamental de Solow:

$$\frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}\, L^{1-\alpha}\kappa^{\eta}}{L}$$

$$\frac{Y}{L} = A\, K^{\alpha}\, L^{\cancel{1}-\alpha-\cancel{1}}$$

$$\frac{Y}{L} = A\frac{K^{\alpha}}{L^{\alpha}}\, \kappa^{\eta}$$

(4a) $y_t = A\, k^{\alpha}\kappa^{\eta}$

Suponiendo que $\mathrm{k}_t = \kappa_t$, sustituimos en 4

(5) $y_t = A\, k^{\alpha+\eta}$

Sustituimos (5) en ecuación fundamental de Solow

(6) $\dot{k}_t = s\, A\, k^{\alpha+\eta} - (n + \delta)\, k$

Tasa de crecimiento en per cápita, es decir, la ecuación (6) dividida por k.

$$\frac{\dot{k}_t}{k} = s\, A\, \frac{k^{\alpha+\eta}}{k} - (n + \delta)\, \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}}$$

$$\text{(7)}\ \frac{\dot{k}_t}{k_t} = s\ A\ \frac{k^{\alpha+\eta}}{k} - \ (n+\ \delta)$$

El comportamiento de la economía dependerá de si $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\eta})$ sea mayor, menor o igual a 1.

Caso 1 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\eta}) < \mathbf{1}$

Expresamos (7) según la condición

$$\text{(8)}\ \frac{\dot{k}_t}{k} = \frac{s\ A}{k^{1-\alpha-\eta}} - \ (n+\ \delta)$$

Cuando $k \underset{0}{\rightarrow} = \ CA \underset{\infty}{\rightarrow}$

Cuando $k \underset{\infty}{\rightarrow} = \ CA \underset{0}{\rightarrow}$

- De la ecuación (8) observamos que la curva de ahorro es igual a la que se obtenía en el modelo neoclásico
- Se observa que la Curva de ahorro y la Curva de depreciación se cruzan una vez y sólo una; por lo cual, existe un Estado estacionario único

Calculando el stock de capital de estado estacionario de la ecuación (8)

$$\dot{k}_t = 0$$

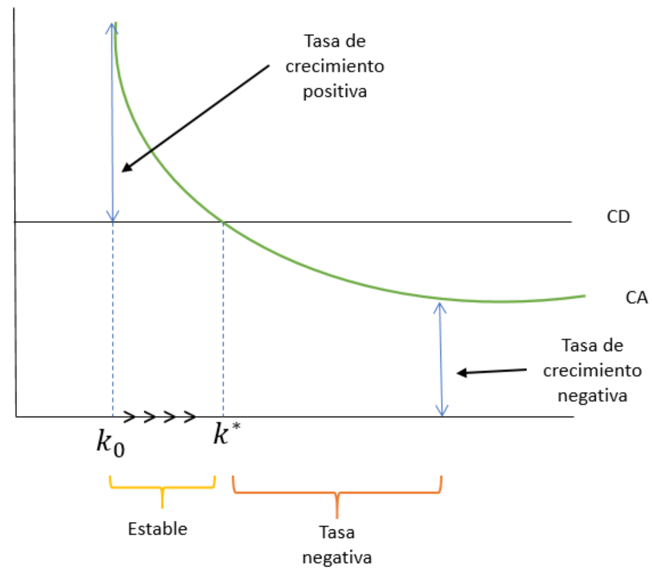
$$0 = \frac{s\ A}{\left(k^{1-\alpha-\eta}\right)} - \ (n+\ \delta)$$

$$\frac{s\ A}{\left(k^{1-\alpha-\eta}\right)} = \ (n+\ \delta)$$

$$sA = \ (n+\ \delta)\ \left(k^{1-\alpha-\eta}\right)$$

$$\frac{s\ A}{(n+\ \delta)} = \ k^{1-\alpha-\eta}$$

$$\text{(9)}\ k^* = \ \left(\frac{s\ A}{\eta+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\eta}}$$



Conclusión: la economía se comporta igual que la economía neoclásica cuando $(n + \alpha) < 1$, a pesar de la existencia de externalidades.

Caso 2 $(\alpha + \eta) = 1$ o $\eta = 1 - \alpha$

Sustituimos la condición $\alpha + \eta = 1$ en (7)

$$\frac{\dot{k}}{k} = sA\, k^{\alpha+\eta-1} - (n + \delta)$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = sA\, \cancel{k^{1-1}} - (n + \delta)$$

(10) $\gamma_k = s\,A - (n + \delta)$ Tasa de crecimiento del capital per cápita

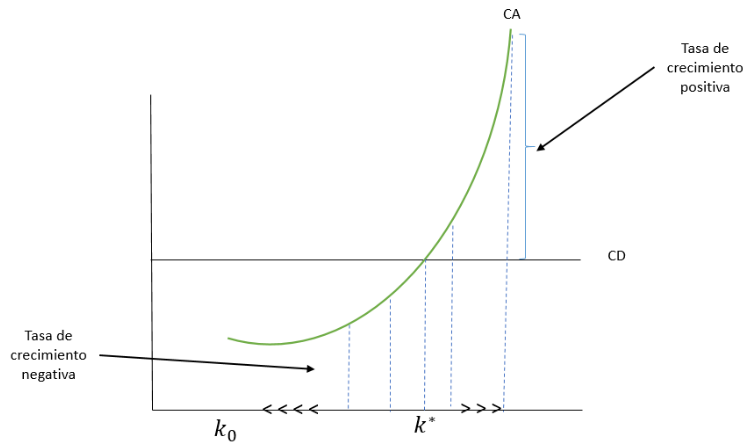
La tasa de crecimiento (10) es igual a la obtenida en el modelo AK, por lo tanto, cuando los exponentes de la función de producción de Romer suman 1 se convierte en AK.

Caso 3 $(\alpha + \eta) > 1$

Las externalidades son muy grandes

(11) $$\frac{\dot{k}}{k} = sA\, k^{\alpha+\eta-1} - (n+\delta)$$

La curva de ahorro pasa por el origen, es creciente y va hacia infinito cuando k tiende a infinito.



- El estado estacionario es inestable porque a penas por encima de k*, el crecimiento es positivo, por lo tanto, el k será mayor en el siguiente instante k; es decir, el stock se dispara hacia infinito sin cesar y la tasa de crecimiento también.
- Del lado izquierdo de k*, la tasa de crecimiento es negativa, el k disminuye; por lo tanto, la economía se aproxima a la "extinción".

Conclusión: la existencia de externalidades es una manera de argumentar que la tecnología de la economía puede tener la forma AK

El problema es que para que la tecnología se convierta en AK deben existir externalidades muy grandes.

B. Siguiendo a Romer

Partimos de la ecuación (2) $\kappa_t = \mathrm{K}_t$, la externalidad es igual al capital en términos agregados.

Sustituimos (2) en (4a)

(12) $$y_t = A\, k^{\alpha}\mathrm{K}^{\eta}$$

Sabemos que $k = \frac{K}{L}$; por lo tanto, $K = k * L$

La producción per cápita sería:

$$y_t = A\, k^{\alpha}(kL)^{\eta}$$

$$y_t = A\, k^{\alpha} k^{\eta} L^{\eta}$$

$$\textbf{(13)} \qquad y_t = A\, k^{\alpha+\eta} L^{\eta}$$

La diferencia entre las ecuaciones (5) y (13) es que la ecuación (13) aparece el término L^{η}

Sustituyendo (13) en la ecuación fundamental de Solow

$$\dot{k_t} = s\, A\, k^{\alpha+\eta} L^{\eta} - (n + \delta)\, k$$

$$\frac{\dot{k_t}}{k_t} = s\, A\, \frac{k^{\alpha+\eta}}{k} L^{\eta} - (n + \delta)\, \frac{k_t}{k_t}$$

$$\textbf{(14)} \qquad \frac{\dot{k_t}}{k_t} = s\, A\, k^{\alpha+\eta-1}\, L^{\eta} - \delta$$

- Romer supone que la tasa de crecimiento de la población $n = 0$ porque las tasas de crecimiento de la población son muy pequeñas, es decir, se supone que L es constante.
- Comparando las ecuaciones (7) y (14) se puede observar que la diferencia es que aparece el término L^{η} y la Curva de depreciación únicamente está en función de δ

Por lo cual, tenemos lo siguiente:

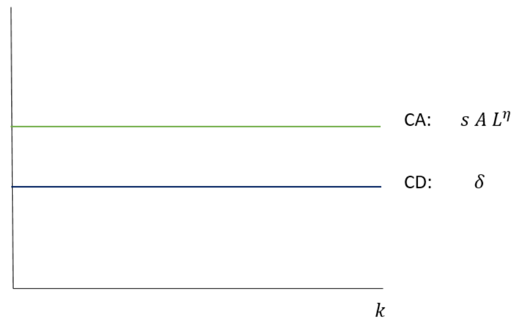
Caso 1 $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{1}$

$$\frac{\dot{k_t}}{k_t} = s\, A\, \cancel{k^{\alpha+\eta-1}}\, L^{\eta} - \delta$$

El término $k^{\alpha+\eta-1} = k^{0}$; por lo cual, se elimina de la ecuación anterior. De tal manera que queda como sigue:

$$\textbf{(15)} \qquad \frac{\dot{k_t}}{k_t} = s\, A\, L^{\eta} - \delta$$

La ecuación (15) está relacionada positivamente con el tamaño de la población



Conclusiones:

- Predicción, los países con mayor población deberían crecer más rápido que los de menor población, esta predicción e conoce como "efecto escala"
- Demuestra que un modelo con externalidades de capital es posible general crecimiento económico
- Desventaja es que arrastra el "efecto de escala"
- Con Lucas se elimina el "efecto de escala"
- Este modelo introduce los modelos de crecimiento endógeno

Caso 2 $(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\eta}) < \mathbf{1}$

En este caso existirá un stock de Estado Estacionario, ya que como se observó anteriormente siguiendo a Lucas el Caso 1 mostraba la existencia de un estado estacionario estable y único.

Sustituyendo $\dot{k} = 0$ en (14) y despejando k

Tenemos que:

$$s\,A\,k^{\alpha+\eta-1}\,L^{\eta} = \delta$$

Despejando k

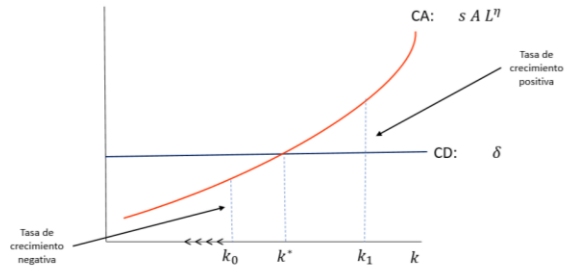
$$\frac{s\,A\;\,L^{\eta}}{\delta} = \frac{1}{k^{\alpha+\eta-1}}$$

$$\frac{s\,A\;\,L^{\eta}}{\delta} = \;k^{1-\alpha-\eta}$$

(16) $$k^{*} = \left(\frac{s\,A\;\,L^{\eta}}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\eta}}$$ Estado estacionario

- Predicción: el stock de capital de estado estacionario depende positivamente de **L,** el modelo predice que los países con mucha población deberían ser más ricos

Caso 3 $(\alpha + \eta) > 1$



- Para k_0 la economía tiende a “destruirse”, es decir no habrá capital.
- En k_1 el capital tendería a acumularse sin cesar hasta ∞
- Empíricamente ninguno se cumple.