Demostración del Teorema 1. Propiedad de la Idempotencia. Sean A y B, conjuntos, entonces:

$$(A \cap A) = A.$$

Si $A \cap A$ o A son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen (ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto). Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

1.1. A$\cap A \subseteq A$

$$\begin{aligned} Sea\ \ x \in (A \cap A) &\Leftrightarrow x \in A\ \ y\ \ x \in A \\ &\Rightarrow x \in A. \end{aligned}$$

Dado que los conectores son del tipo "sí solo sí", se demuestra la primera y segunda contención. Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

1.2. A $\subseteq (A \cap A)$

$$\begin{aligned} Sea\ \ x \in A &\Rightarrow x \in A\ \ y\ \ x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap A). \end{aligned}$$

■

Demostraciíon del Teorema 2. Propiedad de Idempotencia. Sean A y B conjuntos, entonces:

$$(A \cup A) = A.$$

Si $(A \cup A)$ o A son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen (ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto). Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

2.1. (A $\cup A) \subseteq A$

$$\begin{aligned} Sea\ \ x \in (A \cup A) &\Leftrightarrow (x \in A)\ \ o\ \ (x \in A) \\ &\Rightarrow x \in A. \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

2.2. A $\subseteq (A \cup A)$

$$\begin{aligned} Sea\ \ x \in A &\Rightarrow (x \in A\ \ o\ \ x \in A) \\ &\Leftrightarrow (x \in (A \cup A). \end{aligned}$$

■

Demostración del Teorema 3. Propiedad Conmutativa. Sean A y B conjuntos, entonces:

$$(A \cap B) = (B \cap A).$$

Si $(A \cap B)$ o $(B \cap A)$ son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen (ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto). Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

3.1. (A $\cap B) \subseteq (B \cap A)$

$$\begin{aligned} Sea\ \ x \in (A \cap B) &\Leftrightarrow (x \in A)\ \ y\ \ (x \in B) \\ &\Rightarrow (x \in B)\ \ y\ \ (x \in A) \\ &\Leftrightarrow x \in (B \cap A). \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

3.2. (B $\cap A) \subseteq (A \cap B)$

$$\begin{aligned} Sea\ \ x \in (B \cap A) &\Leftrightarrow x \in B\ \ y\ \ x \in A \\ &\Rightarrow x \in A\ \ y\ \ x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B). \end{aligned}$$

■

Demostración del Teorema 4. Propiedad Conmutativa. Sean A, B conjuntos, entonces:

$$(A \cup B) = (B \cup A).$$

Si $(A \cup B)$ o $(B \cup A)$ son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen (ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto). Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

4.1. (A $\cup B) \subseteq (B \cup A)$

$$\begin{aligned} Sea \;\; x \in (A \cup B) &\Leftrightarrow (x \in A) \;\; o \;\; (x \in B) \\ &\Rightarrow x \in B \;\; o \;\; x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in (B \cup A) \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

4.2. (B $\cup A) \subseteq (A \cup B)$

$$\begin{aligned} Sea \;\; x \in (B \cup A) &\Rightarrow x \in B \;\; o \;\; x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in A \;\; o \;\; x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B). \end{aligned}$$

■

Demostración del Teorema 5. Propiedad Asociativa. Sean A, B y C conjuntos, entonces:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

5.1. (A$\cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$

$$\begin{aligned} Sea \;\; x \in (A \cap B) \cap C &\Leftrightarrow [x \in (A \cap B)] \;\; y \;\; (x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \;\; y \;\; x \in B \;\; y \;\; x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \;\; y \;\; x \in (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

5.2. A $\cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$

$$\begin{aligned} Sea \;\; x \in [A \cap (B \cap C)] &\Leftrightarrow x \in A \;\; y \;\; x \in (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \;\; y \;\; x \in B \;\; y \;\; x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \;\; y \;\; x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in [(A \cap B) \cap C] \end{aligned}$$

■

Demostración del Teorema 6. Propiedad Asociativa. Sean A, B y C conjuntos, entonces:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Si $(A \cup B) \cup C$ o $A \cup (B \cup C)$ son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen (ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto). Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

6.1. (A$\cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

$$\begin{aligned} Sea \;\; x \in (A \cup B) \cup C &\Leftrightarrow [x \in (A \cup B)] \;\; o \;\; (x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \;\; o \;\; x \in B \;\; o \;\; x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \;\; o \;\; x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

6.2. A $\cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

$$\begin{aligned} Sea \;\; x \in [A \cup (B \cup C)] &\Leftrightarrow x \in A \;\; o \;\; x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \;\; o \;\; x \in B \;\; o \;\; x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \;\; o \;\; x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in [(A \cup B) \cup C] \end{aligned}$$

■

Demostración del Teorema 7. Propiedad Distributiva. Sean A, B y C conjuntos, entonces:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Si $A \cap (B \cup C)$ o $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen (ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto). Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

7.1. A$\cap(B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\begin{aligned} Sea\ \ x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \ \ y \ \ x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \ \ y \ \ (x \in B \ \ o \ \ x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \ \ y \ \ x \in B) \ \ o \ \ (x \in A \ \ y \ \ x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \ \ o \ \ (x \in (A \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

7.2. (A $\cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

$$\begin{aligned} Sea\ \ x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) &\Leftrightarrow [x \in A \cap B] \ \ o \ \ [x \in A \cap C] \\ &\Leftrightarrow (x \in A \ \ y \ \ x \in B) \ \ o \ \ (x \in A \ \ y \ \ x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \ \ o \ \ x \in A) \ \ y \ \ (x \in B \ \ o \ \ x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \ \ y \ \ x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

■

Demostración del Teorema 8. Propiedad Distributiva. Sean A, B y C conjuntos, entonces:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Si $A \cup (B \cap C)$ o $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen (ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto). Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

8.1. A$\cup(B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$
\begin{aligned}
Sea\ \ x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \ \ o \ \ x \in (B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \ \ o \ \ (x \in B \ \ y \ \ x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \ \ o \ \ x \in B) \ \ y \ \ (x \in A \ \ o \ \ x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \ \ y \ \ x \in (A \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

8.2. (A $\cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

$$
\begin{aligned}
Sea\ \ x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \ \ y \ \ x \in (A \cup C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \ \ o \ \ x \in B) \ \ y \ \ (x \in A \ \ o \ \ x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \ \ y \ \ x \in A) \ \ o \ \ (x \in B \ \ y \ \ x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \ \ o \ \ x \in (B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cap C)
\end{aligned}
$$

■