Demostración del Teorema 1. Sean A, B, C conjuntos, entonces:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Si $A \setminus (B \cup C)$ o $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto. Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

1. A$\setminus(B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$$\begin{aligned} Sea \;\; x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \;\; y \;\; x \notin (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \;\; y \;\; (x \notin B \;\; y \;\; x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \;\; y \;\; x \notin B) \;\; y \;\; (x \in A \;\; y \;\; x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \;\; y \;\; x \in (A \setminus C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus B). \end{aligned}$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

2. (A$\setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq \;\; A \setminus (B \cup C)$

$$\begin{aligned} Sea \;\; x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \;\; y \;\; x \in (A \setminus C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \;\; y \;\; x \notin B) \;\; y \;\; (x \in A \;\; y \;\; x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \;\; y \;\; x \in A) \;\; y \;\; (x \notin B \;\; y \;\; x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \;\; y \;\; (x \notin B \;\; y \;\; x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C). \end{aligned}$$

■

Demostración del Teorema 2. Sean A, B, C conjuntos, entonces:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Si $A \setminus (B \cup C)$ o $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ son conjuntos vacíos, entonces ambas contenciones se cumplen ya que el vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto. Para todos los demás casos, las contenciones se dan la siguiente manera:

1. A$\backslash(B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$$
\begin{aligned}
Sea \;\; x \in A \setminus (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \;\; y \;\; x \notin (B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \;\; y \;\; (x \notin B \;\; o \;\; x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \;\; y \;\; x \notin B) \;\; o \;\; (x \in A \;\; y \;\; x \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \;\; o \;\; x \in (A \setminus C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus B).
\end{aligned}
$$

Con lo que se demuestra la primera y segunda contención, dado que los conectores son del tipo "sí solo sí". Sin embargo, por cuestiones didácticas, a continuación se demostrará la segunda contención de manera explícita.

2. (A$\backslash B) \cup (A \setminus C) \subseteq \;\; A \setminus (B \cap C)$

$$
\begin{aligned}
Sea \;\; x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \;\; o \;\; x \in (A \setminus C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \;\; y \;\; x \notin B) \;\; o \;\; (x \in A \;\; y \;\; x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \;\; o \;\; x \in A) \;\; y \;\; (x \notin B \;\; o \;\; x \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \;\; y \;\; (x \notin B \;\; o \;\; x \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \;\; y \;\; x \notin (B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cap C).
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$