5.5 Bases y Dimensión

Determine si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere.

① En P_2: $-2-11x+7x^2$, $-5-x-5x^2$

Sólo hay 2 vectores, entonces no es posible generar a P_2.

② En P_2: $1-x^2$, x

Sólo hay 2 vectores; no es posible generar a P_2 con sólo dos vectores, o polinomios: se requieren mínimo $N+1$.

③ En P_2: $-3x$, $1+x^2$, x^2-5

Como hay 3 vectores, existe posibilidad de generar P_2.
probando independencia/dependencia lineal:

$$a_0x + a_1x + a_2x^2 = \alpha_1(0 - 3x + 0) + \alpha_2(1+0+x^2) + \alpha_3(-5+0+x^2)$$

en forma matricial: $A\alpha = a$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 15 + 3 = 18 \neq 0 \Rightarrow \text{son l.i.}$$

- Como generan a P_2 y son l.i $\Rightarrow$ es una base de P_2

(7) En P_2 : $10 - x - 10x^2$, $-23 + 14x + 53x^2$, $-1 + 4x + 11x^2$.

$$A\alpha = a$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -23 & -1 \\ -1 & 14 & 4 \\ -10 & 53 & 11 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

* Como hay 3 polinomios, existe posibilidad de generar a E.V. P_2.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 10 & -23 & -1 \\ -1 & 14 & 4 \\ -10 & 53 & 11 \\ 10 & -23 & -1 \\ -1 & 14 & 4 \end{vmatrix} = 10(14)(11) + 53 + (230)(4) - 140 - (530)4 - (23)(11) = 0$$

* $\det(A) = 0 \Rightarrow$ son l.d. y por tanto no generan a P_2.

(13) $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$; $\underset{v_1}{(3,-6)}$, $\underset{v_2}{(6,-4)}$, $\underset{v_3}{(-6,4)}$

Si x y y se escogen arbitrariamente y

Si

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H$, entonces $y = -2x/3$. Así, los vectores

en H tienen la forma $\begin{pmatrix} x \\ -2x/3 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ el subespacio H tiene dim(1).

v_1, v_2 y v_3 no es una base porque es un conjunto de vectores l.d.

Encuentre una base para el espacio de solución del sistema homogéneo.

(23) $x - y = 0$
$-2x + 2y = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_{2\times2}$

$\dim S \leq 2 \Rightarrow S$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2/2 + R_1 \to R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

entonces $x = y$, de manera que la solución es de forma $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

Así $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una base para S y $\dim = 1$.

(27). $-x_1 + 3x_2 - 12x_3 - 5x_4 = 0$
$7x_1 - 3x_2 + x_3 - 9x_4 = 0$

$$A_{2\times4} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -12 & -5 \\ 7 & -3 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$\dim S \leq 4 \Rightarrow S$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -12 & -5 & 0 \\ 7 & -3 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2/7 + R_1 \to R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -12 & -5 & 0 \\ 0 & 18/7 & -83/7 & -44/7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array}$$

entonces $\overset{(1)}{} \frac{18}{\cancel{7}} x_2 - \frac{83}{\cancel{7}} x_3 = -\frac{44}{\cancel{7}} x_4 \Rightarrow x_4 = \frac{18x_2 - 83x_3}{44}$

(1) en (4) $-x_1 + 3x_2 - 12x_3 - 5\left(\frac{18x_2 - 83x_3}{44}\right) = 0$

$$x_1 = \frac{42x_2}{44} - \frac{113}{44} x_3$$

entonces la solución es:

$$x_1 = \frac{42}{44}x_2 - \frac{113}{44}x_3$$

$x_2 = x_2$ (libre)

$x_3 = x_3$ (libre)

$$x_4 = \frac{18x_2}{44} - \frac{83}{44}x_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 42/44 \\ 1 \\ 0 \\ 18/44 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -113/44 \\ 0 \\ 1 \\ -83/44 \end{pmatrix}$$

espacio solución

$\dim S = 2$

5.6

Cambios de base.

escriba $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ en términos de la base dada.

① $\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ ← base

calculando matriz transición $A := C^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 1 & 0 \\ -12 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1/7 \to R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/7 & 1/7 & 0 \\ -12 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2/12 + R_1 \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{3}{7}}_{\frac{7+6}{14}} & 1/7 & 1/12 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{R_2}{+13/14}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} & \frac{14}{12 \cdot 13} \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{3R_2}{7} + R_1 \to R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/13 & -1/26 \\ 0 & 1 & 2/13 & \frac{7}{78} \end{array} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/13 & -1/26 \\ 2/13 & 7/78 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (X)_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 1/13 & -1/26 \\ 2/13 & 7/78 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3) $\beta_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$X_{\beta_1} = C(X)_{\beta_2}$

$C^{-1} = A$

calculando matriz Transición A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1/2 \to R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2/3 + R_1 \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & \underbrace{2/3 + 3/2}_{\frac{4+9}{6}} & 1/2 & 1/3 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_2}{(13/6)} \to R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/13 & 2/13 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \mp 3/2 + R_1 \to R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/13 & \frac{-3}{13} \\ 0 & 1 & 3/13 & 2/13 \end{array}\right)$$

$A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow X_{\beta_2} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Scanned with CamScanner

Escriba $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ en términos de la base dada.

9.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_3/3 \to R_3 \\ R_2/2 \to R_2}]{R_1/-5 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & (-1/5) & -1 & -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & (-2/3) & 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/5 & -1 & -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -7/15 & 1 & 1/5 & 0 & 1/3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 * \frac{7}{15} + R_3 \to R_3]{R_2 * \frac{1}{5} + R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4/5 & -1/5 & 1/10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 22/15 & 1/5 & 7/30 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 / \frac{22}{15} \to R_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4/5 & -1/5 & 1/10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/22 & 7/44 & 5/22 \end{array}\right] \xrightarrow[+R_3 * \frac{4}{5} + R_1 \to R_1]{-R_3 + R_2 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/11 & 5/22 & 2/11 \\ 0 & 1 & 0 & -3/22 & 15/44 & -5/22 \\ 0 & 0 & 1 & 3/22 & 7/44 & 5/22 \end{array}\right]$$

$$A = C^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -1 & 5/2 & 2 \\ -3/2 & 15/4 & -5/2 \\ 3/2 & 7/4 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$x_{B_2} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -1 & 5/2 & 2 \\ -3/2 & 15/4 & -5/2 \\ 3/2 & 7/4 & 5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

* Dependencia e independencia lineal

Problemas 5.4

Determinar si el conjunto de vectores dados es l.d o independiente.

6.- $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -14 - 12 \neq 0 \quad \text{son l. i}$$

decimos que u y v son l. i si:

$$\alpha u + \beta v = 0 \iff \alpha = \beta = 0$$

$$a\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2\alpha + 4\beta = 0$$
$$3\alpha + 7\beta = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ son l. i.

17.) $p_1(x) = 4 - 3x + 3x^2$

$p_2(x) = 4 - 2x - 2x^2$

$$a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) = 0 \iff \alpha_1 = a_2 = 0$$

$$(a_1 4 + a_2 4) + x(-3a_1 - 2a_2) + x^2(3a_1 - 2a_2) = 0$$

$x = 0$

$$4a_1 + 4a_2 = 0$$

$x = 1$

$$4a_1 + \cancel{4a_2} - \cancel{3a_1} - \cancel{2a_2} + \cancel{3a_1} - \cancel{2a_2} = 0$$

$$a_1 = 0$$

son l.i.

$x = 2$

$$4a_1 + \cancel{4a_2} - 6a_1 - \cancel{4a_2} + 12a_1 - 8a_2 = 0$$

$$10a_1 = 8a_2$$

* Cambio de bases.

Problemas 5.6

escriba $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ en términos de la base dada.

1) $\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

6.1 Bases ortonormales y proyecciones en R^n

$\mu_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

① $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \left(\frac{3}{9}\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\|u_1\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$

$\|\mu_2\| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$

La base ortonormal es

$$\beta = \left\{ \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}{3}, \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}}{3} \right\}$$

② $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonce, la base ortonormal es

$$\beta = \left\{ \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}}, \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} \right\}$$

6.2. De los problamos 1 al 4, encuentra la recta que se ajusta mejor a los puntos dados.

2. (1,3), (-2,4), (7,0)

$$y = \alpha + \beta x$$

con $$\beta = \frac{\Sigma xy - \frac{|\Sigma x \Sigma y|}{n}}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}}$$

$$\alpha = \bar{y} - \beta\bar{x}$$

	x	y	xy	x^2
	1	3	3	1
	-2	4	-8	4
	7	0	0	49
Σ	6	7	-5	54
media	2	7/3		

$$\beta = \frac{-5 - \frac{(6)(7)}{3}}{54 - \frac{6^2}{3}} = \frac{-19}{42}$$

$$\alpha = \frac{7}{3} - \left(\frac{-19}{42}\right)2$$

$$= \frac{7}{3} + \frac{19}{21}$$

$$y = \frac{7}{3} + \frac{19}{21} - \frac{19}{42}x$$

6.3. Espacios con producto interno y proyecciones

4. Encuentre una base ortonormal para D_2 comenzando con $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

como A y B no forman una base de D_2, entonces no es posible construir una base ortonormal a partir de ellos.

Transformaciones Lineales

7.1

De los problemas del 1 al 39 determine si la transformación de V en W dado es lineal.

7. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y+z \end{pmatrix}$

La transformación T es lineal si:

caso 1) $T(a+b) = T(a) + T(b)$
caso 2) $T(\alpha a) = \alpha T(a)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Caso 1)

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1+z_1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2+z_2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1+z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2+z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ (y_1+y_2)+(z_1+z_2) \end{pmatrix}$$ $\therefore$ se cumple condición 1.

Caso 2)

$$T\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 + \alpha z_1 \end{pmatrix}$$ iguales.

$$\alpha T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1+z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 + \alpha z_1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ T es lineal

9. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$

veamos condición 2)

a* $T\left(\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 x^2 \\ \alpha^2 y^2 \end{pmatrix}$

b * $\alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x^2 \\ \alpha y^2 \end{pmatrix}$

como a y b son distintos, entonces condición 2 no se cumple y concluimos que T no es lineal

11.

$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

1) $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

por otra parte:

$T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

son iguales

2) $T\left(\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y \\ \alpha x \end{pmatrix}$

por otra parte

$\alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \alpha y \\ \alpha x \end{pmatrix}$

Son iguales

$\therefore$ T es lineal

Transformaciones Lineales

7.2. De los problemas 1 al 14 encuentre el núcleo, imagen, rango y nulidad de la transformación lineal dada.

1) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x$

El núcleo son los vectores que se mapean en cero.

$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x = 0 \iff x = 0$. Entonces el núcleo de esta transformación es $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; x = 0 \right\}$

El rango de la imagen es el conjunto de todas las posibles imágenes de T $\quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \in \mathbb{R}$. Entonces la imagen de esta transformación es $\mathbb{R}$.

4) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ y \end{pmatrix}$

núcleo $\quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = 0$

Entonces el núcleo es

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; y = 0 \right\}$$

Imagen

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la imagen es

$$\left\{ \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

8.1

1) De los problemas 1 al 29 calcule los valores y vectores característicos de la matriz dada. Si la multiplicidad algebraica de un valor característico, calcule su multiplicidad geométrica

2. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

$$* \; p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)(1-\lambda) - 10$$

$$= -2 + 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 10$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 12$$

$$* \; \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}\right\} \text{valores propios o valores característicos}$$

* En ambos casos la multiplicidad algebraica es 1.

$\lambda = -4$ $\quad \begin{pmatrix} -2-(-4) & -2 \\ -5 & 1-(-4) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones asociado tenemos $x = y$. En este caso, el espacio característico es $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El espacio generado por $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -2 \\ -5 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

al resolver el sistema de ecuaciones asociado se tiene: $x = \frac{-2}{5} y$

En este caso, el espacio característico es:

$$\begin{pmatrix} -2/5 \; y \\ y \end{pmatrix} = y = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El espacio generado por $\begin{pmatrix} -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$