Sobre el espacio de funciones continuas, nunca derivables

Presenta:
Diego Arceo Félix

Director de tesis:
Dr. Alejandro Darío Rojas Sánchez

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Universidad Panamericana

31 de octubre 2025

Índice

Introducción

Un poco de contexto histórico

- En el siglo XIX, el análisis matemático empezaba a desarrolarse como lo que conocemos hoy en día.
- Nociones como la continuidad y la derivabilidad estaban siendo formalizadas.
- Se creía que las funciones continuas eran casi siempre derivables.
- En 1872, Weierstrass presentó el primer ejemplo explícito de una función continua pero derivable en ninguna parte.

Me aparto con temor y horror de la lamentable plaga de funciones continuas que no tienen derivadas...

— **Hermite en una carta a Stieltjes,**
20 de mayo de 1893

Algunos Ejemplos

Función W de Weierstrass

Definición 2.1.1

Sea $a \in (0,1)$ y b un entero impar tal que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. La función W de Weierstrass está dada por:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

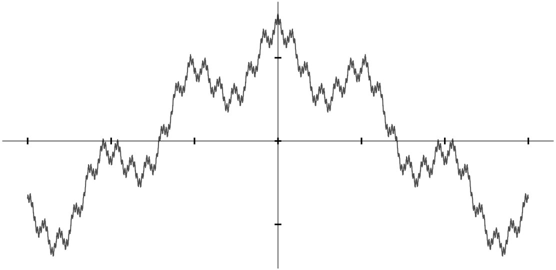

Figura: Gráfica de W para $a = 0{,}35$ y $b = 6$.

La curva de Peano

La curva P de Peano es una función continua que llena el cuadrado unitario $[0,1] \times [0,1]$. Fue introducida por Giuseppe Peano en 1890 como el primer ejemplo conocido de una curva que llena un área.

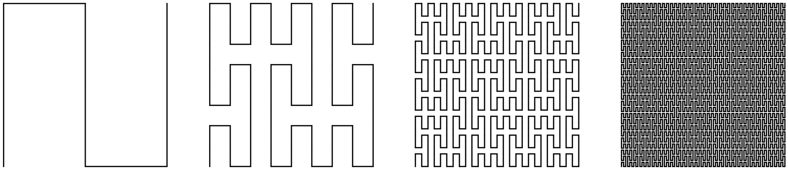

Figura: La curva de Peano también tiene una construcción geométrica iterativa, estas son sus primeras cuatro iteraciones.

Definición 2.2.1

Dado $t \in \{0, 1, 2\}$ definimos, para $n \in \mathbb{Z}$,

$$A(n,t) = \begin{cases} t, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 2 - t, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ahora, para $t \in [0, 1]$, si $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una representación en base 3 de t, entonces definimos

$$B_n(t) = \begin{cases} t_1, & \text{si } n = 1 \\ A\left(\sum_{k=1}^{n-1} t_{2k},\ t_{2n-1} \right), & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Definición 2.2.2

Definimos $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ como

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(t)}{3^n}.$$

Teorema 2.2.3

La función φ está bien definida, es decir, no depende de la representación en base 3 que tomemos de t.

Definición 2.2.4

La curva de Peano $P : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ está dada por

$$P(t) = \left(\varphi(t), 3\varphi\left(\frac{t}{3}\right)\right).$$

Teorema 2.2.5

φ es continua y nunca derivable.

Función M de Mccarthy

Introducida por John Mccarthy en 1953, la función $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un ejemplo contemporáneo de una función continua y nunca derivable.

Definición 2.3.1

Sea $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g\left(2^{2^n} x\right)}{2^n}$$

donde g está dada por $g(x) = 1 - |x|$, para $x \in [-2, 2]$, y $g(x+4) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

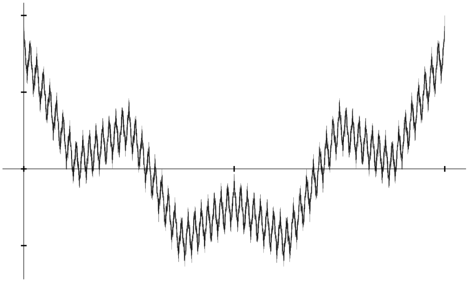

Figura: Gráfica de M en $[0, 1]$.

Funciones de Lynch

Este último ejemplo no tiene una regla de correspondencia explícita, sino que presenta una forma recursiva de construir funciones continuas y nunca derivables.

Teorema 2.4.1

Si $a, b \in \mathbb{R}$ cumplen $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces f es continua si y sólo si la gráfica de f, $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$, es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$.

Definición 2.4.2

Decimos que $P \subseteq \mathbb{R}^2$ es una *poligonal* si es la gráfica de una función recta a trozos y continua en $\pi_1[P]$, donde $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la proyección sobre la primera coordenada.

Con lo anterior en mente, podemos finalmente abordar la construcción de las funciones de Lynch. La estrategia es la siguiente: construiremos una sucesión de compactos anidados en $\mathbb{R}^2$, digamos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

(a) $\pi_1[C_n] = [0, 1]$,

(b) diam $C_n[x] < 1/n$, para todo $x \in [0, 1]$, y

(c) para cada $x \in [0, 1]$ existe $y \in [0, 1]$, con $0 < |x - y| < 1/n$ tal que si $p \in C_n[x]$ y $q \in C_n[y]$, entonces $|(p - q)/(x - y)| > n$.

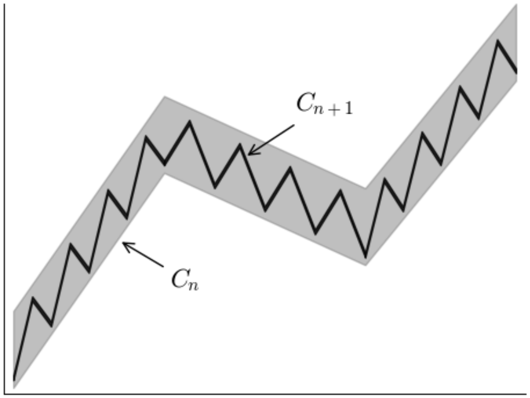

Figura: Construcción recursiva de C_n.

A partir de esto,

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

es un compacto no vacío en $\mathbb{R}^2$ que cumple que $\pi_1[C] = [0, 1]$. Además, para cada $x \in [0, 1]$, $C[x]$ es un conjunto unitario, digamos $C[x] = \{y_x\}$. Así, si definimos $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ como $f(x) = y_x$, entonces $G(f) = C$, y por tanto f es continua. Por otro lado, la condición (c) garantiza que f es nunca derivable.

¿Qué tan grande es $\mathcal{ND}[0,1]$?

Densidad

Existen algunos conceptos topológicos que nos acercan a nociones sensibles sobre el tamaño de conjuntos. En particular, en estas secciones nos enfocamos en la densidad y las categorías de Baire.

Definición 3.1.1

Decimos que un conjunto $A \subseteq V$ es *denso* en V si para todo abierto no vacío $U \subseteq V$, se cumple que $A \cap U \neq \emptyset$.

O, analíticamente,

Proposición 3.1.2

Sean (X, d) un espacio métrico y $D \subseteq X$. D es denso en X si y sólo si se cumple que, para cualesquiera $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \varnothing$.

Teorema 3.1.3

$\mathcal{ND}[0, 1]$ es denso en $\mathcal{C}[0, 1]$.

Ahora bien, la densidad de un conjunto sobre un espacio solo nos habla de cuán disperso está en este:

Ejemplo 3.1.4

Sea X un conjunto no vacío equipado con la topología

$$\tau = \{A \subseteq X \mid p \in A\} \cup \{\varnothing\}$$

donde $p \in X$ es algún punto arbitrario. Observemos que, independientemente de la cardinalidad de X, el conjunto unitario $D = \{p\}$ es denso en (X, τ).

Aún en topologías ricas en estructura podemos tener conjuntos densos pequeños:

Proposición 3.1.5

El conjunto de polinomios con coeficientes racionales es denso en $\mathcal{C}[0,1]$.

Proposición 3.1.6

$\mathcal{C}[0,1]$ es separable.

Definición 3.2.1

Sea (X, τ) un espacio topológico. Dado $A \subseteq X$, decimos que A es *denso en ninguna parte* si se cumple que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A)) = \varnothing.$$

Proposición 3.2.2

Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. El conjunto A es denso en ninguna parte si y sólo si $X \setminus \operatorname{cl}(A)$ es denso en X.

Definición 3.2.3

Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es *de primera categoría* si es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Por el contrario, decimos que A es *de segunda categoría* si no es de primera categoría.

Ejemplo 3.2.4

El conjunto de los números racionales, como subespacio de los reales con la topología euclideana, es de primera categoría.

Observación 3.2.5

Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $\{A_n \subseteq X \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de conjuntos de primera categoría, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es de primera categoría.

Lema 3.2.6

Sea (X, τ) un espacio topológico. Si toda intersección numerable de abiertos densos resulta en un conjunto denso, entonces X es de segunda categoría.

Teorema 3.2.7 (Baire)

Todo espacio métrico completo es de segunda categoría.

Teorema 3.2.8 (Banach-Marzukiewicz)

$\mathcal{ND}[0,1]$ es de segunda categoría en $\mathcal{C}[0,1]$.

A partir de ahora, V será un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$, y $\mathcal{B}(V)$ será el conjunto de los borelianos de V, esto es, la σ-álgebra generada por la topología de V.

En esta sección nos intentamos acercar a teoremas de la forma "casi todo elemento de V tiene la propiedad P". Para esto, antes debemos responder una pregunta fundamental:

¿Existe alguna medida *util* en $\mathcal{C}[0,1]$?

Observación 3.3.1

Sea μ una medida de borel en V invariante bajo traslaciones. Si V es dimensionalmente infinito y separable, entonces μ es la constante 0, o todos los abiertos no vacíos en V tienen medida infinita.

Ante la ausencia de una medida de Lebesgue en espacios de Banach infinitamente dimensionales, surge la necesidad de definir una noción alternativa de “casi todo” que nos permita trabajar en estos espacios.

Buscamos generalizar las siguientes propiedades de los conjuntos de medida cero:

(1) Los conjuntos de medida cero no tienen interior,

(2) Todo subconjunto de un conjunto con medida cero también tiene medida cero,

(3) Unión numerable de conjuntos de medida cero también tiene medida cero, y

(4) Traslaciones de conjuntos de medida cero también tienen medida cero.

Definición 3.3.2

Decimos que una medida de Borel μ es *transversal* a $S \in \mathcal{B}(V)$ si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) Existe un compacto $K \subseteq V$ tal que $0 < \mu(K) < \infty$, y

(2) $\mu(S + v) = 0$ para todo $v \in V$.

Definición 3.3.3

Decimos que $B \subseteq V$ es *tímido* si existen $S \in \mathcal{B}(V)$ tal que $B \subseteq S$, y una medida μ transversal a S. Por otro lado, decimos que B es *prevalente* si $V \setminus B$ es tímido.

Los conjuntos tímidos serán nuestra generalización de los conjuntos de de medida lebesgue cero. Observemos que, por definición, cumplen la segunda propiedad. Además,

Proposición 3.3.4

Si $S \subseteq V$ es tímido, entonces toda traslación de S también es tímida.

Proposición 3.3.5

Todo conjunto tímido tiene interior vacío.

Corolario 3.3.6

Todo conjunto prevalente es denso.

Es decir, hasta ahora sabemos que los conjuntos tímidos satisfacen las propiedades (1), (2) y (4).

Para poder demostrar la tercer propiedad, antes debemos dar una breve vuelta por resultados sobre medidas en espacios producto.

Notación 3.3.7

Sean $(X, \mathcal{A})$, y $(Y, \mathcal{B})$ dos espacios medibles. Definimos la *σ-álgebra producto* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ como la σ-álgebra generada por la colección de todos los *rectángulos medibles*, es decir,

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}).$$

Definición 3.3.8

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Decimos que μ es *σ-finita* si existe $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\mu(A_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = X.$$

Teorema 3.3.9

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dos espacios de medida. Si μ y ν son σ-finitas, entonces existe una única medida $\lambda : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$ tal que

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

para cualesquiera $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. A esta medida la llamaremos la *medida producto* y la denotaremos por $\mu \times \nu$.

Notación 3.3.10

Para cada $S \subseteq V$, denotaremos $S^+ = \{(x, y) \in V \times V \ : \ x + y \in S\}$.

Importante notar que, como la función suma de vectores es continua en $V \times V$, para todo boreliano $S \subseteq V$, S^+ es un boreliano de $V \times V$.

Definición 3.3.11

Sean μ y ν dos medidas de Borel σ-finitas. Definimos *la convolución* $\mu * \nu : \mathcal{B}(V) \to [0, \infty)$ como:

$$(\mu * \nu)(S) = (\mu \times \nu)\left(S^+\right).$$

Teorema 3.3.12 (Tonelli)

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dos espacios de medida, en donde μ y ν son medidas σ-finitas. Si $f : X \times Y \to [0, \infty)$ es medible respecto a $\mu \times \nu$, y definimos $g_x : Y \to [0, \infty)$ y $h_y : X \to [0, \infty)$ como $g_x(y) = f(x, y) = h_y(x)$, entonces:

(1) Las funciones

$$x \mapsto \int_Y g_x \, \mathrm{d}\nu \quad \text{y} \quad y \mapsto \int_X h_y \, \mathrm{d}\mu$$

son $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ medibles, respectivamente, y

(2) f cumple que

$$\int_{X \times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y g_x \, \mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu = \int_Y \left(\int_X h_y \, \mathrm{d}\mu \right) \mathrm{d}\nu.$$

Observación 3.3.13

Si μ y ν son dos medidas de Borel σ-finitas en V, entonces su convolución también es una medida de Borel en V. Además, por el segundo inciso del teorema de Tonelli, $\mu * \nu = \nu * \mu$.

Definición 3.3.14

Decimos que una medida $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ está *concentrada* en $P \in \mathcal{A}$ si se cumple que, para todo $S \in \mathcal{A}$,

$$\mu(S) = \mu(S \cap P).$$

Lema 3.3.15

Si $\mu : \mathcal{B}(V) \to [0, \infty)$ es una medida de Borel transversal a $S \in \mathcal{B}(V)$, concentrada en un compacto de medida positiva y finita, entonces para cualquier medida de Borel σ-finita $\nu : \mathcal{B}(V) \to [0, \infty)$, la convolución $\mu * \nu$ satisface que

$$(\mu * \nu)(S + z) = 0$$

para cualquier $z \in V$. Si, además, ν es finita y no nula, entonces $\mu * \nu$ es transversal a S.

Corolario 3.3.16

Unión finita de conjuntos tímidos es tímida.

Teorema 3.3.17

Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es tímido si y sólo si tiene medida de Lebesgue cero.

En otras palabras, ser "tímido" en $\mathbb{R}^n$ no es una generalización burda de "tener medida Lebesgue cero", sino que es una definición equivalente. A partir de este teorema podemos generalizar a los conjuntos de medida de Lebesgue plena:

Definición 3.3.18

Si $A \subseteq V$ es prevalente, entonces decimos que *casi todo elemento de V pertenece a A*.

Existe un último teorema que debemos enunciar antes de demostrar la cuarta propiedad de los conjuntos tímidos. Éste, generalizando al teorema 3.3.9, nos habla sobre medidas en espacios producto de tamaño arbitario.

Definición 3.3.19

Sean $\mathcal{A} = \{(X_\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ una familia de espacios medibles y $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Decimos que $E \subseteq X$ es un *conjunto elemental* si existe $F \subseteq I$ finito tal que

$$E = \bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[B_\alpha],$$

en donde $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ es la proyección sobre X_α, y $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$, para cada $\alpha \in I$. A la familia de todos estos conjuntos la denotaremos por

$$\mathcal{E}(X) = \{E \subseteq X \mid E \text{ es elemental}\}.$$

Teorema 3.3.20

Sea $\mathcal{A} = \{(X_\alpha, \mathcal{B}_\alpha, \mu_\alpha) \,|\, \alpha \in I\}$ una familia de espacios de medida, con $\mu_\alpha(X_\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in I$, y $\mathcal{B}_\alpha$ la σ-álgebra de Borel en X_α. Llamemos

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha.$$

Entonces existe una única medida $\mu : \sigma(\mathcal{E}(X)) \to [0, 1]$ tal que, para todo

$$E = \bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}[B_\alpha] \in \mathcal{E}(X),$$

se cumple que

$$\mu(E) = \prod_{\alpha \in F} \mu_\alpha(B_\alpha).$$

A la medida de este teorema la llamaremos la *medida producto de* X.

Proposición 3.3.21

Sea $\mathcal{A} = \{(X_\alpha, , \mathcal{B}_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ una familia de espacios medibles, donde $\mathcal{B}_\alpha$ es la σ-álgebra de Borel de X_α, y cada X_α es un espacio segundo numerable. Si $|I| \leq \omega$, y

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

está dotado de la topología producto, entonces la σ-álgebra de Borel en X coincide con la σ-álgebra generada por los conjuntos elementales, es decir,

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{E}(X)).$$

Y con esto, finalmente podemos demostrar la última propiedad de los conjuntos tímidos:

Teorema 3.3.22

Unión numerable de conjuntos tímidos es tímido.

Prevalencia de $\mathcal{ND}[0,1]$

Sondas

Hasta ahora, demostrar que un conjunto es prevalente presenta un verdadero reto. En esta sección nos enfocamos en encontrar alguna herramienta que nos facilite esta tarea.

Definición 4.1.1

Sean P un subespacio dimensionalmente finito de V y $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base para P. Si λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y $p_A : P \to \mathbb{R}^n$ es la función determinada mediante

$$p_A(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = (a_1, \ldots, a_n),$$

entonces $\mu_A : \mathcal{B}(V) \to \mathbb{R}$ es la función dada por

$$\mu_A(S) = \lambda\left(p_A[S \cap P]\right).$$

Veamos algunas propiedades de μ_A:

Proposición 4.1.2

Si P es un subespacio dimensionalmente finito de V y A es una base para P, entonces μ_A es una medida de Borel en V. Además, si B es una base para P, $S \in \mathcal{B}(V)$ y $\mu_A(S) = 0$, entonces $\mu_B(S) = 0$.

Definición 4.1.3

Sean P un subespacio finito-dimensional de V y T un subconjunto de V. Decimos que P es una *sonda* de T si existen una base A para P y un conjunto $B \in \mathcal{B}(V)$ con $V \setminus T \subseteq B$ de tal manera que μ_A está concentrada en P y es transversal a B.

O, analíticamente,

Observación 4.1.4

Una sonda para un conjunto boreliano T es un subespacio de dimensión finita P que está casi completamente contenido en cualquier traslación de T (respecto a alguna medida de Lebesgue concentrada en P).

Teorema 4.1.5

Si $T \subseteq V$ tiene una sonda entonces es prevalente.

Prevalencia de $\mathcal{ND}[0,1]$

En 1936 Stephan Mazurkiewicz probó que $\mathcal{ND}[0,1]$ no es un subconjunto de Borel de $\mathcal{C}[0,1]$. Por esta razón, trabajaremos con otro conjunto un poco más fácil de manejar:

Definición 4.2.1

Sea $M > 0$. Decimos que una función $f \in \mathcal{C}[a, b]$ es *M-Lipschitz en* $x \in [a, b]$ si para todo $y \in [a, b]$ se cumple que:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Por otro lado, definimos $\mathcal{NL}_M[a, b]$ como el conjunto de todas las funciones nunca M-Lipschitz en $[a, b]$, es decir,

$$\mathcal{NL}_M[a, b] = \{f \in \mathcal{C}[a, b] : \forall x \in [a, b],\ f \text{ no es } M\text{-Lpischitz en } x\}.$$

Finalmente, definimos

$$\mathcal{NL}[a, b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{NL}_n[a, b].$$

Proposición 4.2.2

Si $M > 0$, entonces

(1) $\mathcal{N}\mathcal{L}_M[a, b]$ es abierto en $\mathcal{C}[a, b]$,

(2) $\mathcal{N}\mathcal{L}[a, b]$ es un conjunto boreliano, y

(3) $\mathcal{N}\mathcal{L}[a, b] \subseteq \mathcal{N}\mathcal{D}[a, b]$.

Considerando el tercer inciso de la proposición anterior, una pregunta que surge naturalmente es la siguiente:

¿Existen funciones continuas y no derivables que sean Lipschitz en algún punto de su dominio?

O, más aún,

¿Existen funciones Lipschitz continuas que no sean derivables?

Teorema 4.2.3 (Rademacher)

Si $U \subseteq \mathbb{R}$ es abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ es Lipschitz continua, entonces es derivable en casi todo punto de U.

Ahora bien, un ejemplo de una función $T \in \mathcal{ND}[0,1]$ que es Lipschitz en algunos puntos es la siguiente:

Teorema 4.2.4

La función $T : [0,1] \to \mathbb{R}$ de Waerden-Takagi, definida como

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{dist}(2^n x, \mathbb{Z})}{2^n},$$

es continua, nunca derivable, y Lipschitz en algunos puntos, es decir,

$$T \in \mathcal{ND}[0,1] \setminus \mathcal{NL}[0,1].$$

Con las preguntas anteriores fuera nuestro camino, podemos finalmente abordar la prevalencia de $\mathcal{ND}[0,1]$.

Lema 4.2.5

Sean $m \in \mathbb{N}$ e $I \subseteq [0,1]$ un intervalo cerrado de longitud 2^{-m}. Entonces, para cualesquiera $f : I \to \mathbb{R}$ continua, $\theta \in [0, 2\pi)$, y $j \in \mathbb{N}$,

$$\sup f[I] - \text{ínf} f[I] \geq 2^m \pi \int_I f(x) \cos(2^{m+j}\pi x + \theta)\, \mathrm{d}x.$$

Lema 4.2.6

Si $g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ están dadas por

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(2^k \pi x) \quad \text{y} \quad h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin(2^k \pi x),$$

entonces son continuas y, además, existe $c > 0$ tal que, para todo intervalo cerrado $I \subset [0,1]$ de longitud $\varepsilon \leq 1/2$, y para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\sup_{x \in I} (\alpha g(x) + \beta h(x)) - \inf_{x \in I} (\alpha g(x) + \beta h(x)) \geq \frac{c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\log^2(\varepsilon)}.$$

Teorema 4.2.7

Existen $g, h \in \mathcal{C}[0,1]$ tales que, para toda función $f \in \mathcal{C}[0,1]$,

$$S_f = \{(a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (f + ag + bh) \notin \mathcal{NL}[0,1]\}$$

tiene medida de Lebesgue cero.

Teorema 4.2.8

Casi toda función continua en $[0,1]$ es nunca derivable.

Por el lema anterior $P = \langle g,\, h\rangle$ es una sonda de $\mathcal{NL}[0,1]$. Como $\mathcal{NL}[0,1] \subseteq \mathcal{ND}[0,1]$, entonces $\mathcal{ND}[0,1]$ es prevalente.