Sobre el espacio de funciones continuas, nunca derivables

Presenta:
Diego Arceo Félix

Director de tesis:
Dr. Alejandro Darío Rojas Sánchez

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Universidad Panamericana

31 de octubre 2025

Índice

Introducción

Un poco de contexto histórico

- En el siglo XIX, el análisis matemático empezaba a desarrolarse como lo que conocemos hoy en día.
- Nociones como la continuidad y la derivabilidad estaban siendo formalizadas.
- Se creía que las funciones continuas eran casi siempre derivables.
- En 1872, Weierstrass presentó el primer ejemplo explícito de una función continua pero derivable en ninguna parte.

Me aparto con temor y horror de la lamentable plaga de funciones continuas que no tienen derivadas...

— **Hermite en una carta a Stieltjes,**
20 de mayo de 1893

Algunos Ejemplos

Función W de Weierstrass

Teorema

Proposición

Definición

Observación

Lema

Función W de Weierstrass

Definición

Sea $a \in (0,1)$ y b un entero impar tal que $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. La función W de Weierstrass está dada por:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

Función W de Weierstrass

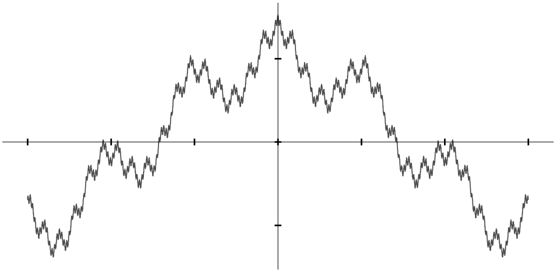

Figura: Gráfica de W para $a = 0{,}35$ y $b = 6$.

La curva de Peano

La curva P de Peano es una función continua que llena el cuadrado unitario $[0,1] \times [0,1]$. Fue introducida por Giuseppe Peano en 1890 como el primer ejemplo conocido de una curva que llena un área.

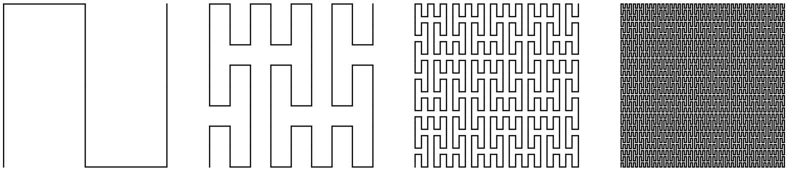

Figura: La curva de Peano también tiene una construcción geométrica iterativa, estas son sus primeras cuatro iteraciones.

Definición

Dado $t \in \{0, 1, 2\}$ definimos, para $n \in \mathbb{Z}$,

$$A(n,t) = \begin{cases} t, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 2 - t, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ahora, para $t \in [0, 1]$, si $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una representación en base 3 de t, entonces definimos

$$B_n(t) = \begin{cases} t_1, & \text{si } n = 1 \\ A\left(\sum_{k=1}^{n-1} t_{2k},\ t_{2n-1}\right), & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

La curva de Peano

Definición

Definimos $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ como

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(t)}{3^n}.$$

Teorema

La función φ está bien definida, es decir, no depende de la representación en base 3 que tomemos de t.

La curva de Peano

Definición

La curva de Peano $P : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ está dada por

$$P(t) = \left(\varphi(t), 3\varphi\left(\frac{t}{3}\right)\right).$$

Teorema

φ es continua en es continua y nunca derivable.

Función M de Mccarthy

Introducida por John Mccarthy en 1953, la función $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un ejemplo contemporáneo de una función continua y nunca derivable.

Definición

Sea $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g\left(2^{2^n} x\right)}{2^n}$$

donde g está dada por $g(x) = 1 - |x|$, para $x \in [-2, 2]$, y $g(x+4) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Función M de Mccarthy

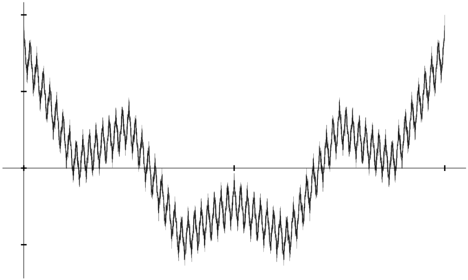

Figura: Gráfica de M en $[0, 1]$.

Funciones de Lynch

Este último ejemplo no tiene una regla de correspondencia explícita, sino que presenta una forma recursiva de construir funciones continuas y nunca derivables.

Teorema

Si $a, b \in \mathbb{R}$ cumplen $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces f es continua si y sólo si la gráfica de f, $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$, es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$.

Funciones de Lynch

Definición

Decimos que $P \subseteq \mathbb{R}^2$ es una *poligonal* si es la gráfica de una función recta a trozos y continua en $\pi_1[P]$, donde $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la proyección sobre la primera coordenada.

Funciones de Lynch

Con lo anterior en mente, podemos finalmente abordar la construcción de las funciones de Lynch. La estrategia es la siguiente: construiremos una sucesión de compactos anidados en $\mathbb{R}^2$, digamos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

(a) $\pi_1[C_n] = [0, 1]$,

(b) diam $C_n[x] < 1/n$, para todo $x \in [0, 1]$, y

(c) para cada $x \in [0, 1]$ existe $y \in [0, 1]$, con $0 < |x - y| < 1/n$ tal que si $p \in C_n[x]$ y $q \in C_n[y]$, entonces $|(p - q)/(x - y)| > n$.

¿Qué tan grande es $\mathcal{ND}[0,1]$?

Topológicamente...

Existen algunos conceptos topológicos que nos acercan a nociones sensibles sobre el tamaño de conjuntos. En particular, en esta sección nos enfocamos en la densidad y la categoría de Baire.

Topológicamente...

Definición

Decimos que un conjunto $A \subseteq V$ es *denso* en V si para todo abierto no vacío $U \subseteq V$, se cumple que $A \cap U \neq \emptyset$.

O, analíticamente,

Proposición

Sean (X, d) un espacio métrico y $D \subseteq X$. D es denso en X si y sólo si se cumple que, para cualesquiera $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \varnothing$.

Topológicamente...

Teorema

$\mathcal{ND}[0,1]$ es denso en $C[0,1]$.

Topológicamente...

Ahora bien, la densidad de un conjunto sobre un espacio solo nos habla de cuán disperso está en este:

Ejemplo

Sea X un conjunto no vacío equipado con la topología

$$\tau = \{A \subseteq X \mid p \in A\} \cup \{\varnothing\}$$

donde $p \in X$ es algún punto arbitrario. Observemos que, independientemente de la cardinalidad de X, el conjunto unitario $D = \{p\}$ es denso en (X, τ).

Topológicamente...

Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico. Dado $A \subseteq X$, decimos que A es *denso en ninguna parte* si se cumple que

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A)) = \varnothing.$$

Proposición

Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. El conjunto A es denso en ninguna parte si y sólo si $X \setminus \operatorname{cl}(A)$ es denso en X.

Topológicamente...

Definición

Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es *de primera categoría* si es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Por el contrario, decimos que A es *de segunda categoría* si no es de primera categoría.

Topológicamente...

Ejemplo

El conjunto de los números racionales, como subespacio de los reales con la topología euclideana, es de primera categoría.

Observación

Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $\{A_n \subseteq X \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de conjuntos de primera categoría, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es de primera categoría.

Topológicamente...

Lema

Sea (X, τ) un espacio topológico. Si toda intersección numerable de abiertos densos resulta en un conjunto denso, entonces X es de segunda categoría.

Teorema (Baire)

Todo espacio métrico completo es de segunda categoría.

Topológicamente...

Teorema (Banach-Marzukiewicz)

$\mathcal{ND}[0,1]$ es de segunda categoría en $\mathcal{C}[0,1]$.

Prevalencia y timidez

En esta sección nos intentamos acercar a teoremas de la forma "casi todo elemento de V tiene la propiedad P". Para esto, antes debemos responder una pregunta fundamental:

¿Existe alguna medida util en $C[0,1]$?

Observación

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio de Banach dimensionalmente infinito y separable. Si μ es una medida de borel en V invariante bajo traslaciones, entonces μ es la constante 0, o todos los abiertos no vacíos en V tienen medida infinita.

Prevalencia y timidez

Prevalencia de $\mathcal{ND}[0,1]$

Sondas

Hasta ahora, demostrar que un conjunto es prevalente presenta un verdadero reto. En esta sección nos enfocamos en encontrar alguna herramienta que nos facilite esta tarea.

Sondas

Definición

Sean P un subespacio finito-dimensional de V y T un subconjunto de V. Decimos que P es una *sonda* de T si existen una base A para P y un conjunto $B \in \mathcal{B}(V)$ con $V \setminus T \subseteq B$ de tal manera que μ_A está concentrada en P y es transversal a B.

O, analíticamente,

Proposición

Sondas

Teorema

Si $T \subseteq V$ tiene una sonda entonces es prevalente.

Sondas

Observación

Una sonda para un conjunto boreliano T es un subespacio de dimensión finita P que está casi completamente contenido en cualquier traslación de T (respecto a alguna medida de Lebesgue concentrada en P).

Prevalencia de $\mathcal{ND}[0,1]$