

# Sobre el espacio de funciones continuas, nunca derivables

Presenta:  
Diego Arceo Félix

Director de tesis:  
Dr. Alejandro Darío Rojas Sánchez

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas  
Universidad Panamericana

31 de octubre 2025

# Índice

## 1. Introducción

## 2. Algunos Ejemplos

- 2.1 Función  $W$  de Weierstrass
- 2.2 La curva de Peano
- 2.3 Función  $M$  de McCarthy
- 2.4 Funciones de Lynch

## 3. ¿Qué tan grande es $\mathcal{ND}[0, 1]$ ?

- 3.1 Densidad
- 3.2 Categorías de Baire
- 3.3 Prevalencia y timidez

## 4. Prevalencia de $\mathcal{ND}[0, 1]$

- 4.1 Sondas
- 4.2 Prevalencia de  $\mathcal{ND}[0, 1]$

# Introducción

## Un poco de contexto histórico

- En el siglo XIX, el análisis matemático empezaba a desarrollarse como lo que conocemos hoy en día.
- Nociones como la continuidad y la derivabilidad estaban siendo formalizadas.
- Se creía que las funciones continuas eran casi siempre derivables.
- En 1872, Weierstrass presentó el primer ejemplo explícito de una función continua pero derivable en ninguna parte.

*Me aparto con temor y horror de la lamentable plaga de funciones continuas que no tienen derivadas...*

— **Hermite en una carta a Stieltjes,  
20 de mayo de 1893**

# Algunos Ejemplos

Teorema

Proposición

Definición

Observación

Corolario

Lema

Notación

# Función $W$ de Weierstrass

## Definición

Sea  $a \in (0, 1)$  y  $b$  un entero impar tal que  $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ . La función  $W$  de Weierstrass está dada por:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

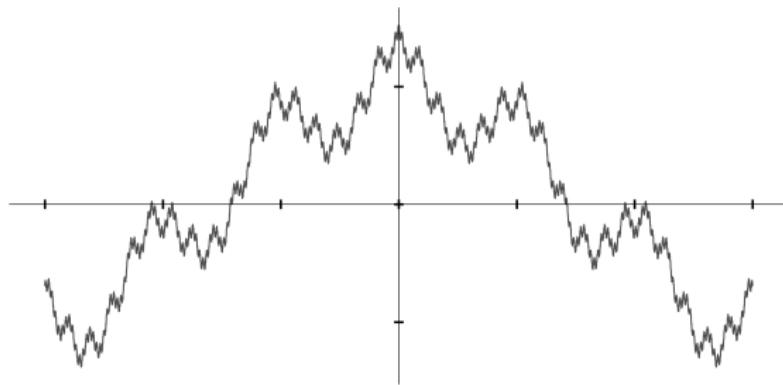


Figura: Gráfica de  $W$  para  $a = 0,35$  y  $b = 6$ .

# La curva de Peano

La curva  $P$  de Peano es una función continua que llena el cuadrado unitario  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Fue introducida por Giuseppe Peano en 1890 como el primer ejemplo conocido de una curva que llena un área.

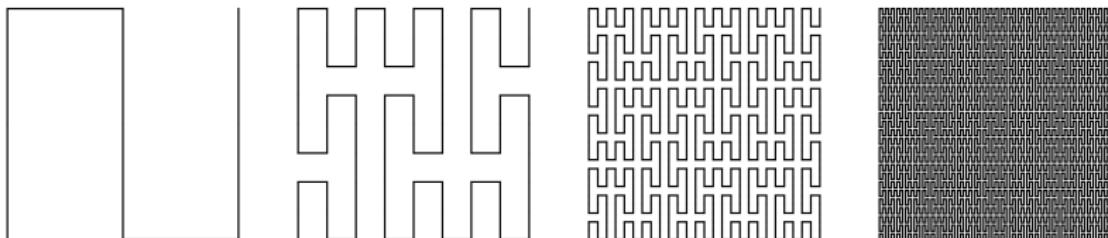


Figura: La curva de Peano también tiene una construcción geométrica iterativa, estas son sus primeras cuatro iteraciones.

## Definición

Dado  $t \in \{0, 1, 2\}$  definimos, para  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$A(n, t) = \begin{cases} t, & \text{si } n \text{ es par,} \\ 2 - t, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ahora, para  $t \in [0, 1]$ , si  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una representación en base 3 de  $t$ , entonces definimos

$$B_n(t) = \begin{cases} t_1, & \text{si } n = 1 \\ A\left(\sum_{k=1}^{n-1} t_{2k}, t_{2n-1}\right), & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

## Definición

Definimos  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  como

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(t)}{3^n}.$$

## Teorema

La función  $\varphi$  está bien definida, es decir, no depende de la representación en base 3 que tomemos de  $t$ .

## Definición

La curva de Peano  $P : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  está dada por

$$P(t) = \left( \varphi(t), 3\varphi\left(\frac{t}{3}\right) \right).$$

## Teorema

$\varphi$  es continua en es continua y nunca derivable.

# Función $M$ de McCarthy

Introducida por John McCarthy en 1953, la función  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un ejemplo contemporáneo de una función continua y nunca derivable.

## Definición

Sea  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(2^{2^n}x)}{2^n}$$

donde  $g$  está dada por  $g(x) = 1 - |x|$ , para  $x \in [-2, 2]$ , y  $g(x+4) = g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

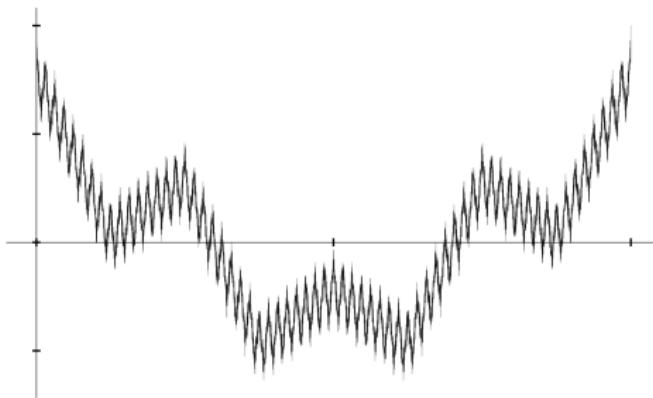


Figura: Gráfica de  $M$  en  $[0, 1]$ .

# Funciones de Lynch

Este último ejemplo no tiene una regla de correspondencia explícita, sino que presenta una forma recursiva de construir funciones continuas y nunca derivables.

## Teorema

Si  $a, b \in \mathbb{R}$  cumplen  $a < b$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $f$  es continua si y sólo si la gráfica de  $f$ ,  $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ , es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$ .

## Definición

Decimos que  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  es una *poligonal* si es la gráfica de una función recta a trozos y continua en  $\pi_1[P]$ , donde  $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es la proyección sobre la primera coordenada.

Con lo anterior en mente, podemos finalmente abordar la construcción de las funciones de Lynch. La estrategia es la siguiente: construiremos una sucesión de compactos anidados en  $\mathbb{R}^2$ , digamos  $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tales que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

- (a)  $\pi_1[C_n] = [0, 1]$ ,
- (b)  $\text{diam } C_n[x] < 1/n$ , para todo  $x \in [0, 1]$ , y
- (c) para cada  $x \in [0, 1]$  existe  $y \in [0, 1]$ , con  $0 < |x - y| < 1/n$  tal que si  $p \in C_n[x]$  y  $q \in C_n[y]$ , entonces  $|{(p - q)/(x - y)}| > n$ .

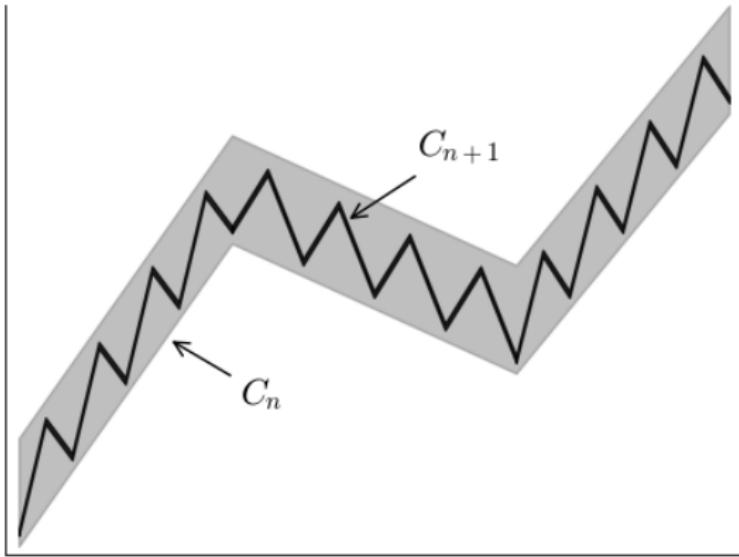


Figura: Construcción recursiva de  $C_n$ .

A partir de esto,

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

es un compacto no vacío en  $\mathbb{R}^2$  que cumple que  $\pi_1[C] = [0, 1]$ . Además, para cada  $x \in [0, 1]$ ,  $C[x]$  es un conjunto unitario, digamos  $C[x] = \{y_x\}$ . Así, si definimos  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $f(x) = y_x$ , entonces  $G(f) = C$ , y por tanto  $f$  es continua. Por otro lado, la condición (c) garantiza que  $f$  es nunca derivable.

¿Qué tan grande es  
 $\mathcal{ND}[0, 1]$ ?

# Densidad

Existen algunos conceptos topológicos que nos acercan a nociones sensibles sobre el tamaño de conjuntos. En particular, en estas secciones nos enfocamos en la densidad y las categorías de Baire.

## Definición

Decimos que un conjunto  $A \subseteq V$  es *denso* en  $V$  si para todo abierto no vacío  $U \subseteq V$ , se cumple que  $A \cap U \neq \emptyset$ .

O, analíticamente,

## Proposición

Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $D \subseteq X$ .  $D$  es denso en  $X$  si y sólo si se cumple que, para cualesquiera  $x \in X$  y  $\varepsilon > 0$ ,  $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$ .

## Teorema

$\mathcal{N}\mathcal{D}[0, 1]$  es denso en  $C[0, 1]$ .

Ahora bien, la densidad de un conjunto sobre un espacio solo nos habla de cuán disperso está en este:

### Ejemplo

Sea  $X$  un conjunto no vacío equipado con la topología

$$\tau = \{A \subseteq X \mid p \in A\} \cup \{\emptyset\}$$

donde  $p \in X$  es algún punto arbitrario. Observemos que, independientemente de la cardinalidad de  $X$ , el conjunto unitario  $D = \{p\}$  es denso en  $(X, \tau)$ .

# Categorías de Baire

## Definición

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Dado  $A \subseteq X$ , decimos que  $A$  es *denso en ninguna parte* si se cumple que

$$\text{int}(\text{cl}(A)) = \emptyset.$$

## Proposición

Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . El conjunto  $A$  es denso en ninguna parte si y sólo si  $X \setminus \text{cl}(A)$  es denso en  $X$ .

## Definición

Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Decimos que  $A$  es *de primera categoría* si es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Por el contrario, decimos que  $A$  es *de segunda categoría* si no es de primera categoría.

## Ejemplo

El conjunto de los números racionales, como subespacio de los reales con la topología euclídea, es de primera categoría.

## Observación

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Si  $\{A_n \subseteq X \mid n \in \mathbb{N}\}$  es una sucesión de conjuntos de primera categoría, entonces  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  es de primera categoría.

## Lema

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Si toda intersección numerable de abiertos densos resulta en un conjunto denso, entonces  $X$  es de segunda categoría.

## Teorema (Baire)

Todo espacio métrico completo es de segunda categoría.

## Teorema (Banach-Marzukiewicz)

$\mathcal{ND}[0, 1]$  es de segunda categoría en  $\mathcal{C}[0, 1]$ .

## Prevalencia y timidez

A partir de ahora,  $V$  será un espacio de Banach sobre  $\mathbb{R}$ , y  $\mathcal{B}(V)$  será el conjunto de los boreelianos de  $V$ , esto es, la  $\sigma$ -álgebra generada por la topología de  $V$ .

En esta sección nos intentamos acercar a teoremas de la forma “casi todo elemento de  $V$  tiene la propiedad  $P$ ”. Para esto, antes debemos responder una pregunta fundamental:

¿Existe alguna medida *util* en  $C[0, 1]$ ?

### Observación

Sea  $\mu$  una medida de borel en  $V$  invariante bajo traslaciones. Si  $V$  es dimensionalmente infinito y separable, entonces  $\mu$  es la constante 0, o todos los abiertos no vacíos en  $V$  tienen medida infinita.

Ante la ausencia de una medida de Lebesgue en espacios de Banach infinitamente dimensionales, surge la necesidad de definir una noción alternativa de “casi todo” que nos permita trabajar en estos espacios.

Buscamos generalizar las siguientes propiedades de los conjuntos de medida cero:

- (1) Los conjuntos de medida cero no tienen interior,
- (2) Todo subconjunto de un conjunto con medida cero también tiene medida cero,
- (3) Unión numerable de conjuntos de medida cero también tiene medida cero, y
- (4) Traslaciones de conjuntos de medida cero también tienen medida cero.

## Definición

Decimos que una medida de Borel  $\mu$  es *transversal* a  $S \in \mathcal{B}(V)$  si se cumplen las siguientes condiciones:

- (1) Existe un compacto  $K \subseteq V$  tal que  $0 < \mu(K) < \infty$ , y
- (2)  $\mu(S + v) = 0$  para todo  $v \in V$ .

## Definición

Decimos que  $B \subseteq V$  es *tímido* si existen  $S \in \mathcal{B}(V)$  tal que  $B \subseteq S$ , y una medida  $\mu$  transversal a  $S$ . Por otro lado, decimos que  $B$  es *prevaleciente* si  $V \setminus B$  es tímido.

Los conjuntos tímidos serán nuestra generalización de los conjuntos de medida lebesgue cero. Observemos que, por definición, cumplen la segunda propiedad. Además,

### Proposición

Si  $S \subseteq V$  es tímido, entonces toda traslación de  $S$  también es tímida.

## Proposición

Todo conjunto tímido tiene interior vacío.

## Corolario

Todo conjunto prevalente es denso.

Para poder demostrar la tercer propiedad, antes debemos dar una breve vuelta por resultados sobre medidas en espacios producto.

### Notación

Sean  $(X, \mathcal{A})$ , y  $(Y, \mathcal{B})$  dos espacios medibles. Definimos la  $\sigma$ -álgebra producto  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  como la  $\sigma$ -álgebra generada por la colección de todos los *rectángulos medibles*, es decir,

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

## Definición

Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida. Decimos que  $\mu$  es  *$\sigma$ -finita* si existe  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$  tal que  $\mu(A_i) < \infty$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , y

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = X.$$

## Teorema

Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , y  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  dos espacios de medida. Si  $\mu$  y  $\nu$  son  $\sigma$ -finitas, entonces existe una única medida  $\lambda : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  tal que

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

para cualesquiera  $A \in \mathcal{A}$  y  $B \in \mathcal{B}$ . A esta medida la llamaremos la *medida producto* y la denotaremos por  $\mu \times \nu$ .

## Teorema (Tonelli)

Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , y  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  dos espacios de medida, en donde  $\mu$  y  $\nu$  son medidas  $\sigma$ -finitas. Si  $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty)$  es medible respecto a  $\mu \times \nu$ , y definimos  $g_x : Y \rightarrow [0, \infty)$  y  $h_y : X \rightarrow [0, \infty)$  como  $g_x(y) = f(x, y) = h_y(x)$ , entonces:

(1) Las funciones

$$x \mapsto \int_Y g_x \, d\nu \quad y \quad y \mapsto \int_X h_y \, d\mu$$

son  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  medibles, respectivamente, y

(2)  $f$  cumple que

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \left( \int_Y g_x \, d\nu \right) \, d\mu = \int_Y \left( \int_X h_y \, d\mu \right) \, d\nu.$$

## Notación

Para cada  $S \subseteq V$ , denotaremos  $S^+ = \{(x, y) \in V \times V : x + y \in S\}$ .

Importante notar que, como la función suma de vectores es continua en  $V \times V$ , para todo boreliano  $S \subseteq V$ ,  $S^+$  es un boreliano de  $V \times V$ .

## Definición

Sean  $\mu$  y  $\nu$  dos medidas de Borel  $\sigma$ -finitas. Definimos *la convolución*  $\mu * \nu : \mathcal{B}(V) \rightarrow [0, \infty)$  como:

$$(\mu * \nu)(S) = (\mu \times \nu)(S^+).$$

## Observación

Si  $\mu$  y  $\nu$  son dos medidas de Borel  $\sigma$ -finitas en  $V$ , entonces su convolución también es una medida de Borel en  $V$ . Además, por el segundo inciso del teorema de Tonelli,  $\mu * \nu = \nu * \mu$ .

## Definición

Decimos que una medida  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  está *concentrada* en  $P \in \mathcal{A}$  si se cumple que, para todo  $S \in \mathcal{A}$ ,

$$\mu(S) = \mu(S \cap P).$$

## Lema

Si  $\mu : \mathcal{B}(V) \rightarrow [0, \infty)$  es una medida de Borel transversal a  $S \in \mathcal{B}(V)$ , concentrada en un compacto de medida positiva y finita, entonces para cualquier medida de Borel  $\sigma$ -finita  $\nu : \mathcal{B}(V) \rightarrow [0, \infty)$ , la convolución  $\mu * \nu$  satisface que

$$(\mu * \nu)(S + z) = 0$$

para cualquier  $z \in V$ . Si, además,  $\nu$  es finita y no nula, entonces  $\mu * \nu$  es transversal a  $S$ .

## Corolario

Unión finita de conjuntos tímidos es tímida.

## Teorema

Un conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  es tímido si y sólo si tiene medida de Lebesgue cero.

En otras palabras, ser “tímido” en  $\mathbb{R}^n$  no es una generalización burda de “tener medida Lebesgue cero”, sino que es una definición equivalente. A partir de este teorema podemos generalizar a los conjuntos de medida de Lebesgue plena:

## Definición

Si  $A \subseteq V$  es prevalente, entonces decimos que *casi todo elemento de  $V$  pertenece a  $A$ .*

Prevalencia de  $\mathcal{ND}[0, 1]$

## Sondas

Hasta ahora, demostrar que un conjunto es prevaleciente presenta un verdadero reto. En esta sección nos enfocamos en encontrar alguna herramienta que nos facilite esta tarea.

## Definición

Sean  $P$  un subespacio finito-dimensional de  $V$  y  $T$  un subconjunto de  $V$ . Decimos que  $P$  es una *sonda* de  $T$  si existen una base  $A$  para  $P$  y un conjunto  $B \in \mathcal{B}(V)$  con  $V \setminus T \subseteq B$  de tal manera que  $\mu_A$  está concentrada en  $P$  y es transversal a  $B$ .

O, analíticamente,

## Proposición

## Teorema

Si  $T \subseteq V$  tiene una sonda entonces es prevalente.

## Observación

Una sonda para un conjunto boreliano  $T$  es un subespacio de dimensión finita  $P$  que está casi completamente contenido en cualquier traslación de  $T$  (respecto a alguna medida de Lebesgue concentrada en  $P$ ).

# Prevalencia de $\mathcal{ND}[0, 1]$