HM1-2 Zusammenfassung

1 Inhalt

Inhaltsverzeichnis

1.1 Versionierung

Datum	Vers.	Kürzel	Änderung
19.04.2018	0.1	FL	Erzeugung Dokument; Erzeugung Inhaltsverzeichnis; Erzeugung Versionierung; Erzeugung 2.1 - 2.7.4
19.04.2018	0.2	FL	Korrekturen 2.6.1 - 2.6.9 u. 2.7.1 - 2.7.2 Titel
20.04.2018	0.2.1	FL	Erzeugung 2.7.1.1 - 2.7.1.4; Korrektur Riemannsche Untersumme; Erzeugung Literaturverzeichnis

2 Integralberechnung

2.1 Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)dx = F(x) + C = [F(x)] \qquad ,C \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

2.2 Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{2.2}$$

2.3 Partielle Integration

Entspricht der "Produktregel"der Differentialrechnung.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{2.3}$$

Bietet sich zum Beispiel bei Produkten aus x-Potenz mit e-Funktionen, log, sin oder cos an.

2.4 Integration durch Substitution

Entspricht der "Kettenregel"der Differentialrechnung.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy \qquad (setze \quad y = g(x) \tag{2.4}$$

2.4.1 Spezialfall

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln(|f(x)|) + C \qquad ,C \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

2.5 Gerade/Ungerade Funktionen

$$\int_{-a}^{a} f(x) = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & , f \; gerade \\ 0 & , f \; ungerade \end{cases} \tag{2.6}$$

f gerade, falls $f(-x) = f(x)$ $\quad (z.B.: cos(x), x^2)$

f ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ $\quad (z.B.: sin(x), x^3)$

2.6 Beispiele

2.6.1 $\int_1^2 \frac{ln(t)}{t} dt$

$$s = ln(t) \Rightarrow \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = \frac{1}{t} dt$$

$$Grenzen: t = 1, t = 2 \rightarrow s = ln(1), s = ln(2)$$

$$\int_1^2 \frac{ln(t)}{t} dt = \int_1^2 ln(t)\frac{1}{t} dt = \int_{ln(1)}^{ln(2)} s ds = \frac{1}{2}s^2\Big|_{s=ln(1)=0}^{ln(2)} = \frac{1}{2}(ln(2))^2 \tag{2.7}$$

Bauart des Integrals: $\int h(t)h'(t)dt$

2.6.2 $\int_0^{\frac{1}{2}} tan(t)dt$

$$s = cos(t) \rightarrow \frac{ds}{dt} = -sin(t) \rightarrow ds = -sin(t)dt$$

$$Grenzen: t = 0, t = 1 \rightarrow s = cos(0), s = cos(\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} tan(t)dt &= \int_0 \frac{1}{2}\frac{sin(t)}{cos(t)} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{cos(t)} sin(t) dt = -\int_{cos(0)}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{s} ds \\ &= -ln(s)\Big|_{s=cos(0)}^{cos(\frac{1}{2})} = -ln(cos(\frac{1}{2})) + ln(\underbrace{cos(0)}_{=1})) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Bauart des Integrals: $\int \frac{1}{h(t)} h'(t)dt$

2.6.3 $\int 4xe^{-x}dx$

$$\begin{aligned} \int 4xe^{-x}dx &= 4\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{-x}}_{v'}dx \overset{p.I.}{=} \underbrace{x}_{u} \underbrace{-e^{-x}}_{v} - 4\int \underbrace{1}_{u'} \underbrace{-e^{-x}}_{v} dx \\ &= -4xe^{-x} - 4e^{-x} + C \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.6.4 $\int_0^\pi (x+3)cos(2x)dx)$

$$\int_0^\pi \underset{u}{(x+3)}\underset{v'}{cos(2x)}dx \overset{p.I.}{=} \underbrace{\underset{u}{(x+3)} * \underset{v}{\frac{1}{2}sin(2x)}\Big|_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{2}\int_0^\pi \underset{u'}{1} * \underset{v}{sin(2x)}$$

$$= \frac{1}{4}\,cos(2x)\Big|_0^\pi = 0 \tag{2.10}$$

2.6.5 $\int cos^2(x)dx$

$$\begin{aligned}\int cos^2(x)\,dx &= \int \underset{u}{cos(x)} * \underset{v'}{cos(x)}\,dx \overset{p.I.}{=} \underset{u}{cos(x)} * \underset{v}{sin(x)} - \int \underset{u'}{(-sin(x))} * \underset{v}{sin(x)}\,dx \\ &= cos(x)sin(x) + \int \underbrace{sin^2(x)}_{=1-cos^2(x)}\,dx = cos(x)sin(x) + \int 1dx - \int cos^2(x)\,dx \\ &\Rightarrow 2\int cos^2(x)\,dx = cos(x)sin(x) + x + \tilde{c} \qquad ,\tilde{c} \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \int cos^2(x)\,dx = \frac{cos(x)sin(x)+x}{2} + C \qquad ,C \in \mathbb{R}\end{aligned} \tag{2.11}$$

2.6.6 $\int_0^1 xarctan(x)dx$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \underset{u'}{x}\underset{v}{arctan(x)}dx &\overset{p.I.}{=} \frac{1}{2} * \underset{u}{x^2}\underset{v}{arctan(x)}\Big|_0^1 - \int_0^1 \underset{u}{\frac{1}{2}x^2}\underset{v'}{\frac{1}{1+x^2}}dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 1dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} * (x\Big|_0^1) + \frac{1}{2}actan(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} * \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{2.12}$$

2.6.7 $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}dx$

$$\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}dx = ln(|x^2+2x-1|) + C \qquad ,C \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

Da das Integral über einen Ausdruck der Form $\frac{f'(x)}{f(x)}$ gebildet wird gilt (2.5). Alternativ Substitution:

$$y = x^3 + 2x - 1 \Rightarrow dy = (3x^2+2)dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy$$

2.6.8 $\int cos(x)e^{3sin(x)}dx$

$$y = 3sin(x) \Rightarrow dy \;\; = 3cos(x)dx$$

$$\int cos(x)e^{3sin(x)}dx \overset{subs.}{=} \frac{1}{3}\int e^y dy$$
$$= \frac{1}{3}e^y + C \underset{R.s.}{=} \frac{1}{3}e^{3sin(x)} + C \qquad , C \in \mathbb{R} \tag{2.14}$$

2.6.9 $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}dx$

$$x = 2sin(y) \Rightarrow dx \;\; =2cos(y)dy$$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}dx \underset{subs.}{=} \int \frac{1}{(y^2+1)\cancel{y}}2\cancel{y}dy = 2\int \frac{1}{1+y^2}\,dy$$
$$= 2 * arctan(y) + C = 2 * arctan(\sqrt{1+x} + C, \; C \in \mathbb{R} \tag{2.15}$$

2.6.10 $\int \sqrt{4+x^2}\;dx$

$$x = 2sin(y) \Rightarrow dx \;\; = 2cos(y)dy$$

$$\int \sqrt{4+x^2}\;dx \overset{subs.}{=} \int \sqrt{4-4sin^2(y)} * 2cos(y)\;dy$$
$$= \int \sqrt{4cos^2(y)}2cos(y)\;dy = 4\int cos^2(y)\;dy$$
$$\overset{p.I.}{=} 4 * (\underset{u}{cos(y)} * \underset{v}{sin(y)} - \int \underset{u'}{(-sin(y))} * \underset{v}{sin(y)}\;dy)$$
$$\Rightarrow 4\int cos^2(y)dy = cos(y)sin(y) + \int 1dy - \int cos^2(y)\;dy$$
$$\Rightarrow 5\int cos^2(y)\;dy = cos(y)sin(y) + y + \tilde{c} \qquad ,\tilde{c} \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \int cos^2(y)\;dy = \frac{cos(y)sin(y) + x}{5} + C \qquad ,C \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

2.6.11 $\int_{-3}^{3} 1 + e^{x^2} * (sin(x)^3\;dx$

$$\int_{-3}^{3} 1 + e^{x^2} * (sin(x)^3\;dx = \underbrace{\int_{-3}^{3} 1dx}_{=6} + \underbrace{\int_{-3}^{3} e^{x^2} * (sin(x))^2 dx}_{\text{=0 da der Integrand eine ungerade Funktion ist}}$$
$$= 6 \tag{2.17}$$

Untersucht man den Integranden, stellt man seine Ungeradheit leicht fest.

$$sin(x) \Rightarrow ungerade$$
$$sin^2(x) \Rightarrow gerade$$
$$sin^3(x) \Rightarrow ungerade$$

Funktionen verhalten sich im Bezug auf Ungeradheit zur Multiplikation ähnlich wie Vorzeichen. $((-)*(-)=(+);\ (-)*(+)=(-))$ Untersucht man weiterhin die e-Funktion stellt man fest, dass sie gerade ist:

$$f(x) = e^{x^2} = e^{(-x)^2} = f(-x) \Rightarrow gerade\ Funktion$$

Da also eine gerade mit einer ungeraden Funktion multipliziert wird ist das Ergebnis wiederrum ungerade.

2.7 Allgemeines zur Integration

2.7.1 Riemann Integrierbarkeit

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig bzw. monoton
$\Rightarrow$ f ist R-integrierbar.

2.7.1.1 Riemannsches Unterintegral

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \sup\{U_f(Z) :\ \text{Z Zerlegung von } [a, b]\} \tag{2.18}$$

2.7.1.2 Riemannsches Oberintegral

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx = \inf\{O_f(Z) :\ \text{Z Zerlegung von } [a, b]\} \tag{2.19}$$

$\to$ f heißt Riemann-integrierbar über $[a, b]$, falls

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx \tag{2.20}$$

In diesem Fall heißt der Wert das Riemannn-Integral und wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.

2.7.1.3 Eigenschaften

a) Falls $a < b$ setzen wir:

$$\begin{aligned}\int_b^a f(x)dx &= -\int_a^b f(x)dx \\ \int_a^a f(x)dx &= 0\end{aligned} \tag{2.21}$$

b) f, g seien R-integrierbar, $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \to \lambda f + \mu g$ ist R-integrierbar (Vektorraumeigenschaft).

$$\int_a^b \lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx \tag{2.22}$$

c) $a < C < b$, f ist R-integrierbar.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^C f(x)dx + \int_C^b f(x)dx \tag{2.23}$$

d)

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$
$$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \tag{2.24}$$

e)

$$\text{Sind } f \text{ und } g \text{ R-integrierbar ist auch } f * g \text{ R-integrierbar.} \tag{2.25}$$

f)

$$g(x) \geq C > 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \text{ ist R-integrierbar.} \tag{2.26}$$

g)

$$\text{Ist } f \text{ R-integrierbar dann ist auch } |f| \text{ R-integrierbar.} \tag{2.27}$$

h)

$$(b-a) \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} f(x) \tag{2.28}$$

2.7.1.4 Kriterien zur Riemann-Integrierbarkeit

a) f monoton $\Rightarrow f$ R-integrierbar.

b) f stetig $\Rightarrow f$ R-integrierbar
„Satz: Jede stetige Funktion $f : k \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge k, d.h. für $k < \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und beschränkt, ist dort gleichmäßig stetig und damit R-integrierbar.“(Schneider 2018) Beispiel für k: $k : [a, b]$

c) Kriterium: Jede Funktion deren Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden (z.B. abzählbare Mengen) sind R-integrierbar. „Satz: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann R-integrierbar, wenn f beschränkt ist und die Menge der Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge ist. “(Schneider 2018) Die Konsequenz daraus lautet, dass jede stetige Funktion mit endlich vielen Sprungstellen R-integrierbar ist. (Vgl. Schneider 2018)

d) „Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f R-integrierbar genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Partition Z gibt, so dass $O_f(Z)U_f(Z) < \varepsilon$. “(Schneider 2018)
Anmerkung: „In der Mengenlehre ist eine Partition (auch Zerlegung oder Klasseneinteilung) einer Menge M eine Menge P, deren Elemente nichtleere Teilmengen von M sind, sodass jedes Element von M in genau einem Element von P enthalten ist. Anders gesagt: Eine Partition einer Menge ist eine Zerlegung dieser Menge in nichtleere paarweise disjunkte Teilmengen.“(Wikimedia-Foundation 2018)

2.7.2 MWS der Integralrechnung

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann $\exists\, \xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$.

2.7.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ diffbar und $F'(x) = f(x)$.

2.7.4 Anwendungen

1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x e^{-cos(y^{17})} dy = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\int_0^x e^{-cos(y^{17})}}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}}$$
$$\overset{"\frac{0}{0}" \to L.H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-cos(x^{17}}}{1} = e^{-1} = \frac{1}{e} \tag{2.29}$$

2)

$$\lim_{x\to\infty} x e^{x^2} \int_0^x e^{y^2} dy = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\int_0^x e^{y^2} dy}^{\to\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x} e^{x^2}}_{\to\infty}}$$
$$\overset{"\frac{\infty}{\infty}" \to L.H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{-\frac{1}{x^2} * \cancel{e^{x^2}} + \frac{1}{x} 2x \cancel{e^{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-\frac{1}{x^2} + 2} = \frac{1}{2} \tag{2.30}$$

3 Anhänge

3.1 Formelverzeichnis

Literatur

Schneider, P. D. G. (2018), 'Hm1-2 script'. Vorlesungsscript.

Wikimedia-Foundation (2018), 'Partition (mengenlehre)', https://de.wikipedia.org/wiki/Partition_(Mengenlehre). Accessed: 2018-04-20.