HM1-2 Zusammenfassung

Florian Leuze

1 Inhalt

Inhaltsverzeichnis

1.1 Versionierung

Datum	Vers.	Kürzel	Änderung
19.04.2018	0.1	FL	Erzeugung Dokument; Erzeugung Inhaltsverzeichnis; Erzeugung Versionierung; Erzeugung 2.1 - 2.7.4
19.04.2018	0.2	FL	Korrekturen 2.6.1 - 2.6.9 u. 2.7.1 - 2.7.2 Titel
20.04.2018	0.2.1	FL	Erzeugung 2.7.1.1 - 2.7.1.4; Korrektur Riemannsche Untersumme; Erzeugung Literaturverzeichnis
01.05.2018	0.2.2	FL	Neustrukturierung; Erzeugung Allgemeines; Erzeugung Zahlen
01.08.2018	0.3.0	FL	Überarbeitung Trigonometrie

2 Allgemeines

2.1 Trigonometrie

2.1.1 Winkelfunktionen

$$sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse} \quad (2.1.1)$$
$$cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse} \quad (2.1.2)$$
$$tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \quad (2.1.3)$$

2.1.1.1 Wichtige Werte

α in Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°
α in Bogenmaß	0	$\frac{\Pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sin\alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
$tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.

2.1.2 Sinussatz

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2r = \frac{abc}{2F} \quad (2.1.4)$$

2.1.3 Cosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha \quad (2.1.5)$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2cacos\beta \quad (2.1.6)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma \quad (2.1.7)$$

2.1.4 Tangenssatz

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} = \frac{cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \quad (2.1.8)$$

Analog für $\frac{a+b}{a-b}$ und $\frac{a+c}{a-c}$.

2.1.5 Umwandlung

$$tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \tag{2.1.9}$$

$$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1 \tag{2.1.10}$$

$$1 + tan^2(\alpha) = \frac{1}{cos^2(\alpha)} = sec^2(\alpha) \tag{2.1.11}$$

$$1 + cot^2(\alpha) = \frac{1}{sin^2(\alpha)} = csc^2(\alpha) \tag{2.1.12}$$

2.1.6 Additionstheoreme

$$sin(x \pm y) = sin(x)cos(y) \pm cos(x)sin(y) \tag{2.1.13}$$

$$cos(x \pm y) = cos(x)cos(y) \mp sin(x)sin(y) \tag{2.1.14}$$

(2.1.15)

$$tan(x \pm y) = \frac{tan(x) \pm tan(y)}{1 \mp tan(x)tan(y)} = \frac{sin(x \pm y)}{cos(x \pm y)} \tag{2.1.16}$$

$$cot(x \pm y) = \frac{cot(x)cot(y) \mp 1}{cot(y) \pm cot(x)} = \frac{cos(x \pm y)}{sin(x \pm y)} \tag{2.1.17}$$

(2.1.18)

$$sin(x + y) \cdot sin(x - y) = cos^2(y) - cos^2(x) = sin^2(x) - sin^2(y) \tag{2.1.19}$$

$$cos(x + y) \cdot cos(x - y) = cos^2(y) - sin^2(x) = cos^2(x) - sin^2(y) \tag{2.1.20}$$

2.1.7 Folgerungen aus den Additionstheoremen

$$cos^2(\frac{x}{2}) + sin^2(\frac{x}{2}) = cos(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2}) + sin(\frac{x}{2})sin(\frac{x}{2}) \tag{2.1.21}$$

$$\overset{(2.1.20)}{=} cos(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}) = cos(0) = 1 \tag{2.1.22}$$

(2.1.23)

$$2sin(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2}) = sin(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2}) + sin(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2}) \tag{2.1.24}$$

$$\overset{(2.1.20)}{=} sin(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = sin(x) \tag{2.1.25}$$

(2.1.26)

$$sin(2x) = sin(x + x) \overset{(2.1.20)}{=} sin(x)cos(x) + sin(x)cos(x) \tag{2.1.27}$$

$$= 2sin(x)cos(x) \tag{2.1.28}$$

3 Zahlen

3.1 Zahlbereiche

3.1.1 Natürliche Zahlen

- Direkt vom Zählen abgeleitet.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
- Gleichungen wie $n + x = m$ i.A. in $\mathbb{N}$ nicht lösbar.

3.1.2 Ganze Zahlen

- $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- Gleichungen wie $n \cdot x = m$ i.A. in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar.

3.1.3 Rationale Zahlen

- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, \text{m, n teilerfremd}\right\}$
- Gleichungen wie $x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

3.1.4 Reelle Zahlen

- $\mathbb{R} = \left\{x = \sum_{j=-\infty}^{n} x_j 10^j : x_j \in \{0, 1, ..., 9\} \text{ für ein n} \in \mathbb{Z}\right\}$
- Gleichungen wie $x^2 = -1$ in $\mathbb{R}$ nicht lösbar.

3.1.5 Komplexe Zahlen

- $\mathbb{C} = \{z = x + iy : \ x, \ y \in \mathbb{R}\}$ i heißt imaginäre Einheit, es gilt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

3.2 Algebraische Strukturen

3.2.1 Gruppe

Def.: „Eine Menge M mit der Verknüpfung $+ : M \times M \to M$, deren Elemente die Eigenschaften $(G1) - (G3)$ erfüllen, heißt Gruppe. Gilt zusätzlich $(G4)$, so heißt $(M, +)$ eine kommutative Gruppe.“(Schneider 2018) In der Literatur findet man als alternative Bezeichnung kommutativ auch abelsch. (Vgl. Fischer 2014)

3.2.1.1 Gruppenaxiome

$$\begin{array}{lll} (\mathbf{G1}) & x + (y + z) = (x + y) + z & \text{(Assoziativgesetz)} \\ (\mathbf{G2}) & x + 0 = x = 0 + x & \text{(0 ist das neutrale Element)} \\ (\mathbf{G3}) & x + (-x) = (-x) + x = 0 & \text{(-x ist das inverse Element zu x)} \\ (\mathbf{G4}) & x + y = y + x & \text{(Kommutativität also Vertauschbarkeit)} \end{array} \tag{3.2.1}$$

Def.: „Sei eine Gruppe eine Verknüpfung mit $\cdot$ und $G' \subset G$ eine nichtleere Teilmenge. G' heißt eine Untergruppe, wenn für $a,\ b \in G'$ auch $a \cdot b \in G'$ und $a^{-1} \in G'$. (Fischer 2014)

Im Bezug auf Gruppen und Ringe spielen die Begrifflichkeiten Isomorphismus und Homomorphismus eine Rolle. Beide Begriffe leiten sich von Morphismus (Struktur bzw. Form), Homo (gleich im Sinne von ähnlich) und Iso (gleich im Sinne von identisch) ab.

Def.: „Sind G und H Gruppen mit Verknüpfungen $\cdot$ und $\times$, so heißt eine Abbildung $\varphi : G \to H$ Homomorphismus (von Gruppen), wenn

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \times \varphi(b) \qquad \forall a,\ b \in G.\ \text{(Fischer 2014)} \tag{3.2.2}$$

Ein Homomorphismus heißt Isomorphismus wenn er bijektiv ist. (Fischer 2014)

3.2.2 Ring

Erfüllt eine Menge die Eigenschaften einer Gruppe, hat jedoch zwei Verknüpfungen (z.B. $(+, -)$) spricht man von einem Ring.

3.2.3 Körper

Erfüllt eine Menge die Eigenschaften eines Ringes und ist zusätzlich kommutativ spricht man von einem Körper. Ein Beispiel für einen Körper ist die algebraische Struktur der rationalen und reellen Zahlen.

3.2.3.1 Körperaxiome

$$\begin{array}{lll} (\mathbf{K1}) & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z & \text{(Assoziativgesetz)} \\ (\mathbf{K2}) & x \cdot 1 = 1 \cdot x = x & \text{(1 ist das neutrale Element)} \\ (\mathbf{K3}) & x \cdot (\frac{1}{x}) = (\frac{1}{x}) \cdot x = 1 & (\frac{1}{x} \text{ ist das inverse Element zu x)} \\ (\mathbf{K4}) & x \cdot y = y \cdot x & \text{(Kommutativität also Vertauschbarkeit)} \\ (\mathbf{D}) & x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z & \text{(Kommutativität also Vertauschbarkeit)} \end{array} \tag{3.2.3}$$

Def.: „Eine Menge M mit den Verknüpfungen $+ : M \times M \to M$ und $\cdot : M \times M \to M$, deren Elemente die Gesetze $(G1) - (G4)$, $(M1) - M4)$ und (D) erfüllt, heißt Körper. (Schneider 2018)

3.3 Komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy :\ x,\ y \in \mathbb{R}\} \tag{3.3.1}$$
$$i^2 = 1 \tag{3.3.2}$$

Den Realteil einer komplexen Zahl z bezeichnet man i.A. mit x, den Imaginärteil mit y.

$$Re\{z\} = x \qquad Im\{z\} = y \tag{3.3.3}$$

Def.: „Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn ihre Real- und Imaginärteile gleich sind. “(Schneider 2018)

3.3.1 Betrag der komplexen Zahl

Da sich komplexe Zahlen geometrisch im $\mathbb{R}^2$ interpretieren lassen, kann aus beiden Teilen ein Betragspfeil gebildet werden.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.3.4}$$

3.3.1.1 Eigenschaften

$$|z| = 0 \tag{3.3.5}$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \tag{3.3.6}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| \tag{3.3.7}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \tag{3.3.8}$$

3.3.2 Komplex konjugierte Zahl

Def.: „$\overline{z} = x - iy$ heißt die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl. “(Schneider 2018)

3.3.2.1 Eigenschaften

$$\overline{\overline{z}} = z \tag{3.3.9}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \tag{3.3.10}$$

$$Re\{z\} = \frac{1}{2}/z + \overline{z}), \qquad Im\{z\} = \frac{1}{2i}/z - \overline{z}) \tag{3.3.11}$$

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}, \qquad z\overline{z} = x^2 + y^2 \tag{3.3.12}$$

3.3.3 Polarkoordinatendarstellung

$$z = x + iy = |z|(cos\varphi + isin\varphi) \tag{3.3.13}$$

$$\Rightarrow x = |z|cos\varphi, \qquad \rightarrow y = |z|sin\varphi)$$

$$\Rightarrow tan\varphi = \frac{sin\varphi}{cos\varphi} = \frac{x}{y} \tag{3.3.14}$$

Achtung. Die Umkehrfunktion von Tanges ist nicht eindeutig. Es gilt:

$$\varphi = \begin{cases} arctan(\frac{x}{y}) & , x > 0,\ y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & , x = 0,\ y > 0 \\ \pi + arctan(\frac{y}{x}) & , x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & , x = 0,\ y < 0 \\ 2\pi + arctan(\frac{y}{x}) & , x > 0,\ y < 0 \end{cases} \tag{3.3.15}$$

3.3.4 Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(cos\varphi_1 + isin\varphi_1) \cdot |z_2|(cos\varphi_2 + isin\varphi_2) \tag{3.3.16}$$

$$\overset{(2.1.20)}{=} |z_1||z_2|(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)) \tag{3.3.17}$$

$$\Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| \qquad , Winkel = \varphi_1 + \varphi_2 \tag{3.3.18}$$

3.3.5 Formel von de Moivre

Setzt man in (3.3.18) $z_1 = z_2 = z$ ein erhält man die Formel von de Moivre.

$$z \cdot z = z^2 = |z|^2(cos(2\varphi) + isin(2\varphi)) \qquad , bzw.$$

$$z^n = |z|^n(cos(n\varphi) + isin(n\varphi)) \qquad , bzw.$$

$$z^n = |z|^n(cos\varphi + isin\varphi)^n$$

$$\Rightarrow (cos\varphi + isin\varphi)^n = cos(n\varphi) + isin(n\varphi) \tag{3.3.19}$$

Mit der Eulerschen Formel erhält man $e^{i\varphi} := cos\varphi + isin\varphi$. Daraus folgt:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} \tag{3.3.20}$$

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2} = e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} \tag{3.3.21}$$

$$e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}} \tag{3.3.22}$$

$$z_x = |z_x|e^{i\varphi_x} \Rightarrow z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{3.3.23}$$

3.4 Polynome

Ein komplexes Polynom hat die Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0 \tag{3.4.1}$$

$$a_k \in \mathbb{C}$$

Falls $a_n \neq 0$ gibt n den Grad des Polynoms an.
Def.: „Ist $p(z)$ ein reelles Polynom, d.h. $a_k \in \mathbb{R}$, dann ist mit $z \in \mathbb{C}$ auch $\overline{z} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle, d.h. aus $p(z) = 0$ folgt $p(\overline{z}) = 0$, d.h. die Nullstellen sind konjugiert komplex zueinander. "(Schneider 2018)

3.4.1 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle.

3.4.2 Polynomdivision

Über Polynomdivision lassen sich Polynome in Linearfaktoren zerlege.

$$\begin{aligned} &Bsp.: \\ (2z^3 - 3z^2 - 6z + 6) : (z - 2) = (2z^2 + z - 4) \quad &, \text{ Rest: } -2 \\ -(2z^3 - 4z^2) \\ \hline 0 + z^2 - 6z + 6 \\ z^2 - 2z \\ \hline \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

4 Integralberechnung

4.1 Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)dx = F(x) + C = [F(x)] \qquad , C \in \mathbb{R} \tag{4.1.1}$$

4.2 Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{4.2.1}$$

4.3 Partielle Integration

Entspricht der "Produktregel"der Differentialrechnung.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{4.3.1}$$

Bietet sich zum Beispiel bei Produkten aus x-Potenz mit e-Funktionen, log, sin oder cos an.

4.4 Integration durch Substitution

Entspricht der "Kettenregel"der Differentialrechnung.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy \qquad (setze \quad y = g(x) \tag{4.4.1}$$

4.4.1 Spezialfall

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln(|f(x)|) + C \qquad , C \in \mathbb{R} \tag{4.4.2}$$

4.5 Gerade/Ungerade Funktionen

$$\int_{-a}^{a} f(x) = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & , f \; gerade \\ 0 & , f \; ungerade \end{cases} \tag{4.5.1}$$

f gerade, falls $f(-x) = f(x)$ $\qquad (z.B.: cos(x), x^2)$

f ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ $\qquad (z.B.: sin(x), x^3)$

4.6 Beispiele

Siehe Anhang

4.7 Allgemeines zur Integration

4.7.1 Riemann Integrierbarkeit

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig bzw. monoton
$\Rightarrow$ f ist R-integrierbar.

4.7.1.1 Riemannsches Unterintegral

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \sup\{U_f(Z) : \text{ Z Zerlegung von } [a, b]\} \tag{4.7.1}$$

4.7.1.2 Riemannsches Oberintegral

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx = \inf\{O_f(Z) : \text{ Z Zerlegung von } [a, b]\} \tag{4.7.2}$$

$\to$ f heißt Riemann-integrierbar über $[a, b]$, falls

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx \tag{4.7.3}$$

In diesem Fall heißt der Wert das Riemannn-Integral und wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.

4.7.1.3 Eigenschaften

a) Falls $a < b$ setzen wir:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$
$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{4.7.4}$$

b) f, g seien R-integrierbar, $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \to \lambda f + \mu g$ ist R-integrierbar (Vektorraumeigenschaft).

$$\int_a^b \lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx \tag{4.7.5}$$

c) $a < C < b$, f ist R-integrierbar.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^C f(x)dx + \int_C^b f(x)dx \tag{4.7.6}$$

d)

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 &\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) &\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \end{aligned} \tag{4.7.7}$$

e)

Sind f und g R-integrierbar ist auch $f * g$ R-integrierbar. (4.7.8)

f)

$$g(x) \geq C > 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \text{ ist R-integrierbar.} \tag{4.7.9}$$

g)

Ist f R-integrierbar dann ist auch $|f|$ R-integrierbar. (4.7.10)

h)

$$(b-a) \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} f(x) \tag{4.7.11}$$

4.7.1.4 Kriterien zur Riemann-Integrierbarkeit

a) f monoton $\Rightarrow f$ R-integrierbar.

b) f stetig $\Rightarrow f$ R-integrierbar
„Satz: Jede stetige Funktion $f : k \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge k, d.h. für $k < \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und beschränkt, ist dort gleichmäßig stetig und damit R-integrierbar.“(Schneider 2018) Beispiel für k: $k : [a, b]$

c) Kriterium: Jede Funktion deren Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden (z.B. abzählbare Mengen) sind R-integrierbar. „Satz: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann R-integrierbar, wenn f beschränkt ist und die Menge der Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge ist. “(Schneider 2018) Die Konsequenz daraus lautet, dass jede stetige Funktion mit endlich vielen Sprungstellen R-integrierbar ist. (Vgl. Schneider 2018)

d) „Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f R-integrierbar genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Partition Z gibt, so dass $O_f(Z)U_f(Z) < \varepsilon$. "(Schneider 2018)
Anmerkung: „In der Mengenlehre ist eine Partition (auch Zerlegung oder Klasseneinteilung) einer Menge M eine Menge P, deren Elemente nichtleere Teilmengen von M sind, sodass jedes Element von M in genau einem Element von P enthalten ist. Anders gesagt: Eine Partition einer Menge ist eine Zerlegung dieser Menge in nichtleere paarweise disjunkte Teilmengen."(Wikimedia-Foundation 2018)

4.7.2 MWS der Integralrechnung

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann $\exists\, \xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

4.7.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ diffbar und $F'(x) = f(x)$.

4.7.4 Anwendungen

1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x e^{-cos(y^{17})} dy = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\int_0^x e^{-cos(y^{17})}}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}}$$

$$\overset{"\frac{0}{0}" \to L.H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-cos(x^{17}}}{1} = e^{-1} = \frac{1}{e} \tag{4.7.12}$$

2)

$$\lim_{x\to\infty} xe^{x^2} \int_0^x e^{y^2} dy = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\int_0^x e^{y^2} dy}^{\to\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x} e^{x^2}}_{\to\infty}}$$

$$\overset{"\frac{\infty}{\infty}" \to L.H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{-\frac{1}{x^2} * \cancel{e^{x^2}} + \frac{1}{x} 2x \cancel{e^{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-\frac{1}{x^2} + 2} = \frac{1}{2} \tag{4.7.13}$$

Add rest of integrals here!

5 Separierbare DGL

5.1 Wiederholung klassische DGL

Bisher: lineare DGl mit konstanten Koeffizienten.
z.B.: $y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = e^{2t} \qquad , \ y(0) = 1, \ y'(0) = 1$

Homogene DGL: $y(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 4$
$\Rightarrow yh(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t} \qquad , \ C_1, \ C_2 \in \mathbb{R}$

Inhomogenes DGL: $\underbrace{yp(t) = re^{2t}}_{\text{da 2 keine NST}}$

$$\Rightarrow yp'(t) = 2re^{2t}, \ yp''(t) = 4re^{2t}$$
$$\overset{DGL}{=} 4re^{2t} - 10re^{2t} + 4re^{2t} \overset{!}{=} e^{2t} \Rightarrow -2re^{2t} = e^{2t}$$
$$\Rightarrow r = -\frac{1}{2}$$

Allgemeine Lösung: $y(t) = yh(t) + yp(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t} - \frac{1}{2} e^{2t}$

5.2 Lösen von DGL mit Koeffizienten die von t abhängig sind

z.B. $y'(t) - ty(t) = t \qquad , \ y(0) = 1$

Spezielle Form:

$$y'(t) = f(t) g(y(t)) \qquad , \ y(t_0) = y_0 \tag{5.2.1}$$

$$\Rightarrow y'(t) = t + ty(t) = \underbrace{t}_{f(t)} \underbrace{g(y(t))}_{(1+y(t))}$$

Lösung: Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(t) \overset{y' = \frac{dy}{dt}}{\Rightarrow} \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt + C \quad , \ C \in \mathbb{R} \tag{5.2.2}$$

C erhält man aus der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$.

5.2.1 Beispiele

Siehe Anhang

6 Lineare Algebra

6.1 Definitionen

6.1.1 Linearkombinationen

V sei ein Vektorraum (im Folgenden VR), $v_1,\ ...,\ v_m \in V \quad , \lambda_i \in \mathbb{R}$.

(1) $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ Linearkombinationen der v_i.

(6.1.1)

6.1.2 Spann und Erzeugendensystem

(2) $span(v_1,\ ...,\ v_m) = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \quad , \lambda_i,\ v_i \in \mathbb{R} \right\}$ Spann der v_i.
Gilt $span(v_1,\ ...,\ v_m) = V \Rightarrow \{v_1,\ ...,\ v_m\}$ ist ein Erzeugendensystem.

(6.1.2)

6.1.3 Lineare Unabhängigkeit

(3) $v_1,\ ...,\ v_m$ linear unabhänig, falls
$\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$
0 darf die einzige Lösung sein, sonst linear abhängig.

(6.1.3)

6.1.4 Basis

(4) $B = \{b_1,\ ...,\ b_n\} \subset V$ ist Basis von V, falls
(B1) b_i linear unabhängig, $i = 1,\ ...,\ n$
(B2) B ist ein Erzeugendensystem.

(6.1.4)

Es gilt:

(1) $dimV = |b|$ (Mächtigkeit von B)
(2) $dimV = n$ ($\Rightarrow n+1$ Vektoren sind linear abhängig)
(3) $\forall v \in V : v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ eindeutig darstellbar.
$\Rightarrow B^v = (\lambda_1,\ ...,\ \lambda_n)^T$ (Koordinaten von v bezüglich B)

(6.1.5)

6.1.5 Kanonische Basis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0, \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ..., \quad e_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.1.6}$$

6.2 Vektorräume

6.2.1 Definitionen

6.2.1.1 $\mathbb{R}^d$

$$\mathbb{R}^d : v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_d \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_d \end{pmatrix} \tag{6.2.1}$$

6.2.1.2 Vektoraddition

$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_d + w_d \end{pmatrix} \tag{6.2.2}$$

6.2.1.3 Skalare Multiplikation

$$\alpha \in \mathbb{R}, \ v \in \mathbb{R}^d$$

$$\alpha \cdot v = \begin{pmatrix} \alpha \cdot v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha \cdot v_d \end{pmatrix} \tag{6.2.3}$$

6.2.1.4 Nullvektor

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.2.4}$$

6.2.2 Struktur

Für $v, \ w, \ z \in \mathbb{R}^d$ gelten die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{lll} (\mathbf{V1}) & v + w = w + v & \\ (\mathbf{V2}) & v + (w + z) = (v + w) + z & \\ (\mathbf{V3}) & v + 0 = 0 + v = v & \text{(0 ist das neutrale Element)} \\ (\mathbf{V4}) & v + (-v) = (-v) + v = 0 & \text{(-v ist das inverse Element)} \end{array} \tag{6.2.5}$$

Für $\alpha\ \beta \in \mathbb{R},\ v,\ w \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\begin{array}{ll} \textbf{(S1)} & 1 \cdot v = v \qquad\qquad\qquad (1 \in \mathbb{R}) \\ \textbf{(S2)} & \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \\ \textbf{(S3)} & (\alpha+\beta)v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v \\ \textbf{(S4)} & \alpha(v+w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w \end{array} \tag{6.2.6}$$

$(V1) - (V4)$ und $(S1) - (S4)$ gelten auch für Funktionen.

Definition 6.1. *Ist V eine Menge für deren Elemente eine Addition und eine skalare Multiplikation erklärt ist, so heißt sie Vektorraum, falls die Eigenschaften $(V1)$ - $(V4)$ und $(S1)$ - $(S4)$ erfüllt sind, wobei jetzt $v,\ w,\ z \in V$. Je nach Skalarkörper, also $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sprechen wir von einem reellen oder komplexen Vektorraum. Teilmengen von Vektorräumen, die ebenfalls Vektorräume sind, heißen Untervektorräume. (Schneider 2018)*

6.2.3 Untervektorraum

V sei ein Vektorraum und es gelte $U \subset V$.

Definition 6.2. *Eigenschaften $(V1)$ - $(V4)$, $(S1)$ - $(S4)$ sind als Teilmenge von V erfüllt, aber mit $u,\ v \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ muss auch $u+v \in U$, $\alpha u \in U$ gelten (Abgeschlossenheit bezüglich Vektoraddition und skalarer Multiplikation). (Schneider 2018)*

6.2.3.1 Untervektorraumkriterien

$$\begin{array}{ll} \textbf{(UV0)} & 0 \in U \\ \textbf{(UV1)} & u,\ v \in U \Rightarrow u+v \in U \\ \textbf{(UV2)} & u \in U,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in U \end{array} \tag{6.2.7}$$

Es gilt: $U_1,\ U_2$ UVR von V

$$\begin{array}{ll} \textbf{(1)} & U_1 \cap U_2 = \{v \in V : v \in U_1 \wedge v \in U_2\} \text{ UVR von V} \\ \textbf{(2)} & U_1 \cup U_2 = \{v \in V : v \in U_1 \vee v \in U_2\} \text{ kein UVR von V} \end{array} \tag{6.2.8}$$

6.2.3.2 Triviale UVR von V

$$U = \{0\}$$
$$U = V$$

6.2.3.3 Interessante Untervektorräume

- Die Menge der stetigen Funktionen: $(([a,b],\mathbb{R}))$
- Die Menge der n-mal stetig diffbaren Funktionen $\mathbb{C}^n([a,b],\mathbb{R})$
- Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen

6.3 Erzeugendensystem, Basis, Dimension, lineare Unabhängigkeit

6.3.1 Linearkombination, Spann

Definition 6.3. *Für $v_1, ..., v_m \in V$ (Vektorraum) und $\lambda_j \in \mathbb{R}$ heißt ein Vektor der Form*

$$v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_i \tag{6.3.1}$$

eine Linearkombination der Vektoren $v_1, ..., v_m$. Die Menge aller Linearkombinationen heißt der Spann von $v_1, ..., v_m$, d.h.

$$Spann(v_1, ..., v_m) = \{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j : \lambda_j \in \mathbb{R}\} \tag{6.3.2}$$

bzw. der von $v_1, ..., v_m$ aufgespannte Raum. (Schneider 2018)

Beispiel:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = v_1 + v_2 \qquad v_4 = v_2 - v_1$$

$$\Rightarrow Spann\,(v_1, ..., v_4) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

6.3.2 Lineare Unabhängigkeit

Definition 6.4. *Die Vektoren $v_1, ..., vm$ heißen linear unabhängig, falls aus*

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j = \mathcal{O} \in V \tag{6.3.3}$$

bereits

$$\lambda_1 = ... = \lambda_m = 0 \in \mathbb{R} \tag{6.3.4}$$

folgt.

6.3.3 Basis

Definition 6.5. *$B = \{v_1, ..., v_M\} \subset V$ heißt eine Basis von V, falls B linear unabhängig und $V = spann\{v_1, ..., v_m\}$ ist.*

Satz 6.6. *„(Basen von endlich-dimensionalen Vektorräumen sind gleich groß). Sei V ein Vektorraum mit Basis $\{v_1, ..., v_m\}$. Dann sind je n Vektoren $w_1, ..., w_n$ aus V mit $n > m$ linear abhängig. “(Schneider 2018)*

6.3.3.1 Folgerungen

Definition 6.7. *„Ist $\{v_1, ..., v_m\}$ eine Basis des Vektorraums V, so lässt sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als Linearkombination der $\{v_1, ..., v_m$ schreiben, d.h.:*

$$\exists x_k \text{ mit } v = \sum_{k=1}^{m} x_k v_k \tag{6.3.5}$$

"(Schneider 2018)
Mit x_k und v_k als Koordinaten bezüglich dieser Basis.

Definition 6.8. *„Die Anzahl der Elemente einer Basis von V ist unabhängig von der speziellen Wahl der Basis. Die Anzahll der Elemente der Basis heißt die Dimension des Vektorraumes V."(Schneider 2018) Schreibweise:*

$$dimV = m \tag{6.3.6}$$

Definition 6.9. *„Besitzt V eine Basis mit endlich vielen Elementen, so heißt V edlich dimensional, sonst heißt V unendlich dimensional. "(Schneider 2018)*

6.4 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ . & & & & . & & . \\ . & & & & . & & . \\ . & & & & . & & . \\ a_{m1}x_1 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{pmatrix} \rightarrow Ax = b \tag{6.4.1}$$

6.4.1 Zeilenvektoren

Die Koeffizienten der Zeilen nennt man Zeilenvektoren.

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ . \\ . \\ . \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \quad ..., \quad v_m = \begin{pmatrix} a_{m1} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix} \tag{6.4.2}$$

6.4.2 Gauss Algorithmus

Beim Gauss-Algorithmus werden Linearkombinationen der Zeilenvektoren gebildet. Das LGS hat nach der Anwendung folgende Form:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \tilde{a}_{11}x_1 & + & ... & + & \tilde{a}_{1r}x_r & + & ... & + & \tilde{a}_{1n}x_n & = & \tilde{b}_1 \\ 0 & + & \tilde{a}_{22}x_1 & + & ... & + & \tilde{a}_{2r}x_r & + & ... & = & \tilde{b}_1 \\ & . & & & & & & & & & \\ & . & & & & & & & & & \\ & & . & & & & & & & & \\ & & . & & & & & & & & \\ & & & & \tilde{a}_{rr}x_r & + & ... & + & \tilde{a}_{rn}xn & = & \tilde{b}_r \\ & & & & & & & & 0 & = & \tilde{b}_r + 1 \\ & & & & & & & & 0 & = & \tilde{b}_n \end{array} \tag{6.4.3}$$

Die neuen Zeilenvektoren nach dem Gauss-Algorithmus sind:

$$\tilde{v_1} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} \\ . \\ . \\ . \\ \tilde{a}_{1n} \end{pmatrix}, \quad ..., \quad \tilde{v_m} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m1} \\ . \\ . \\ . \\ \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} \tag{6.4.4}$$

Da beim Gauss-Algorithmus nur Linearkombinationen verwendet werden bleibt der Spannn erhalten.

6.4.3 Gauss-Algorithmus: Spann

$$span\{v_1, ..., v_m\} = span\{\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_m\} \tag{6.4.5}$$

6.4.4 Gauss-Algorithmus: Dimension, Rang

Weiterhin gilt:

$$dim\{span\{v_1, ..., v_m\}\} = dim\{\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_m\} = r \tag{6.4.6}$$

r heißt Zeilenrang von A bzw. der Rang von A.

6.4.5 Folgerungen

Satz 6.10.
a) *„Die Lösungen von $Ax = 0$ bilden einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$, den sogenannten Kern von A. “(Schneider 2018)*
Schreibweise:

$$Kern(A) = ker(A) = kernel(A) \tag{6.4.7}$$

b)

$$\underbrace{dim\{ker\{A\}\}}_{n-r} + \underbrace{Rang\{A\}}_{r} = n \tag{6.4.8}$$

c) *„Ein LGS $Ax = 0$ mit $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ besitzt nur die Lösung $x = 0$, wenn $Rang\{A\} = n$.“(Schneider 2018)*

d) *„Ist $(w_1, ..., w_k)$ eine Basis des Kerns, so lautet die allgemeine Lösung von $Ax = 0$:*

$$x = sum_{j=1}^{k} \alpha_j w_j \qquad , \alpha_j \in \mathbb{R} \qquad (Superpositionsprinzip) \tag{6.4.9}$$

"(Schneider 2018)
e) *„Ist x_s eine spezielle Lösung von $Ax = b$, so lautet die allgemeine Lösung von $Ax = b$:*

$$x = x_s + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w_j \qquad , \qquad , \alpha_j \in \mathbb{R} \tag{6.4.10}$$

Die Lösungsmenge von $Ax = b$ ist ein affiner Raum, d.h. die Differenz von jeweils zwei Elementen bildet einen Vektorraum."(Schneider 2018)

6.5 Lineare Abbildungen und Matrizen

Definition 6.11. *„Es seien V und V Vektorräume. Eine Abbildung $T : V \to W$ heißt linear, falls für alle $u, v \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$*

$$T(v + w) = T(v) + T(w) \tag{6.5.1}$$

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \tag{6.5.2}$$

gilt."(Schneider 2018)

Wie erhält man die Matrix zu einer linearen Abbildung?
„ Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. $\{v_1, ..., v_n\}$ sei eine Basis von V und $\{w_1, ..., w_n\}$ sei eine Basis von W. Dann lässt sich jeder Vektor $T(v_j)$ in eindeutiger Weise als Linearkombintion der $w_1, ..., w_m$ darstellen, d.h. es gibt $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i. \tag{6.5.3}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ heißt die Matrix der linearen Abbildung T bezüglich der Basen $\{v_1, ..., v_m\}$ und $\{w_1, ..., w_m\}$. "(Schneider 2018)

Satz 6.12. *„ Die Koordinaten von $w = T(v)$ entstehhen aus den Koordinaten von v durch Multiplikation mit der Matrix A.*

$$w = T(v)$$

$$mit\ v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \text{ und } w = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i$$

ergibt sich

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \tag{6.5.4}$$

bzw. $y = Ax$. "(Schneider 2018)

6.5.1 Das Matrizenkalkül

Matrizenmultiplikation tritt bei der Hintereinanderausführung linearer Abbildungen auf.

$$T(v) = Av, \quad S(w) = Bw \to (SoT)(v) = \underbrace{BA}_{Matrizen} \underbrace{v}_{Vektoren} \tag{6.5.5}$$

Der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von BA sieht wie folgt aus:

$$a_{ij} = \sum_k b_{ik} a_{kj} \tag{6.5.6}$$

Damit Matrizen multipliziert werden können, müssen sie die richtige Größe haben.

$$Mit\ A \in \mathbb{R}^{mxn}\ und\ B \in \mathbb{R}^{nxk} = C \in \mathbb{R}^{mxk} \tag{6.5.7}$$

Matrizenmultiplikation ist im allgemeinen

- nicht kommutativ, d.h. $AB \neq BA$
- nicht nullteilerfrei

6.5.2 Rechenregeln

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{M1}) & (A+B)C = AC + BC \\ (\mathbf{M2}) & A(B+C) = AB + AC \\ (\mathbf{M3}) & A(BC) = (AB)C \\ (\mathbf{M4}) & A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB) \end{array} \tag{6.5.8}$$

6.5.3 Einheitsmatrix

Die Einheitsmatrix (Identität) Besteht nur aus in der Diagonale Einsen, alle anderen Stellen sind mit Nullen aufgefüllt.

$$I = id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & . & 0 \\ 0 & . & 0 \\ & & . \; 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.5.9}$$

Die Einträge an i-ter Zeile und j-ter Spalte sind über das Kronecker-Delta beschrieben.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{6.5.10}$$

7 Anhänge

7.1 Ausgewählte Beispiele

7.1.1 Lineare Algebra

7.1.1.1 Vektor- und Untervektorräume

$$P_2 = \{p(x) = ax^2 + bx + c \quad , a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\}$$
$$B = \{\underbrace{1}_{b_1}, \underbrace{1-x}_{b_2}, \underbrace{x^2 - x}_{b_3}\} \qquad Basis?$$
$$(B_1): \ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(1-x) + \lambda_3(x^2 - x) = 0 \quad ,\forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 + \lambda_2}_{=0} + \underbrace{(-\lambda_2 - \lambda_3)}_{=0} x + \underbrace{\lambda_3}_{=0} x^2 = 0 \quad ,\forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow b_i \text{ sind linear unabhängig}$$
$$\text{Alternativ: 3 Zahlen für x einsetzen und LGS lösen.} \tag{7.1.1}$$
$$(B_2): dim P_2 = 3 \tag{7.1.2}$$

1)

$$U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}\},\ \text{UVR von } V = R^2?$$
$$U \text{ ist Ursprungsgreade}$$
$$(UV0): \checkmark da \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U (\text{setze t} = 0)$$
$$(UV1): \checkmark da\ u,\ v \in U \Rightarrow \exists t_1,\ t2 \in \mathbb{R}$$
$$u = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow u + v = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{t_1 + t_2}_{r \in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in U$$
$$(UV2): \checkmark dau \in U \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \quad u = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ,\lambda \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \lambda u = \underbrace{\lambda t}_{\tilde{r} \in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in U$$
$$\Rightarrow u \text{ ist } UVR$$

2)

$$U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}\},\ UVR \text{ von } \mathbb{R}?$$
$$(UV0): \lightning, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow 0 = 1 \quad \lightning$$

3)

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} UVR \text{ vom } \mathbb{R}^2?$$
$$(UV0): \checkmark (0,0) \in U,\ da\ 0 = 0^2$$
$$(UV2): ⚡\ (2,4) \in U\ da\ 4 = 2^2$$
$$\lambda \in \mathbb{R} = 3 \Rightarrow 3(2,4) = (6,12) \notin U\ da\ 12 \neq 6^2 \Rightarrow kein\ UVR$$

4)

$$U_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}\}, \quad U_2 = \{x \in \mathbb{R} : x = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}\}$$
$$U_1,\ U_2\ UVR\ von\ \mathbb{R}^2$$
$$\text{a) } U_1 \cap U_2 = \{(0,0)\}\ UVR\ von \mathbb{R}^2$$
$$\text{b) } U_1 \cup U_2 = \{x = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vee x = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ r,\ s \in \mathbb{R}\}$$
$$(UV0): \checkmark r = 0 \wedge s = 0$$
$$(UV2): \checkmark$$
$$(UV1): ⚡\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u + v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_1 \cup U_2$$

5)

$$V = \{f : f : [-1,1] \to \mathbb{R}\}$$
$$U = \{\underbrace{f}_{\text{wahrscheinlich g}} : [-1,1] \to \mathbb{R} : f(0) = 0\},\ UVR \text{ von } V?$$
$$(UV0): \checkmark da\ f(x) = 0 \forall x \in [-1,1] \in U$$
$$(UV1): \checkmark f,\ g \in U \Rightarrow f(0) = 0 \wedge g(0) = 0$$
$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$$
$$\Rightarrow f + g \in U$$
$$(UV2): \checkmark f \in U,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0) = 0 = (\lambda f)(0)$$
$$= \lambda f(0) = \lambda 0 = 0 = rf \in U$$

kontrollieren, irgendwie komisch

7.1.2 Integralrechnung

7.1.2.1 $\int_1^2 \frac{ln(t)}{t} dt$

$$s = ln(t) \Rightarrow \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = \frac{1}{t} dt$$
$$Grenzen: t{=}\ 1, t = 2 \to s = ln(1), s = ln(2)$$
$$\int_1^2 \frac{ln(t)}{t} dt = \int_1^2 ln(t) \frac{1}{t} dt = \int_{ln(1)}^{ln(2)} s ds = \frac{1}{2} s^2 \Big|_{s=ln(1)=0}^{ln(2)} = \frac{1}{2} (ln(2))^2 \qquad (7.1.3)$$

Bauart des Integrals: $\int h(t) h'(t) dt$

7.1.2.2 $\int_0^{\frac{1}{2}} tan(t)dt$

$$s = cos(t) \rightarrow \frac{ds}{dt} = -sin(t) \rightarrow ds = -sin(t)dt$$

$$Grenzen: t = 0, t = 1 \rightarrow s = cos(0), s = cos(\frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} tan(t)dt = \int_0 \frac{1}{2}\frac{sin(t)}{cos(t)}dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{cos(t)} sin(t)dt = -\int_{cos(0)}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{s}ds$$

$$= -ln(s)\Big|_{s=cos(0)}^{cos(\frac{1}{2})} = -ln(cos(\frac{1}{2})) + ln(\underbrace{cos(0)}_{=1}) \tag{7.1.4}$$

Bauart des Integrals: $\int \frac{1}{h(t)} h'(t)dt$

7.1.2.3 $\int 4xe^{-x}dx$

$$\int 4xe^{-x}dx = 4\int \underset{u}{x}\underset{v'}{e^{-x}}dx \overset{p.I.}{=} \underset{u}{x}\underset{v}{-e^{-x}} - 4\int \underset{u'}{1}\underset{v}{-e^{-x}}\,dx$$

$$= -4xe^{-x} - 4e^{-x} + C \qquad C \in \mathbb{R} \tag{7.1.5}$$

7.1.2.4 $\int_0^{\pi}(x+3)cos(2x)dx)$

$$\int_0^{\pi} \underset{u}{(x+3)}\underset{v'}{cos(2x)}dx \overset{p.I.}{=} \underbrace{\underset{u}{(x+3)} * \frac{1}{2}\underset{v}{sin(2x)}\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \underset{u'}{1} * \underset{v}{sin(2x)}$$

$$= \frac{1}{4}\,cos(2x)\Big|_0^{\pi} = 0 \tag{7.1.6}$$

7.1.2.5 $\int cos^2(x)dx$

$$\int cos^2(x)\,dx = \int \underset{u}{cos(x)} * \underset{v'}{cos(x)}\,dx \overset{p.I.}{=} \underset{u}{cos(x)} * \underset{v}{sin(x)} - \int \underset{u'}{(-sin(x))} * \underset{v}{sin(x)}\,dx$$

$$= cos(x)sin(x) + \int \underbrace{sin^2(x)}_{=1-cos^2(x)}\,dx = cos(x)sin(x) + \int 1dx - \int cos^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int cos^2(x)\,dx = cos(x)sin(x) + x + \tilde{c} \qquad , \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int cos^2(x)\,dx = \frac{cos(x)sin(x) + x}{2} + C \qquad , C \in \mathbb{R} \tag{7.1.7}$$

7.1.2.6 $\int_0^1 xarctan(x)dx$

$$\int_0^1 \underset{u'}{x}\underset{v}{arctan(x)}dx \overset{p.I.}{=} \frac{1}{2} * \underset{u}{x^2}\underset{v}{arctan(x)}\Big|_0^1 - \int_0^1 \underset{u}{\frac{1}{2}x^2}\underset{v'}{\frac{1}{1+x^2}}dx$$
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 1dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} * (x\Big|_0^1) + \frac{1}{2}actan(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} * \frac{\pi}{8}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \tag{7.1.8}$$

7.1.2.7 $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}dx$

$$\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}dx = ln(|x^2+2x-1|) + C \qquad , C \in \mathbb{R} \tag{7.1.9}$$

Da das Integral über einen Ausdruck der Form $\frac{f'(x)}{f(x)}$ gebildet wird gilt (4.4.2). Alternativ Substitution:

$$y = x^3 + 2x - 1 \Rightarrow dy = (3x^2+2)dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy$$

7.1.2.8 $\int cos(x)e^{3sin(x)}dx$

$$y = 3sin(x) \Rightarrow dy \;\; = 3cos(x)dx$$
$$\int cos(x)e^{3sin(x)}dx \overset{subs.}{=} \frac{1}{3}\int e^y dy$$
$$= \frac{1}{3}e^y + C \underset{R.s.}{=} \frac{1}{3}e^{3sin(x)} + C \qquad , \; C \in \mathbb{R} \tag{7.1.10}$$

7.1.2.9 $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}dx$

$$x = 2sin(y) \Rightarrow dx \;\; =2cos(y)dy$$
$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}dx \underset{subs.}{=} \int \frac{1}{(y^2+1)\cancel{y}}2\cancel{y}dy = 2\int \frac{1}{1+y^2}\,dy$$
$$= 2 * arctan(y) + C = 2 * arctan(\sqrt{1+x} + C, \; C \in \mathbb{R} \tag{7.1.11}$$

7.1.2.10 $\int \sqrt{4+x^2}\ dx$

$$
\begin{aligned}
x = 2sin(y) \Rightarrow dx\ &= 2cos(y)dy\\
\int \sqrt{4+x^2}\ dx &\overset{subs.}{=} \int \sqrt{4-4sin^2(y)} * 2cos(y)\ dy\\
&= \int \sqrt{4cos^2(y)}2cos(y)\ dy = 4\int cos^2(y)\ dy\\
&\overset{p.I.}{=} 4*(\underset{u}{cos(y)} * \underset{v}{sin(y)} - \int \underset{u'}{(-sin(y))} * \underset{v}{sin(y)}\ dy)\\
&\Rightarrow 4\int cos^2(y)dy = cos(y)sin(y) + \int 1dy - \int cos^2(y)\ dy\\
&\Rightarrow 5\int cos^2(y)\ dy = cos(y)sin(y) + y + \tilde{c} \qquad ,\tilde{c} \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow \int cos^2(y)\ dy = \frac{cos(y)sin(y)+x}{5} + C \qquad ,C \in \mathbb{R}
\end{aligned}
\tag{7.1.12}
$$

7.1.2.11 $\int_{-3}^{3} 1 + e^{x^2} * (sin(x)^3\ dx$

$$
\begin{aligned}
\int_{-3}^{3} 1 + e^{x^2} * (sin(x)^3\ dx &= \underbrace{\int_{-3}^{3} 1dx}_{=6} + \underbrace{\int_{-3}^{3} e^{x^2} * (sin(x))^2 dx}_{=0 \text{ da der Integrand eine ungerade Funktion ist}}\\
&= 6
\end{aligned}
\tag{7.1.13}
$$

Untersucht man den Integranden, stellt man seine Ungeradheit leicht fest.

$$
\begin{aligned}
sin(x) &\Rightarrow ungerade\\
sin^2(x) &\Rightarrow gerade\\
sin^3(x) &\Rightarrow ungerade
\end{aligned}
$$

Funktionen verhalten sich im Bezug auf Ungeradheit zur Multiplikation ähnlich wie Vorzeichen. $((-)*(-) = (+);\ (-)*(+) = (-))$ Untersucht man weiterhin die e-Funktion stellt man fest, dass sie gerade ist:

$$f(x) = e^{x^2} = e^{(-x)^2} = f(-x) \Rightarrow gerade\ Funktion$$

Da also eine gerade mit einer ungeraden Funktion multipliziert wird ist das Ergebnis wiederrum ungerade.

7.1.3 Separierbare DGL

1)

$$
\begin{aligned}
y' &= t(1+y) \qquad , \; y(0) = 1 \\
&\int \frac{1}{1+y} dy = \int t dt + C \qquad , \; C \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow ln|1+y| = \frac{1}{2}t^2 + C \Rightarrow |1+y| = e^{\frac{1}{2}t^2+C} \\
&\Rightarrow y = e^C e^{\frac{1}{2}t^2} - 1 \Rightarrow y(t) = \underbrace{d}_{\in \mathbb{R}^+} e^{\frac{1}{2}t^2} - 1 \qquad \text{Anfangsbedingungen: } y(0) = 1 = d - 1 \Rightarrow d =
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
y' &= e^{-y} \qquad , \; y(2) = 0 \\
&\int \frac{1}{e^{-y}} dy = \int 1 dt + C \qquad , \; C \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \int e^y dy = e^y = t + C \\
&\Rightarrow y(t) = ln(t+C), \quad y(2) = ln(2+C) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C = -1 \\
&\Rightarrow y(t) = ln(t-1)
\end{aligned}
$$

3)

$$
\begin{aligned}
y' - y^2 &= 1 \qquad , \; y(0) = 1 \\
&y' = y^2 + 1 \Rightarrow \int \frac{1}{1+y^2} dy = \int 1 dt + C \qquad , \; C \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow arctan(y) = t + C \Rightarrow y(t) = tan(t+C) \\
&y(0) = tan(C) \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y(t) = tan(t + \frac{\pi}{4})
\end{aligned}
$$

7.2 Formelverzeichnis

7.3 Nachwort

Dieses Dokument versteht sich einzig als Zusammenfassung der Vorlesungsunterlagen aus der HM1-3 Vorlesung von Prof. Dr. Guido Schneider mit einigen zusätzlichen Beispielen. Der Sinn ist einzig mir selbst und meinen Kommilitonen das studieren der Mathematik zu erleichtern. In diesem Sinne erhebe ich keinerlei Anspruch auf das hier dargestellte Wissen, da es sich in großen Teilen nur um Neuformulierungen aus der Vorlesung und aus dem Begleitkurs vom Mint Kolleg handelt, in dem Frau Dr. Monika Schulz den Stoff bereits hervorragend zusammengefasst hat. Sollten sich einige Fehler eingeschlichen haben (was sehr wahrscheinlich ist) würde ich mich freuen, wenn man mir das kurz mitteilen würde damit ich eine Korrektur vornehmen kann. Das kann entweder über die Fachschaft erfolgen, oder gerne per E-Mail an f.leuze@outlook.de.

8 Literatur

Fischer, G. (2014), *Lineare Algebra*, 18 edn, Springer Spektrum.

Schneider, P. D. G. (2018), 'Hm1-2 script'. Vorlesungsscript.

Wikimedia-Foundation (2018), 'Partition (mengenlehre)', https://de.wikipedia.org/wiki/Partition_(Mengenlehre). Accessed: 2018-04-20.