

# HM1-2 Kurzzusammenfassung

Florian Leuze

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>9</b>
<b>1 Allgemeines</b>	<b>11</b>
1.1 Trigonometrie . . . . .	11
1.1.1 Winkelfunktionen . . . . .	11
1.1.1.1 Wichtige Werte . . . . .	11
1.1.2 Sinussatz . . . . .	11
1.1.3 Cosinussatz . . . . .	11
1.1.4 Tangenssatz . . . . .	12
1.1.5 Umwandlung . . . . .	12
1.1.6 Additionstheoreme . . . . .	12
1.1.7 Folgerungen aus den Additionstheoremen . . . . .	13
<b>2 HM1</b>	<b>14</b>
2.1 Zahlen . . . . .	14
2.1.1 Zahlbereiche . . . . .	14
2.1.1.1 Natürliche Zahlen . . . . .	14
2.1.1.2 Ganze Zahlen . . . . .	14
2.1.1.3 Rationale Zahlen . . . . .	14
2.1.1.4 Reelle Zahlen . . . . .	14
2.1.1.5 Komplexe Zahlen . . . . .	14
2.1.2 Algebraische Strukturen . . . . .	15
2.1.2.1 Gruppe . . . . .	15
2.1.2.1.1 Gruppenaxiome . . . . .	15
2.1.2.2 Ring . . . . .	15
2.1.2.3 Körper . . . . .	15
2.1.2.3.1 Körperaxiome . . . . .	16
2.1.3 Komplexe Zahlen . . . . .	16
2.1.3.1 Betrag der komplexen Zahl . . . . .	16
2.1.3.1.1 Eigenschaften . . . . .	16
2.1.3.2 Komplex konjugierte Zahl . . . . .	16
2.1.3.2.1 Eigenschaften . . . . .	17
2.1.3.3 Polarkoordinatendarstellung . . . . .	17
2.1.3.4 Multiplikation . . . . .	17
2.1.3.5 Formel von de Moivre . . . . .	17
2.1.4 Polynome . . . . .	18

---

## INHALTSVERZEICHNIS

---

2.1.4.1	Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	18
2.1.4.2	Polynomdivision . . . . .	18
2.1.5	Einheitswurzeln . . . . .	19
2.2	Lineare skalare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienzen	20
2.2.1	Ansätze . . . . .	20
2.2.2	Vorgehensweise . . . . .	21
2.2.2.1	Anfangswertproblem . . . . .	22
2.2.2.2	Inhomogenität . . . . .	22
2.3	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	23
2.3.1	Gauss Algorithmus . . . . .	23
2.3.1.1	Lößbarkeit . . . . .	23
2.4	Analytische Geometrie . . . . .	24
2.4.1	Dreidimensionaler Raum . . . . .	24
2.4.1.1	Abstand . . . . .	24
2.4.1.2	Vektoren . . . . .	24
2.4.1.3	Skalarprodukt . . . . .	24
2.4.1.4	Vektor- bzw. Kreuzprodukt . . . . .	25
2.4.1.5	Spatprodukt . . . . .	25
2.4.2	Geraden im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	25
2.4.2.1	Parameterdarstellung . . . . .	25
2.4.2.2	Darstellung in Gleichungs- bzw. Normalform . . . . .	26
2.4.2.3	Hessesche Normalform . . . . .	26
2.4.2.4	Minimaler Abstand . . . . .	26
2.4.2.5	Abstand eines Punktes zur Gerade . . . . .	26
2.4.3	Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	27
2.4.3.1	Parameterdarstellung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	27
2.4.3.2	Koordinatendarstellung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	27
2.4.3.3	Parameterdarstellung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	27
2.4.3.4	Gleichungsdarstellung bzw. Hessesche Normalform einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	27
2.4.4	Schnitte . . . . .	28
2.4.4.1	Schnitt zweier Ebenen . . . . .	28
2.4.4.2	Schnitt einer Gerade mit einer Ebene . . . . .	29
2.4.4.3	Schnitt zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	29
2.4.4.4	Abstand zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	29
2.5	Logik und Beweise . . . . .	30
2.5.1	Wahrheitswerte . . . . .	30
2.5.1.1	Tautologien . . . . .	30
2.5.1.2	Umformungen . . . . .	30
2.5.2	Vollständige Induktion . . . . .	31
2.5.2.1	Vorgehen . . . . .	31
2.5.2.2	Beispiel 1 . . . . .	31
2.5.3	Binomialkoeffizienten . . . . .	32
2.6	Mengen, Relationen und Abbildungen . . . . .	33
2.6.1	Arten von Mengen . . . . .	33
2.6.1.1	Abkürzungen . . . . .	33

---

---

## INHALTSVERZEICHNIS

---

2.6.2	Relationen . . . . .	33
2.6.2.1	Äquivalenzrelationen . . . . .	34
2.6.2.2	Ordnungsrelationen . . . . .	34
2.6.3	Maximum, Minimum, Supremum, Infimum . . . . .	35
2.6.4	Abbildungen . . . . .	36
2.6.5	Unendlichkeit . . . . .	36
2.6.6	Elementare realwertige Funktionen . . . . .	36
2.6.6.1	Algebraische Funktionen . . . . .	36
2.6.6.1.1	Polynome (+,-,·) . . . . .	36
2.6.6.1.2	Rationale Funktionen (+,-,·, \) . . . . .	37
2.6.6.1.3	n-te Wurzel . . . . .	37
2.6.6.2	Transzendentale Funktionen . . . . .	37
2.6.6.2.1	Exponentialfunktionen . . . . .	37
2.6.6.2.2	Unendliche Summen . . . . .	37
2.6.6.2.3	(Natürlicher) Logarithmus . . . . .	38
2.6.6.2.4	Trigonometrische Funktionen . . . . .	38
2.6.6.2.5	Weitere trigonometrische Funktionen . . . . .	39
2.6.6.2.6	Hyperbolische Funktionen . . . . .	40
2.7	Konvergente Folgen . . . . .	41
2.7.1	Vergleich expliziter und rekursiver Darstellung . . . . .	41
2.7.2	Definitionen $\varepsilon - N$ -Kriterium/Konvergenzkriterium . . . . .	41
2.7.3	Ausdrücke mit Brüchen . . . . .	42
2.7.4	Dreiecksungleichung . . . . .	42
2.7.5	Beschränktheit . . . . .	42
2.7.6	Grenzwertsätze . . . . .	42
2.7.6.1	Beispiele wichtiger Grenzwerte . . . . .	43
2.7.7	Konvergenzsätze . . . . .	44
2.7.8	Monotone Folgen . . . . .	44
2.7.8.1	Intervallschachtelung . . . . .	44
2.8	Ableitung . . . . .	45
2.8.1	Differenzenquotient/Differentialquotient . . . . .	45
2.8.2	Stetigkeit . . . . .	45
2.8.3	Wichtige Ableitungen . . . . .	46
2.8.4	Ableitungsregeln . . . . .	46
2.8.5	Mittelwertsätze . . . . .	47
2.8.6	Monotonie . . . . .	47
2.8.7	Das Prinzip von l'Hospital . . . . .	48
2.9	Taylorpolynome . . . . .	49
2.10	Reihen . . . . .	50
2.10.1	Satz von Bolzano-Weierstraß (Kompaktheitssatz) . . . . .	50
2.10.2	Häufungspunkte . . . . .	50
2.10.3	Cauchy-Folgen . . . . .	50
2.10.4	Reihen reeller Zahlen . . . . .	51
2.10.4.1	Wichtige Reihen . . . . .	52
2.10.4.2	Konvergenzen und Divergenzen ausgewählter Reihen	52
2.10.4.3	Leibnizkriterium für alternierende Reihen . . . . .	52

---

---

## INHALTSVERZEICHNIS

---

2.10.5 Absolut konvergente Reihen . . . . .	52
2.10.5.1 Konvergenzkriterien . . . . .	53
2.10.6 Umordnung von Reihen . . . . .	54
2.10.7 Potenzreihen . . . . .	54
2.10.7.1 Taylorreihe . . . . .	54
2.10.7.2 Konvergenz der Potenzreihen . . . . .	55
2.11 Stetigkeit . . . . .	56
2.11.1 Arten von Unstetigkeiten . . . . .	56
2.11.2 Nullstellensatz und Zwischenwertsatz . . . . .	57
2.11.2.1 Sätze zu Stetigkeit und Monotonie . . . . .	57
2.12 Extremalprobleme . . . . .	59
2.13 Funktionenfolgen . . . . .	60
<b>3 HM2</b>	<b>61</b>
3.1 Integralberechnung . . . . .	61
3.1.1 Unbestimmtes Integral . . . . .	61
3.1.2 Bestimmtes Integral . . . . .	61
3.1.3 Partielle Integration . . . . .	61
3.1.4 Integration durch Substitution . . . . .	61
3.1.4.1 Spezialfall . . . . .	61
3.1.5 Gerade/Ungerade Funktionen . . . . .	62
3.1.6 Allgemeines zur Integration . . . . .	62
3.1.6.1 Riemann Integrierbarkeit . . . . .	62
3.1.6.1.1 Riemannsches Unterintegral . . . . .	62
3.1.6.1.2 Riemannsches Oberintegral . . . . .	62
3.1.6.1.3 Riemannsche Untersumme . . . . .	62
3.1.6.1.4 Riemannsche Obersumme . . . . .	62
3.1.6.1.5 Eigenschaften . . . . .	63
3.1.6.1.6 Kriterien zur Riemann-Integrierbarkeit . .	63
3.1.6.2 MWS der Integralrechnung . . . . .	64
3.1.6.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung .	64
3.1.6.3.1 Folgerungen . . . . .	64
3.1.7 Partialbruchzerlegung . . . . .	64
3.1.8 Uneigentliche Integrale . . . . .	65
3.1.8.1 Typen uneigentlicher Integrale . . . . .	65
3.1.9 Wichtige Integrale . . . . .	66
3.1.10 Separierbare DGL . . . . .	67
3.1.10.1 Wiederholung klassische DGL . . . . .	67
3.1.10.2 Lösen von DGL mit Koeffizienten die von t abhängig sind . . . . .	67
3.2 Lineare Algebra . . . . .	68
3.2.1 Definitionen . . . . .	68
3.2.1.1 Linearkombinationen . . . . .	68
3.2.1.2 Spann und Erzeugendensystem . . . . .	68
3.2.1.3 Lineare Unabhängigkeit . . . . .	68
3.2.1.4 Basis . . . . .	68

---

3.2.1.5	Kanonische Basis . . . . .	69
3.2.2	Vektorräume . . . . .	69
3.2.2.1	Definitionen . . . . .	69
3.2.2.1.1	$\mathbb{R}^d$ . . . . .	69
3.2.2.1.2	Vektoraddition . . . . .	69
3.2.2.1.3	Skalare Multiplikation . . . . .	69
3.2.2.1.4	Nullvektor . . . . .	69
3.2.2.2	Struktur . . . . .	70
3.2.2.3	Untervektorraum . . . . .	70
3.2.2.3.1	Untervektorraumkriterien . . . . .	70
3.2.2.3.2	Triviale UVR von V . . . . .	71
3.2.2.3.3	Interessante Untervektorräume . . . . .	71
3.2.3	Erzeugendensystem, Basis, Dimension, Kern lineare Unabhängigkeit . . . . .	71
3.2.3.1	Linearkombination, Spann . . . . .	71
3.2.3.2	Lineare Unabhängigkeit . . . . .	71
3.2.3.3	Dimension . . . . .	72
3.2.3.4	Kern . . . . .	72
3.2.3.5	Rang . . . . .	72
3.2.3.6	Basis . . . . .	72
3.2.3.6.1	Folgerungen . . . . .	72
3.2.3.6.2	Matrixdarstellung einer linearen Abbildung bezüglich zweier Basen . . . . .	73
3.2.4	Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme . . . . .	74
3.2.4.1	Zeilenvektoren . . . . .	74
3.2.4.2	Gauss Algorithmus . . . . .	74
3.2.4.3	Gauss-Algorithmus: Spann . . . . .	74
3.2.4.4	Gauss-Algorithmus: Dimension, Rang . . . . .	75
3.2.4.5	Folgerungen . . . . .	75
3.2.5	Lineare Abbildungen und Matrizen . . . . .	75
3.2.5.1	Das Matrizenkalkül . . . . .	76
3.2.5.2	Rechenregeln . . . . .	77
3.2.5.3	Einheitsmatrix . . . . .	77
3.2.5.4	Inverse Matrix . . . . .	77
3.2.5.4.1	Bestimmung der Inversen bei $n \times n$ Matrizen	77
3.2.5.4.2	Inverse bei $2 \times 2$ Matrizen . . . . .	77
3.2.5.5	Symmetrische Matrizen . . . . .	77
3.2.5.6	Schiefsymmetrische Matrizen . . . . .	78
3.2.5.7	Hermitesche Matrizen . . . . .	78
3.2.5.8	Transposition . . . . .	78
3.2.6	Determinanten . . . . .	78
3.2.6.1	Bestimmung der Determinanten . . . . .	78
3.2.6.1.1	Determinante einer $2 \times 2$ Matrix . . . . .	78
3.2.6.1.2	Determinante einer $3 \times 3$ Matrix . . . . .	79
3.2.6.1.3	Determinante einer Matrix $> 3 \times 3$ . . . . .	79
3.2.7	Eigenwerttheorie . . . . .	79

---

---

## INHALTSVERZEICHNIS

---

3.2.7.1	Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	80
3.2.7.2	Basis des Eigenraumes bestimmen . . . . .	80
3.2.7.3	Orthonormalbasis des Eigenraumes bestimmen (Gram-Schmidt) . . . . .	80
3.2.7.4	Projektion . . . . .	81
3.2.8	Differentialgleichungssysteme . . . . .	82
3.2.9	Quadriken bestimmen . . . . .	82
3.2.9.1	Methode . . . . .	82
3.2.9.2	Normalformen von Quadriken im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	83
3.2.9.3	Normalformen von Quadriken im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	84
3.2.10	Äquivalenzaussagen . . . . .	84
3.3	Mehrdimensionale Analysis . . . . .	85
3.3.1	Partielle Ableitung . . . . .	85
3.3.1.1	Gradient und Nabla Operator . . . . .	85
3.3.1.2	Jacobi Matrix . . . . .	85
3.3.2	Richtungsableitung . . . . .	86
3.3.3	Mehrdimensionale Kettenregel . . . . .	86
3.3.4	Wichtige Operatoren . . . . .	87
3.3.4.1	Divergenz . . . . .	87
3.3.4.2	Laplace-Operator . . . . .	87
3.3.4.3	Rotation . . . . .	88
3.3.5	Lemma von Schwarz . . . . .	88
3.3.6	Taylorscher Satz . . . . .	88
3.3.6.1	Wiederholung eindimensionaler Taylorscher Satz . . . . .	88
3.3.6.2	Mehrdimensionaler Mittelwertsatz . . . . .	88
3.3.6.3	Mehrdimensionaler Taylorscher Satz . . . . .	88
3.3.6.4	Wichtige 1-dim Reihen . . . . .	89
3.3.7	Mehrdimensionale Extremwertaufgaben . . . . .	90
3.3.7.1	Hesse Matrix . . . . .	90
3.3.7.2	Untersuchung nach Extremwerten . . . . .	91
3.3.8	Satz über implizite Funktionen . . . . .	92
3.3.8.1	Satz über implizite Funktionen für Gleichungssysteme . . . . .	92
3.3.8.1.1	Vorgehen für die Konstruktion einer Tangente . . . . .	92
3.3.8.1.2	Anwenden des Satzes . . . . .	93
3.3.8.1.3	Vorgehen für Systeme . . . . .	94
3.3.9	Fixpunktsatz . . . . .	94
3.3.10	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen . . . . .	95
3.3.10.1	Lagrangemultiplikatoren . . . . .	95
3.3.11	Kurven und Bogenlängen . . . . .	96
3.3.11.1	Kurve . . . . .	96
3.3.11.2	Länge von Kurven . . . . .	96
3.3.11.3	Flächen geschlossener ebener Kurven . . . . .	98
3.3.12	Wegintegrale . . . . .	98
3.3.12.1	Wegintegral erster Art . . . . .	98

---

---

## INHALTSVERZEICHNIS

---

3.3.12.2 Wegintegrale zweiter Art . . . . .	99
3.3.12.3 Potential . . . . .	100
3.3.12.3.1 Berechnung von Potentialen . . . . .	100
3.4 Nachwort . . . . .	102
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>103</b>

## **Versionierung**

Datum	Vers.	Kürzel	Änderung
19.04.2018	0.1	FL	Erzeugung Dokument; Erzeugung Inhaltsverzeichnis; Erzeugung Versionierung; Erzeugung 2.1 - 2.7.4
19.04.2018	0.2	FL	Korrekturen 2.6.1 - 2.6.9 u. 2.7.1 - 2.7.2 Titel
20.04.2018	0.2.1	FL	Erzeugung 2.7.1.1 - 2.7.1.4; Korrektur Riemannsche Untersumme; Erzeugung Literaturverzeichnis
01.05.2018	0.2.2	FL	Neustrukturierung; Erzeugung Allgemeines; Erzeugung Zahlen
23.06.2018	0.2.3	FL	Neustrukturierung; Löschung HM1 Stoff; Erzeugung HM2 Stoff
23.06.2018	0.2.4	FL	Kleinere Korrekturen
27.06.2018	0.2.5	FL	Hinzugefügt: Bem. 2.8, 3.1, 3.2, 3.3, 3.8, 3.9.1 Schritt 5, 3.9.2 (Quadriken im $\mathbb{R}^2$ ; Korrekturen: 3.6.1.1 Fehler in Formel korrigiert, 3.6.1.3 Tippfehler korrigiert
27.06.2018	0.2.6	FL	Bem. 3.6 korrigiert
01.08.2018	0.3.0	FL	Überarbeitung Trigonometrie
04.08.2018	0.3.1	FL	Erzeugung lin. skal. Diffgleichungen, LGS
05.08.2018	0.3.2	FL	Erzeugung Analytische Geometrie; Erzeugung Logik und Beweise
06.08.2018	0.3.3	FL	Erzeugung Mengen, Relationen und Abbildungen, Erzeugung konvergente Folgen
07.08.2018	0.3.4	FL	Erzeugung el. realw. Funktionen, Ableitung; Fertigstellung konvergente Folgen
08.08.2018	0.3.5	FL	Erzeugung Ableitung, Taylorpolynome und Reihen.
09.08.2018	0.4.0	FL	Umordnung von Reihen, Stetigkeit, Extremalprobleme, Funktionenfolgen; Korrekturen am Layout
09.08.2018	0.4.2	FL	Korrekturen am Layout
09.08.2018	0.4.3	FL	Korrektur Def.7.8
13.08.2018	0.3	FL	Erzeugung Mehrd. Extremw., Satz über impl. Funkt., Extremwertaufgaben mit Nebenbe., Kurven/Bogenl., Wegintegrale
13.08.2018	0.3.1	FL	Kleinere Korrekturen
13.08.2018	0.3.2	FL	Korrektur Layout

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Gerade im $\mathbb{R}^2$ (Schneider 2018) . . . . .	26
2.2	Ebenen im $\mathbb{R}^3$ (Schneider 2018) . . . . .	28
2.3	Schnittwinkel zweier Ebenen(Gauss 2017) . . . . .	28
2.4	Abstand zweier Geraden $\mathbb{R}^3$ . . . . .	29
2.5	Arten von Mengen(Schneider 2018) . . . . .	33
2.6	$y = x^2$ (vgl. $x^4, x^6, \dots$ ) . . . . .	36
2.7	$y = x^3$ (vgl. $x^5, x^7, \dots$ ) . . . . .	36
2.8	$y = ax + b$ . . . . .	36
2.9	$y = \frac{1}{x}$ . . . . .	37
2.10	$y = \frac{1}{x^2}$ . . . . .	37
2.11	Quadratwurzel . . . . .	37
2.12	Kubische Wurzel . . . . .	37
2.13	Grün: $y = e^x$ ; Rot: $y = \ln(x)$ . . . . .	38
2.14	Grün: 1; Rot: $\sin(x)$ ; Blau: $\cos(x)$ . . . . .	38
2.15	Sinusfunktion . . . . .	39
2.16	Cosinusfunktion . . . . .	39
2.17	Ableitungsregel . . . . .	39
2.18	$\tan(x)$ . . . . .	39
2.19	$y = \cosh(x)$ . . . . .	40
2.20	$y = \sinh(x)$ . . . . .	40
2.21	$y = \tanh(x)$ . . . . .	40
2.22	Epsilon Kriterium(Schneider 2018) . . . . .	42
2.23	derp derp derp . . . . .	42
2.24	Konvergenz mw u. beschr. Folgen(Schneider 2018) . . . . .	44
2.25	Lokales Minimum/Maximum(Schneider 2018) . . . . .	47
2.26	Zu a) (Schneider 2018) . . . . .	47
2.27	Zu b) (Schneider 2018) . . . . .	47
2.28	Potenzradius in $\mathbb{R}$ (Schneider 2018) . . . . .	55
2.29	Potenzradius in $\mathbb{C}$ (Schneider 2018) . . . . .	55
2.30	$f(x) = \frac{ x }{x}$ (Sprungstelle) . . . . .	56
2.31	$f(x) = \frac{1}{x}$ (Polstelle) . . . . .	56
2.32	$f(x) = \frac{x^3}{x}$ (Lücke) . . . . .	56
2.33	Zu a) (Nullstellensatz) (Schneider 2018) . . . . .	57
2.34	Zu b) (Zwischenwertsatz) (Schneider 2018) . . . . .	57
2.35	$\varepsilon - \delta$ Kriterium (Schneider 2018) . . . . .	58
2.36	Zu a) (Lipschitzstetigkeit) (Schneider 2018) . . . . .	58

## *ABBILDUNGSVERZEICHNIS*

---

2.37 Zu b) (Hölder-Stetigkeit) (Schneider 2018) . . . . .	58
2.38 Epsilonkanal Funktionenfolge (Schneider 2018) . . . . .	60
3.1 Kurvenlänge . . . . .	97
3.2 Graphische Interpretation . . . . .	98
3.3 Interpretation von (3.3.12.1) . . . . .	98
3.4 Visualisierung zusammenhängend (Schneider 2018) . . . . .	100
3.5 Visualisierung einfach zusammenhängend (Schneider 2018) . . . . .	101

# Kapitel 1

## Allgemeines

### 1.1 Trigonometrie

#### 1.1.1 Winkelfunktionen

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad (1.1.1.1)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad (1.1.1.2)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (1.1.1.3)$$

##### 1.1.1.1 Wichtige Werte

$\alpha$ in Gradmaß	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\alpha$ in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.

#### 1.1.2 Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{abc}{2F} \quad (1.1.2.1)$$

#### 1.1.3 Cosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha \quad (1.1.3.1)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2cacos\beta \quad (1.1.3.2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma \quad (1.1.3.3)$$

### 1.1.4 Tangenssatz

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} = \frac{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \quad (1.1.4.1)$$

Analog für  $\frac{a+b}{a-b}$  und  $\frac{a+c}{a-c}$ .

### 1.1.5 Umwandlung

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (1.1.5.1)$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad (1.1.5.2)$$

$$1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} = \sec^2(\alpha) \quad (1.1.5.3)$$

$$1 + \cot^2(\alpha) = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} = \csc^2(\alpha) \quad (1.1.5.4)$$

### 1.1.6 Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \quad (1.1.6.1)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \quad (1.1.6.2)$$

$$(1.1.6.3)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} \quad (1.1.6.4)$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot(x)\cot(y) \mp 1}{\cot(y) \pm \cot(x)} = \frac{\cos(x \pm y)}{\sin(x \pm y)} \quad (1.1.6.5)$$

$$(1.1.6.6)$$

$$\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \cos^2(y) - \cos^2(x) = \sin^2(x) - \sin^2(y) \quad (1.1.6.7)$$

$$\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) = \cos^2(y) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(y) \quad (1.1.6.8)$$

### 1.1.7 Folgerungen aus den Additionstheoremen

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad (1.1.7.1)$$

$$\stackrel{(1.1.6.8)}{=} \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos(0) = 1 \quad (1.1.7.2)$$

(1.1.7.3)

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad (1.1.7.4)$$

$$\stackrel{(1.1.6.8)}{=} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \sin(x) \quad (1.1.7.5)$$

(1.1.7.6)

$$\sin(2x) = \sin(x+x) \stackrel{(1.1.6.8)}{=} \sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x) \quad (1.1.7.7)$$

$$= 2\sin(x)\cos(x) \quad (1.1.7.8)$$

# Kapitel 2

## HM1

### 2.1 Zahlen

#### 2.1.1 Zahlbereiche

##### 2.1.1.1 Natürliche Zahlen

- Direkt vom Zählen abgeleitet.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- Gleichungen wie  $n + x = m$  i.A. in  $\mathbb{N}$  nicht lösbar.

##### 2.1.1.2 Ganze Zahlen

- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Gleichungen wie  $n \cdot x = m$  i.A. in  $\mathbb{Z}$  nicht lösbar.

##### 2.1.1.3 Rationale Zahlen

- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, m, n \text{ teilerfremd} \right\}$
- Gleichungen wie  $x^2 = 2$  in  $\mathbb{Q}$  nicht lösbar.

##### 2.1.1.4 Reelle Zahlen

- $\mathbb{R} = \left\{ x = \sum_{j=-\infty}^n x_j 10^j : x_j \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ für ein } n \in \mathbb{Z} \right\}$
- Gleichungen wie  $x^2 = -1$  in  $\mathbb{R}$  nicht lösbar.

##### 2.1.1.5 Komplexe Zahlen

- $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$   $i$  heißt imaginäre Einheit, es gilt  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

## 2.1.2 Algebraische Strukturen

### 2.1.2.1 Gruppe

**Definition 2.1.1.** „Eine Menge  $M$  mit der Verknüpfung  $+ : M \times M \rightarrow M$ , deren Elemente die Eigenschaften (G1) – (G3) erfüllen, heißt Gruppe. Gilt zusätzlich (G4), so heißt  $(M, +)$  eine kommutative Gruppe.“ (Schneider 2018) In der Literatur findet man als alternative Bezeichnung kommutativ auch abelsch. (Vgl. Fischer 2014)

#### 2.1.2.1.1 Gruppenaxiome

- (G1)  $x + (y + z) = (x + y) + z$  (Assoziativgesetz)
  - (G2)  $x + 0 = x = 0 + x$  (0 ist das neutrale Element)
  - (G3)  $x + (-x) = (-x) + x = 0$  (-x ist das inverse Element zu x)
  - (G4)  $x + y = y + x$  (Kommutativität also Vertauschbarkeit)
- (2.1.2.1)

**Definition 2.1.2.** „Sei eine Gruppe eine Verknüpfung mit  $\cdot$  und  $G' \subset G$  eine nichtleere Teilmenge.  $G'$  heißt eine Untergruppe, wenn für  $a, b \in G'$  auch  $a \cdot b \in G'$  und  $a^{-1} \in G'$ . (Fischer 2014)

Im Bezug auf Gruppen und Ringe spielen die Begrifflichkeiten Isomorphismus und Homomorphismus eine Rolle. Beide Begriffe leiten sich von Morphismus (Struktur bzw. Form), Homo (gleich im Sinne von ähnlich) und Iso (gleich im Sinne von identisch) ab.

**Definition 2.1.3.** „Sind  $G$  und  $H$  Gruppen mit Verknüpfungen  $\cdot$  und  $\times$ , so heißt eine Abbildung  $\varphi : G \rightarrow H$  Homomorphismus (von Gruppen), wenn

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \times \varphi(b) \quad \forall a, b \in G. \text{ (Fischer 2014)} \quad (2.1.2.2)$$

Ein Homomorphismus heißt Isomorphismus wenn er bijektiv ist. (Fischer 2014)

### 2.1.2.2 Ring

**Definition 2.1.4.** Erfüllt eine Menge die Eigenschaften einer Gruppe, hat jedoch zwei Verknüpfungen (z.B.  $(+, -)$ ) spricht man von einem Ring.

### 2.1.2.3 Körper

**Definition 2.1.5.** Erfüllt eine Menge die Eigenschaften eines Ringes und ist zusätzlich kommutativ spricht man von einem Körper. Ein Beispiel für einen Körper ist die algebraische Struktur der rationalen und reellen Zahlen.

### 2.1.2.3.1 Körperaxiome

- |      |   |   |
|------|---|---|
| (K1) | $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$         | (Assoziativgesetz)                            |
| (K2) | $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$                         | (1 ist das neutrale Element)                  |
| (K3) | $x \cdot (\frac{1}{x}) = (\frac{1}{x}) \cdot x = 1$ | ( $\frac{1}{x}$ ist das inverse Element zu x) |
| (K4) | $x \cdot y = y \cdot x$                             | (Kommutativität also Vertauschbarkeit)        |
| (D)  | $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$           | (Kommutativität also Vertauschbarkeit)        |
- (2.1.2.3)

**Definition 2.1.6.** „Eine Menge  $M$  mit den Verknüpfungen  $+ : M \times M \rightarrow M$  und  $\cdot : M \times M \rightarrow M$ , deren Elemente die Gesetze (G1) – (G4), (M1) – M4) und (D) erfüllt, heißt Körper.“ (Schneider 2018)

## 2.1.3 Komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} \quad (2.1.3.1)$$

$$i^2 = 1 \quad (2.1.3.2)$$

Den Realteil einer komplexen Zahl  $z$  bezeichnet man i.A. mit  $x$ , den Imaginärteil mit  $y$ .

$$Re\{z\} = x \quad Im\{z\} = y \quad (2.1.3.3)$$

**Definition 2.1.7.** „Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn ihre Real- und Imaginärteile gleich sind.“ (Schneider 2018)

### 2.1.3.1 Betrag der komplexen Zahl

Da sich komplexe Zahlen geometrisch im  $\mathbb{R}^2$  interpretieren lassen, kann aus beiden Teilen ein Betragspfeil gebildet werden.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.1.3.4)$$

#### 2.1.3.1.1 Eigenschaften

$$|z| = 0 \quad (2.1.3.5)$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad (2.1.3.6)$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| \quad (2.1.3.7)$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \quad (2.1.3.8)$$

### 2.1.3.2 Komplex konjugierte Zahl

**Definition 2.1.8.** „ $\bar{z} = x - iy$  heißt die zu  $z = x + iy$  konjugiert komplexe Zahl.“ (Schneider 2018)

### 2.1.3.2.1 Eigenschaften

$$\bar{\bar{z}} = z \quad (2.1.3.9)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad (2.1.3.10)$$

$$Re\{z\} = \frac{1}{2}/z + \bar{z}), \quad Im\{z\} = \frac{1}{2i}/z - \bar{z}) \quad (2.1.3.11)$$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad (2.1.3.12)$$

### 2.1.3.3 Polarkoordinatendarstellung

$$z = x + iy = |z|(cos\varphi + isin\varphi) \quad (2.1.3.13)$$

$$\Rightarrow x = |z|cos\varphi, \quad \rightarrow y = |z|sin\varphi$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{x}{y} \quad (2.1.3.14)$$

Achtung. Die Umkehrfunktion von Tangens ist nicht eindeutig. Es gilt:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{x}{y}) & , x > 0, y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & , x = 0, y > 0 \\ \pi + \arctan(\frac{y}{x}) & , x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & , x = 0, y < 0 \\ 2\pi + \arctan(\frac{y}{x}) & , x > 0, y < 0 \end{cases} \quad (2.1.3.15)$$

### 2.1.3.4 Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(cos\varphi_1 + isin\varphi_1) \cdot |z_2|(cos\varphi_2 + isin\varphi_2) \quad (2.1.3.16)$$

$$\stackrel{(1.1.6.8)}{=} |z_1||z_2|(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (2.1.3.17)$$

$$\Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| \quad , \text{ Winkel} = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (2.1.3.18)$$

### 2.1.3.5 Formel von de Moivre

Setzt man in (2.1.3.18)  $z_1 = z_2 = z$  ein erhält man die Formel von de Moivre.

$$z \cdot z = z^2 = |z|^2(cos(2\varphi) + isin(2\varphi)) \quad , \text{ bzw.}$$

$$z^n = |z|^n(cos(n\varphi) + isin(n\varphi)) \quad , \text{ bzw.}$$

$$z^n = |z|^n(cos\varphi + isin\varphi)^n$$

$$\Rightarrow (cos\varphi + isin\varphi)^n = cos(n\varphi) + isin(n\varphi) \quad (2.1.3.19)$$

Mit der Eulerschen Formel erhält man  $e^{i\varphi} := cos\varphi + isin\varphi$ . Daraus folgt:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} \quad (2.1.3.20)$$

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} \quad (2.1.3.21)$$

$$e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}} \quad (2.1.3.22)$$

$$z_x = |z_x|e^{i\varphi_x} \Rightarrow z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \quad (2.1.3.23)$$

## 2.1.4 Polynome

Ein komplexes Polynom hat die Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (2.1.4.1)$$

$a_k \in \mathbb{C}$

Falls  $a_n \neq 0$  gibt  $n$  den Grad des Polynoms an.

**Definition 2.1.9.** „Ist  $p(z)$  ein reelles Polynom, d.h.  $a_k \in \mathbb{R}$ , dann ist mit  $z \in \mathbb{C}$  auch  $\bar{z} \in \mathbb{C}$  eine Nullstelle, d.h. aus  $p(z) = 0$  folgt  $p(\bar{z}) = 0$ , d.h. die Nullstellen sind konjugiert komplex zueinander.“ (Schneider 2018)

### 2.1.4.1 Fundamentalsatz der Algebra

**Satz 2.1.10.** Jedes Polynom vom Grad  $\geq 1$  besitzt in  $\mathbb{C}$  mindestens eine Nullstelle.

### 2.1.4.2 Polynomdivision

Über Polynomdivision lassen sich Polynome in Linearfaktoren zerlegen.

Bsp. :

$$(2z^3 - 3z^2 - 6z + 6) : (z - 2) = (2z^2 + z - 4) \quad , \text{ Rest: } -2$$

$$\begin{array}{r} -(2z^3 - 4z^2) \\ \hline 0 + z^2 - 6z + 6 \\ \hline z^2 - 2z \end{array}$$

(2.1.4.2)

Aus 2.1.10 folgt:

**Satz 2.1.11.** Jedes Polynom  $p$  vom Grad  $n \geq 1$  lässt sich über  $\mathbb{C}$  in Linearfaktoren zerlegen, d.h. es gibt Zahlen  $z_K$ , die Nullstellen von  $p$  sind, sodass

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$$

**Satz 2.1.12.**

- a) Besitzt ein Polynom  $p$  vom  $n$ -ten Grad  $n+1$  Nullstellen, so ist  $p = 0$
- b) Stimmen zwei Polynome  $p$  und  $q$  jeweils vom Grad  $n$  an  $n+1$  Stellen überein, so ist  $p = q$ .

### 2.1.5 Einheitswurzeln

Wurzeln der Form  $z^n = 1$  können allgemein einfach bestimmt werden. Mit  $|z^n| = |z|^n = 1$  folgt  $|z| = 1$ . Mit der eulerschen Identität folgt aus

$$\begin{aligned} z &= e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi = 1 = 1 + 0 \cdot i \\ \Rightarrow n\varphi &= 2\pi k \quad , k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \varphi &= \frac{2\pi k}{n} \\ \Rightarrow z_0 &= 1e^{i \cdot 0}, \quad z_1 = e^{i \frac{2\pi}{n}}, \quad \dots z_n = e^{i \frac{k\pi}{n}} \end{aligned}$$

Allgemein gilt mit  $z^n = a$  und  $\varphi = \arccos\left(\frac{|z|}{Re\{z\}}\right)$ :

$$z_k = a^{\frac{1}{n}} \cdot \left( \cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right) \quad (2.1.5.1)$$

Bei reellen Polynomen sind dabei die Nullstellen komplex konjugiert zueinander.

## 2.2 Lineare skalare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienzen

**Definition 2.2.1.** Lineare skalare Diff.gleichungen mit konst. Koeffizienten sind Gleichungen der Bauart:

$$Ly(x) = a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

### 2.2.1 Ansätze

- a) Homogene Diff.gleichung: Mit  $\lambda$  als einfache NST:

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad (2.2.1.1)$$

Mit  $\lambda$  als  $n$ -fache NST:

$$f(x) = e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{n-1} e^{\lambda x} \quad (2.2.1.2)$$

Mit  $\lambda = \alpha + \beta i$  (komplexe Nullstellen):

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x) \quad (2.2.1.3)$$

- b) Inhomogenität der Form  $f(x) = p_k(x)e^{sx}$  mit  $p_k(x)$  als ein Polynom  $k$ -ten Grades.

$$y_p(x) = R_k(x)e^{sx}x^q \quad (2.2.1.4)$$

Mit  $R_k(x) = a_k x^k + \dots + a_0$  und  $q$  als Vielfachheit der Nullstelle  $s$  (ist  $s$  keine Nullstelle so ist  $q = 0$  und damit  $x^q = 1$ ).

- c) Inhomogenität der Form  $\cos(kx)$  oder  $\sin(kx)$ .

$$y_p(x) = (a \cos(kx) + b \sin(kx))x^q \quad (2.2.1.5)$$

Beispiel Umformung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(4x) \\ \text{Mit (1)} \quad e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi \\ \text{und (2)} \quad e^{-i\varphi} &= \cos\varphi - i\sin\varphi \\ \text{folgt mit (1) + (2) bzw. (1) - (2)} \quad e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} &= 2 \cos\varphi \quad \text{bzw.} \quad e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2 \sin\varphi \\ \Rightarrow \cos\varphi &= \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad \Rightarrow \sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}), \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.2.1.6)$$

$q$  im Ansatz gibt die Vielfachheit der NST  $i\varphi$  im charakteristischen Polynom des homogenen Teils der Gleichung an.

- d) Inhomogenität der Form  $q_k(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x)$  oder  $q_k(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

$$y_p(x) = R_k(x)x^q e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \tilde{R}_k(x)x^q e^{\alpha x} \cos\beta x \quad (2.2.1.7)$$

### 2.2.2 Vorgehensweise

**Schritt 1:** Ansatz wählen

**Schritt 2:** Ansatz einsetzen und charakteristisches Polynom bilden  
*Beispiel:*

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= 0 \\ \stackrel{(2.2.1.1)}{\Rightarrow} (e^{\lambda x})'' + 3(e^{\lambda x})' + 2e^{\lambda x} &= 0 \\ (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x} \Rightarrow (e^{\lambda x})'' &= \lambda^2 e^{\lambda x} \\ \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 &= 0 \end{aligned}$$

**Schritt 3.1:** Nullstellen des char. Polynoms suchen und in Ansatz einsetzen  
*Beispiel :*

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1$$

**Schritt 3.2:** Gegebenenfalls komplexe NST in reale umwandeln  
*Beispiel :*

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{-x+ix} + C_2 e^{-x-ix} \\ \Rightarrow y(x) &= \tilde{C}_1 e^{-x} \cos x + \tilde{C}_2 e^{-x} \sin x, \quad \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Schritt 4:** Allgemeine Lösung aufstellen

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

### 2.2.2.1 Anfangswertproblem

Falls Anfangswerte vorhanden sind können an dieser Stelle die Konstanten Koeffizienten explizit bestimmt werden.

*Beispiel :*

$$\begin{aligned}
 y(0) &= 1, \quad y'(0) = 0 \\
 y(t) &= C_1 e^{5t} + C_2 e^{-2t} \\
 \Rightarrow y(0) &= C_1 e^{5 \cdot 0} + C_2 e^{-2 \cdot 0} = 1 \\
 \Rightarrow C_1 &= 1 - C_2 \\
 y'(t) &= 5C_1 e^{5t} - 2C_2 e^{-2t} \Rightarrow y'(0) = 5C_1 - 2C_2 = 0 \\
 \Rightarrow y'(0) &= 0 = 5(1 - C_2) - 2C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{5}{7} \\
 \Rightarrow C_1 &= 1 - C_2 = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \\
 \Rightarrow y(t) &= \frac{2}{7} e^{5t} + \frac{5}{7} e^{-2t}
 \end{aligned}$$

### 2.2.2.2 Inhomogenität

**Schritt 1:** Ansatz wählen

**Schritt 2:** Ansatz gegebenenfalls ableiten und in homogenen Teil einsetzen

**Schritt 3:** Über Koeffizientenvergleich Vorfaktoren bestimmen

**Schritt 4:** Allgemeine Lösung bilden

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) \tag{2.2.2.1}$$

**Schritt 5:** Gegebenenfalls Anfangswertproblem lösen

## 2.3 Lineare Gleichungssysteme

### 2.3.1 Gauss Algorithmus

Siehe Kurzzusammenfassung HM2

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{b}_1 \\
 \ddots &\quad \ddots \quad \vdots \\
 a_{rr}^{(r)}x_r + \dots + a_{rn}^{(r)}x_n &= b_r \\
 0 &= b_{r+1}^{(r)} \\
 &\quad \vdots \\
 0 &= b_m^{(r)}
 \end{aligned} \tag{2.3.1.1}$$

**Definition 2.3.1.** Die Zahl  $r$  heißt der Rang der Matrix  $A$ . Die Zahl  $a_{11}$  heißt Pivotelement (Tendenziell eher die Zahlen  $a_{11}$  bis  $a_{rr}$  heißen Pivotelemente, aber so wie oben stehts im Script).

#### 2.3.1.1 Lösbartkeit

1. Fall: Damit Lösungen existieren können, muss  $b_{r+1}^{(r)} = \dots = b_m^{(r)} = 0$  gelten, sonst existieren keine Lösungen. Das heißt es darf keine Zeile allgemein der Form  $a = 0$  mit  $-\infty < a < 0 \vee 0 < a < \infty$  existieren.
2. Fall: Ist  $b_{r+1}^{(r)} = \dots = b_m^{(r)} = 0$  und ist  $r = n$ , so existiert eine eindeutige Lösung. Das heißt es existieren gleich viele Unbekannte wie Zeilen und Fall 1 ist ausgeschlossen.
3. Fall: Ist  $b_{r+1}^{(r)} = \dots = b_m^{(r)} = 0$  und ist  $r < n$ , so existiert eine Schar von Lösungen. D.h. es kann eine Variable frei gewählt werden.

## 2.4 Analytische Geometrie

### 2.4.1 Dreidimensionaler Raum

**Definition 2.4.1.** Der dreidimensionale Raum ist durch  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{p_1, p_2, p_3 : p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}\}$ . Jeder Punkt  $p \in \mathbb{R}^3$  ist eindeutig durch die Angabe seiner Koordinaten  $p_1, p_2, p_3$ ) bestimmt.

#### 2.4.1.1 Abstand

$$\begin{array}{ll} \text{Euklidischer} & \\ \text{Abstand zweier} & : d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2} \\ \text{Punkte} & \end{array} \quad (2.4.1.1)$$

#### 2.4.1.2 Vektoren

$$\begin{array}{ll} \text{Norm eines} & \\ \text{Vektors} & : \|x\|_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \end{array} \quad (2.4.1.2)$$

Vektoren können skalar multipliziert oder miteinander addiert werden:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \quad (2.4.1.3)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \quad (2.4.1.4)$$

**Definition 2.4.2.** Die Koordinaten  $P = (p_1, p_2, p_3)$  eines Punktes  $p$  definieren den Ortsvektor  $p$ . Sind zwei Punkte  $P, Q$  mit Ortsvektoren  $p, q$  gegeben, so gilt

$$d(P, Q) = \|p - q\| \quad (2.4.1.5)$$

#### 2.4.1.3 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt projiziert einen Vektor  $b$  auf einen Vektor  $a$ . Es ist im  $\mathbb{R}^3$  definiert als:

$$(a, b) = \langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.4.1.6)$$

bzw.

$$(a, b) = \|a\| \|b\| \cos \phi \quad (2.4.1.7)$$

Weiterhin gilt:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \left( \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} = (x, x)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.1.8)$$

**Definition 2.4.3.**  $a$  und  $b$  heißen orthogonal, falls

$$(a, b) = 0$$

#### 2.4.1.4 Vektor- bzw. Kreuzprodukt

**Definition 2.4.4.** Der Betrag des Vektorproduktes  $a \times b$  ist gleich dem Flächeninhalt des von  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallelogramms. Dies folgt direkt aus der Trigonometrie des Dreiecks.

$$A = \|a \times b\| \quad (2.4.1.9)$$

Es gilt:

$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin\phi \quad (2.4.1.10)$$

Das Vektorprodukt  $a \times b$  steht senkrecht auf  $a$  und  $b$ . Die Vektoren  $a, b, a \times b$  bilden ein Rechtssystem.  $a$ : Daumen,  $b$ : Zeigefinger,  $a \times b$ : Mittelfinger der rechten Hand. Es gelten folgende Eigenschaften:

- i)  $a \times a = 0$
- ii)  $a \times b = -b \times a$
- iii)  $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$
- iv)  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- v)

Seien  $e_1, e_2, e_3$  die Einheitsvektoren (siehe HM2) dann gilt:

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2$$

vi)

$$a := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (2.4.1.11)$$

Es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$\begin{aligned} x, y &\in \mathbb{R}_{\setminus \{0\}} \\ |x \cdot y| &\leq \|x\| \|y\| \\ |x \cdot y| = \|x\| \|y\| &\Leftrightarrow x = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.4.1.12)$$

#### 2.4.1.5 Spatprodukt

**Definition 2.4.5.** Drei Vektoren  $a, b, c$  spannen ein Volumen auf.

$$[a, b, c] = (a \times b, c) \quad (2.4.1.13)$$

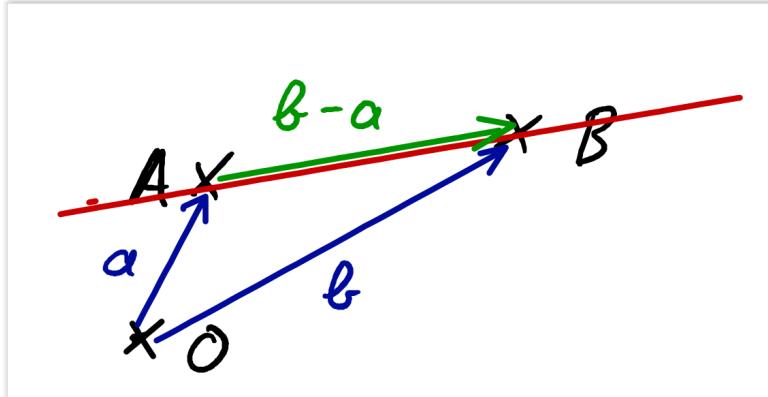
### 2.4.2 Geraden im $\mathbb{R}^2$

#### 2.4.2.1 Parameterdarstellung

Die Parameterdarstellung einer Gerade im  $\mathbb{R}^2$  ist gegeben mit:

$$\begin{aligned} x &= a + \lambda(b - a), \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow x &= a + \lambda u \end{aligned} \quad (2.4.2.1)$$

Wobei  $u$  die Richtung der Gerade angibt und Richtungsvektor heißt.  $a$  heißt Stützvektor.


 Abbildung 2.1: Gerade im  $\mathbb{R}^2$  (Schneider 2018)

#### 2.4.2.2 Darstellung in Gleichungs- bzw. Normalform

Zur Darstellung in der Normalform muss zunächst ein Normalenvektor  $n$  der orthogonal auf  $u$  steht gewählt werden, d.h. es muss gelten  $(n, u) = 0$ .

$$(n, x) = (n, a + \lambda u) = (n, a) + \lambda \underbrace{(n, u)}_{=0} = (n, a) =: p \quad (2.4.2.2)$$

Die Gleichungsdarstellung ist dann:

$$(n, x) - p = 0 \quad (2.4.2.3)$$

#### 2.4.2.3 Hessesche Normalform

Zur Bildung der Hesseschen Normalform wird der Normalevektor normiert und es muss  $p \geq 0$  gelten.

$$\left( \frac{n}{\|n\|}, x \right) - p = (n^*, x) - p = 0 \quad (2.4.2.4)$$

#### 2.4.2.4 Minimaler Abstand

Der Punkt mit minimalem Abstand zum Ursprung  $x^*$  auf der Geraden ist der Punkt, an dem der Ortsvektor orthogonal auf der Geraden steht. Das einsetzen dieses Punktes in die Hessesche Normalform liefert also den Abstand zum Ursprung mit:

$$(n^*, x^*) = \|x^*\| = p = \text{Abstand} \quad (2.4.2.5)$$

#### 2.4.2.5 Abstand eines Punktes zur Geraden

$\tilde{x}$  sei ein beliebiger Punkt, dann ist

$$d = (n^*, \tilde{x}) - p \quad (2.4.2.6)$$

Der Abstand des Punktes zur Geraden.

### 2.4.3 Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$

#### 2.4.3.1 Parameterdarstellung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$

$$g : x = a + \lambda u \quad , b z w .$$

$$g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (2.4.3.1)$$

#### 2.4.3.2 Koordinatendarstellung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$

Eine Gerade lässt sich im  $\mathbb{R}^3$  auch als Schnittgerade zweier Ebenengleichungen ausdrücken. Ein Beispiel dazu:

$$g := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1 + \lambda \\ x_2 &= 2\lambda \quad \Rightarrow \lambda = \frac{x_2}{2} \\ x_3 &= 2 + \lambda \\ \Rightarrow x_1 &= 1 + \frac{x_2}{2}, \quad x_3 = 2 + \frac{x_2}{2} \end{aligned}$$

#### 2.4.3.3 Parameterdarstellung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$

$$E : x = a + \lambda u + \mu v \quad , b z w .$$

$$E : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (2.4.3.2)$$

#### 2.4.3.4 Gleichungsdarstellung bzw. Hessesche Normalform einer Ebene im $\mathbb{R}^3$

$$(n^*, x) = (n^*, a) + \underbrace{\lambda (n, u)}_{=0} + \underbrace{\mu (n, v)}_{=0}$$

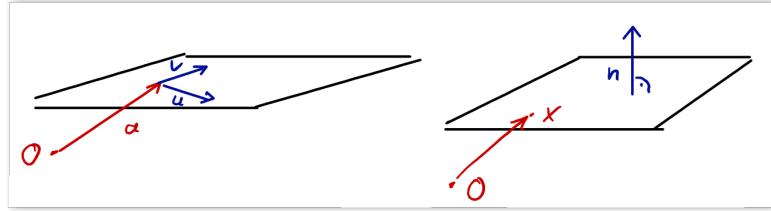
$$\Rightarrow (n^*, x) - (n^*, a) = 0 \quad \text{mit } (n, a) =: p$$

$$\Rightarrow (n^*, x) - p = 0 \quad (2.4.3.3)$$

$p$  gibt den Abstand der Gerade zum Ursprung an.  $n$  muss auf beiden Richtungsvektoren senkrecht stehen und lässt sich durch

$$n = \frac{u \times v}{\|u \times v\|} \quad (2.4.3.4)$$

bestimmen.


 Abbildung 2.2: Ebenen im  $\mathbb{R}^3$  (Schneider 2018)

## 2.4.4 Schnitte

### 2.4.4.1 Schnitt zweier Ebenen

Sind die Normalenvektoren nicht parallel existiert eine Schnittgerade. Sie kann durch die entsprechenden Ebenengleichungen beschrieben werden.

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 4x_2 = 2\}$$

$$E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 - x_3 = 1\}$$

$$\Rightarrow n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow n_1$  und  $n_2$  nicht parallel  $\Rightarrow$  Schnittgerade ex.

$$\Rightarrow g = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 4x_2 = 2, x_2 - x_3 = 1\}$$

Der Schnittwinkel zweier Ebenen kann über die jeweiligen Normalenvektoren bestimmt werden.

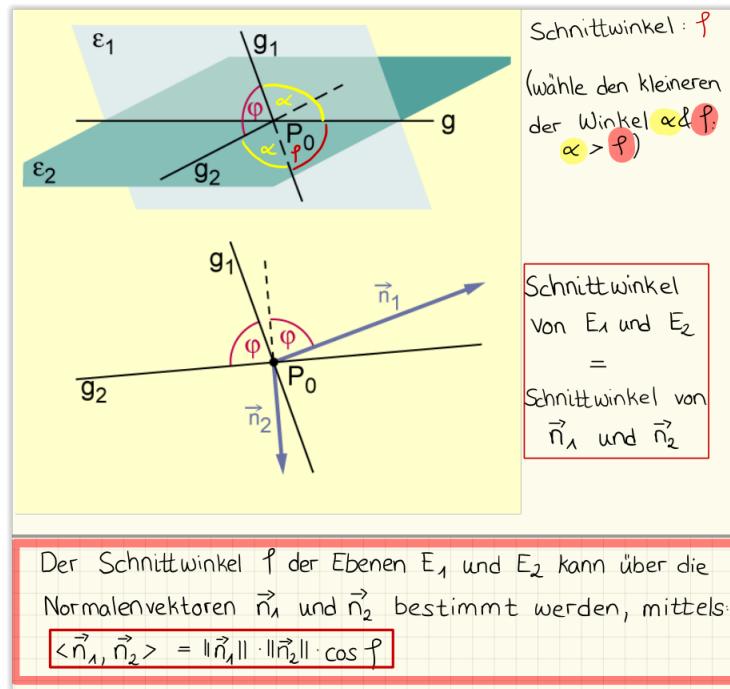


Abbildung 2.3: Schnittwinkel zweier Ebenen (Gauss 2017)

#### 2.4.4.2 Schnitt einer Gerade mit einer Ebene

Dort wo sich Ebene und Gerade schneiden muss der Punkt beide Gleichungen erfüllen. Um dies zu prüfen, setzt man die Parameterdarstellung der Gerade in die Ebene ein. Erhält man einen Punkt, so ist dies der Punkt an dem sich beide schneiden.

#### 2.4.4.3 Schnitt zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$

Es seien  $g_1$  und  $g_2$  zwei Geraden mit

$$g_1 : x = a + \lambda u \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

$$g_2 : y = b + \mu v \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

Es existieren grundsätzlich drei Fälle:

- Es existiert ein Schnittpunkt  
Schnittbedingung:  $x = y$
- Beide Geraden sind parallel  
Bedingung:  $u = \theta v \quad , \theta \in \mathbb{R}$
- Die Geraden schneiden sich nicht und  $u$  ist nicht parallel zu  $v$  (windschief)

Für windschiefe Geraden ist der minimale Abstand durch die Bedingung  $(x - y) \perp u$ ,  $(x - y) \perp v$  gegeben.

#### 2.4.4.4 Abstand zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$

Hierzu stellt man Hilfsebenen auf.

$$g_1 \Rightarrow E_1 : x = a + \lambda u + \mu v$$

$$g_2 \Rightarrow E_2 : y = b + \lambda u + \mu v$$

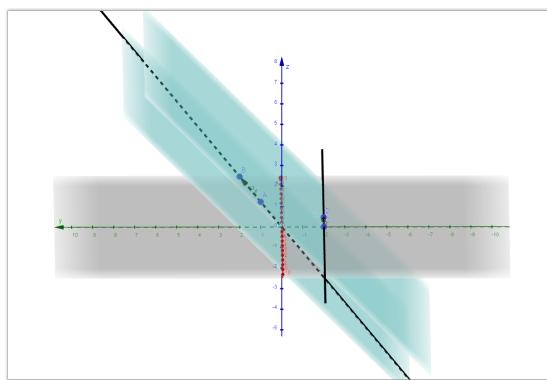


Abbildung 2.4: Abstand zweier Geraden  $\mathbb{R}^3$

Zur Bestimmung kann man den Abstandes vom Punkt  $a$  (oder jeder andere Punkt auf  $g_1$ ) zur Ebene  $E_2$  bestimmen. Hierzu wird die hessesche Normalform von  $E_2$  gebildet und  $a$  eingesetzt.

## 2.5 Logik und Beweise

### 2.5.1 Wahrheitswerte

Tabelle 2.1: Wahrheitswerte

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

**Bemerkung 2.5.1.** Wenn  $A \Rightarrow B$  wahr ist, dann heißt  $A$  hinreichend für  $B$  und  $B$  heißt notwendig für  $A$ .

#### 2.5.1.1 Tautologien

Tautologien sind Aussagen die immer wahr sind.

- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg B \wedge \neg A)$
- $A \vee \neg A$
- $\neg(A \wedge \neg A)$
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$  (De Morgansche Regel)
- $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$  (De Morgansche Regel)
- $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
- $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$  (Distributivgesetz)
- $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$  (Distributivgesetz)

#### 2.5.1.2 Umformungen

Tabelle 2.2: Umformungen

Form der Negation	umgeformte Aussage
$\neg(\neg A)$	$A$
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$ (De Morgansche Regel)
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$ (De Morgansche Regel)
$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge (\neg B)$ da $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \Leftrightarrow)$	$A \Leftrightarrow (\neg B)$
$\neg(\forall x \in M : A(x))$	$\exists x \in M : \neg A(x)$
$\neg(\exists x \in M : A(x))$	$\forall x \in M : \neg A(x)$

## 2.5.2 Vollständige Induktion

### 2.5.2.1 Vorgehen

**Schritt 1:** Induktionsannahme (also was zu zeigen ist)

**Schritt 2:** Induktionsanfang (meistens  $n = 1$ , ist aber frei wählbar)

**Schritt 3:** Induktionsvoraussetzung (eher optional)

**Schritt 4:** Induktionsbehauptung

(die Behauptung, dass es für alle  $n$  gilt. Bei Summen hier in der Regel  $n + 1$  einfügen)

**Schritt 5:** Induktionsschritt (der eigentliche Beweis))

### 2.5.2.2 Beispiel 1

Induktionsannahme :

z.Z. :  $\forall n \in \mathbb{N} : 11^n - 4^n$  ist ein Vielfaches von 7

Induktionsanfang :

$n = 1 :$

$$\begin{aligned} 11^1 - 4^1 &\stackrel{!}{=} x \cdot 7, x \in \mathbb{N} \\ 11 - 4 &= 7 = x \cdot 7 \\ x &= 1 \checkmark \end{aligned}$$

Induktionsbehauptung :

$$11^{n+1} - 4^{n+1} = a \cdot 7, a \in \mathbb{N}$$

Induktionsschluss :

$$\begin{aligned} 11^{n+1} - 4^{n+1} &= 11^n \cdot 11 - 4^n \cdot 4 \\ &= 11^n(7 + 4) - 4^n \cdot 4 \\ &= 7 \cdot 11^n + 4 \cdot 11^n - 4 \cdot 4^n \\ &= \underbrace{7 \cdot 11^n}_{=(*)} + \underbrace{4(11^n - 4^n)}_{=(**)} \end{aligned}$$

(\*) ist durch 7 teilbar da 7 ein Faktor ist, (\*\*) ist ebenfalls durch 7 teilbar, da (\*\*) ein Vielfaches der Induktionsannahme ist, also gilt:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 11^n + 4(11^n - 4^n) &= b \cdot 7, b \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow b &= 11^n + \frac{4 \cdot 11^n - 4 \cdot 4^n}{7} = 11^n + 4 \cdot x \end{aligned}$$

Somit ist  $b \cdot 7$  ein Vielfaches von 7 was zu zeigen war.

### 2.5.3 Binomialkoeffizienten

**Satz 2.5.1.** Es gibt  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots < \cdot (n-1) \cdot n$  Permutationen des  $n$ -Tupels  $(1, \dots, n)$ .

**Bemerkung 2.5.2.** Bezeichnung:  $n!$  heißt  $n$  Fakultät.

Die Verallgemeinerung der binomischen Formel ist gegeben durch:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (2.5.3.1)$$

wobei

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (2.5.3.2)$$

Binomialkoeffizient heißt und  $0! = 1$  gilt.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \end{array} \begin{array}{l} (a+b) \\ (a+b)^2 \\ (a+b)^3 \\ (a+b)^4 \\ (a+b)^5 \\ \vdots \end{array} \quad (2.5.3.3)$$

bzw.

$$\begin{array}{cccccccc} & & \binom{0}{0} & & & & & \\ & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\ & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\ & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\ & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\ & & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\ & & & & \vdots & & & \end{array} \quad (2.5.3.4)$$

## 2.6 Mengen, Relationen und Abbildungen

**Definition 2.6.1.** Mengen sind Ansammlungen von Elementen.

### 2.6.1 Arten von Mengen

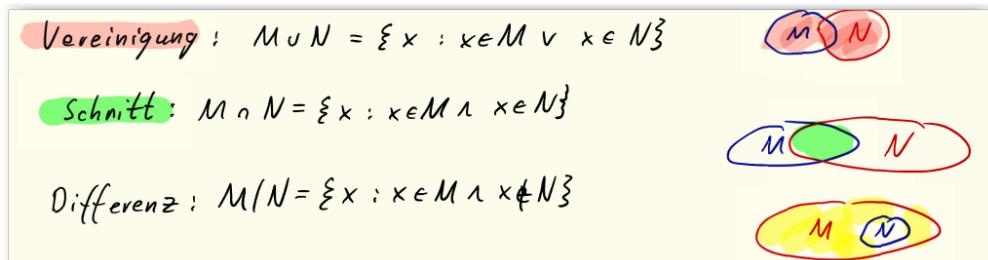


Abbildung 2.5: Arten von Mengen (Schneider 2018)

**Definition 2.6.2.** Ist  $N \subset M$  dann heißt  $N^c = M/N$  das Komplement von  $N$ .  $M$  und  $N$  heißen disjunkt, falls  $M \cap N = \emptyset$ , wobei  $\emptyset = \{\}$  die leere Menge ist.

**Definition 2.6.3.** Kartesisches Produkt:  $M \times N = \{(a, b) : a \in M \wedge b \in N\}$

**Definition 2.6.4.** Potenzmenge:  $P(M) = \{X : X \subset M\}$

#### 2.6.1.1 Abkürzungen

- $\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup \dots \cup A_n$
- $\bigcap_{k=1}^n A_k = A_1 \cap \dots \cap A_n$
- $\prod_{k=1}^n A_k = A_1 \times \dots \times A_n = \underbrace{\{(a_1, \dots, a_n) : \forall k : a_k \in A_k\}}_{n-Tupel}$

### 2.6.2 Relationen

**Definition 2.6.5.** Relationen setzen Elemente zweier Mengen in Verbindung. Eine Relation ist eine Teilmenge  $R \subset M \times N$  mit  $M$  und  $N$  als Mengen. Man schreibt:

$xRy$  genau dann wenn  $(x, y) \in R \subset M \times N$

Jede Funktion  $f \rightarrow f(x)$  ist eine Relation  $R = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

### 2.6.2.1 Äquivalenzrelationen

Eigenschaften:

- $aRa$ , d.h.  $(a, a) \in R$  (**Reflexivität**)
- $aRb \Leftrightarrow bRa$ , d.h. mit  $(a, b) \in R$  ist auch  $(b, a) \in R$  (**Symmetrie**)
- $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ , d.h. mit  $(a, b) \in R$  und  $(b, c) \in R$  ist auch  $(a, c) \in R$  (**Transitivität**)

**Satz 2.6.6.** Ist  $R$  eine Äquivalenzrelation, d.h. eine Relation mit obigen Eigenschaften, so zerfällt die Menge  $M$  in disjunkte Teilmengen.

Beispiel:

$$M = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{(1, 3), (3, 1), (1, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2), (2, 2), (4, 4)\}$$

$R$  zerlegt  $M$  in zwei Klassen (Teilmengen):

$$\{2, 4\} = [2]_R = [4]_R$$

$$\{1, 3\} = \underbrace{[1]_R}_{\substack{\text{Repräsentanten} \\ \text{der Klasse}}} = [3]_R$$

bzw. allgemein: Äquivalenzklasse zu einem Element  $a$  bezüglich einer Äquivalenzrelation  $R$

$$[a]_R = \{b \in M : aRb\}$$

Die Menge aller Äquivalenzklassen ist:  $M/R = \{[a]_R : a \in M\}$ . Es gilt entweder  $[a]_R = [b]_R$  oder  $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ .

**Bemerkung 2.6.1.** Es wird häufig anstatt  $R$  das Zeichen  $\sim$  verwendet.

### 2.6.2.2 Ordnungsrelationen

**Definition 2.6.7.** Eine Halbordnung  $R \subset M \times M$  auf einer Menge  $M$  erfüllt

- (i)  $xRx$
- (ii)  $xRy \wedge yRx \Rightarrow y = x$
- (iii)  $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$  (**Transitivität**)

**Definition 2.6.8.** Ordnungsaxiome im  $\mathbb{R}$

- (i)  $x \leq x$
- (ii)  $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow y = x$
- (iii)  $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- (iv)  $x \leq y \vee y \leq x$  (**Totalordnung**)

(v)  $x \Rightarrow x + z \leq y + z$  (*Zusammenhang mit Addition*)

(vi)  $x \leq y \wedge z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$  (*Zusammenhang mit Multiplikation*)

**Definition 2.6.9.** Zu  $a \in \mathbb{R}$  heißt

$$|a| := \begin{cases} a & , \text{ falls } a \geq 0 \\ -a & , \text{ falls } a < 0 \end{cases} \quad (2.6.2.1)$$

der Betrag von  $a$ .

### 2.6.3 Maximum, Minimum, Supremum, Infimum

Im Folgenden sei  $M$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .

**Definition 2.6.10.**  $x \in \mathbb{R}$  heißt eine obere Schranke von  $M$ , falls  $y \leq x$  für alle  $y \in M$  gilt.

**Definition 2.6.11.**  $x \in \mathbb{R}$  heißt eine untere Schranke von  $M$ , falls  $y \geq x$  für alle  $y \in M$  gilt.

**Definition 2.6.12.**  $M$  heißt beschränkt, falls  $M$  nach oben und unten beschränkt ist, d.h. eine obere und eine untere Schranke existieren.

**Definition 2.6.13.**  $s = \sup M \in \mathbb{R}$  heißt das Supremum von  $M$  und ist die kleinste obere Schranke, d.h. falls  $s$  eine obere Schranke von  $M$  ist und ferner jede andere obere Schranke  $x$  von  $M$  die Ungleichung  $x \geq s$  erfüllt.

**Definition 2.6.14.**

Infimum:  $\inf M \in \mathbb{R}$  ist die größte untere Schranke

Maximum:  $s = \max M \in \mathbb{R}$  heißt das Maximum von  $M$ , falls  $s \in M$  und für alle  $x \in M$  gilt:  $x \leq s$ .

Minimum:  $s = \min M \in \mathbb{R}$  heißt das Minimum von  $M$ , falls  $s \in M$  und für alle  $x \in M$  gilt:  $s \leq x$ .

**Bemerkung 2.6.2.** Für jede endliche Menge existiert das Maximum und Minimum.

**Satz 2.6.15.** Jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}$  besitzt ein Supremum. (Analog jede nach unten beschränkte Menge ein Infimum)

**Bemerkung 2.6.3.**

$$\sup(T) \in T \Rightarrow \sup(T) = \max(T) \quad (2.6.3.1)$$

$$\inf(T) \in T \Rightarrow \inf(T) = \min(T) \quad (2.6.3.2)$$

## 2.6.4 Abbildungen

Abbildungen sind spezielle Relationen. Eine Abbildung  $f$  von einer Menge  $M$  in eine Menge  $N$  ist eine Vorschrift, die jedem  $x \in M$  genau ein  $y \in N$  zuordnet.  $M$  heißt der Definitionsbereich und  $N$  heißt der Bildbereich.

**Definition 2.6.16.**  $f : M \rightarrow N$  heißt *surjektiv*, falls die Gleichung  $f(x) = y$  mindestens eine Lösung besitzt und zwar für alle  $y \in N$ .

$f : M \rightarrow N$  heißt *injektiv*, falls für alle  $x_1, x_2 \in M$ :  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .  
 $f$  heißt *bijektiv*, falls  $f$  sowohl injektiv, als auch surjektiv ist.

## 2.6.5 Unendlichkeit

**Definition 2.6.17.** Eine Menge  $M$  heißt *endlich*, falls es ein  $n \in \mathbb{N}$  und eine bijektive Abbildung  $\Phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow M$  gibt. Eine Menge  $M$  heißt *abzählbar*, falls es eine bijektive Abbildung  $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow M$  gibt. Sonst heißt die Menge *überabzählbar*.

**Satz 2.6.18.** Die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar.

**Satz 2.6.19.** Die reellen Zahlen sind überabzählbar.

## 2.6.6 Elementare realwertige Funktionen

### 2.6.6.1 Algebraische Funktionen

Durch arithmetische Operationen aufgebaut ( $+, -, \cdot, \setminus$ ), z.B.:  
 $f(x) = x^2 + 5x$ ,  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

#### 2.6.6.1.1 Polynome ( $+, -, \cdot$ )

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_j \in \mathbb{R} \quad (2.6.6.1)$$

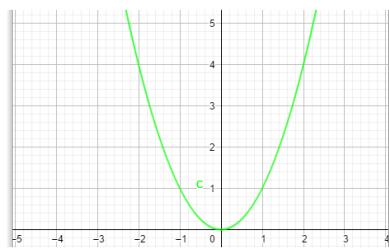


Abbildung 2.6:  $y = x^2$  (vgl.  $x^4, x^6, \dots$ )

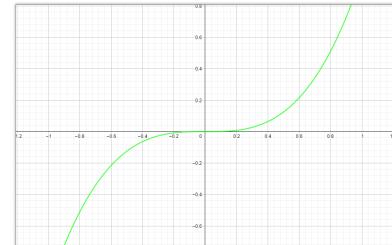


Abbildung 2.7:  $y = x^3$  (vgl.  $x^5, x^7, \dots$ )

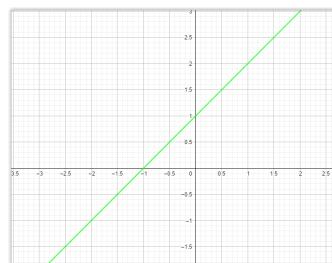


Abbildung 2.8:  $y = ax + b$

### 2.6.6.1.2 Rationale Funktionen (+,-,·, \)

$$y = f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit } p, q \text{ sind Polynome} \quad (2.6.6.2)$$

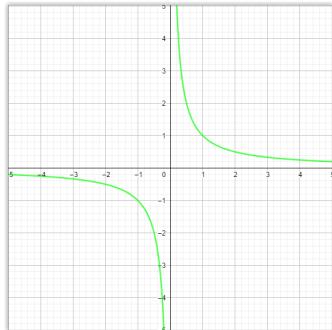


Abbildung 2.9:  $y = \frac{1}{x}$

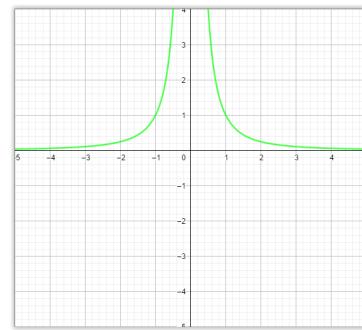


Abbildung 2.10:  $y = \frac{1}{x^2}$

### 2.6.6.1.3 n-te Wurzel

$$y = f(x) = \sqrt[n]{x} \quad (2.6.6.3)$$

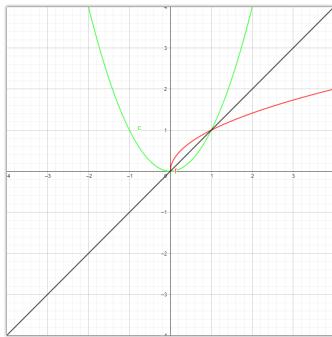


Abbildung 2.11: Quadratwurzel

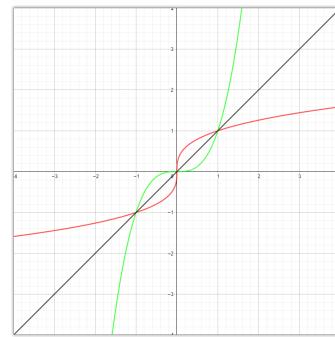


Abbildung 2.12: Kubische Wurzel

Wie man an den Graphiken erkennt ist die Wurzel gerade die Spiegelung an der Ursprungsgeraden des korrelierenden Polynoms.

### 2.6.6.2 Transzendentale Funktionen

#### 2.6.6.2.1 Exponentialfunktionen

$$y = f(x) = e^x \quad , e = 2,7182... \quad (2.6.6.4)$$

Streng monoton wachsende Funktion. Es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (2.6.6.5)$$

#### 2.6.6.2.2 Unendliche Summen

Zum Beispiel Taylorreihen, Potenzreihen

### 2.6.6.2.3 (Natürlicher) Logarithmus

$$y = f(x) = \ln(x) \quad (2.6.6.6)$$

Bildet das Inverse der e-Funktion.

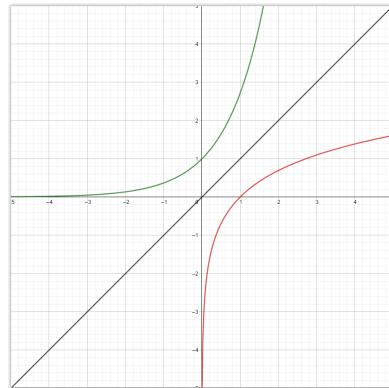


Abbildung 2.13: Grün:  $y = e^x$ ; Rot:  $y = \ln(x)$

Zum Wechsel der Basis können die Logarithmusgesetze angewandt werden:

$$\begin{aligned} h(x) &= a^x = e^{x \cdot \ln(a)}, \text{ da } \ln(a^x) = x \ln(a) \\ k(x) &= \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned} \quad (2.6.6.7)$$

### 2.6.6.2.4 Trigonometrische Funktionen

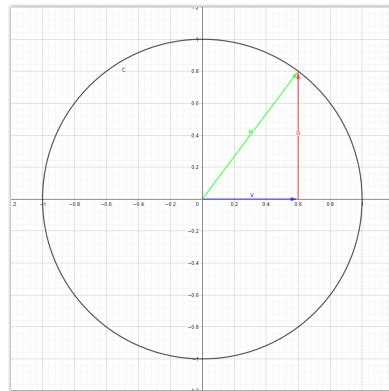


Abbildung 2.14: Grün: 1; Rot:  $\sin(x)$ ; Blau:  $\cos(x)$

Aus dem Einheitskreis geht die Identität

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad (2.6.6.8)$$

direkt hervor.

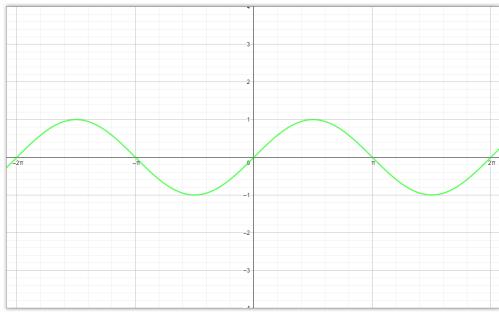


Abbildung 2.15: Sinusfunktion

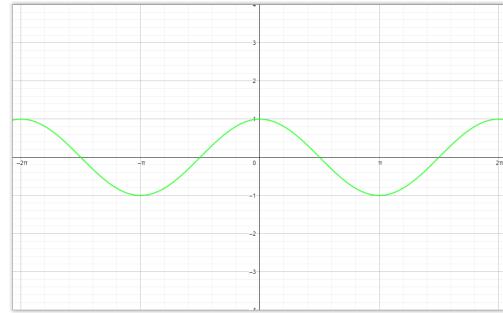


Abbildung 2.16: Cosinusfunktion

Es gelten folgende Zusammenhänge:

- |   |   |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\cos(x) = \cos(-x)</math></li> <li>• <math>-\sin(x) = \sin(-x)</math></li> <li>• <math>\cos(x + 2\pi) = \cos(x)</math></li> <li>• <math>\sin(x + 2\pi) = \sin(x)</math></li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>e^z = e^{Re\{z\}} (\cos(Im(z)) + i\sin(Im(z)))</math>, <math>z \in \mathbb{C}</math></li> <li>• <math>\sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})</math>, <math>x \in \mathbb{R}</math></li> <li>• <math>\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})</math>, <math>x \in \mathbb{R}</math></li> </ul> |
|---|---|

Weiterhin gilt:

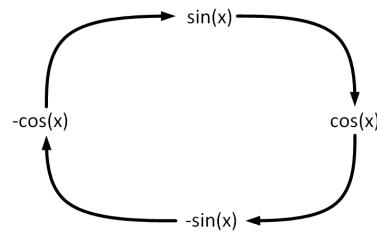
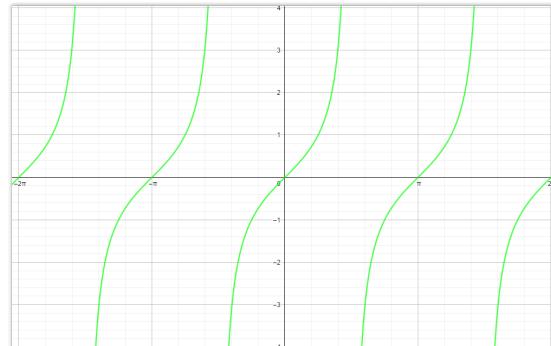


Abbildung 2.17: Ableitungsregel

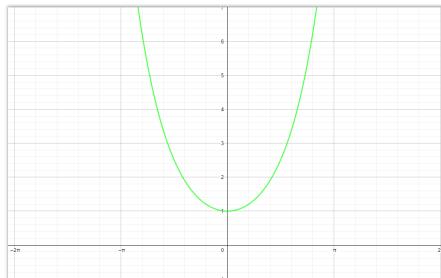
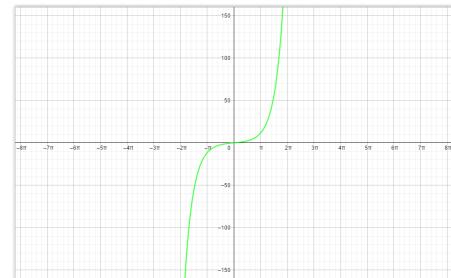
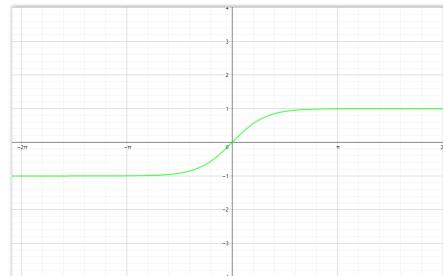
#### 2.6.6.2.5 Weitere trigonometrische Funktionen

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad \cot(x), \dots \quad (2.6.6.9)$$


 Abbildung 2.18:  $\tan(x)$

### 2.6.6.2.6 Hyperbolische Funktionen

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \\ \sinh(x) &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \\ \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\ \operatorname{sech}, \operatorname{coth}, \dots, \text{etc.} \end{aligned} \tag{2.6.6.10}$$


 Abbildung 2.19:  $y = \cosh(x)$ 

 Abbildung 2.20:  $y = \sinh(x)$ 

 Abbildung 2.21:  $y = \tanh(x)$ 

Es gelten folgende Identitäten:

$$(\cosh(x))' = \sinh(x) \tag{2.6.6.11}$$

$$(\sinh(x))' = \cosh(x) \tag{2.6.6.12}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \tag{2.6.6.13}$$

$$\cos(z) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \cosh(iz) \quad , z \in \mathbb{C} \tag{2.6.6.14}$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = -i \sinh(iz) \quad , z \in \mathbb{C} \tag{2.6.6.15}$$

## 2.7 Konvergente Folgen

**Definition 2.7.1.** Eine Folge in einer Menge  $M$  ist eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow M$ ,  $n \mapsto a_n$ . Wir schreiben  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Für  $n_j \in \mathbb{N}$  mit  $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  heißt  $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Beispiele:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n = \frac{1}{n} \quad , 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Teilfolge  $a_1, a_5, a_8, a_{17}, \dots \quad , 1 \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{17}, \dots$

### 2.7.1 Vergleich expliziter und rekursiver Darstellung

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad a_{n+1} = -a_n, \quad a_1 = -1 \\ a_n &= n! \quad \leftarrow \quad a_n = n \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 2, \quad a_1 = 1 \\ &\quad a_1 = 1 \\ &\quad a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 \\ &\quad a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

### 2.7.2 Definitionen $\varepsilon - N$ -Kriterium/Konvergenzkriterium

**Definition 2.7.2.** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ .

- a) Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt beschränkt, falls es ein  $C > 0$  gibt, mit  $|a_n| \leq C$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- b) Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt konvergent mit Grenzwert (Limes)  $a$ , falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N$  gilt:  $|a_n - a| < \varepsilon$ . Eine nicht konvergente Folge heißt divergent.

$$\text{Konvergenzkriterium : } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad (2.7.2.1)$$

- c) Die möglichen Grenzwerte von Teilfolgen heißen Häufungspunkte.

**Bemerkung 2.7.1.** Konvergiert  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  schreibt man

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= a && (2.7.2.2) \\ \text{bzw.} \\ a_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.7.2.** Die Schranke  $N$  ist i.A. von  $\varepsilon$  abhängig. Daher schreibt man  $N(\varepsilon)$ .

**Bemerkung 2.7.3.** Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig.

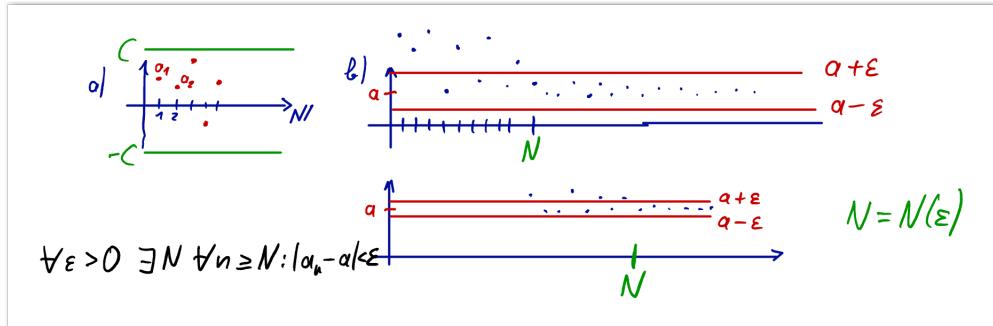


Abbildung 2.22: Epsilon Kriterium (Schneider 2018)

### 2.7.3 Ausdrücke mit Brüchen

$(a_n)$  mit  $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$  mit  $P, Q$  sind Polynome.

- (1)  $\text{grad}(P) > \text{grad}(Q) \Rightarrow (a_n)$  divergiert
- (2)  $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q) \Rightarrow (a_n)$  konvergiert gegen 0
- (3)  $\text{grad}(P) = \text{grad}(Q) \Rightarrow (a_n)$  konvergiert gegen Quotient der Leitkoeffizienten

### 2.7.4 Dreiecksungleichung

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad , \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (2.7.4.1)$$

bzw. in umgekehrter Form

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad (2.7.4.2)$$

### 2.7.5 Beschränktheit

**Satz 2.7.3.** Eine konvergente reelle Folge ist beschränkt.



Abbildung 2.23: derp derp derp

### 2.7.6 Grenzwertsätze

**Satz 2.7.4.** Seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente Folgen. Dann konvergieren auch die Folgen  $(|a_n|)$ ,  $(a_n + b_n)$  und  $(\lambda a_n)$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$ , und es gilt:

$$i) \quad \lim |a_n| = |\lim a_n| \quad (2.7.6.1)$$

$$ii) \quad \lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n \quad (2.7.6.2)$$

$$iii) \quad \lim(\lambda a_n) = \lambda \lim a_n \quad (2.7.6.3)$$

**Satz 2.7.5.** Seien  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  konvergente Folgen.

iv) Dann konvergiert auch  $(a_n b_n)$  und es gilt

$$\lim(a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n) \quad (2.7.6.4)$$

v) Ist  $b_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $b \neq 0$ , so konvergiert auch  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  mit

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \quad (2.7.6.5)$$

vi) Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Ist  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann konvergiert auch  $(\sqrt[m]{a_n})$  und es gilt

$$\lim \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim a_n} \quad (2.7.6.6)$$

**Bemerkung 2.7.4.** Bei rationalen Ausdrücken mit der höchsten Potenz durchkürzen. Beispiel:

$$\frac{n}{n^2 + 4n + 8} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{8}{n^2}} \rightarrow \frac{0}{1} = 0$$

### 2.7.6.1 Beispiele wichtiger Grenzwerte

$$1) \quad \lim \frac{1}{n} = 0$$

$$2) \quad \text{Sei } q \in \mathbb{R} \text{ mit } |q| < 1: \\ \lim q^n = 0$$

$$3) \quad \text{Sei } q \in \mathbb{R} \text{ mit } |q| < 1 \text{ und } p \in \mathbb{Z}: \\ \lim n^p q^n = 0$$

$$4) \quad \text{Sei } a \in \mathbb{R}: \\ \lim \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

$$6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

$$7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

### 2.7.7 Konvergenzsätze

**Satz 2.7.6.**

- 1) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.
- 2) Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- 3) Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.
  - a)  $(a_n)$  ist monoton wachsend und nach oben beschränkt

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n)$$

- b)  $(a_n)$  ist monoton fallend und nach unten beschränkt

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} (a_n)$$

### 2.7.8 Monotone Folgen

**Definition 2.7.7.** Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt monoton wachsend, falls  $a_n \leq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sie heißt streng monoton wachsend, falls  $a_n < a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Analog monoton fallend und streng monoton fallend.

**Satz 2.7.8.** Ist die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend und nach oben beschränkt, so konvergiert die Folge und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad (2.7.8.1)$$

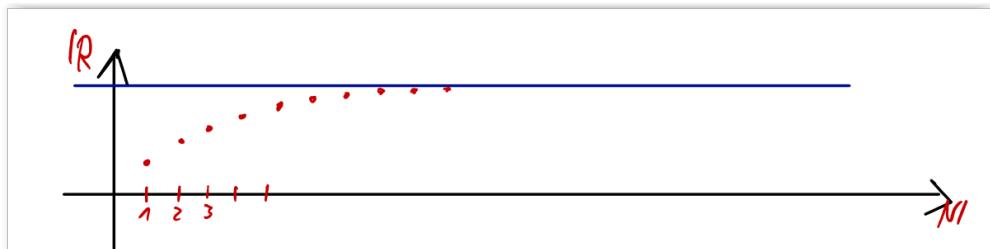


Abbildung 2.24: Konvergenz mw u. beschr. Folgen (Schneider 2018)

#### 2.7.8.1 Intervallschachtelung

Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reelle Folgen.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei monoton wachsend und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei monoton fallend. Es gelte  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \leq (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad ex.$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (2.7.8.2)$$

## 2.8 Ableitung

### 2.8.1 Differenzenquotient/Differentialquotient

**Definition 2.8.1.** Die Änderung einer Funktion heißt Differenzenquotient:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \quad (2.8.1.1)$$

**Definition 2.8.2.** Gegeben sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und ein Punkt  $x_0 \in I$ . Die Funktion  $f$  heißt differenzierbar in  $x_0$ , falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.8.1.2)$$

existiert. Der Grenzwert heißt der Differentialquotient bzw. die Ableitung von  $f$  in  $x_0$  und wird mit  $f'(x_0)$  bzw.  $\frac{df}{dx}(x_0)$  bezeichnet.

**Bemerkung 2.8.1.** Die Ableitung  $f'(x_0)$  gibt die Steigung der Tangente an  $f$  in  $x_0$  an. Die Tangentengleichung ist:

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2.8.1.3)$$

Es gilt:

$$l(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0) \quad (2.8.1.4)$$

und

$$l'(x_0) = f'(x_0) \quad (2.8.1.5)$$

d.h. der Funktionswert und die Ableitung von  $f$  und  $l$  stimmen in  $x_0$  überein.

### 2.8.2 Stetigkeit

**Definition 2.8.3.** Eine Funktion  $f$  heißt stetig in  $x_0$ , falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (2.8.2.1)$$

**Satz 2.8.4.** Jede in  $x_0$  differenzierbare Funktion ist auch stetig in  $x_0$

**Bemerkung 2.8.2.** Merkregel:

Stetig:  $f$  kann durchgezeichnet werden.

Diffbar:  $f$  hat keinen Knick

Beispiel:

$f(x) = |x|$  ist in  $x_0 = 0$  stetig aber nicht diffbar.

**Bemerkung 2.8.3.** Bezeichnungen:

- $C^0$ : Menge aller stetigen Funktionen
- $C^1$ : Menge aller diffbaren Funktionen mit  $f, f'$  stetig
- $C^n$ : Menge der  $n$ -mal stetig diffbaren Funktionen, d.h.  $f, f', \dots, f^{(n)}$
- $C^\infty$ : Menge aller unendlich oft stetig diffbaren Funktionen

### 2.8.3 Wichtige Ableitungen

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \quad (2.8.3.1)$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \quad (2.8.3.2)$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad (2.8.3.3)$$

$$f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(\tan(y))'} \quad (2.8.3.4)$$

$$f(x) = \arcsin(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(\sin(y))'} \quad (2.8.3.5)$$

### 2.8.4 Ableitungsregeln

**Satz 2.8.5.** *Produkt-/Quotientenregel*

a) Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \quad (\text{Linearität der Ableitung}) \quad (2.8.4.1)$$

$$b) \quad (fg)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (2.8.4.2)$$

$$c) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} \quad (2.8.4.3)$$

**Satz 2.8.6.** *Kettenregel*

a) Es gilt:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (2.8.4.4)$$

b) Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton wachsend mit  $f'(x_0) \neq 0$  und diffbar. Dann existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$  und besitzt die Ableitung

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (2.8.4.5)$$

mit  $y_0 = f(x_0)$ .

### 2.8.5 Mittelwertsätze

**Definition 2.8.7.** Es sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in (a, b)$ .

- a)  $f(x)$  hat in  $x_0$  ein lokales Maximum, falls es ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit  $f(x) \leq f(x_0)$  für alle  $x \in (a, b)$  mit  $(x - x_0) < \varepsilon$ .
- b) Analog für lokales Minimum.

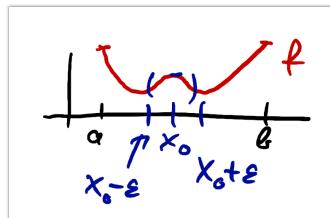


Abbildung 2.25: Lokales Minimum/Maximum (Schneider 2018)

**Satz 2.8.8.** Besitzt eine stetig diffbare Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  in einer Stelle  $x_0 \in (a, b)$  ein lokales Maximum oder Minimum, so gilt notwendigerweise  $f'(x_0) = 0$ .

**Satz 2.8.9.** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $(a, b)$  diffbar mit  $g'(x) > 0$  bzw.  $g'(x) < 0$  jeweils für alle  $x \in (a, b)$ .

- a) **Satz von Rolle:** Gilt  $f(a) = f(b)$ , so existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = 0$ .
- b) **1. Mittelwertsatz:** Es gibt ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .
- c) **2. Mittelwertsatz:** Es gibt ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ .

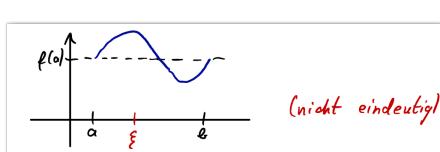


Abbildung 2.26: Zu a) (Schneider 2018)

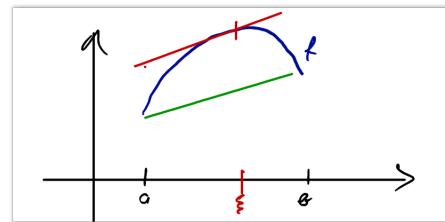


Abbildung 2.27: Zu b) (Schneider 2018)

### 2.8.6 Monotonie

**Satz 2.8.10.**

- a) Ist  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und es gelte  $f'(x_0) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$ , so ist  $f$  konstant.

- b) 
$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) &\Leftrightarrow f \text{ ist monoton wachsend} \\ f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) &\Rightarrow f \text{ ist streng monoton wachsend} \\ f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) &\Leftrightarrow f \text{ ist monoton fallend} \\ f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) &\Rightarrow f \text{ ist streng monoton fallend} \end{aligned}$$

### 2.8.7 Das Prinzip von l'Hospital

**Satz 2.8.11.** Gilt  $\lim_{b \rightarrow a} f(b) = 0$ ,  $\lim_{b \rightarrow a} g(b) = 0$  und existiert  $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f'(b)}{g'(b)}$ , so existiert auch  $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b)}{g(b)}$  und er ist gleich  $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f'(b)}{g'(b)}$ . Analog  $\lim_{b \rightarrow a} f(b) = \infty$  und  $\lim_{b \rightarrow a} g(b) = \infty$ .

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow a} f(b) = 0 \wedge \lim_{b \rightarrow a} g(b) = 0 \wedge \lim_{b \rightarrow a} \frac{f'(b)}{g'(b)} \Rightarrow \lim_{b \rightarrow a} \frac{f'(b)}{g'(b)} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b)}{g(b)} \quad (2.8.7.1)$$

**Bemerkung 2.8.4.** Zur Berechnung muss der Ausdruck gegebenenfalls auf " $\frac{0}{0}$ " zurückgeführt werden. Entspricht zum Beispiel  $\frac{f(b)}{g(b)}$  der Form " $\frac{\infty}{\infty}$ " kann durch Umformung zu  $\frac{\frac{1}{f(b)}}{\frac{1}{g(b)}}$  l'Hospital angewandt werden.

Liegt ein Ausdruck in der Form " $\infty \cdot 0$ " wie zum Beispiel  $\lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{x}_{\rightarrow \infty} \underbrace{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}_{\rightarrow 0}$  vor,

kann durch Umformung zu  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}$  wieder in die Form " $\frac{0}{0}$ " gebracht werden.

## 2.9 Taylorpolynome

**Satz 2.9.1.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^{n+1}$ -Funktion und sei  $x_0 \in I$  und heißt Entwicklungspunkt. Dann ist

a) das Taylorpolynom  $n$ -ten Grades zum Entwicklungspunkt  $x_0$  gegeben durch

$$T_n(f, x, x^*) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x^*)}{k!} (x - x^*)^k \quad (2.9.0.1)$$

und stimmt mit  $f$  in  $x_0$  bis zur  $n$ -ten Ableitung überein.

b) Der Fehler

$$R_n(x, x_0) = f(x) - T_n(x, x_0) \quad (2.9.0.2)$$

ist gegeben durch die Restgliedformel nach Lagrange

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (2.9.0.3)$$

wobei  $\xi = x_0 + \Theta(x - x_0)$  mit  $\Theta \in (0, 1)$ , d.h.  $\xi$  ist eine Zahl zwischen  $x$  und  $x_0$ . Es gilt dann

$$|R_n(x, x_0)| = \frac{\sup_{\xi \in (x_0, x)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \quad (2.9.0.4)$$

## 2.10 Reihen

### 2.10.1 Satz von Bolzano-Weierstraß (Kompaktheitssatz)

**Satz 2.10.1.** *Jede beschränkte reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt eine konvergente Teilfolge.*

**Bemerkung 2.10.1.** *Im Prinzip unterteilt man das Intervall jeweils mittig und erhält so eine Folge von Teilintervalle mit je unendlich vielen Folgengliedern. Daraus konstruiert man eine konvergente Teilfolge*

**Bemerkung 2.10.2.** *Der Satz gilt auch im  $\mathbb{R}^d$  aber nicht im  $\mathbb{R}^\infty$ .*

**Definition 2.10.2.**  *$x$  heißt Häufungspunkt einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn eine Teilfolge existiert, die gegen  $x$  konvergiert.*

Formuliert man den Satz von Bolzano Weierstraß dahingehen um, lautet er

**Bemerkung 2.10.3.** *Jede beschränkte reelle Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

**Definition 2.10.3.**

*limes inferior :  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{x : x \text{ ist ein Häufungspunkt von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$*

*limes superior:  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{x : x \text{ ist ein Häufungspunkt von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$*

### 2.10.2 Häufungspunkte

**Bemerkung 2.10.4.** *Ein Häufungspunkt  $a$  einer Folge  $(a_n)$  ist der Grenzwert einer Teilfolge  $(a_{n_k})$ .*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$$

*Größter HP :  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$*

*Kleinster HP :  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$*

*Es gilt:*

$$(1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \Rightarrow a_n \text{ konvergiert}$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow \text{jede Teilfolge } a_{n_k} \text{ konvergiert.}$$

### 2.10.3 Cauchy-Folgen

**Definition 2.10.4.** *Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Cauchy-Folge, falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  (*im Script steht  $n \in \mathbb{N}$ , aber irgendwie unlogisch*) existiert, sodass für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt:  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \quad \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad (2.10.3.1)$$

*(vgl. Konvergenzkriterium (2.7.2) bzw. (2.7.2.1)).*

**Satz 2.10.5.** *Jede konvergente Folge ist auch eine Cauchy-Folge.*

**Satz 2.10.6.** *In den reellen Zahlen gilt: Jede Cauchy-Folge ist konvergent.*

**Bemerkung 2.10.5.** *Jede Cauchy-Folge ist beschränkt (somit ist Bolzano Weierstraß anwendbar).*

Die Konsequenzen aus dem Beweis der obigen Aussagen sind:

**Bemerkung 2.10.6.**

- Um Konvergenz nachzuweisen reicht der Nachweis einer Cauchy-Folge (Cauchy-Kriterium)
- Supremumsvollständigkeit  $\Rightarrow$  Cauchyfolgenvollständigkeit

#### 2.10.4 Reihen reeller Zahlen

**Definition 2.10.7.** *Bildet man zu einer gegebenen Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in \mathbb{R}$  eine neue Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit*

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad (2.10.4.1)$$

*so wird die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Reihe genannt. Die einzelnen  $s_n$  heißen Partialsummen der Reihe. Ist  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent, so wird der Grenzwert  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$  mit  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  bezeichnet. Oft wird  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  als Abkürzung für  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  verwendet.*

**Satz 2.10.8.**

a) *Es gilt das Cauchysche Konvergenzkriterium.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m \geq N : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon \quad (2.10.4.2)$$

b) *Notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für die Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist, dass  $a_k$  eine Nullfolge ist, also das gilt:  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$*

c) *Sind*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

*konvergente Reihen, so konvergieren auch*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) + \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \\ \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

#### 2.10.4.1 Wichtige Reihen

- Exponentialreihe:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.10.4.3)$$

- Geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad |q| < 1 \quad (2.10.4.4)$$

- Sinusreihe

$$\sin(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} = y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 + \dots \quad (2.10.4.5)$$

- Cosinusreihe

$$\cos(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 + \dots \quad (2.10.4.6)$$

#### 2.10.4.2 Konvergenzen und Divergenzen ausgewählter Reihen

- Geometrische Reihe

Konvergenz kann nur für  $|q| < 1$  vorliegen da  $a_k$  eine Nullfolge sein muss.  
Sonst divergent.

- Harmonische Reihe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} = \infty \quad (2.10.4.7)$$

#### 2.10.4.3 Leibnizkriterium für alternierende Reihen

**Satz 2.10.9.** Ist  $a_k \geq 0$  und ist  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  monoton fallend, oder anders ausgedrückt ist  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Nullfolge, so ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konvergent.

#### 2.10.5 Absolut konvergente Reihen

**Definition 2.10.10.** Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty}$  heißt absolut konvergent, falls die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.

**Satz 2.10.11.** Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

### 2.10.5.1 Konvergenzkriterien

**Satz 2.10.12.** a) Die absolute Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist äquivalent zur Be- schränktheit von  $\left( \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right)_{k \in \mathbb{N}}$ .

b) Majorantenkriterium

Sei  $|a_k| \leq b_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent, so folgt die absolute Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  heißt konvergente Majorante.

c) Divergenzkriterium

Sei  $0 < a_k \leq b_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergent (d.h.  $= \infty$ ). Dann ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  divergent und  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt divergente Minorante.

**Bemerkung 2.10.7.** Zu (2.10.12) b): Häufig wird die geometrische Reihe als konvergente Majorante genutzt.

**Satz 2.10.13.** Vergleichsreihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \begin{cases} \text{konvergiert für } \alpha > 1 \\ \text{divergiert für } \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (2.10.5.1)$$

**Satz 2.10.14.** Wurzelkriterium: Gegeben sei die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Man setzt  $\alpha = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$ .

a) Ist  $\alpha < 1$ , so konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

b) Ist  $\alpha > 1$ , so divergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

c) Ist  $\alpha = 1$ , so ist keine Aussage möglich.

**Satz 2.10.15.** Quotientenkriterium: Gegeben sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  mit  $a_k \neq 0$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Wir setzen  $\underline{\alpha} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$  und  $\overline{\alpha} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ .

a) Ist  $\overline{\alpha} < 1$ , so konvergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut.

b) Ist  $\underline{\alpha} > 1$ , so divergiert  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

**Bemerkung 2.10.8.** Das Wurzelkriterium (2.10.14) wird häufig bei n-ten Wurzeln angewandt, das Quotientenkriterium (2.10.15) häufig bei Fakultäten.

## 2.10.6 Umordnung von Reihen

**Satz 2.10.16.** *Umordnung absolut konvergenter Reihen:* Sei  $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  eine bijektive Abbildung (erzeugt Umnummerierung der Folenglieder). Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent, so ist auch jede umgeordnete Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$  absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} \quad (2.10.6.1)$$

**Satz 2.10.17.** Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_m$  absolut konvergent. Dann ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k}$  für jede Nummerierung:  $(\sigma, \mu) : (\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0^2)$  mit  $k \rightarrow (\sigma_k, \mu_k)$  absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_m \right) \quad (2.10.6.2)$$

## 2.10.7 Potenzreihen

**Definition 2.10.18.** Eine Reihe der Form  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  heißt Potenzreihe.

### 2.10.7.1 Taylorreihe

Ist eine Funktion unendlich oft diffbar kann aus dem Taylorpolynom  $T_n(x, x_0)$  für  $n \rightarrow \infty$  die sogenannte Taylorreihe

$$T_{\infty}(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (2.10.7.1)$$

erhalten werden.

**Satz 2.10.19.** Die Taylorreihe  $T_{\infty}(f, x, x_0)$  konvergiert in  $x \in \mathbb{R}$  genau dann gegen  $f(x)$ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, x, x_0) = 0$$

**Satz 2.10.20.** Identitätssatz:

$$\begin{aligned} \text{Taylorreihe: } f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ \text{Potenzreihe: } f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \\ &\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \end{aligned} \quad (2.10.7.2)$$

### 2.10.7.2 Konvergenz der Potenzreihen

**Satz 2.10.21.**

- a) Zu jeder Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  gibt es eine Zahl  $r \in [0, \infty]$ , den sogenannten Konvergenzradius der Potenzreihe, mit der Eigenschaft, dass  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  absolut konvergent für  $|z - z_0| < r$  ist und divergent für  $|z - z_0| > r$ .
- b) Für den Konvergenzradius gilt die Formel von Cauchy-Hadamard:

$$r = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}} \quad (2.10.7.3)$$

wobei  $\frac{1}{\infty} = 0$  und  $\frac{1}{0} = \infty$  gesetzt wird.

Dazu:

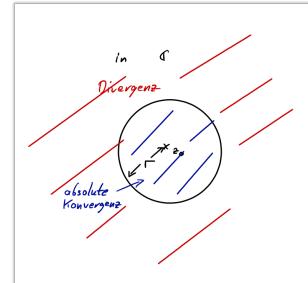
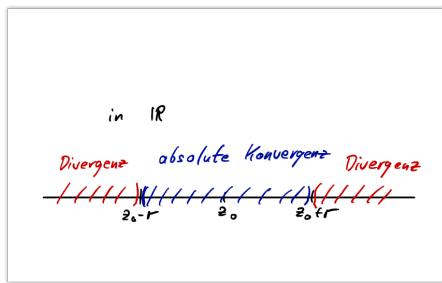


Abbildung 2.28: Potenzradius in  $\mathbb{R}$  Abbildung 2.29: Potenzradius in  $\mathbb{C}$  (Schneider 2018)

**Bemerkung 2.10.9.** Falls einer der folgenden Grenzwerte existiert bzw.  $\infty$  ist, ist er gleich dem Konvergenzradius.

$$r = \frac{1}{\lim |a_k|^{\frac{1}{k}}} \quad \text{bzw.} \quad r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

**Bemerkung 2.10.10.** Da absolute Konvergenz vorliegt, können Potenzreihen miteinander multipliziert werden. Der Konvergenzradius ist mindestens so groß wie das Minimum der Konvergenzradien.

**Bemerkung 2.10.11.** Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzradius beliebig oft diffbar und können gliedweise abgeleitet werden.

**Satz 2.10.22.** Die formal abgeleitete Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$  hat den gleichen Konvergenzradius wie die Ausgangsreihe.

**Satz 2.10.23.** Es sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1. Ist die

Reihe auch in  $x = 1$  konvergent, d.h. konvergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (2.10.7.4)$$

## 2.11 Stetigkeit

**Definition 2.11.1. A:**

Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}$  heißt stetig in  $x^* \in D$ , falls  $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = f(x^*)$ .

**Bemerkung 2.11.1.** Jede in  $x^*$  differenzierbare Funktion ist auch stetig in  $x^*$ .

**Definition 2.11.2.** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}$  heißt stetig, falls  $f$  stetig für alle  $x^* \in D$  ist.

**Satz 2.11.3.** Sind  $f, g$  stetige Funktionen und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so sind innerhalb ihres Definitionsbereich auch  $\lambda f, f + g, f \cdot g, f \circ g, \frac{f}{g}$  stetige Funktionen.

**Satz 2.11.4.** Stetige Fortsetzbarkeit: Eine Definitionslücke einer gebrochen rationalen Funktion ist hebbbar, wenn die Vielfachheit der Nullstelle  $x_0$  im Zählerpolynom  $\geq$  der Vielfachheit der Nullstelle  $x_0$  im Nennerpolynom ist.

### 2.11.1 Arten von Unstetigkeiten

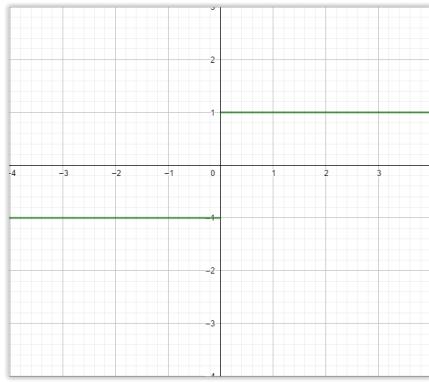


Abbildung 2.30:  $f(x) = \frac{|x|}{x}$   
(Sprungstelle)

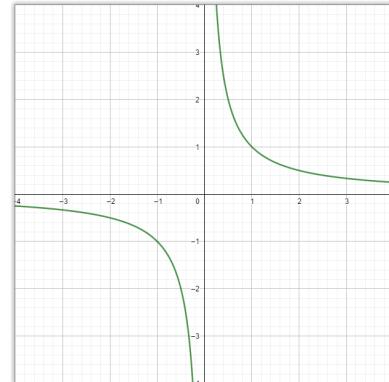


Abbildung 2.31:  $f(x) = \frac{1}{x}$   
(Polstelle)

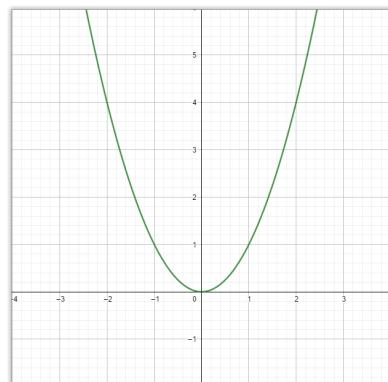


Abbildung 2.32:  $f(x) = \frac{x^3}{x}$   
(Lücke)

**Definition 2.11.5.**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  ist stetig in  $x_0 \in D$  falls

1) Falls z.z. ist dass  $f$  stetig ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon \quad \forall x \in D : (|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \quad (2.11.1.1)$$

2) Falls z.z. ist dass  $f$  nicht stetig ist:

$$\forall \text{Folgen } (x_n) \text{ mit } x_n \rightarrow x_0 \text{ für } n \rightarrow \infty \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0) \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (2.11.1.2)$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad (2.11.1.3)$$

## 2.11.2 Nullstellensatz und Zwischenwertsatz

**Satz 2.11.6.** Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann gilt:

- a) Es sei  $f(a)f(b) < 0$ . Dann existiert ein  $x^* \in (a, b)$  mit  $f(x^*) = 0$ , d.h. eine Nullstelle von  $f$ .
- b) Sei  $f(a) < c < f(b)$ . Dann existiert ein  $x^* \in (a, b)$  mit  $f(x^*) = c$ .

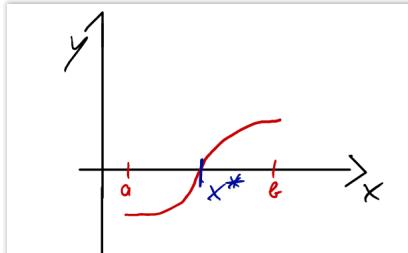


Abbildung 2.33: Zu a)  
(Nullstellensatz) (Schneider 2018)

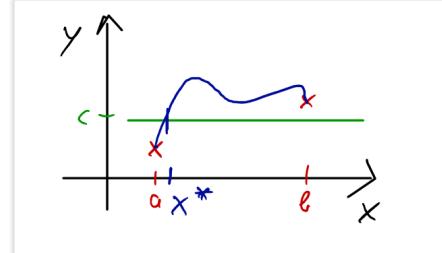


Abbildung 2.34: Zu b)  
(Zwischenwertsatz) (Schneider 2018)

### 2.11.2.1 Sätze zu Stetigkeit und Monotonie

**Satz 2.11.7.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei streng monoton wachsend und stetig. Dann existiert die Umkehrfunktion  $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$ . Diese ist streng monoton wachsend und stetig.

**Definition 2.11.8. B: ( $\varepsilon - \delta$  Definition)**

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}$ . Dann heißt  $f$  stetig in  $x^*$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass gilt:

$$\forall x \in D : |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon \quad (2.11.2.1)$$

Es muss zu jeder beliebig kleinen Seitenlänge  $\varepsilon$  immer ein Rechteck mit Mitte  $x^*$  existieren, sodass  $f$  das Rechteck an den Seiten verlässt.

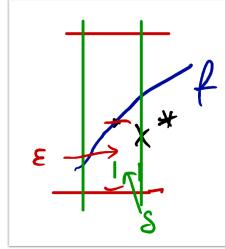


Abbildung 2.35:  $\varepsilon - \delta$  Kriterium (Schneider 2018)

**Definition 2.11.9.** a)  $f$  heißt Lipschitz-stetig in  $x^*$ , wenn es ein  $L > 0$  und  $\delta > 0$  gibt, sodass für  $x \in D$  mit  $|x - x^*| < \delta$

$$|f(x) - f(x^*)| \leq L|x - x^*| \quad (2.11.2.2)$$

gilt.

b)  $f$  heißt Hölder-stetig mit Exponent  $\alpha \in (0, 1]$ , falls

$$|f(x) - f(x^*)| \leq L(|x - x^*|^\alpha) \quad (2.11.2.3)$$

gilt.

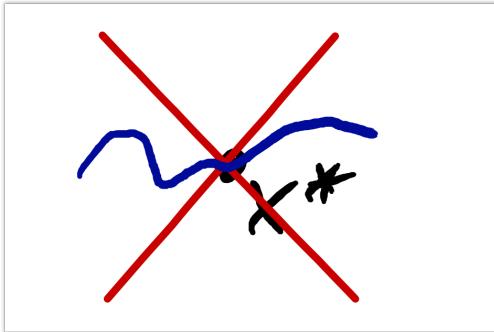


Abbildung 2.36: Zu a)  
(Lipschitzstetigkeit) (Schneider 2018)

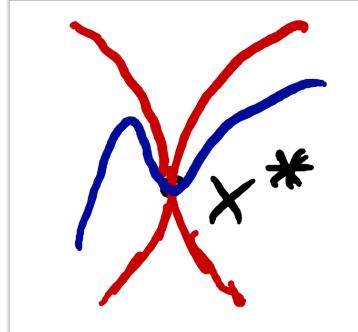


Abbildung 2.37: Zu b)  
(Hölder-Stetigkeit) (Schneider 2018)

**Bemerkung 2.11.2. Zu a)** Es ist die Idee, eine Sekante so in den Graph zu legen, dass sie zwei Punkte des Graphen schneidet. Existiert nun eine Sprungstelle, so kann man diese Bedingung einhalten und die Steigung der Sektanten gegen unendlich treiben (praktisch eine senkrechte gerade). Liegt keine Sprungstelle vor, so wird die Steigung unter Einhaltung der Bedingung immer kleiner unendlich sein. Die Schranke für die Steigung ist hier  $L$ .

**Satz 2.11.10.** Definition A (2.11.1) und Definition B (2.11.8) der Stetigkeit sind äquivalent.

**Definition 2.11.11.** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}$  heißt Hölder- bzw. Lipschitzstetig, falls  $f$  Hölder- bzw. Lipschitzstetig in jedem  $x^* \in D$  ist.

Bezeichnungen:  $C^{0,\alpha}$  steht für Hölder-stetig,  $C^{0,1} = \text{Lip}$  steht für Lipschitzstetig.

**Bemerkung 2.11.3.** Es gilt:

$$\text{differenzierbar} \Rightarrow \text{Lipschitzstetig} \Rightarrow \text{Hölder-stetig} \Rightarrow \text{stetig} \quad (2.11.2.4)$$

## 2.12 Extremalprobleme

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist  $f'(x^*) = 0$  notenwide Bedingung dafür, dass ein Minimum oder Maximum vorliegt, sofern  $f$  diffbar ist.

**Satz 2.12.1. Globale Theorie:**  $[a,b]$  sei ein abgeschlossenes Intervall.  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Dann gibt es je ein  $\underline{x}, \bar{x} \in [a,b]$  mit  $f(\underline{x}) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$  und  $f(\bar{x}) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ .

**Bemerkung 2.12.1.** (Zu (2.12.1)) Stetige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen das Maximum und Minimum an.

**Satz 2.12.2. Lokale Theorie:** Sei  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \in \mathbb{C}^3$  (also 3 mal stetig diffbar). Für  $x^* \in (a,b)$  gilt dann:

- a) Aus  $f'(x^*) = 0$  und  $f''(x^*) > 0$  folgt, dass  $f$  in  $x^*$  ein lokales Minimum hat.
- b) Aus  $f'(x^*) = 0$  und  $f''(x^*) < 0$  folgt, dass  $f$  in  $x^*$  ein lokales Maximum hat.

## 2.13 Funktionenfolgen

**Definition 2.13.1.** Eine Funktionenfolge ist allgemein eine Folge von Funktionen  $f_1, f_2, \dots$  bei denen alle Funktion dieselbe Definitions- und Zielmenge haben.

$$f : D \times \mathbb{N} \rightarrow Z, \quad (x, n) \rightarrow f_n(x) \quad (2.13.0.1)$$

Wobei  $D$  die Definitionsmenge und  $Z$  die Zielmenge ist.

**Definition 2.13.2.** a ) Eine Folge von Funktionen  $f_n$  mit  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}$  heißt für  $n \rightarrow \infty$  punktweise gegen  $f$  konvergent, falls für alle  $x \in D$  :  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  gilt.

b ) Eine Funktionenfolge heißt gleichmäßig konvergent, falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$  gilt.

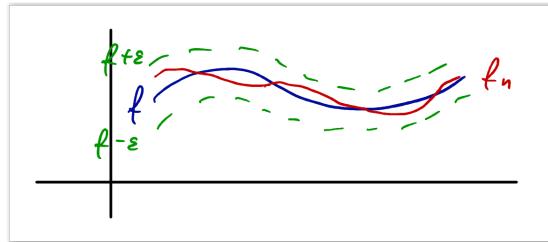


Abbildung 2.38: Epsilonkanal Funktionenfolge (Schneider 2018)

**Satz 2.13.3.** Gegeben sei eine Folge stetiger Funktionen mit  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Gilt  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig auf  $D$ , so ist auch die Grenzfunktion stetig.

**Satz 2.13.4.** Zu jeder Potenzreihe gibt es den Konvergenzradius  $r$  mit  $0 \leq r \leq \infty$  mit der Eigenschaft, dass  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  absolut konvergent für  $|z - z_0| < r$  und divergent für  $|z - z_0| > r$  ist.

Ferner konvergiert die Potenzreihe auf jeder Kreisscheibe  $|z - z_0| < \delta$  mit  $\delta < r$  auch gleichmäßig.

**Bemerkung 2.13.1.** Die Konsequenz aus obigem Satz ist, dass Potenzreihen für alle  $z$  mit  $|z - z_0| < r$  stetig sind.

**Satz 2.13.5.**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seien auf  $[a, b]$  differenzierbar. Für ein  $x_0 \in [a, b]$  sei  $f_n(x_0)$  konvergent. Ferner konvergiere  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig (gegen  $g$ ) auf  $[a, b]$ . Dann gilt:

- 1)  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert auf  $[a, b]$  gleichmäßig.
- 2)  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  ist differenzierbar auf  $[a, b]$  und es gilt  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$  (und es gilt  $f' = g$ ).

**Bemerkung 2.13.2.** Die Konsequenz aus obigem Satz ist, dass Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius beliebig oft differenzierbar sind und gliedweise abgeleitet werden können.

# Kapitel 3

## HM2

### 3.1 Integralberechnung

#### 3.1.1 Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)dx = F(x) + C = [F(x)] \quad , C \in \mathbb{R} \quad (3.1.1.1)$$

#### 3.1.2 Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (3.1.2.1)$$

#### 3.1.3 Partielle Integration

Entspricht der "Produktregel" der Differentialrechnung.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \quad (3.1.3.1)$$

Bietet sich zum Beispiel bei Produkten aus x-Potenz mit e-Funktionen, log, sin oder cos an.

#### 3.1.4 Integration durch Substitution

Entspricht der "Kettenregel" der Differentialrechnung.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy \quad (\text{setze } y = g(x)) \quad (3.1.4.1)$$

##### 3.1.4.1 Spezialfall

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(|f(x)|) + C \quad , C \in \mathbb{R} \quad (3.1.4.2)$$

### 3.1.5 Gerade/Ungerade Funktionen

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx & , f \text{ gerade} \\ 0 & , f \text{ ungerade} \end{cases} \quad (3.1.5.1)$$

$$\begin{aligned} f \text{ gerade, falls } f(-x) &= f(x) && (z.B.: \cos(x), x^2) \\ f \text{ ungerade, falls } f(-x) &= -f(x) && (z.B.: \sin(x), x^3) \end{aligned}$$

## 3.1.6 Allgemeines zur Integration

### 3.1.6.1 Riemann Integrierbarkeit

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig bzw. monoton  
 $\Rightarrow f$  ist R-integrierbar.

#### 3.1.6.1.1 Riemannsches Unterintegral

$$\int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \sup\{U_f(Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \quad (3.1.6.1)$$

#### 3.1.6.1.2 Riemannsches Oberintegral

$$\int_{\bar{a}}^b f(x) dx = \inf\{O_f(Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \quad (3.1.6.2)$$

$\rightarrow f$  heißt Riemann-integrierbar über  $[a, b]$ , falls

$$\int_{\bar{a}}^b f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx \quad (3.1.6.3)$$

In diesem Fall heißt der Wert das Riemann-Integral und wird mit  $\int_a^b f(x) dx$  bezeichnet.

#### 3.1.6.1.3 Riemannsche Untersumme

$$U_f(Z) = \sum_{j=0}^{n-1} \inf_{\xi \in [x_j, X_{j+1}]} f(\xi) \cdot (x_{j+1} - x_j) \quad (3.1.6.4)$$

#### 3.1.6.1.4 Riemannsche Obersumme

$$O_f(Z) = \sum_{j=0}^{n-1} \sup_{\xi \in [x_j, X_{j+1}]} f(\xi) \cdot (x_{j+1} - x_j) \quad (3.1.6.5)$$

**3.1.6.1.5 Eigenschaften**

a) Falls  $a < b$  setzen wir:

$$\begin{aligned}\int_b^a f(x)dx &= - \int_a^b f(x)dx \\ \int_a^a f(x)dx &= 0\end{aligned}\tag{3.1.6.6}$$

b)  $f, g$  seien R-integrierbar,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda f + \mu g$  ist R-integrierbar (Vektorraumeigenschaft).

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx\tag{3.1.6.7}$$

c)  $a < C < b$ ,  $f$  ist R-integrierbar.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^C f(x)dx + \int_C^b f(x)dx\tag{3.1.6.8}$$

d)

$$\begin{aligned}f(x) \geq 0 &\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) &\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx\end{aligned}\tag{3.1.6.9}$$

e)

Sind  $f$  und  $g$  R-integrierbar ist auch  $f * g$  R-integrierbar. (3.1.6.10)

f)

$$g(x) \geq C > 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \text{ ist R-integrierbar.}\tag{3.1.6.11}$$

g)

Ist  $f$  R-integrierbar dann ist auch  $|f|$  R-integrierbar. (3.1.6.12)

h)

$$(b-a) \inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} f(x)\tag{3.1.6.13}$$

**3.1.6.1.6 Kriterien zur Riemann-Integrierbarkeit**

a)  $f$  monoton  $\Rightarrow f$  R-integrierbar.

b)  $f$  stetig  $\Rightarrow f$  R-integrierbar

**Satz 3.1.1.** „Jede stetige Funktion  $f : k \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer kompakten Menge  $k$ , d.h. für  $k < \mathbb{R}^d$  abgeschlossen und beschränkt, ist dort gleichmäßig stetig und damit R-integrierbar.“ (Schneider 2018) Beispiel für  $k$ :  $k : [a, b]$

c)

**Satz 3.1.2.** Kriterium: Jede Funktion deren Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden (z.B. abzählbare Mengen) sind R-integrierbar. „Satz: Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann R-integrierbar, wenn  $f$  beschränkt ist und die Menge der Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge ist.“ (Schneider 2018)

Die Konsequenz daraus lautet, dass jede stetige Funktion mit endlich vielen Sprungstellen R-integrierbar ist. (Vgl. Schneider 2018)

d)

**Satz 3.1.3.** „Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann ist  $f$  R-integrierbar genau dann, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Partition  $Z$  gibt, so dass  $O_f(Z)U_f(Z) < \varepsilon$ .“ (Schneider 2018)

Anmerkung: „In der Mengenlehre ist eine Partition (auch Zerlegung oder Klasseneinteilung) einer Menge  $M$  eine Menge  $P$ , deren Elemente nichtleere Teilmengen von  $M$  sind, sodass jedes Element von  $M$  in genau einem Element von  $P$  enthalten ist. Anders gesagt: Eine Partition einer Menge ist eine Zerlegung dieser Menge in nichtleere paarweise disjunkte Teilmengen.“ (Wikimedia Foundation 2018)

### 3.1.6.2 MWS der Integralrechnung

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann  $\exists \xi \in [a, b]$  mit  $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$ .

### 3.1.6.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann ist  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  diffbar und  $F'(x) = f(x)$ .

#### 3.1.6.3.1 Folgerungen

**Satz 3.1.4.** Ist  $f$  ungerade, so ist  $f''$  gerade, und alle Stammfunktionen von  $f$  sind gerade. (vgl. Gauss 2018)

**Satz 3.1.5.** Ist  $f$  gerade, so ist  $f'$  ungerade, und  $f$  besitzt eine ungerade Stammfunktion. (vgl. Gauss 2018)

### 3.1.7 Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p, q \text{ Polynome} \quad (3.1.7.1)$$

Vorgehensweise:

**1)** Zähler und Nennergrad untersuchen

ist  $\text{grad}(p) > \text{grad}(q)$ , also Zählergrad > Nennergrad umformen in  
 $R(x) = p_1(x) + \frac{p_2(x)}{q(x)} \Rightarrow$  Polynomdivision.

**2)** Nullstellen und faktorisieren

- Nullstellen des Nenners bestimmen
- Nenner Faktorisieren in  $p_1, p_2, \dots$

**3)** Ansatz

- Ansatz für Partialbruchzerlegung  $R(x) = \frac{A}{p_1} + \frac{B}{p_2} + \dots$
- Bestimmung von A, B, C, ...

Bei quadratischen oder höhergradigen Nullstellen lautet der Ansatz:

$$NST = x^n \Rightarrow R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \dots + \frac{N}{x^n} \quad (3.1.7.2)$$

Bei komplexen Nullstellen muss der Ansatz angepasst werden.

$$\begin{aligned} NST : & 2, -2, 2i, -2i \\ \text{Ansatz : } & R(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \end{aligned} \quad (3.1.7.3)$$

Es werden also die komplexen Nullstellen ausmultipliziert und so reell dargestellt.

### 3.1.8 Uneigentliche Integrale

**Satz 3.1.6.** Sei  $f : [a, \infty] := I \rightarrow \mathbb{R}$  lokal integrierbar. Konvergiert  $\int_a^\infty f(x)dx$  absolut. d.h. ist  $\int_a^\infty |f(x)|dx$  konvergent, so konvergiert auch  $\int_a^\infty f(x)dx$ .

**Satz 3.1.7.** Majorantenkriterium: Gilt für alle  $x \in I$ , dass  $|f(x)| \leq g(x)$ , und ist  $\int_a^\infty g(x)dx$  konvergent, so ist  $\int_a^\infty dx$  (im Script vom Prof ist hier die untere Grenze 0, ich denke es sollte aber  $a$  sein) absolut konvergent.

**Satz 3.1.8.** Minorantenkriterium: Gilt für alle  $x \in I$ , dass  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  und divergiert  $\int_a^\infty g(x)dx$ , so divergiert auch  $\int_a^\infty dx$ .

**Bemerkung 3.1.1.** Abschätzungen mit negativen Minoranten sind falsch da mit einer negativen Minorante alles nach unten abgeschätzt werden kann.

#### 3.1.8.1 Typen uneigentlicher Integrale

Singularität:  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Unbeschränktes Gebiet:  $\int_1^\infty e^{-x} dx$

(3.1.8.1)

**Definition 3.1.9.** Eine Singularität ist die Stelle, an der die Funktion divergieren würde oder undefiniert wäre.

**Methode:** Ersetzen der kritischen Stelle durch  $z$  und setzen eines Grenzüberganges, z.B.:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_z^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \int_1^z e^{-x} dx$$

### Vergleichsintegrale

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx &= \begin{cases} \text{konvergiert} & , \alpha > 1 \\ \text{divergiert} & , \alpha \leq 1 \end{cases} \\ \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx &= \begin{cases} \text{divergiert} & , \alpha \geq 1 \\ \text{konvergiert} & , \alpha < 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1.8.2}$$

### 3.1.9 Wichtige Integrale

$$\int \frac{1}{1+y^2} dx = \arctan(y) \tag{3.1.9.1}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1 \tag{3.1.9.2}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) \tag{3.1.9.3}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = \cot(x) \tag{3.1.9.4}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} \tag{3.1.9.5}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \tag{3.1.9.6}$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)} dx = \tanh(x) \tag{3.1.9.7}$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2(x)} dx = -\coth(x) \tag{3.1.9.8}$$

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x \tag{3.1.9.9}$$

$$\int \frac{1}{x-x_1} dx = \ln|x-x_1| \tag{3.1.9.10}$$

$$\int \frac{1}{|x-x_1|^k} dx = \frac{1}{-k+1} (x-x_1)^{-k+1}, \quad k > 1 \tag{3.1.9.11}$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^2 + b^2} dx = \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{b} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) \tag{3.1.9.12}$$

### 3.1.10 Separierbare DGL

#### 3.1.10.1 Wiederholung klassische DGL

Bisher: lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

z.B.:  $y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = e^{2t}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$

$$\begin{aligned} \text{Homogene DGL: } \quad & y(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \\ & \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4 \\ & \Rightarrow yh(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Inhomogenes DGL: } \underbrace{yp(t) = re^{2t}}_{\text{da 2 keine NST}}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow yp'(t) = 2re^{2t}, \quad yp''(t) = 4re^{2t} \\ & \stackrel{DGL}{=} 4re^{2t} - 10re^{2t} + 4re^{2t} \stackrel{!}{=} e^{2t} \Rightarrow -2re^{2t} = e^{2t} \\ & \Rightarrow r = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Allgemeine Lösung: } y(t) = yh(t) + yp(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t} - \frac{1}{2} e^{2t}$$

#### 3.1.10.2 Lösen von DGL mit Koeffizienten die von t abhängig sind

z.B.  $y'(t) - ty(t) = t$ ,  $y(0) = 1$

Spezielle Form:

$$y'(t) = f(t)g(y(t)) \quad , \quad y(t_0) = y_0 \quad (3.1.10.1)$$

$$\Rightarrow y'(t) = t + ty(t) = \underbrace{t}_{f(t)} \underbrace{g(y(t))}_{(1+y(t))}$$

Lösung: Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(t) \stackrel{y' = \frac{dy}{dt}}{\Rightarrow} \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad (3.1.10.2)$$

$C$  erhält man aus der Anfangsbedingung  $y(t_0) = y_0$ .

## 3.2 Lineare Algebra

### 3.2.1 Definitionen

#### 3.2.1.1 Linearkombinationen

$V$  sei ein Vektorraum (im Folgenden VR),  $v_1, \dots, v_m \in V$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ .

$$(1) \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \quad \text{Linearkombinationen der } v_i. \quad (3.2.1.1)$$

#### 3.2.1.2 Spann und Erzeugendensystem

$$(2) \quad \text{span}(v_1, \dots, v_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \mid \lambda_i, v_i \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{Spann der } v_i.$$

Gilt  $\text{span}(v_1, \dots, v_m) = V \Rightarrow \{v_1, \dots, v_m\}$  ist ein Erzeugendensystem. (3.2.1.2)

**Bemerkung 3.2.1.** Es gilt:

$$\dim = \text{span} \Rightarrow EZS \quad (3.2.1.3)$$

#### 3.2.1.3 Lineare Unabhängigkeit

$$(3) \quad v_1, \dots, v_m \text{ linear unabhängig, falls}$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$$

0 darf die einzige Lösung sein, sonst linear abhängig. (3.2.1.4)

**Bemerkung 3.2.2.** Es gilt:

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \text{linear unabhängig} \quad (3.2.1.5)$$

#### 3.2.1.4 Basis

$$(4) \quad B = \{b_1, \dots, b_n\} \subset V \text{ ist Basis von } V, \text{ falls}$$

- (B1)  $b_i$  linear unabhängig,  $i = 1, \dots, n$
- (B2)  $B$  ist ein Erzeugendensystem. (3.2.1.6)

Es gilt:

$$(1) \quad \dim V = |B| \quad (\text{Mächtigkeit von } B)$$

$$(2) \quad \dim V = n \quad (\Rightarrow n+1 \text{ Vektoren sind linear abhängig})$$

$$(3) \quad \forall v \in V : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \text{ eindeutig darstellbar.}$$

$$\Rightarrow B^v = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \quad (\text{Koordinaten von } v \text{ bezüglich } B) \quad (3.2.1.7)$$

### 3.2.1.5 Kanonische Basis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0, \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.1.8)$$

## 3.2.2 Vektorräume

### 3.2.2.1 Definitionen

#### 3.2.2.1.1 $\mathbb{R}^d$

$$\mathbb{R}^d : v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix} \quad (3.2.2.1)$$

#### 3.2.2.1.2 Vektoraddition

$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_d + w_d \end{pmatrix} \quad (3.2.2.2)$$

#### 3.2.2.1.3 Skalare Multiplikation

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}^d$$

$$\alpha \cdot v = \begin{pmatrix} \alpha \cdot v_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot v_d \end{pmatrix} \quad (3.2.2.3)$$

#### 3.2.2.1.4 Nullvektor

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.2.4)$$

### 3.2.2.2 Struktur

Für  $v, w, z \in \mathbb{R}^d$  gelten die folgenden Eigenschaften:

- (V1)  $v + w = w + v$
  - (V2)  $v + (w + z) = (v + w) + z$
  - (V3)  $v + 0 = 0 + v = v$  (0 ist das neutrale Element)
  - (V4)  $v + (-v) = (-v) + v = 0$  (-v ist das inverse Element)
- (3.2.2.5)

Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $v, w \in \mathbb{R}^d$  gilt:

- (S1)  $1 \cdot v = v$  ( $1 \in \mathbb{R}$ )
  - (S2)  $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
  - (S3)  $(\alpha + \beta)v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
  - (S4)  $\alpha(v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$
- (3.2.2.6)

(V1) – (V4) und (S1) – (S4) gelten auch für Funktionen.

**Definition 3.2.1.** Ist  $V$  eine Menge für deren Elemente eine Addition und eine skalare Multiplikation erklärt ist, so heißt sie Vektorraum, falls die Eigenschaften (V1) - (V4) und (S1) - (S4) erfüllt sind, wobei jetzt  $v, w, z \in V$ . Je nach Skalarkörper, also  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  sprechen wir von einem reellen oder komplexen Vektorraum. Teilmengen von Vektorräumen, die ebenfalls Vektorräume sind, heißen Untervektorräume. (Schneider 2018)

### 3.2.2.3 Untervektorraum

$V$  sei ein Vektorraum und es gelte  $U \subset V$ .

**Definition 3.2.2.** Eigenschaften (V1) - (V4), (S1) - (S4) sind als Teilmenge von  $V$  erfüllt, aber mit  $u, v \in U$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  muss auch  $u + v \in U$ ,  $\alpha u \in U$  gelten (Abgeschlossenheit bezüglich Vektoraddition und skalarer Multiplikation). (Schneider 2018)

#### 3.2.2.3.1 Untervektorraumkriterien

- (UV0)  $0 \in U$
  - (UV1)  $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$
  - (UV2)  $u \in U, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in U$
- (3.2.2.7)

Es gilt:  $U_1, U_2$  UVR von  $V$

- (1)  $U_1 \cap U_2 = \{v \in V : v \in U_1 \wedge v \in U_2\}$  UVR von  $V$
  - (2)  $U_1 \cup U_2 = \{v \in V : v \in U_1 \vee v \in U_2\}$  kein UVR von  $V$
- (3.2.2.8)

### 3.2.2.3.2 Triviale UVR von V

$$\begin{aligned} U &= \{0\} \\ U &= V \end{aligned}$$

### 3.2.2.3.3 Interessante Untervektorräume

- Die Menge der stetigen Funktionen:  $(([a, b], \mathbb{R}))$
- Die Menge der n-mal stetig diffbaren Funktionen  $\mathbb{C}^n ([a, b], \mathbb{R})$
- Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen

## 3.2.3 Erzeugendensystem, Basis, Dimension, Kern lineare Unabhängigkeit

### 3.2.3.1 Linearkombination, Spann

**Definition 3.2.3.** Für  $v_1, \dots, v_m \in V$  (Vektorraum) und  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  heißt ein Vektor der Form

$$v = \sum_{j=1}^m \lambda_j v_i \quad (3.2.3.1)$$

eine Linearkombination der Vektoren  $v_1, \dots, v_m$ . Die Menge aller Linearkombinationen heißt der Spann von  $v_1, \dots, v_m$ , d.h.

$$\text{Spann}(v_1, \dots, v_m) = \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j v_j : \lambda_j \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.2.3.2)$$

bzw. der von  $v_1, \dots, v_m$  aufgespannte Raum. (Schneider 2018)

Beispiel:

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & v_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & v_3 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & v_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_3 &= v_1 + v_2 & v_4 &= v_2 - v_1 \\ \Rightarrow \text{Spann } (v_1, \dots, v_4) &= \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

### 3.2.3.2 Lineare Unabhängigkeit

**Definition 3.2.4.** Die Vektoren  $v_1, \dots, v_m$  heißen linear unabhängig, falls aus

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j v_j = \mathcal{O} \in V \quad (3.2.3.3)$$

bereits

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \in \mathbb{R} \quad (3.2.3.4)$$

folgt.

### 3.2.3.3 Dimension

**Satz 3.2.5.** Für jede  $m \times n$  Matrix  $A$  gilt die Dimensionsformel:

$$\dim(\text{Kern}A) + \text{Rang}A = n \quad (3.2.3.5)$$

### 3.2.3.4 Kern

**Satz 3.2.6.** Die Lösungen von  $Ax = 0$  bilden einen Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$ , der sogenannte Kern von  $A$ , Schreibweise  $\text{Kern}A$ .

Der Kern beinhaltet alle Elemente die auf 0 abgebildet werden.

$$\text{Kern}(A) = \{v \in V | A(v) = \mathcal{O}\} \leq V \quad (3.2.3.6)$$

### 3.2.3.5 Rang

**Definition 3.2.7.** Die maximale Anzahl linearer Zeilenvektoren der Matrix  $A$  heißt der Rang von  $A$ .

### 3.2.3.6 Basis

**Definition 3.2.8.**  $B = \{v_1, \dots, v_M\} \subset V$  heißt eine Basis von  $V$ , falls  $B$  linear unabhängig und  $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$  ist.

**Satz 3.2.9.** „(Basen von endlich-dimensionalen Vektorräumen sind gleich groß). Sei  $V$  ein Vektorraum mit Basis  $\{v_1, \dots, v_m\}$ . Dann sind je  $n$  Vektoren  $w_1, \dots, w_n$  aus  $V$  mit  $n > m$  linear abhängig.“ (Schneider 2018)

#### 3.2.3.6.1 Folgerungen

**Definition 3.2.10.** „Ist  $\{v_1, \dots, v_m\}$  eine Basis des Vektorraums  $V$ , so lässt sich jeder Vektor  $v \in V$  eindeutig als Linearkombination der  $\{v_1, \dots, v_m\}$  schreiben, d.h.:

$$\exists x_k \text{ mit } v = \sum_{k=1}^m x_k v_k \quad (3.2.3.7)$$

“(Schneider 2018)

Mit  $x_k$  und  $v_k$  als Koordinaten bezüglich dieser Basis.

**Definition 3.2.11.** „Die Anzahl der Elemente einer Basis von  $V$  ist unabhängig von der speziellen Wahl der Basis. Die Anzahl der Elemente der Basis heißt die Dimension des Vektorraumes  $V$ .“ (Schneider 2018) Schreibweise:

$$\dim V = m \quad (3.2.3.8)$$

**Definition 3.2.12.** „Besitzt  $V$  eine Basis mit endlich vielen Elementen, so heißt  $V$  endlich dimensional, sonst heißt  $V$  unendlich dimensional.“ (Schneider 2018)

### 3.2.3.6.2 Matrixdarstellung einer linearen Abbildung bezüglich zweier Basen

Gegeben sei der Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  mit der Basis  $C = c_1, c_2$  mit  $c_1 = (1, 1)^T$  und  $c_2 = (0, -2)^T$ , sowie der Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  mit der Basis  $B$ . Die lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei gegeben durch

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von  $L$  bezüglich der Basen  $B$  und  $C$ .

**Matrixdarstellung**  $m_L^{C,B}$

**1. Schritt:** Bilde die Basisvektoren von  $B$  mit der linearen Abb.  $L$  ab:

$$\begin{aligned} L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ L \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**2. Schritt:** Stelle die Bildvektoren als Linearkombination der Basiselemente von  $C$  dar:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**3. Schritt:** Eintragen der Koeffizienten in eine Matrix:

$$m_L^{C,B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.2.3.9)$$

### 3.2.4 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

$$\left( \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right) \rightarrow Ax = b \quad (3.2.4.1)$$

### 3.2.4.1 Zeilenvektoren

Die Koeffizienten der Zeilen nennt man Zeilenvektoren.

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_m = \begin{pmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.2.4.2)$$

### 3.2.4.2 Gauss Algorithmus

Beim Gauss-Algorithmus werden Linearkombinationen der Zeilenvektoren gebildet. Das LGS hat nach der Anwendung folgende Form:

$$\begin{aligned}
& \tilde{a}_{11}x_1 + \dots + \tilde{a}_{1r}x_r + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\
& 0 + \tilde{a}_{22}x_1 + \dots + \tilde{a}_{2r}x_r + \dots = \tilde{b}_1 \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& \tilde{a}_{rr}x_r + \dots + \tilde{a}_{rn}xn = \tilde{b}_r \\
& 0 = \tilde{b}_r + 1 \\
& 0 = \tilde{b}_n
\end{aligned} \tag{3.2.4.3}$$

Die neuen Zeilenvektoren nach dem Gauss-Algorithmus sind:

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{1n} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \tilde{v}_m = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.2.4.4)$$

Da beim Gauss-Algorithmus nur Linearkombinationen verwendet werden bleibt der Spann erhalten.

### 3.2.4.3 Gauss-Algorithmus: Spann

$$span\{v_1, \dots, v_m\} = span\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m\} \quad (3.2.4.5)$$

### 3.2.4.4 Gauss-Algorithmus: Dimension, Rang

Weiterhin gilt:

$$\dim\{\text{span}\{v_1, \dots, v_m\}\} = \dim\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m\} = r \quad (3.2.4.6)$$

$r$  heißt Zeilenrang von  $A$  bzw. der Rang von  $A$ .

### 3.2.4.5 Folgerungen

#### Satz 3.2.13.

a) „Die Lösungen von  $Ax = 0$  bilden einen Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$ , den sogenannten Kern von  $A$ .“ (Schneider 2018)

Schreibweise:

$$\text{Kern}(A) = \ker(A) = \text{kernel}(A) \quad (3.2.4.7)$$

b)

$$\underbrace{\dim\{\ker\{A\}\}}_{n-r} + \underbrace{\text{Rang}\{A\}}_r = n \quad (3.2.4.8)$$

c) „Ein LGS  $Ax = 0$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  besitzt nur die Lösung  $x = 0$ , wenn  $\text{Rang}\{A\} = n$ .“ (Schneider 2018)

d) „Ist  $(w_1, \dots, w_k)$  eine Basis des Kerns, so lautet die allgemeine Lösung von  $Ax = 0$ :

$$x = \sum_{j=1}^k \alpha_j w_j \quad , \quad \alpha_j \in \mathbb{R} \quad (\text{Superpositionsprinzip}) \quad (3.2.4.9)$$

“(Schneider 2018)

e) „Ist  $x_s$  eine spezielle Lösung von  $Ax = b$ , so lautet die allgemeine Lösung von  $Ax = b$ :

$$x = x_s + \sum_{j=1}^k \alpha_j w_j \quad , \quad , \quad \alpha_j \in \mathbb{R} \quad (3.2.4.10)$$

Die Lösungsmenge von  $Ax = b$  ist ein affiner Raum, d.h. die Differenz von jeweils zwei Elementen bildet einen Vektorraum.“ (Schneider 2018)

## 3.2.5 Lineare Abbildungen und Matrizen

**Definition 3.2.14.** „Es seien  $V$  und  $W$  Vektorräume. Eine Abbildung  $T : V \rightarrow W$  heißt linear, falls für alle  $u, v \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$

$$T(v + w) = T(v) + T(w) \quad (3.2.5.1)$$

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad (3.2.5.2)$$

gilt.“ (Schneider 2018)

Wie erhält man die Matrix zu einer linearen Abbildung?

„Sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung.  $\{v_1, \dots, v_n\}$  sei eine Basis von  $V$  und

$\{w_1, \dots, w_n\}$  sei eine Basis von  $W$ . Dann lässt sich jeder Vektor  $T(v_j)$  in eindeutiger Weise als Linearkombination der  $w_1, \dots, w_m$  darstellen, d.h. es gibt  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  mit

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i. \quad (3.2.5.3)$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  heißt die Matrix der linearen Abbildung  $T$  bezüglich der Basen  $\{v_1, \dots, v_m\}$  und  $\{w_1, \dots, w_m\}$ . "(Schneider 2018)

**Satz 3.2.15.** „Die Koordinaten von  $w = T(v)$  entstehen aus den Koordinaten von  $v$  durch Multiplikation mit der Matrix  $A$ .

$$\begin{aligned} w &= T(v) \\ \text{mit } v &= \sum_{j=1}^n x_j v_j \text{ und } w = \sum_{i=1}^m y_i w_i \\ &\text{ergibt sich} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.5.4)$$

bzw.  $y = Ax$ . "(Schneider 2018)

### 3.2.5.1 Das Matrizenkalkül

Matrizenmultiplikation tritt bei der Hintereinanderausführung linearer Abbildungen auf.

$$T(v) = Av, \quad S(w) = Bw \rightarrow (SoT)(v) = \underbrace{BA}_{\text{Matrizen Vektoren}} \underbrace{v}_{\text{Vektor}} \quad (3.2.5.5)$$

Der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von  $BA$  sieht wie folgt aus:

$$a_{ij} = \sum_k b_{ik} a_{kj} \quad (3.2.5.6)$$

Damit Matrizen multipliziert werden können, müssen sie die richtige Größe haben.

$$\text{Mit } A \in \mathbb{R}^{mxn} \text{ und } B \in \mathbb{R}^{nxk} = C \in \mathbb{R}^{mxk} \quad (3.2.5.7)$$

Matrizenmultiplikation ist im allgemeinen

- nicht kommutativ, d.h.  $AB \neq BA$
- nicht nullteilerfrei

### 3.2.5.2 Rechenregeln

- (M1)  $(A + B)C = AC + BC$
  - (M2)  $A(B + C) = AB + AC$
  - (M3)  $A(BC) = (AB)C$
  - (M4)  $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$
- (3.2.5.8)

**Bemerkung 3.2.3.** Es gilt weiterhin:

$$S^{-1}AS = D \quad (3.2.5.9)$$

$$A^n = SD^nS^{-1} \quad (3.2.5.10)$$

$$(3.2.5.11)$$

### 3.2.5.3 Einheitsmatrix

Die Einheitsmatrix (Identität) Besteht nur aus in der Diagonale Einsen, alle anderen Stellen sind mit Nullen aufgefüllt.

$$I = id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ . & . & 0 \\ 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & . \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.5.12)$$

Die Einträge an i-ter Zeile und j-ter Spalte sind über das Kronecker-Delta beschrieben.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.2.5.13)$$

### 3.2.5.4 Inverse Matrix

Es gilt

$$A^{-1} = A \quad (3.2.5.14)$$

#### 3.2.5.4.1 Bestimmung der Inversen bei $n \times n$ Matrizen

$\Rightarrow$  Gauss Algorithmus angewandt auf  $A|I$  bis  $A$  zu  $I$  umgeformt ist.

#### 3.2.5.4.2 Inverse bei $2 \times 2$ Matrizen

$$\text{Mit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (3.2.5.15)$$

### 3.2.5.5 Symmetrische Matrizen

**Definition 3.2.16.** Eine reelle  $n \times n$  Matrix  $A$  heißt symmetrisch, falls  $A = A^T$ .

### 3.2.5.6 Schiefsymmetrische Matrizen

**Definition 3.2.17.** Eine Matrix  $A$  heißt schiefsymmetrisch, falls  $A^T = -A$ .

**Bemerkung 3.2.4.**  $\det A = 0$ , falls  $n$  gerade

**Bemerkung 3.2.5.**  $x^T Ax = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

### 3.2.5.7 Hermitesche Matrizen

**Definition 3.2.18.**  $A^* := \bar{A}^T$

Eine komplexe  $n \times n$  Matrix  $A$  heißt hermitesch, falls  $A = \bar{A}^T$ .

### 3.2.5.8 Transposition

Die Transposition besitzt folgende Eigenschaften

- (T1)  $(A + B)^T = A^T + B^T$
  - (T2)  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
  - (T3)  $(A^T)^T = A$
  - (T4)  $(AB)^T = B^T A^T$
  - (T5)  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- (3.2.5.16)

## 3.2.6 Determinanten

**Satz 3.2.19.** Determinantenentwicklungssatz:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

**Bemerkung 3.2.6.** Aussagen zu Determinante einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\det(A) \neq 0 \leftrightarrow \text{Rang}(A) = n \leftrightarrow A^{-1} \text{ existiert}$$

$\det(A) \neq 0 \leftrightarrow$  Zeilen bzw. Spalten linear unabhängig

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

$$\det A = \prod_j \lambda_j$$

### 3.2.6.1 Bestimmung der Determinanten

#### 3.2.6.1.1 Determinante einer $2 \times 2$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A = ad - bc \quad (3.2.6.1)$$

### 3.2.6.1.2 Determinante einer $3 \times 3$ Matrix

Die Determinante wird über die Sarrussche Regel bestimmt:

$$\det A = \begin{vmatrix} A_{aa} & A_{ab} & A_{ac} \\ A_{ba} & A_{bb} & A_{bc} \\ A_{ca} & A_{cb} & A_{cc} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \textcolor{brown}{A}_{aa} & \textcolor{brown}{A}_{ab} & \textcolor{brown}{A}_{ac} \\ \textcolor{brown}{A}_{ba} & \textcolor{brown}{A}_{bb} & \textcolor{brown}{A}_{bc} \\ \textcolor{brown}{A}_{ca} & \textcolor{brown}{A}_{cb} & \textcolor{brown}{A}_{cc} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ \textcolor{brown}{A}_{ba} & A_{bb} \\ \textcolor{brown}{A}_{ca} & A_{cb} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = \textcolor{brown}{A}_{aa}A_{bb}A_{cc} + \textcolor{brown}{A}_{ab}A_{bc}A_{ca} + \textcolor{brown}{A}_{ac}A_{ba}A_{cb} - \textcolor{brown}{A}_{ca}A_{bb}A_{ac} - \textcolor{brown}{A}_{cb}A_{bc}A_{aa} - \textcolor{brown}{A}_{cc}A_{ba}A_{ab} \quad (3.2.6.2)$$

### 3.2.6.1.3 Determinante einer Matrix $> 3 \times 3$

**Satz 3.2.20.** *Determinantenentwicklungsatz: Für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  bezeichne  $A_{ik}$  die aus  $A$  durch Streichung der  $i$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte entstehende Matrix. Dann gilt:*

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$$

wobei  $i$  fest gewählt wird.

Es bietet sich hierbei an  $i$  so zu wählen, dass möglichst viele Teile der Entwicklung sich durch eine 0 löschen.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} &= a_{11} \det(A_{11})(-1)^{1+1} + a_{12} \det(A_{12})(-1)^{2+1} + a_{13} \det(A_{13})(-1)^{1+3} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 1(-2) - 2(-4) + 2(-2) = 2 \end{aligned}$$

## 3.2.7 Eigenwerttheorie

**Definition 3.2.21.** Eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{C}$  heißt Eigenwert (EW) der Matrix  $A$ , falls es einen Vektor  $v \in \mathbb{C}^n$  gibt mit  $Av = \lambda v$  und  $v \neq 0$ .  $v$  heißt ein zum Eigenwert  $\lambda$  gehöriger Eigenvektor (EV). Die Menge aller Eigenvektoren eines Eigenwertes  $\lambda$  zusammen mit 0 heißt der Eigenraum.

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n \mid Av = \lambda v\} \quad (3.2.7.1)$$

**Satz 3.2.22.**  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist ein EW von  $A$  genau dann, wenn

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (3.2.7.2)$$

### 3.2.7.1 Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren

**Schritt 1:** (3.2.7.2) anwenden und NST bestimmen. Es gilt

$$\text{Vielfachheit der NST} = \text{algebraische Vielfachheit}; \text{Schreibweise :} \quad (3.2.7.3)$$

$$a(\lambda_j) = x \in \mathbb{R} \quad (3.2.7.4)$$

**Schritt 2:** Eigenvektoren zur Matrix  $A$  bestimmen. Es gilt:

$$Av = \lambda_j v \Rightarrow (A - \lambda_j I)v = 0 \quad (3.2.7.5)$$

**Schritt 2.1:** Gegebenenfalls geometrische Vielfachheiten ablesen (Anzahl an Nullzeilen), es gilt:

$$\text{geometrische Vielfachheit} := g(\lambda_j) = \dim(A_{\lambda_j}) = n - \text{Rang}(A - \lambda I) \quad (3.2.7.6)$$

**Bemerkung 3.2.7.** Die Anzahl an Eigenvektoren pro Eigenwert müssen der geometrischen Vielfachheit entsprechen. Die Eigenvektoren pro Eigenwert müssen linear unabhängig sein.

### 3.2.7.2 Basis des Eigenraumes bestimmen

Die Eigenvektoren bilden eine Basis des Eigenraumes. Es gilt:

$$S_1 = (v_1, v_2, \dots, v_j) \quad (3.2.7.7)$$

**Satz 3.2.23.** Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine hermitesche Matrix (siehe (3.2.18)). Dann gilt:

- Die Eigenwerte von  $A$  sind reell
- Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander

### 3.2.7.3 Orthonormalbasis des Eigenraumes bestimmen (Gram Schmidt)

Im Folgenden sei davon ausgegangen, dass die Eigenvektoren nicht orthogonal zueinander stehen. Im Falle bereits orthogonaler Eigenvektoren kann auf die Orthogonalisierung verzichtet werden (nicht jedoch auf die Normierung). Es seien  $v_1, v_2, v_3$  Eigenvektoren von  $A$ .

**Schritt 1:** Ersten Eigenvektor normieren

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

**Schritt 2:** Zweiten Eigenvektor orthogonalisieren

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle w_1, v_2 \rangle w_1$$

**Schritt 3:** Zweiten Eigenvektor normieren

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|}$$

**Schritt 4:** Dritten Eigenvektor orthonormieren

$$\begin{aligned} \tilde{w}_3 &= v_3 - \langle w_2, v_3 \rangle w_2 - \langle w_1, v_3 \rangle w_1 \\ w_3 &= \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} \end{aligned} \tag{3.2.7.8}$$

Das Verfahren kann auf beliebig viele Eigenvektoren erweitert werden. Die so erhaltenen Vektoren bilden eine Orthonormalbasis des Eigenraums:

$$S_2 = (w_1, w_2, w_3) \tag{3.2.7.9}$$

Weiter gilt:

$$S_2 S_2^T = I, \quad \text{da } S_2 \text{ orthogonal ist} \tag{3.2.7.10}$$

und

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = S_2^T A S_2 \tag{3.2.7.11}$$

und somit

$$A^{-1} = (S_2 D S_2^T)^{-1} = (S_2^T)^{-1} D^{-1} S_2^{-1} = S_2 D^{-1} S_2^T \tag{3.2.7.12}$$

### 3.2.7.4 Projektion

**Bemerkung 3.2.8.** *Projektion von  $x$  auf  $w$ :*

$$P(x) = \sum_{i=1}^m \langle v_i, x \rangle v_i \tag{3.2.7.13}$$

### 3.2.8 Differentialgleichungssysteme

**Schritt 1:** Überführung in Matrixdarstellung

**Schritt 2:** Eigenwerte und Eigenvektoren bestimme (siehe (3.2.7))

**Schritt 3:** Allgemeine Lösung bilden:

$$x(t) = Sy(t) = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$$

**Schritt 4:** Anfangsbedingungen (z.B.  $x^* = 0$ ) einsetzen und bestimmen

$$\begin{aligned} S &:= (v_1, \dots, v_n) \\ x(0) &= Sy(x^*) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = x^* \end{aligned}$$

### 3.2.9 Quadriken bestimmen

#### 3.2.9.1 Methode

**Schritt 1:** Diagonalmatrix  $A$ , Vektor  $b$  und Konstante  $c$  ablesen

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} -1x_1^2 - 1x_2^2 + 1x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 12x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 11 &= 0 \\ A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}, c &= 11 \end{aligned}$$

Im Zuge der Vorlesung gilt immer  $A = A^T$ .

**Schritt 1.1:** Als Quadrik aufschreiben

$$\begin{aligned}
 q(x) &= x^T A x + b^T x + c \\
 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 11
 \end{aligned}$$

**Schritt 2:** Diagonalmatrix  $\Lambda$  bestimmen

Dazu nach (3.2.7.6) Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen, nach (3.2.7.8) eine Orthonormalmatrix mit den Eigenvektoren erzeugen und schließlich nach (3.2.7.11) die Diagonalmatrix  $\Lambda$  bilden.

**Schritt 3:** Vektor  $\tilde{b}$  bestimmen sodass gilt  $q(Sy) = y^T \Lambda y + \tilde{b}^T y + c$ :

$$\begin{aligned}
 q(Sy) &= (Sy)^T A Sy + \tilde{b}^T Sy + c = y^T S^T A S y + (S^T \tilde{b})^T y + c \\
 &= y^T \Lambda y + \tilde{b}^T y + c \Rightarrow \tilde{b} := S^T b
 \end{aligned}$$

**Schritt 4:** In  $q(Sy) = y^T \Lambda y + \tilde{b}^T y + c$  einsetzen:

$$\begin{aligned}
 q(Sy) &= y^T \Lambda y + \tilde{b}^T y + c \\
 &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix} + c
 \end{aligned}$$

**Schritt 5:** Ausmultiplizieren und quadratisch ergänzen

Hierbei ist wichtig, dass die quadratischen Anteile ohne Faktor in das Binom übergehen (also vorher ausklammern).

**Schritt 6:** Quadrik anhand nachfolgender Tabellen ablesen

### 3.2.9.2 Normalformen von Quadriken im $\mathbb{R}^2$

$$\text{Ellipse} : \left( \frac{x_1}{a} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{b} \right)^2 - 1 = 0 \quad (3.2.9.1)$$

$$\text{Kreis} : x_1^2 + x_2^2 = r^2 \quad (3.2.9.2)$$

$$\text{Schneidendes Geradenpaar} : \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0 \quad (3.2.9.3)$$

### 3.2.9.3 Normalformen von Quadriken im $\mathbb{R}^3$

$$\text{Ellipsoid} : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (3.2.9.4)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Einschaliges} & : x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ \text{Hyperboloid} & \end{array} \quad (3.2.9.5)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Zweischaliges} & : x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0 \\ \text{Hyperboloid} & \end{array} \quad (3.2.9.6)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Elliptisches} & : x^2 + y^2 - 2z = 0 \\ \text{Paraboloid} & \end{array} \quad (3.2.9.7)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Hyperbolisches} & : x^2 - y^2 - 2z = 0 \\ \text{Paraboloid} & \end{array} \quad (3.2.9.8)$$

### 3.2.10 Äquivalenzaussagen

**Satz 3.2.24.** Für  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  sind folgende Aussagen äquivalent

- a)  $A$  ist regulär
- b) Rang von  $A$  ist gleich  $d$
- c) Die Zeilenvektoren von  $A$  sind linear unabhängig
- d)  $Ax = 0$  hat nur  $x = 0$  als Lösung
- e)  $Ax = b$  ist eindeutig lösbar
- f) Die Spaltenvektoren sind linear unabhängig
- g) Die Matrix besitzt eine Inverse  $A^{-1}$
- h) Die Determinante von  $A$  ist ungleich 0
- i)  $A$  besitzt keinen Eigenwert 0

### 3.3 Mehrdimensionale Analysis

#### 3.3.1 Partielle Ableitung

**Definition 3.3.1.**  $f(x)$  heißt in  $x^* \in \mathbb{R}^d$  nach der  $j$ -ten Koordinate  $x_j$  partiell diffbar, falls der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^* + te_j) - f(x^*)}{t} \quad (3.3.1.1)$$

existiert bzw. falls  $\tilde{f}_j(x_j)$  in  $x_j$  diffbar ist.  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*)$  heißt die partielle Ableitung von  $f$ .

**Bemerkung 3.3.1.** Alternative Schreibweisen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\text{partial}}{\partial x_j} f = \partial_{x_j} f = D_j f = f_{x_j} = \dots \quad (3.3.1.2)$$

**Definition 3.3.2.** Allgemein:  $n$ -te partielle Ableitung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad (3.3.1.3)$$

#### 3.3.1.1 Gradient und Nabla Operator

**Definition 3.3.3.** Der Zeilenvektor

$$\text{grad } f(x^*) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x^*) \right) \quad (3.3.1.4)$$

heißt der Gradient von  $f$  in  $x^*$ . Es gilt weiter:

$$\nabla f(x^*) = (\text{grad } f(x^*))^T \quad (3.3.1.5)$$

Der eingeführte Operator heißt Nabla-Operator.

**Satz 3.3.4.** Sei  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar, dann gilt:

a) Der Gradientenvektor  $\nabla f(x^*)$  steht senkrecht auf der Niveaumenge  $N_{x^*} = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = f(x^*)\}$

b)  $\nabla f(x^*)$  gibt die Richtung des steilsten Anstiegs von  $f(x)$  im Punkt  $x^*$  an.

**Bemerkung 3.3.2.** Es gilt weiterhin:

$$\text{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \text{grad } f + \beta \text{grad } g, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (3.3.1.6)$$

$$\text{grad}(f \cdot g) = f \cdot \text{grad } g + g \cdot \text{grad } f \quad (3.3.1.7)$$

#### 3.3.1.2 Jacobi Matrix

**Definition 3.3.5.** Die Matrix der ersten Ableitung heißt die Jacobi Matrix.

$$Jf = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_d} \end{pmatrix} \quad (3.3.1.8)$$

### 3.3.2 Richtungsableitung

**Definition 3.3.6.** Sei  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $x^* \in \mathbb{R}^d$  und  $v \in \mathbb{R}_{\neq 0}^d$  heißt

$$D_v f(x^*) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} \quad (3.3.2.1)$$

die Richtungsableitung von  $f$  in  $x^*$  in Richtung  $v$ . (Andere Schreibweise:  $\frac{\partial f}{\partial v}$ )

Wenn alle Ableitungen existieren gilt:

$$D_v f = \text{grad } f \cdot v \quad (3.3.2.2)$$

**Bemerkung 3.3.3.** Der Gradient zeigt dabei selbst in Richtung des steilsten Anstiegs.

**Satz 3.3.7.** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}^d$  offen in einer Umgebung von  $x^* \in D$  partiell diffbar und sind die partiellen Ableitungen dort beschränkt, dann ist  $f$  stetig in  $x^*$ .

**Satz 3.3.8.** Existieren in einer Umgebung von  $x^*$  alle partiellen Ableitungen und sind dann stetig in  $x^*$ , so ist  $f$  diffbar in  $x^*$ . Allgemein gilt, existieren alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $k$  und sind diese stetig, so ist  $f \in C^k$ , d.h.  $k$ -fach stetig diffbar.

**Bemerkung 3.3.4.** Folgerung: Alle Polynome, alle  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$ , ... Funktionen sind mehrdimensional diffbar.

**Bemerkung 3.3.5.** Ist  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  in einer Umgebung  $U$  von  $x^*$  partiell diffbar und sind diese in  $x^*$  stetig, so ist  $f$  diffbar in  $x^*$ .

### 3.3.3 Mehrdimensionale Kettenregel

**Satz 3.3.9.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Sei  $f$  in  $x^*$  diffbar und  $g$  in  $y^* = f(x^*)$  diffbar. Dann ist  $g \circ f$  in  $x^*$  diffbar mit Jacobimatrix.

$$J(g \circ f)(x^*) = Jg(f(x^*)) \cdot Jf(x^*) \quad (3.3.3.1)$$

Somit gilt für  $h(x) = g(f(x))$ , dass

$$\frac{\partial z_{\mathbf{k}}}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial z_{\mathbf{k}}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad (3.3.3.2)$$

Vorgehen mit Jacobimatrix:

Es sei gegeben:

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = f(x^2 y, x + 2y)$$

**Schritt 1:** Zur Übersichtlichkeit gegebenenfalls neue Funktionen definieren

$$q(x, y) := (x^2y, x + 2y) \Rightarrow g(x, y) = f(q(x, y))$$

**Schritt 2:** Jacobimatrix der inneren Funktion aufstellen

$$Jq(x, y) = \begin{pmatrix} 2yx & x^2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Schritt 3:** Jacobimatrix der äußeren Funktion in Abhängigkeit von der Inneren aufstellen

$$J_f(q(x, y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(q(x, y)) & \frac{\partial f}{\partial y}(q(x, y)) \end{pmatrix}$$

**Schritt 4:** (3.3.3.1) anwenden

$$J_g(x, y) = J_f(q(x, y)) \cdot J_q(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(q(x, y)) & \frac{\partial f}{\partial y}(q(x, y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2yx & x^2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Schritt 5:** Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} J_g(x, y) &= \begin{pmatrix} 2yx \frac{\partial f}{\partial x}(q(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial y}(q(x, y)) & x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(q(x, y)) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(q(x, y)) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= 2yx \frac{\partial f}{\partial x}(q(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial y}(q(x, y)) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(q(x, y)) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(q(x, y)) \end{aligned}$$

### 3.3.4 Wichtige Operatoren

#### 3.3.4.1 Divergenz

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R}^d, f = (f_1, \dots, f_d), x = (x_1, \dots, x_d) \\ \operatorname{div} f &= \sum_{j=1}^d d \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_d}{\partial x_d} \end{aligned} \tag{3.3.4.1}$$

**Bemerkung 3.3.6.** Die Divergenz ist die Spur der Jacobimatrix, also die Summe der Diagonalelemente.

#### 3.3.4.2 Laplace-Operator

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ \Delta \varphi &= \nabla \nabla \varphi = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_d^2} \end{aligned} \tag{3.3.4.2}$$

**Bemerkung 3.3.7.** Der Laplace Operator bildet die Spur der Hesse Matrix.

### 3.3.4.3 Rotation

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{rot } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (3.3.4.3)$$

**Bemerkung 3.3.8.** Die Bestandteile der Rotation sind die Nebendiagonalelemente der Jacobimatrix. Die Rotation gibt an wie „schief“ die Jacobimatrix ist.

### 3.3.5 Lemma von Schwarz

**Satz 3.3.10.** Sei  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Funktion, so gilt für alle  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad (3.3.5.1)$$

**Bemerkung 3.3.9.** Allgemein: Ist  $f \in C^k$ , dann ist die Reihenfolge des Differenzierens bis zur  $k$ -ten Ordnung egal.

### 3.3.6 Taylorscher Satz

#### 3.3.6.1 Wiederholung eindimensionaler Taylorscher Satz

$$T(f, x, x^*) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x^*)}{k!} (x - x^*)^k \quad (3.3.6.1)$$

#### 3.3.6.2 Mehrdimensionaler Mittelwertsatz

**Satz 3.3.11.** Sei  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  (hier wichtig:  $\mathbb{R}$ , nicht  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 2$ ) diffbar. Dann gibt es ein  $\Theta \in (0, 1)$  mit

$$f(b) - f(a) = \underbrace{\text{grad } f(a + \Theta(b - a))}_{\in \mathbb{R}^d} \underbrace{(b - a)}_{\in \mathbb{R}^d} \quad (3.3.6.2)$$

**Bemerkung 3.3.10.** Der MWS gilt nicht für vektorwertige Funktionen.

#### 3.3.6.3 Mehrdimensionaler Taylorscher Satz

**Definition 3.3.12.** Offen: Um jeden Punkt  $x \in D$  lässt sich eine Kugel in  $D$  legen mit  $r < 0$ .

**Definition 3.3.13.** Konvex: Zu  $x, y \in D$  ist auch die Verbindungsstrecke in  $D$ .

**Satz 3.3.14.** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^{m+1}$  Funktion auf einer offenen und konvexen Menge  $D \in \mathbb{R}^d$  und  $x^* \in D$ . Dann gilt:

$$f(x) = Tm(x, x^*) + Rm(x, x^*) \quad (3.3.6.3)$$

mit

$$Tm(x, x^*) = \sum_{j=0}^m \sum_{j_1+j_2+\dots+j_d=j} \frac{1}{j_1!j_2!\dots j_d!} (x_1 - x_1^*)^{j_1} \dots (x_d - x_d^*)^{j_d} \frac{\partial^m f(x^*)}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_d^{j_d}} \quad (3.3.6.4)$$

und

$$\begin{aligned} Rm(x, x^*) = & \sum_{j_1+j_2+\dots+j_d=m+1} \frac{1}{j_1!j_2!\dots j_d!} (x_1 - x_1^*)^{j_1} \dots \\ & \cdot (x_d - x_d^*)^{j_d} \frac{\partial^m f(x^*)}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_d^{j_d}} (x^* + \Theta(x - x^*)) \end{aligned} \quad (3.3.6.5)$$

**Bemerkung 3.3.11.** Taylorpolynome sind lokal die beste Approximation.

$$T1(x, x^*) = f(x^*) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_d - x_d^*) \quad (3.3.6.6)$$

ist die Tangentialebene an  $x^*$ .

**Bemerkung 3.3.12.** Zum Berechnen der Taylorpolynome ist es oft einfacher bekannte 1-dim Taylorpolynome bzw. Taylorreihe zu verwenden. Es gilt dann:

$$Tm(f, x, x^*) = T_a(f_a, x, x^*) \cdot \dots \cdot T_d(f_d, x, x^*) \quad (3.3.6.7)$$

Wobei auch mehrere Dimensionen mit einer 1-dim Reihe substituiert werden können.

### 3.3.6.4 Wichtige 1-dim Reihen

- Exponentialreihe:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.3.6.8)$$

- Geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad |q| < 1 \quad (3.3.6.9)$$

- Sinusreihe

$$\sin(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} = y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 + \dots \quad (3.3.6.10)$$

- Cosinusreihe

$$\cos(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 + \dots \quad (3.3.6.11)$$

### 3.3.7 Mehrdimensionale Extremwertaufgaben

Im Folgenden sei  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Satz 3.3.15.** *Besitzt  $f = f(x)$  in einem Punkt  $x^*$  ein lokales Extremum (d.h. Minimum oder Maximum), so gilt*

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad (3.3.7.1)$$

**Bemerkung 3.3.13.**  $\nabla f(x^*) = 0$  liefert häufig keine Extrema sondern Sattelpunkte (je höher die Raumdimension desto wahrscheinlicher, dass kein Extrema vorliegt).

$f$  um  $x^*$  lässt sich besser verstehen in dem man das Taylorpolynom 2. Grades um  $x^*$  betrachtet. Dieses lässt sich mit Hilfe der Hesse-Matrix folgendermaßen formulieren:

$$T_2(x, x^*) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T H f(x^*)(x - x^*) \quad (3.3.7.2)$$

Vorgehen zur Bestimmung von  $T_2$ :

**Schritt 1:** Gradient von  $f$  bestimmen

**Schritt 2:** Hesse Matrix von  $f$  bestimmen

**Schritt 3:**  $x^*$  einsetzen und ausrechnen

#### 3.3.7.1 Hesse Matrix

Die Hesse Matrix ist die Matrix der zweiten Ableitung.

$$H f(x^*) = J(J f(x^*)) = f''(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_d} \end{pmatrix} \quad (3.3.7.3)$$

**Bemerkung 3.3.14.** *Die Hesse Matrix ist symmetrisch. Daher besitzt sie reelle Eigenwerte und kann durch eine orthogonale Transformation diagonalisiert werden.*

**Bemerkung 3.3.15.**

$$\forall \lambda_j > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$\forall \lambda_j < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$

$$\exists \lambda_j \text{ und } \lambda_i \text{ mit unterschiedlichen Vorzeichen} \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

*Umkehrung:*

$$\text{Minimum} \Rightarrow \forall \lambda_j | \lambda_j \geq 0$$

$$\text{Maximum} \Rightarrow \forall \lambda_j | \lambda_j \leq 0$$

$$(3.3.7.4)$$

**Satz 3.3.16.** Sei  $f \in C^2$  mit  $\nabla f(x^*) = 0$  ( $x^*$  ist ein kritischer Punkt).

- a) Ist  $x^*$  ein lokales Minimum, so ist  $Hf(x^*)$  positiv semidefinit, d.h. es gilt  $v^T Hf(x^*)v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^d$ .
- b) Ist  $x^*$  ein lokales Maximum, so ist  $Hf(x^*)$  negativ semidefinit, d.h. es gilt  $v^T Hf(x^*)v \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^d$ .
- c) Ist  $Hf(x^*)$  positiv definit, d.h. es gilt  $v^T Hf(x^*)v > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}_{/\{0\}}^d$ , so ist  $x^*$  ein Minimum.
- d) Ist  $Hf(x^*)$  negativ definit, d.h. es gilt  $v^T Hf(x^*)v < 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}_{/\{0\}}^d$ , so ist  $x^*$  ein Maximum.

**Bemerkung 3.3.16.** Für  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Hessematrix eine  $2x2$  Matrix.

$$\Rightarrow \text{spur } Hf = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \det Hf = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad (3.3.7.5)$$

**Satz 3.3.17.** Hurwitz Kriterium für  $2x2$  Matrizen: Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in \mathbb{C}^2$ ,  $x^*$  sei ein kritischer Punkt von  $f$  und sei  $\det Hf(x^*) > 0$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^2 f(x^*) &> 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum} \\ \partial_{x_1}^2 f(x^*) &< 0 \Rightarrow \text{lokales Maximum} \end{aligned} \quad (3.3.7.6)$$

### 3.3.7.2 Untersuchung nach Extremwerten

**Schritt 1:** Gradient und Hesse Matrix von  $f$  bestimmen:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix}, \quad Hf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_d} \end{pmatrix}$$

**Schritt 2:** Kritische(n) Punkt(e) bestimmen

$$\nabla f(x) = 0$$

**Schritt 3:** Kritische Punkte in Hessematrix einsetzen und auswerten

Abhängig der Dimension der Matrix (3.3.7.6), (3.3.16) oder (3.3.7.4) anwenden.

### 3.3.8 Satz über implizite Funktionen

Begrifflichkeit:

$g(x, y) = 0$	: implizite Darstellung
$y = y(x)$	: explizite Darstellung

**Satz 3.3.18.** Sei  $F(x, y) \in C^1$  in einer Umgebung von  $N_0(x_0, y_0)$  sodass

- (1)  $F(N_0) = 0$
- (2)  $\frac{\partial F}{\partial y}(N_0) \neq 0$

Dann existiert eine eindeutige Funktion  $y = f(x) \in C^1$  in einer Umgebung  $U$  von  $x_0$  sodass:

- (i)  $y_0 = f(x_0)$
- (ii)  $F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U$
- (iii)  $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$

#### 3.3.8.1 Satz über implizite Funktionen für Gleichungssysteme

**Satz 3.3.19.** Sei  $\Delta \neq 0$ , dann existieren in einer Umgebung von  $(x^0, z^0)$  eindeutige Funktionen  $z = f_i(x_1, \dots, x_n)$  mit  $i = 1, \dots, m$  und  $z_i \in C^1$  und die partiellen Ableitungen können mit impliziter Differentialrechnung gebildet werden.

**Satz 3.3.20.** Sei  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^1$ -Funktion. Sei  $x \in \mathbb{R}^{d-m}$  und  $y \in \mathbb{R}^m$ .

V1) Sei  $(x^*, y^*)$  eine Lösung, d.h.  $g(x^*, y^*) = 0$

V2) Weiter sei

$$\left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \Big|_{(x^*, y^*)}$$

Dann gibt es Umgebungen  $U$  um  $x^*$  und  $V$  um  $y^*$  in denen eine eindeutige  $C^1$ -Funktion  $f : \underbrace{\mathbb{R}^{d-m}}_x \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^m}_y$  existiert mit  $f(x^*) = y^*$  und  $g(x, f(x)) = 0 \forall x \in U$ .

##### 3.3.8.1.1 Vorgehen für die Konstruktion einer Tangente

Es sei gegeben:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - xy + y^2 = 3\} \quad P = (1, 2)$$

**Schritt 1:** Ableitung bilden:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} x^3 \frac{\partial}{\partial x} xy + \frac{\partial}{\partial x} y^2 = \frac{\partial}{\partial x} 3 = 0 \\
 \Rightarrow & 3x^2 - (x \frac{\partial y}{\partial x} + y) + 2y \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow 3x^2 - x \frac{\partial y}{\partial x} - y + 2y \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \\
 \Rightarrow & 3x^2 - y + \frac{\partial y}{\partial x} (2y - x) = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y - 3x^2}{2y - x}
 \end{aligned}$$

**Schritt 2:** Werte einsetzen und Steigung berechnen

$$\frac{2 - 3}{4 - 1} = -\frac{1}{3}$$

**Schritt 3:** Geradengleichung aufstellen

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow t &= 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \\
 \Rightarrow y &= -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

### 3.3.8.1.2 Anwenden des Satzes

Es sei gegeben: z.Z.  $U \subset \mathbb{R}$  existiert mit  $1 \in U$  und es existiert eine diffbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\{(x, f(x)) : x \in U\} \subset K\}$ .

**Schritt 1:** (1) prüfen:

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= x^3 - xy + y^2 - 3 \\
 \Rightarrow F(1, 2) &= 1 - 2 + 4 - 3 = 0 \checkmark
 \end{aligned}$$

**Schritt 2:** (2) prüfen:

$$\frac{\partial}{\partial y} F(1, 2) = x + 2y = -1 + 4 = 3 \neq 0 \checkmark$$

**Schritt 3:** Folgerung aufschreiben

Hier: Nach S.ü.i.F. ex. ein solches Intervall  $U$  und es ex.  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $y = f(x)$ .

### 3.3.8.1.3 Vorgehen für Systeme

Gegeben sei:

$$\begin{aligned} x^2y^2 + zu + yv^2 &= 3 \\ y + 2xv - u^2v^2 &= 2 \end{aligned} \quad (x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1) \quad (x, y, z) = (1, 1, 1)$$

Z.Z.: In einer Umgebung von  $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 1, 1, 1)$  können  $u$  und  $v$  eindeutig als Funktionen von  $x, y$  und  $z$  bestimmt werden.

**Schritt 1:** System als Gleichungen aufschreiben

$$\begin{cases} x^2y^2 + zu + yv^2 = 3 \\ y + 2xv - u^2v^2 = 2 \end{cases} = \begin{cases} F_1(x, y, z, u, v) = x^2y^2 + zu + yv^2 - 3 \\ F_2(x, y, z, u, v) = y + 2xv - u^2v^2 - 2 \end{cases}$$

**Schritt 2:** Prüfen ob der Punkt die Gleichungen erfüllt

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1(1, 1, 1, 1, 1) = x^2y^2 + zu + yv^2 - 3 = 1 + 1 + 1 - 3 = 0 \checkmark \\ F_2(1, 1, 1, 1, 1) = y + 2xv - u^2v^2 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0 \checkmark \end{cases}$$

**Schritt 3:** Prüfen ob eine Inverse existiert

$$\nabla = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & zyv \\ -zuv^2 & -zu^2v + 2x \end{vmatrix} \stackrel{(1,1,1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 - (-4) = 2 \neq 0 \checkmark$$

**Schritt 4:** Ableiten und berechnen

Gesucht;  $\frac{\partial v}{\partial y}(1, 1, 1) \Rightarrow$  nach  $y$  ableiten:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} 2x^2y + z\frac{\partial u}{\partial y} + v^2 + 2yv\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ 1 + 2x\frac{\partial v}{\partial y} - u^22v\frac{\partial v}{\partial y} - 2uv^2\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{(1,1,1)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2 + \frac{\partial u}{\partial y} + 2y\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \\ 1 + 2\frac{\partial v}{\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial v}{\partial y} = -3 & [I] \\ 2\frac{\partial u}{\partial y} = 1 & [II] \end{cases} \end{aligned}$$

**Schritt 4.1:** System lösen

$$[II] \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \stackrel{[I]}{\Rightarrow} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}(-3 - \frac{1}{2}) = -\frac{7}{4}$$

### 3.3.9 Fixpunktsatz

**Satz 3.3.21.** Banachscher Fixpunktsatz: Sei  $(M, d)$  ein vollständig metrischer Raum und  $F : M \rightarrow M$  eine Kontraktion, d.h.  $\exists \kappa \in (0, 1)$ , sodass

$$d(F(x), F(y)) \leq \kappa d(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

Dann hat  $F$  einen eindeutigen Fixpunkt  $x^* \in M$ , d.h.  $x^* = F(x^*)$ .

**Bemerkung 3.3.17.** Das Verfahren konvergiert im Allgemeinen nur linear, d.h.

$|y_{n+1} - y_{lim}| \leq \tilde{\kappa}|y_n - y_{lim}|$  mit  $\tilde{\kappa}$  klein.

Quadratische Konvergenz mit Newton Verfahren.

### 3.3.10 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Suche Extremstellen von  $f(x, y)$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$ . D.h. zum Beispiel: Gesucht sind diejenigen Punkte einer Parabel  $y = x^2 + 1$ , welche vom Punkt  $(1, 1)$  den minimalen Abstand haben. Es gilt  $f(x, y) = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$  und  $g(x, y) = -y + x^2 + 1 = 0$ .

Das Ziel ist eine Methode zu finden, mit der die Extremstellen berechnet werden können, ohne vorher  $g$  aufzulösen.

#### 3.3.10.1 Lagrangemultiplikatoren

Betrachte  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Annahme: Es existiert eine Auflösung  $y = h(x)$  mit  $g(x, h(x)) = 0$ .

Neues Optimierungsproblem:  $F'(x) = 0$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} h'(x) = 0$$

$$\text{Aus } g(x, h(x)) = 0 \text{ folgt: } \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} h'(x) = 0$$

$$\Rightarrow h'(x) = - \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)$$

$$\Rightarrow F'(x) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1}}_{=: \lambda} \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right) = 0 \quad (*)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\text{Aus der Definition von } \lambda = \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} \text{ folgt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$\Rightarrow$  notwendige Bedingung für Extremum

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = g = 0$$

Wobei  $H = f + \lambda g$  die sogenannte Lagrangefunktion ist.

**Satz 3.3.22.** Allgemeiner Fall: Seien  $f, g_1, \dots, g_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  stetig diffbar und  $Z^*$  sei ein lokales Extremum von  $f$  unter den Nebenbedingungen  $g_1 = g_2 = \dots = g_n = 0$ . Weiter sei Rang  $Jg = n$ . Dann existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , sodass  $\nabla H(z^*) = 0$  für

$$H = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n \quad (3.3.10.1)$$

**Bemerkung 3.3.18.** Bemerkung zu (3.3.22): Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen sind erfüllt, denn:

$$V1) \quad g_1(z^*) = g_2(z^*) = \dots = g_n(z^*) = 0$$

$$V2) \quad \text{folgt aus } \text{Rang } jg(z^*) = n$$

Es gibt Koordinaten  $z = (x, y)$  mit  $\text{Rang } \frac{\partial g}{\partial y} = n$  mit  $y \in \mathbb{R}^n$  und  $x \in \mathbb{R}^{d-n}$ .  $\text{Rang } \frac{\partial g}{\partial y} = n$  bedeutet  $\frac{\partial g}{\partial y} = n$  invertierbar.  
 $\Rightarrow \exists$  Auflösung  $y = y(x)$ .

### 3.3.11 Kurven und Bogenlängen

#### 3.3.11.1 Kurve

**Definition 3.3.23.**

$$\mathbb{R}^d : x : t \rightarrow x(t), [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (3.3.11.1)$$

- a) Eine stetige Funktion  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  heißt eine Kurve im  $\mathbb{R}^d$ .  $c(a)$  heißt der Anfangspunkt und  $c(b)$  heißt der Endpunkt. Eine Kurve heißt geschlossen, falls  $c(a) = c(b)$ .
- b) Eine differenzierbare Kurve heißt glatt, falls

$$\dot{c}(t) = (\dot{c}_1(t), \dots, \dot{c}_d(t)) \neq 0$$

für alle  $t \in [a, b]$ .  $\dot{c}(t)$  heißt der Tangentenvektor.

Beispiele:

- i)  $c(t) = (\cos t, \sin t)$  beschreibt einen Kreis mit  $t \in [0, 2\pi]$ .
- ii)  $c(t) = (rt - a \sin t, r - a \cos t)$  ist eine Zykloide.
- iii)  $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$  beschreibt eine Schraubenlinie.
- iv)  $c(t) = (\Phi(t), r(t)) = (t, a(1+\cos t))$  beschreibt eine Herzkurve bzw. Kardiode.
- v)  $c(t) = (at \cos t, at \sin t)$  beschreibt eine archimedische Spirale.

#### 3.3.11.2 Länge von Kurven

**Definition 3.3.24.** Ist die Menge  $\{L(Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$  nach oben beschränkt, so heißt die Kurve rektifizierbar und  $L(c) = \sup\{L(Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$  heißt die Länge der Kurve  $c$ .

**Bemerkung 3.3.19.** Ein Beispiel für eine nicht rektifizierbare Kurve ist eine Kochsche Schneeflocke.

**Satz 3.3.25.** Jede stetige diffbare Kurve ist rektifizierbar und es gilt

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt \quad (3.3.11.2)$$

Weiter gilt

$$L(c) \leq \sup_{t \in [a,b]} \|\dot{c}(t)\| (b-a) \quad (3.3.11.3)$$

**Bemerkung 3.3.20.**

- a) Gilt  $\|\dot{c}(t)\| = 1 \quad \forall t \in [a,b]$ , so heißt  $c$  nach der Bogenlänge parametrisiert (verwende dann  $s$  statt  $t$ ).
- b) Dann gilt, dass  $\dot{c}(t) \perp \ddot{c}(t)$
- c) In diesem Fall heißt  $\ddot{c}$  die Krümmung.

**Bemerkung 3.3.21.** Parametrisiert man den Graphen mit  $(x, y(x))$ , also in der  $x-y$  Ebene, so ergibt sich:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (3.3.11.4)$$

bzw. allgemein im  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \text{Kurvenlänge: } \int ds &= \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int \sqrt{(dx)^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \end{aligned}$$

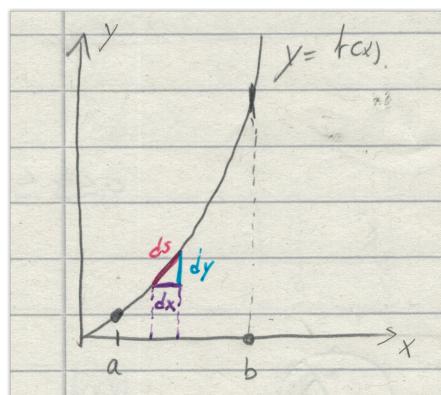


Abbildung 3.1: Kurvenlänge

### 3.3.11.3 Flächen geschlossener ebener Kurven

$$F(c) = \frac{1}{2} \int_a^b |(x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))| dt \quad (3.3.11.5)$$

### 3.3.12 Wegintegrale

#### 3.3.12.1 Wegintegral erster Art

**Definition 3.3.26.** Das Wegintegral erster Art ist definiert durch:

$$\int_c^x \varrho dx = \int_x ds = \int_a^b \varrho(c(t)) ||\dot{c}(t)|| dt \quad (3.3.12.1)$$

**Bemerkung 3.3.22.** Aus (3.3) geht

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

hervor. Damit folgt:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dt}{dt} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{dt} \sqrt{dx^2 + dy^2} dt \\ &= \sqrt{\frac{1}{dt^2} (dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \end{aligned}$$

Überträgt man das bekannte Integral aus dem  $\mathbb{R}^2$ , das mit  $\int_a^b f(x)dx$  gegeben ist, und obigen Zusammenhang ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{t=a}^{t=b} f(x, y) ds &= \int_{t=a}^{t=b} f(x, y) \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_{t=a}^{t=b} \underbrace{f(x(t), y(t))}_{\text{Höhe}} \underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}_{ds} dt \end{aligned}$$

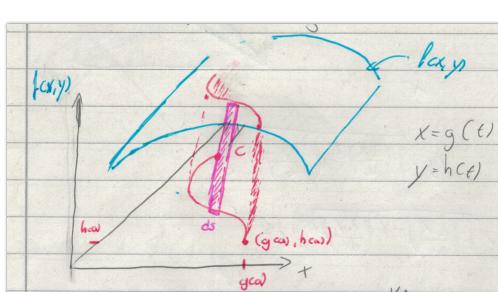


Abbildung 3.2: Graphische Interpretation von (3.3.12.1)

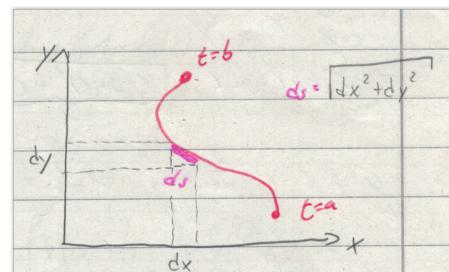


Abbildung 3.3: Interpretation von (3.3.12.1)

**Bemerkung 3.3.23.** a) Integrale sind unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

b) Falls  $c$  geschlossen ist so schreibt man

$$\oint_c \varrho \, ds \quad (3.3.12.2)$$

### 3.3.12.2 Wegintegrale zweiter Art

**Definition 3.3.27.** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein stetiges Vektorfeld mit  $D \subset \mathbb{R}^d$  und sei  $c : [a, b] \rightarrow D$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve, dann heißt

$$\int_c \langle f(x), dx \rangle = \int_a^b \langle f(c(t)), \dot{c}(t) \rangle dt \quad (3.3.12.3)$$

das Wegintegral 2-ter Art. Falls  $c$  geschlossen ist schreibt man

$$\oint_c \langle f(x), dx \rangle \quad (3.3.12.4)$$

**Bemerkung 3.3.24.** Das Wegintegral ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

**Bemerkung 3.3.25.** Eine Alternative ältere Schreibweise ist

$$\int_c \langle f(X), dX \rangle$$

Achtung, es handelt sich nur um eine Schreibweise. Nicht das Skalarprodukt aus  $f(X)$  und  $dX$  bilden!

**Definition 3.3.28.** Ein stetiges Vektorfeld  $f$  heißt *wirbelfrei*, falls die Kurvenintegrale längs aller stückweise stetig diffbaren Kurven verschwinden, d.h.

$$\oint_c \langle f(x), dx \rangle = 0 \quad (3.3.12.5)$$

gilt.

Als Konsequenz daraus folgt die Wegunabhängigkeit der Kurvenintegrale für den Fall das  $f$  wirbelfrei ist. Das heißt, ist  $f$  wirbelfrei, so gilt:

$$\int_{c_1} \langle f(x), dx \rangle = \int_{c_2} \langle f(x), dx \rangle \quad (3.3.12.6)$$

für beliebige Wege  $c_1$  und  $c_2$  mit gleichen Anfangs- und Endpunkten.

**Definition 3.3.29.** Eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^d$  heißt (weg)-zusammenhängend, falls je zwei Punkte  $x, y \in D$  durch eine stückweise  $C^1$ -Kurve in  $D$  verbunden werden können.



Abbildung 3.4: Visualisierung zusammenhängend (Schneider 2018)

### 3.3.12.3 Potential

**Definition 3.3.30.** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein Vektorfeld auf  $D \subset \mathbb{R}^d$ . Wir sagen  $f$  ist ein Gradientenfeld, falls es eine skalare  $C^1$ -Funktion  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, mit

$$\nabla \varphi(x) = f(x) \quad (3.3.12.7)$$

$\varphi$  heißt das Potential von  $f$ .

**Satz 3.3.31.** Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend und  $f$  ein stetiges Vektorfeld auf  $D$ .

a) Besitzt  $f$  ein Potential  $\varphi$ , so gilt für alle stückweisen  $C^1$ -Kurven  $c$ , dass

$$\int_c < f(x), dx > = \varphi(c(b)) - \varphi(c(a)) \quad (3.3.12.8)$$

wobei  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ . D.h. das Wegintegral ist damit weganabhängig und  $f$  wirbelfrei.

b) Ist  $f$  wirbelfrei, so besitzt  $f$  ein Potential  $\varphi$  mit der Darstellung

$$\varphi(x) = \int_{c_x} f(\tilde{x}), d\tilde{x} > \quad (3.3.12.9)$$

wobei  $c_x$  ein Weg nach  $x$  mit fest gewähltem Startpunkt  $x^*$  sein soll.

#### 3.3.12.3.1 Berechnung von Potentialen

Die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Existenz eines Potentials ist:

$$\text{rot}(\nabla \varphi) = 0 \Rightarrow \text{rot}(f) = 0 \Rightarrow \text{Potential ex.} \quad (3.3.12.10)$$

**Definition 3.3.32.** Ein Gebiet  $G$  heißt einfach zusammenhängend, falls jeder geschlossene Weg in  $G$  auf einen Punkt im Gebiet zusammen gezogen werden kann.



Abbildung 3.5: Visualisierung einfach zusammenhängend (Schneider 2018)

## 3.4 Nachwort

Dieses Dokument versteht sich einzig als Zusammenfassung der Vorlesungsunterlagen aus der HM1-2 Vorlesung von Prof. Dr. Guido Schneider mit einigen zusätzlichen Beispielen. Der Sinn ist einzig mir selbst und meinen Kommilitonen das studieren der Mathematik zu erleichtern. In diesem Sinne erhebe ich keinerlei Anspruch auf das hier dargestellte Wissen, da es sich in großen Teilen nur um Neuformulierungen aus der Vorlesung und aus dem Begleitkurs vom Mint Kolleg handelt, in dem Frau Dr. Monika Schulz den Stoff bereits hervorragend zusammengefasst hat. Sollten sich einige Fehler eingeschlichen haben (was sehr wahrscheinlich ist) würde ich mich freuen, wenn man mir das kurz mitteilen würde damit ich eine Korrektur vornehmen kann. Das kann entweder über die Fachschaft erfolgen, oder gerne per E-Mail an f.leuze@outlook.de.

# Literaturverzeichnis

- Fischer, G. (2014), *Lineare Algebra*, 18 edn, Springer Spektrum.
- Gauss, N. (2017), ‘Hm1 vortragsuebung’. Vorlesungsuebung.
- Gauss, N. (2018), ‘Hm2 vortragsuebung’. Vorlesungsuebung.
- Schneider, P. D. G. (2018), ‘Hm1-2 script’. Vorlesungsscript.
- Wikimedia-Foundation (2018), ‘Partition (mengenlehre)’, [https://de.wikipedia.org/wiki/Partition\\_\(Mengenlehre\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Partition_(Mengenlehre)). Accessed: 2018-04-20.