

HM1 Kurzzusammenfassung

Florian Leuze

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	6
1 Allgemeines	7
1.1 Trigonometrie	7
1.1.1 Winkelfunktionen	7
1.1.1.1 Wichtige Werte	7
1.1.2 Sinussatz	7
1.1.3 Cosinussatz	7
1.1.4 Tangenssatz	7
1.1.5 Umwandlung	8
1.1.6 Additionstheoreme	8
1.1.7 Folgerungen aus den Additionstheoremen	8
2 Zahlen	9
2.1 Zahlbereiche	9
2.1.1 Natürliche Zahlen	9
2.1.2 Ganze Zahlen	9
2.1.3 Rationale Zahlen	9
2.1.4 Reelle Zahlen	9
2.1.5 Komplexe Zahlen	9
2.2 Algebraische Strukturen	9
2.2.1 Gruppe	9
2.2.1.1 Gruppenaxiome	10
2.2.2 Ring	10
2.2.3 Körper	10
2.2.3.1 Körperaxiome	10
2.3 Komplexe Zahlen	11
2.3.1 Betrag der komplexen Zahl	11
2.3.1.1 Eigenschaften	11
2.3.2 Komplex konjugierte Zahl	11
2.3.2.1 Eigenschaften	11
2.3.3 Polarkoordinatendarstellung	11
2.3.4 Multiplikation	12
2.3.5 Formel von de Moivre	12
2.4 Polynome	12
2.4.1 Fundamentalsatz der Algebra	13
2.4.2 Polynomdivision	13
2.5 Einheitswurzeln	13
3 Lineare skalare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienzen	14
3.1 Ansätze	14
3.2 Vorgehensweise	15
3.2.1 Anfangswertproblem	16

3.2.2	Inhomogenität	16
4	Lineare Gleichungssysteme	17
4.1	Gauss Algorithmus	17
4.1.1	Lößbarkeit	17
5	Analytische Geometrie	18
5.1	Dreidimensionaler Raum	18
5.1.1	Abstand	18
5.1.2	Vektoren	18
5.1.3	Skalarprodukt	18
5.1.4	Vektor- bzw. Kreuzprodukt	19
5.1.5	Spatprodukt	19
5.2	Geraden im \mathbb{R}^2	19
5.2.1	Parameterdarstellung	19
5.2.2	Darstellung in Gleichungs- bzw. Normalform	20
5.2.3	Hessesche Normalform	20
5.2.4	Minimaler Abstand	20
5.2.5	Abstand eines Punktes zur Gerade	20
5.3	Geraden und Ebenen im \mathbb{R}^3	21
5.3.1	Parameterdarstellung einer Geraden im \mathbb{R}^3	21
5.3.2	Koordinatendarstellung einer Geraden im \mathbb{R}^3	21
5.3.3	Parameterdarstellung einer Ebene im \mathbb{R}^3	21
5.3.4	Gleichungsdarstellung bzw. Hessesche Normalform einer Ebene im \mathbb{R}^3	21
5.4	Schnitte	22
5.4.1	Schnitt zweier Ebenen	22
5.4.2	Schnitt einer Gerade mit einer Ebene	23
5.4.3	Schnitt zweier Geraden im \mathbb{R}^3	23
5.4.4	Abstand zweier Geraden im \mathbb{R}^3	23
6	Logik und Beweise	24
6.1	Wahrheitswerte	24
6.1.1	Tautologien	24
6.1.2	Umformungen	24
6.2	Vollständige Induktion	25
6.2.1	Vorgehen	25
6.2.2	Beispiel 1	25
6.3	Binomialkoeffizienten	26
7	Mengen, Relationen und Abbildungen	27
7.1	Arten von Mengen	27
7.1.1	Abkürzungen	27
7.2	Relationen	27
7.2.1	Äquivalenzrelationen	28
7.2.2	Ordnungsrelationen	28
7.3	Maximum, Minimum, Supremum, Infimum	29

7.4	Abbildungen	30
7.5	Unendlichkeit	30
7.6	Elementare realwertige Funktionen	30
7.6.1	Algebraische Funktionen	30
7.6.1.1	Polynome $(+, -, \cdot)$	30
7.6.1.2	Rationale Funktionen $(+, -, \cdot, \backslash)$	32
7.6.1.3	n-te Wurzel	32
7.6.2	Transzendente Funktionen	32
7.6.2.1	Exponentialfunktionen	32
7.6.2.2	Unendliche Summen	32
7.6.2.3	(Natürlicher) Logarithmus	33
7.6.2.4	Trigonometrische Funktionen	33
7.6.2.5	Weitere trigonometrische Funktionen	34
7.6.2.6	Hyperbolische Funktionen	35
8	Konvergente Folgen	36
8.1	Vergleich expliziter und rekursiver Darstellung	36
8.2	Definitionen $\varepsilon - N$ -Kriterium/Konvergenzkriterium	36
8.3	Ausdrücke mit Brüchen	37
8.4	Dreiecksungleichung	37
8.5	Beschränktheit	37
8.6	Grenzwertsätze	37
8.6.1	Beispiele wichtiger Grenzwerte	38
8.7	Konvergenzsätze	38
8.8	Monotone Folgen	39
8.8.1	Intervallschachtelung	39
9	Ableitung	40
9.1	Differenzenquotient/Differentialquotient	40
9.2	Stetigkeit	40
9.3	Wichtige Ableitungen	41
9.4	Ableitungsregeln	41
9.5	Mittelwertsätze	42
9.6	Monotonie	42
9.7	Das Prinzip von l'Hospital	43
10	Taylorpolynome	44
11	Reihen	45
11.1	Satz von Bolzano-Weierstraß (Kompaktheitssatz)	45
11.2	Häufungspunkte	45
11.3	Cauchy-Folgen	45
11.4	Reihen reeller Zahlen	46
11.4.1	Wichtige Reihen	47
11.4.2	Konvergenzen und Divergenzen ausgewählter Reihen	47
11.4.3	Leibnizkriterium für alternierende Reihen	47
11.5	Absolut konvergente Reihen	47

11.5.1 Konvergenzkriterien	48
11.6 Umordnung von Reihen	49
11.7 Potenzreihen	49
11.7.1 Taylorreihe	49
11.7.2 Konvergenz der Potenzreihen	50
12 Stetigkeit	52
12.1 Arten von Unstetigkeiten	52
12.2 Nullstellensatz und Zwischenwertsatz	53
12.2.1 Sätze zu Stetigkeit und Monotonie	53
13 Extremalprobleme	55
14 Funktionenfolgen	56
15 Formelverzeichnis	57
16 Nachwort	57
17 Literatur	57

Versionierung

Datum	Vers.	Kürzel	Änderung
19.04.2018	0.1	FL	Erzeugung Dokument; Erzeugung Inhaltsverzeichnis; Erzeugung Versionierung; Erzeugung 2.1 - 2.7.4
19.04.2018	0.2	FL	Korrekturen 2.6.1 - 2.6.9 u. 2.7.1 - 2.7.2 Titel
20.04.2018	0.2.1	FL	Erzeugung 2.7.1.1 - 2.7.1.4; Korrektur Riemannsche Untersumme; Erzeugung Literaturverzeichnis
01.05.2018	0.2.2	FL	Neustrukturierung; Erzeugung Allgemeines; Erzeugung Zahlen
01.08.2018	0.3.0	FL	Überarbeitung Trigonometrie
04.08.2018	0.3.1	FL	Erzeugung lin. skal. Diffgleichungen, LGS
05.08.2018	0.3.2	FL	Erzeugung Analytische Geometrie; Erzeugung Logik und Beweise
06.08.2018	0.3.3	FL	Erzeugung Mengen, Relationen und Abbildungen, Erzeugung konvergente Folgen
07.08.2018	0.3.4	FL	Erzeugung el. realw. Funktionen, Ableitung; Fertigstellung konvergente Folgen
08.08.2018	0.3.5	FL	Erzeugung Ableitung, Taylorpolynome und Reihen.
09.08.2018	0.4.0	FL	Umordnung von Reihen, Stetigkeit, Extremalprobleme, Funktionenfolgen; Korrekturen am Layout

Abbildungsverzeichnis

1	Gerade im \mathbb{R}^2 (Schneider 2018)	20
2	Ebenen im \mathbb{R}^3 (Schneider 2018)	22
3	Schnittwinkel zweier Ebenen(Gauss 2017)	22
4	Abstand zweier Geraden \mathbb{R}^3	23
5	Arten von Mengen(Schneider 2018)	27
6	$y = x^2$ (vgl. x^4, x^6, \dots)	30
7	$y = x^3$ (vgl. x^5, x^7, \dots)	30
8	$y = ax + b$	31
9	$y = \frac{1}{x}$	32
10	$y = \frac{1}{x^2}$	32
11	Quadratwurzel	32
12	Kubische Wurzel	32
13	Grün: $y = e^x$; Rot: $y = \ln(x)$	33
14	Grün: 1; Rot: $\sin(x)$; Blau: $\cos(x)$	33
15	Sinusfunktion	34
16	Cosinusfunktion	34
17	Ableitungsregel	34
18	$\tan(x)$	34
19	$y = \cosh(x)$	35
20	$y = \sinh(x)$	35
21	$y = \tanh(x)$	35
22	Epsilon Kriterium(Schneider 2018)	37
23	Konvergenz mw u. beschr. Folgen(Schneider 2018)	39
24	Lokales Minimum/Maximum(Schneider 2018)	42
25	Zu a) (Schneider 2018)	42
26	Zu b) (Schneider 2018)	42
27	Potenzradius in \mathbb{R} (Schneider 2018)	50
28	Potenzradius in \mathbb{C} (Schneider 2018)	50
29	$f(x) = \frac{ x }{x}$ (Sprungstelle)	52
30	$f(x) = \frac{1}{x}$ (Polstelle)	52
31	$f(x) = \frac{x^3}{x}$ (Lücke)	52
32	Zu a) (Nullstellensatz) (Schneider 2018)	53
33	Zu b) (Zwischenwertsatz) (Schneider 2018)	53
34	$\varepsilon - \delta$ Kriterium (Schneider 2018)	54
35	Zu a) (Lipschitzstetigkeit) (Schneider 2018)	54
36	Zu b) (Hölder-Stetigkeit) (Schneider 2018)	54
37	Epsilonkanal Funktionenfolge (Schneider 2018)	56

1 Allgemeines

1.1 Trigonometrie

1.1.1 Winkelfunktionen

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad (1.1.1)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad (1.1.2)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (1.1.3)$$

1.1.1.1 Wichtige Werte

α in Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°
α in Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.

1.1.2 Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{abc}{2F} \quad (1.1.4)$$

1.1.3 Cosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha \quad (1.1.5)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2cacos\beta \quad (1.1.6)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma \quad (1.1.7)$$

1.1.4 Tangenssatz

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} = \frac{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \quad (1.1.8)$$

Analog für $\frac{a+b}{a-b}$ und $\frac{a+c}{a-c}$.

1.1.5 Umwandlung

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (1.1.9)$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad (1.1.10)$$

$$1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} = \sec^2(\alpha) \quad (1.1.11)$$

$$1 + \cot^2(\alpha) = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} = \csc^2(\alpha) \quad (1.1.12)$$

1.1.6 Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \quad (1.1.13)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \quad (1.1.14)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)} = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} \quad (1.1.15)$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot(x)\cot(y) \mp 1}{\cot(y) \pm \cot(x)} = \frac{\cos(x \pm y)}{\sin(x \pm y)} \quad (1.1.16)$$

$$\sin(x \pm y) = \frac{\cos(x \mp y) - \cos(x \pm y)}{2\sin(y)} \quad (1.1.17)$$

$$\cos(x \pm y) = \frac{\cos(x \mp y) + \cos(x \pm y)}{2\cos(y)} \quad (1.1.18)$$

$$\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \cos^2(y) - \cos^2(x) = \sin^2(x) - \sin^2(y) \quad (1.1.19)$$

$$\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) = \cos^2(y) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - \sin^2(y) \quad (1.1.20)$$

1.1.7 Folgerungen aus den Additionstheoremen

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad (1.1.21)$$

$$\stackrel{(1.1.20)}{=} \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos(0) = 1 \quad (1.1.22)$$

$$(1.1.23)$$

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad (1.1.24)$$

$$\stackrel{(1.1.20)}{=} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \sin(x) \quad (1.1.25)$$

$$(1.1.26)$$

$$\sin(2x) = \sin(x+x) \stackrel{(1.1.20)}{=} \sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x) \quad (1.1.27)$$

$$= 2\sin(x)\cos(x) \quad (1.1.28)$$

2 Zahlen

2.1 Zahlbereiche

2.1.1 Natürliche Zahlen

- Direkt vom Zählen abgeleitet.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- Gleichungen wie $n + x = m$ i.A. in \mathbb{N} nicht lösbar.

2.1.2 Ganze Zahlen

- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Gleichungen wie $n \cdot x = m$ i.A. in \mathbb{Z} nicht lösbar.

2.1.3 Rationale Zahlen

- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, m, n \text{ teilerfremd} \right\}$
- Gleichungen wie $x^2 = 2$ in \mathbb{Q} nicht lösbar.

2.1.4 Reelle Zahlen

- $\mathbb{R} = \left\{ x = \sum_{j=-\infty}^n x_j 10^j : x_j \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ für ein } n \in \mathbb{Z} \right\}$
- Gleichungen wie $x^2 = -1$ in \mathbb{R} nicht lösbar.

2.1.5 Komplexe Zahlen

- $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ i heißt imaginäre Einheit, es gilt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2.2 Algebraische Strukturen

2.2.1 Gruppe

Definition 2.1. „Eine Menge M mit der Verknüpfung $+: M \times M \rightarrow M$, deren Elemente die Eigenschaften (G1) – (G3) erfüllen, heißt Gruppe. Gilt zusätzlich (G4), so heißt $(M, +)$ eine kommutative Gruppe.“ (Schneider 2018) In der Literatur findet man als alternative Bezeichnung kommutativ auch abelsch. (Vgl. Fischer 2014)

2.2.1.1 Gruppenaxiome

- (G1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Assoziativgesetz)
 - (G2) $x + 0 = x = 0 + x$ (0 ist das neutrale Element)
 - (G3) $x + (-x) = (-x) + x = 0$ (-x ist das inverse Element zu x)
 - (G4) $x + y = y + x$ (Kommutativität also Vertauschbarkeit)
- (2.2.1)

Definition 2.2. „Sei eine Gruppe eine Verknüpfung mit \cdot und $G' \subset G$ eine nicht-leere Teilmenge. G' heißt eine Untergruppe, wenn für $a, b \in G'$ auch $a \cdot b \in G'$ und $a^{-1} \in G'$. (Fischer 2014)

Im Bezug auf Gruppen und Ringe spielen die Begrifflichkeiten Isomorphismus und Homomorphismus eine Rolle. Beide Begriffe leiten sich von Morphismus (Struktur bzw. Form), Homo (gleich im Sinne von ähnlich) und Iso (gleich im Sinne von identisch) ab.

Definition 2.3. „Sind G und H Gruppen mit Verknüpfungen \cdot und \times , so heißt eine Abbildung $\varphi : G \rightarrow H$ Homomorphismus (von Gruppen), wenn

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \times \varphi(b) \quad \forall a, b \in G. \text{ (Fischer 2014)} \quad (2.2.2)$$

Ein Homomorphismus heißt Isomorphismus wenn er bijektiv ist. (Fischer 2014)

2.2.2 Ring

Definition 2.4. Erfüllt eine Menge die Eigenschaften einer Gruppe, hat jedoch zwei Verknüpfungen (z.B. $(+, -)$) spricht man von einem Ring.

2.2.3 Körper

Definition 2.5. Erfüllt eine Menge die Eigenschaften eines Ringes und ist zusätzlich kommutativ spricht man von einem Körper. Ein Beispiel für einen Körper ist die algebraische Struktur der rationalen und reellen Zahlen.

2.2.3.1 Körperaxiome

- (K1) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (Assoziativgesetz)
 - (K2) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (1 ist das neutrale Element)
 - (K3) $x \cdot (\frac{1}{x}) = (\frac{1}{x}) \cdot x = 1$ ($\frac{1}{x}$ ist das inverse Element zu x)
 - (K4) $x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität also Vertauschbarkeit)
 - (D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Kommutativität also Vertauschbarkeit)
- (2.2.3)

Definition 2.6. „Eine Menge M mit den Verknüpfungen $+: M \times M \rightarrow M$ und $\cdot: M \times M \rightarrow M$, deren Elemente die Gesetze (G1) – (G4), (M1) – M4) und (D) erfüllt, heißt Körper.“ (Schneider 2018)

2.3 Komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} \quad (2.3.1)$$

$$i^2 = -1 \quad (2.3.2)$$

Den Realteil einer komplexen Zahl z bezeichnet man i.A. mit x , den Imaginärteil mit y .

$$\operatorname{Re}\{z\} = x \quad \operatorname{Im}\{z\} = y \quad (2.3.3)$$

Definition 2.7. „Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn ihre Real- und Imaginärteile gleich sind.“ (Schneider 2018)

2.3.1 Betrag der komplexen Zahl

Da sich komplexe Zahlen geometrisch im \mathbb{R}^2 interpretieren lassen, kann aus beiden Teilen ein Beträgsfeil gebildet werden.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.3.4)$$

2.3.1.1 Eigenschaften

$$|z| = 0 \quad (2.3.5)$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad (2.3.6)$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2| \quad (2.3.7)$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \quad (2.3.8)$$

2.3.2 Komplex konjugierte Zahl

Definition 2.8. „ $\bar{z} = x - iy$ heißt die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl.“ (Schneider 2018)

2.3.2.1 Eigenschaften

$$\overline{\bar{z}} = z \quad (2.3.9)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (2.3.10)$$

$$\operatorname{Re}\{z\} = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im}\{z\} = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad (2.3.11)$$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad (2.3.12)$$

2.3.3 Polarkoordinatendarstellung

$$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (2.3.13)$$

$$\Rightarrow x = |z|\cos\varphi, \quad y = |z|\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y}{x} \quad (2.3.14)$$

Achtung. Die Umkehrfunktion von Tangens ist nicht eindeutig. Es gilt:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(\frac{x}{y}) & , x > 0, y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & , x = 0, y > 0 \\ \pi + \arctan(\frac{y}{x}) & , x < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & , x = 0, y < 0 \\ 2\pi + \arctan(\frac{y}{x}) & , x > 0, y < 0 \end{cases} \quad (2.3.15)$$

2.3.4 Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \quad (2.3.16)$$

$$\stackrel{(1.1.20)}{=} |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (2.3.17)$$

$$\Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| \quad , \text{ Winkel} = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (2.3.18)$$

2.3.5 Formel von de Moivre

Setzt man in (2.3.18) $z_1 = z_2 = z$ ein erhält man die Formel von de Moivre.

$$\begin{aligned} z \cdot z &= z^2 = |z|^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)) & , \text{ bzw.} \\ z^n &= |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) & , \text{ bzw.} \\ z^n &= |z|^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \\ &\Rightarrow (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Mit der Eulerschen Formel erhält man $e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$. Daraus folgt:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} \quad (2.3.20)$$

$$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} \quad (2.3.21)$$

$$e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}} \quad (2.3.22)$$

$$z_x = |z_x|e^{i\varphi_x} \Rightarrow z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (2.3.23)$$

2.4 Polynome

Ein komplexes Polynom hat die Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (2.4.1)$$

$$a_k \in \mathbb{C}$$

Falls $a_n \neq 0$ gibt n den Grad des Polynoms an.

Definition 2.9. „Ist $p(z)$ ein reelles Polynom, d.h. $a_k \in \mathbb{R}$, dann ist mit $z \in \mathbb{C}$ auch $\bar{z} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle, d.h. aus $p(z) = 0$ folgt $p(\bar{z}) = 0$, d.h. die Nullstellen sind konjugiert komplex zueinander.“ (Schneider 2018)

2.4.1 Fundamentalsatz der Algebra

Satz 2.10. *Jedes Polynom vom Grad ≥ 1 besitzt in \mathbb{C} mindestens eine Nullstelle.*

2.4.2 Polynomdivision

Über Polynomdivision lassen sich Polynome in Linearfaktoren zerlegen.

$$\begin{array}{r}
 \text{Bsp. :} \\
 (2z^3 - 3z^2 - 6z + 6) : (z - 2) = (2z^2 + z - 4) \quad , \text{ Rest: } -2 \\
 \quad \quad \quad -(2z^3 - 4z^2) \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0 + z^2 - 6z + 6 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad z^2 - 2z \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 0 + 3z + 6
 \end{array}$$

(2.4.2)

Aus 2.10 folgt:

Satz 2.11. *Jedes Polynom p vom Grad $n \geq 1$ lässt sich über \mathbb{C} in Linearfaktoren zerlegen, d.h. es gibt Zahlen z_K , die Nullstellen von p sind, sodass*

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$$

Satz 2.12.

- a) *Besitzt ein Polynom p vom n -ten Grad $n+1$ Nullstellen, so ist $p = 0$*
- b) *Stimmen zwei Polynome p und q jeweils vom Grad n an $n+1$ Stellen überein, so ist $p = q$.*

2.5 Einheitswurzeln

Wurzeln der Form $z^n = 1$ können allgemein einfach bestimmt werden. Mit $|z^n| = |z|^n = 1$ folgt $|z| = 1$. Mit der eulerschen Identität folgt aus

$$\begin{aligned}
 z &= e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi = 1 = 1 + 0 \cdot i \\
 \Rightarrow n\varphi &= 2\pi k \quad , k \in \mathbb{Z} \\
 \Rightarrow \varphi &= \frac{2\pi k}{n} \\
 \Rightarrow z_0 &= 1e^{i \cdot 0} , \quad z_1 = e^{i \frac{2\pi}{n}} , \quad \dots z_n = e^{i \frac{k\pi}{n}}
 \end{aligned}$$

Allgemein gilt mit $z^n = a$ und $\varphi = \arccos\left(\frac{|z|}{\operatorname{Re}\{z\}}\right)$:

$$z_k = a^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right) \quad (2.5.1)$$

Bei reellen Polynomen sind dabei die Nullstellen komplex konjugiert zueinander.

3 Lineare skalare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienzen

Definition 3.1. *Lineare skalare Diff.gleichungen mit konst. Koeffizienten sind Gleichungen der bauart:*

$$Ly(x) = a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

3.1 Ansätze

a) Homogene Diff.gleichung: Mit λ als einfache NST:

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad (3.1.1)$$

Mit λ als n -fache NST:

$$f(x) = e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{n-1} e^{\lambda x} \quad (3.1.2)$$

Mit $\lambda = \alpha + \beta i$ (komplexe Nullstellen):

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x) \quad (3.1.3)$$

b) Inhomogenität der Form $f(x) = p_k(x)e^{sx}$ mit $p_k(x)$ als ein Polynom k -ten Grades.

$$y_p(x) = R_k(x)e^{sx} x^q \quad (3.1.4)$$

Mit $R_k(x) = a_k x^k + \dots + a_0$ und q als Vielfachheit der Nullstelle s (ist s keine Nullstelle so ist $q = 0$ und damit $x^q = 1$).

c) Inhomogenität der Form $\cos(kx)$ oder $\sin(kx)$.

$$yp(x) = (a \cos(kx) + b \sin(kx)) x^q \quad (3.1.5)$$

Beispiel Umformung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(4x) \\ \text{Mit } (1) \quad e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi \\ \text{und } (2) \quad e^{-i\varphi} &= \cos\varphi - i\sin\varphi \\ \text{folgt mit } (1) + (2) \text{ bzw. } (1) - (2) \\ e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} &= 2 \cos\varphi \quad \text{bzw.} \quad e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2 \sin\varphi \\ \Rightarrow \cos\varphi &= \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad \Rightarrow \sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}), \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

q im Ansatz gibt die Vielfachheit der NST $i\varphi$ im charakteristischen Polynom des homogenen Teils der Gleichung an.

d) Inhomogenität der Form $q_k(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ oder $q_k(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

$$yp(x) = R_k(x)x^q e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \tilde{R}_k(x)x^q e^{\alpha x} \sin(\beta x) \quad (3.1.7)$$

3.2 Vorgehensweise

Schritt 1: Ansatz wählen

Schritt 2: Ansatz einsetzen und charakteristisches Polynom bilden

Beispiel:

$$\begin{aligned}y'' + 3y' + 2y &= 0 \\ \stackrel{(3,1,1)}{\Rightarrow} (e^{\lambda x})'' + 3(e^{\lambda x})' + 2e^{\lambda x} &= 0 \\ (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x} \Rightarrow (e^{\lambda x})'' = \lambda^2 e^{\lambda x} & \\ \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 &= 0\end{aligned}$$

Schritt 3.1: Nullstellen des char. Polynoms suchen und in Ansatz einsetzen

Beispiel :

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1$$

Schritt 3.2: Gegebenenfalls komplexe NST in reale umwandeln

Beispiel :

$$\begin{aligned}y(x) &= C_1 e^{-x+ix} + C_2 e^{-x-ix} \\ \Rightarrow y(x) &= \tilde{C}_1 e^{-x} \cos x + \tilde{C}_2 e^{-x} \sin x \quad , \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Schritt 4: Allgemeine Lösung aufstellen

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} \quad , C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3.2.1 Anfangswertproblem

Falls Anfangswerte vorhanden sind können an dieser Stelle die Konstanten Koeffizienten explizit bestimmt werden.

Beispiel :

$$\begin{aligned}y(0) &= 1, \quad y'(0) = 0 \\y(t) &= C_1 e^{5t} + C_2 e^{-2t} \\&\Rightarrow y(0) = C_1 e^{5 \cdot 0} + C_2 e^{-2 \cdot 0} = 1 \\&\Rightarrow C_1 = 1 - C_2 \\y'(t) &= 5C_1 e^{5t} - 2C_2 e^{-2t} \Rightarrow y'(0) = 5C_1 - 2C_2 = 0 \\&\Rightarrow y'(0) = 0 = 5(1 - C_2) - 2C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{5}{7} \\&\Rightarrow C_1 = 1 - C_2 = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \\&\Rightarrow y(t) = \frac{2}{7} e^{5t} + \frac{5}{7} e^{-2t}\end{aligned}$$

3.2.2 Inhomogenität

Schritt 1: Ansatz wählen

Schritt 2: Ansatz gegebenenfalls ableiten und in homogenen Teil einsetzen

Schritt 3: Über Koeffizientenvergleich Vorfaktoren bestimmen

Schritt 4: Allgemeine Lösung bilden

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) \tag{3.2.1}$$

Schritt 5: Gegebenenfalls Anfangswertproblem lösen

4 Lineare Gleichungssysteme

4.1 Gauss Algorithmus

Siehe Kurzzusammenfassung HM2

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{a}_{11}x_1 & + & \tilde{a}_{12}x_2 & + & \dots & + & \tilde{a}_{1n}x_n & = & \tilde{b}_1 \\ & & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & & & & & a_{rr}^{(r)}x_r & + & \dots & + & a_{rn}^{(r)}x_n & = & b_r \\ & & & & & & 0 & = & b_{r+1}^{(r)} \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 & = & b_m^{(r)} \end{array} \quad (4.1.1)$$

Definition 4.1. Die Zahl r heißt der Rang der Matrix A . Die Zahl a_{11} heißt Pivotelement (Tendenziell eher die Zahlen a_{11} bis a_{rr} heißen Pivotelemente, aber so wie oben stehts im Script).

4.1.1 Lösbarkeit

1. Fall: Damit Lösungen existieren können, muss $b_{r+1}^{(r)} = \dots = b_m^{(r)} = 0$ gelten, sonst existieren keine Lösungen. Das heißt es darf keine Zeile allgemein der Form $a = 0$ mit $-\infty < a < 0 \vee 0 < a < \infty$ existieren.
2. Fall: Ist $b_{r+1}^{(r)} = \dots = b_m^{(r)} = 0$ und ist $r = n$, so existiert eine eindeutige Lösung. Das heißt es existieren gleich viele Unbekannte wie Zeilen und Fall 1 ist ausgeschlossen.
3. Fall: Ist $b_{r+1}^{(r)} = \dots = b_m^{(r)} = 0$ und ist $r < n$, so existiert eine Schar von Lösungen. D.h. es kann eine Variable frei gewählt werden.

5 Analytische Geometrie

5.1 Dreidimensionaler Raum

Definition 5.1. Der dreidimensionale Raum ist durch $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{p_1, p_2, p_3 : p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}\}$. Jeder Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ ist eindeutig durch die Angabe seiner Koordinaten (p_1, p_2, p_3) bestimmt.

5.1.1 Abstand

Euklidischer
Abstand zweier Punkte : $d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$ (5.1.1)

5.1.2 Vektoren

Norm eines Vektors : $\|x\|_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ (5.1.2)

Vektoren können skalar multipliziert oder miteinander addiert werden:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \quad (5.1.3)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \quad (5.1.4)$$

Definition 5.2. Die Koordinaten $P = (p_1, p_2, p_3)$ eines Punktes p definieren den Ortsvektor p . Sind zwei Punkte P, Q mit Ortsvektoren p, q gegeben, so gilt

$$d(P, Q) = \|p - q\| \quad (5.1.5)$$

5.1.3 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt projiziert einen Vektor b auf einen Vektor a . Es ist im \mathbb{R}^3 definiert als:

$$(a, b) = \langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (5.1.6)$$

bzw.

$$(a, b) = \|a\| \|b\| \cos \phi \quad (5.1.7)$$

Weiterhin gilt:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \left(\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} = (x, x)^{\frac{1}{2}} \quad (5.1.8)$$

Definition 5.3. a und b heißen orthogonal, falls

$$(a, b) = 0$$

5.1.4 Vektor- bzw. Kreuzprodukt

Definition 5.4. Der Betrag des Vektorproduktes $a \times b$ ist gleich dem Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms. Dies folgt direkt aus der Trigonometrie des Dreiecks.

$$A = \|a \times b\| \quad (5.1.9)$$

Es gilt:

$$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin \phi \quad (5.1.10)$$

Das Vektorprodukt $a \times b$ steht senkrecht auf a und b . Die Vektoren $a, b, a \times b$ bilden ein Rechtssystem. a : Daumen, b : Zeigefinger, $a \times b$: Mittelfinger der rechten Hand. Es gelten folgende Eigenschaften:

- i) $a \times a = 0$
- ii) $a \times b = -b \times a$
- iii) $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$
- iv) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- v)

Seien e_1, e_2, e_3 die Einheitsvektoren (siehe HM2) dann gilt:

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2$$

vi)

$$a := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (5.1.11)$$

Es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$\begin{aligned} x, y &\in \mathbb{R}_{\setminus \{0\}}^n \\ |x \cdot y| &\leq \|x\| \|y\| \\ |x \cdot y| &= \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x = \lambda y, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

5.1.5 Spatprodukt

Definition 5.5. Drei Vektoren a, b, c spannen ein Volumen auf.

$$[a, b, c] = (a \times b, c) \quad (5.1.13)$$

5.2 Geraden im \mathbb{R}^2

5.2.1 Parameterdarstellung

Die Parameterdarstellung einer Gerade im \mathbb{R}^2 ist gegeben mit:

$$\begin{aligned} x &= a + \lambda(b - a), \lambda \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow x &= a + \lambda u \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Wobei u die Richtung der Gerade angibt und Richtungsvektor heißt. a heißt Stützvektor.

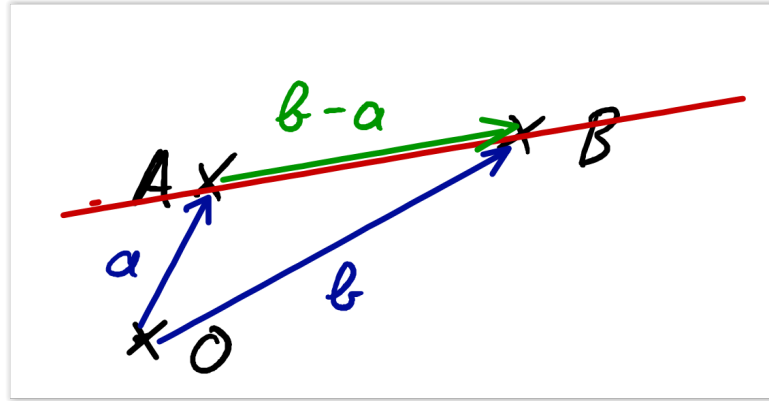


Abbildung 1: Gerade im \mathbb{R}^2 (Schneider 2018)

5.2.2 Darstellung in Gleichungs- bzw. Normalform

Zur Darstellung in der Normalform muss zunächst ein Normalenvektor n der orthogonal auf u steht gewählt werden, d.h. es muss gelten $(n, u) = 0$.

$$(n, x) = (n, a + \lambda u) = (n, a) + \lambda \underbrace{(n, u)}_{=0} = (n, a) =: p \quad (5.2.2)$$

Die Gleichungsdarstellung ist dann:

$$(n, x) - p = 0 \quad (5.2.3)$$

5.2.3 Hessesche Normalform

Zur Bildung der Hesseschen Normalform wird der Normalevektor normiert und es muss $p \geq 0$ gelten.

$$\left(\frac{n}{\|n\|}, x \right) - p = (n^*, x) - p = 0 \quad (5.2.4)$$

5.2.4 Minimaler Abstand

Der Punkt mit minimalem Abstand zum Ursprung x^* auf der Gerade ist der Punkt, an dem der Ortsvektor orthogonal auf der Gerade steht. Das einsetzen dieses Punktes in die Hessesche Normalform liefert also den Abstand zum Ursprung mit:

$$(n^*, x^*) = \|x^*\| = p = \text{Abstand} \quad (5.2.5)$$

5.2.5 Abstand eines Punktes zur Gerade

\tilde{x} sei ein beliebiger Punkt, dann ist

$$d = (n^*, \tilde{x}) - p \quad (5.2.6)$$

Der Abstand des Punktes zur Geraden.

5.3 Geraden und Ebenen im \mathbb{R}^3

5.3.1 Parameterdarstellung einer Geraden im \mathbb{R}^3

$$g : x = a + \lambda u \quad , \text{ bzw. } \\ g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (5.3.1)$$

5.3.2 Koordinatendarstellung einer Geraden im \mathbb{R}^3

Eine Gerade lässt sich im \mathbb{R}^3 auch als Schnittgerade zweier Ebenengleichungen ausdrücken. Ein Beispiel dazu:

$$g := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{aligned} x_1 &= 1 + \lambda \\ \Rightarrow x_2 &= 2\lambda & \Rightarrow \lambda &= \frac{x_2}{2} \\ x_3 &= 2 + \lambda \\ \Rightarrow x_1 &= 1 + \frac{x_2}{2}, & x_3 &= 2 + \frac{x_2}{2} \end{aligned}$$

5.3.3 Parameterdarstellung einer Ebene im \mathbb{R}^3

$$E : x = a + \lambda u + \mu v \quad , \text{ bzw. } \\ E : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (5.3.2)$$

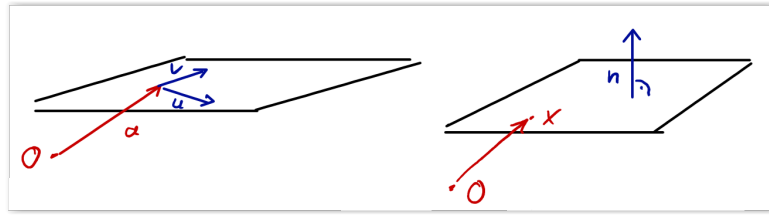
5.3.4 Gleichungsdarstellung bzw. Hessesche Normalform einer Ebene im \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} (n^*, x) &= (n^*, a) + \underbrace{\lambda(n, u)}_{=0} + \underbrace{\mu(n, v)}_{=0} \\ \Rightarrow (n^*, x) - (n^*, a) &= 0 \quad \text{mit } (n, a) =: p \\ \Rightarrow (n^*, x) - p &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

p gibt den Abstand der Gerade zum Ursprung an. n muss auf beiden Richtungsvektoren senkrecht stehen und lässt sich durch

$$n = \frac{u \times v}{\|u \times v\|} \quad (5.3.4)$$

bestimmen.


Abbildung 2: Ebenen im \mathbb{R}^3 (Schneider 2018)

5.4 Schnitte

5.4.1 Schnitt zweier Ebenen

Sind die Normalenvektoren nicht parallel existiert eine Schnittgerade. Sie kann durch die entsprechenden Ebenengleichungen beschrieben werden.

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 4x_2 = 2\}$$

$$E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 - x_3 = 1\}$$

$$\Rightarrow n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow n_1$ und n_2 nicht parallel \Rightarrow Schnittgerade ex.

$$\Rightarrow g = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 4x_2 = 2, x_2 - x_3 = 1\}$$

Der Schnittwinkel zweier Ebenen kann über die jeweiligen Normalenvektoren bestimmt werden.

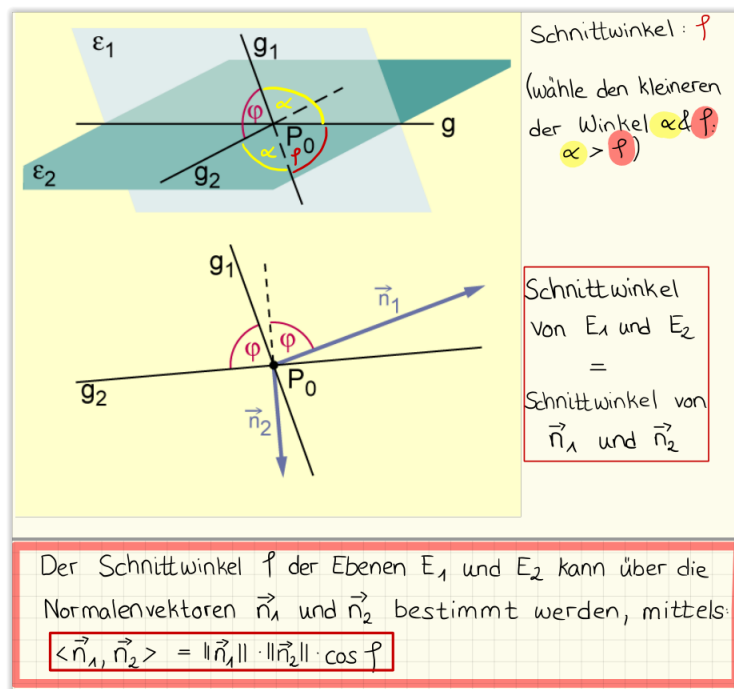


Abbildung 3: Schnittwinkel zweier Ebenen (Gauss 2017)

5.4.2 Schnitt einer Gerade mit einer Ebene

Dort wo sich Ebene und Gerade schneiden muss der Punkt beide Gleichungen erfüllen. Um dies zu prüfen, setzt man die Parameterdarstellung der Gerade in die Ebene ein. Erhält man einen Punkt, so ist dies der Punkt an dem sich beide schneiden.

5.4.3 Schnitt zweier Geraden im \mathbb{R}^3

Es seien g_1 und g_2 zwei Geraden mit

$$\begin{aligned} g_1 : x &= a + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R} \\ g_2 : y &= b + \mu v, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Es existieren grundsätzlich drei Fälle:

- Es existiert ein Schnittpunkt
Schnittbedingung: $x = y$
- Beide Geraden sind parallel
Bedingung: $u = \theta v, \theta \in \mathbb{R}$
- Die Geraden schneiden sich nicht und u ist nicht parallel zu v (windschief)

Für windschiefe Geraden ist der minimale Abstand durch die Bedingung $(x - y) \perp u, (x - y) \perp v$ gegeben.

5.4.4 Abstand zweier Geraden im \mathbb{R}^3

Hierzu stellt man Hilfsebenen auf.

$$\begin{aligned} g_1 &\Rightarrow E_1 : x = a + \lambda u + \mu v \\ g_2 &\Rightarrow E_2 : y = b + \lambda u + \mu v \end{aligned}$$

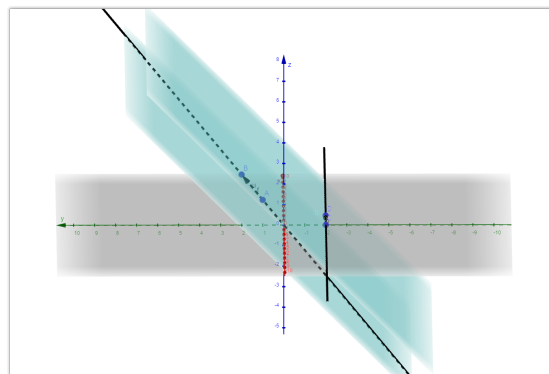


Abbildung 4: Abstand zweier Geraden \mathbb{R}^3

Zur Bestimmung kann man den Abstandes vom Punkt a (oder jeder andere Punkt auf g_1 zur Ebene E_2 bestimmen. Hierzu wird die hessesche Normalform von E_2 gebildet und a eingesetzt.

6 Logik und Beweise

6.1 Wahrheitswerte

Tabelle 1: Wahrheitswerte

$w(A)$	$w(B)$		$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1		0	1	1	1	1
1	0		0	0	1	0	0
0	1		1	0	1	1	0
0	0		1	0	0	1	1

Bemerkung 6.1. Wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist, dann heißt A hinreichend für B und B heißt notwendig für A .

6.1.1 Tautologien

Tautologien sind Aussagen die immer wahr sind.

- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg B \wedge \neg A)$
- $A \vee \neg A$
- $\neg(A \wedge \neg A)$
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (De Morgansche Regel)
- $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ (De Morgansche Regel)
- $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
- $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ (Distributivgesetz)
- $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ (Distributivgesetz)

6.1.2 Umformungen

Tabelle 2: Umformungen

Form der Negation	umgeformte Aussage
$\neg(\neg A)$	A
$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$ (De Morgansche Regel)
$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$ (De Morgansche Regel)
$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge (\neg B)$ da $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$A \Leftrightarrow (\neg B)$
$\neg(\forall x \in M : A(x))$	$\exists x \in M : \neg A(x)$
$\neg(\exists x \in M : A(x))$	$\forall x \in M : \neg A(x)$

6.2 Vollständige Induktion

6.2.1 Vorgehen

Schritt 1: Induktionsannahme (also was zu zeigen ist)

Schritt 2: Induktionsanfang (meistens $n = 1$, ist aber frei wählbar)

Schritt 3: Induktionsvoraussetzung (eher optional)

Schritt 4: Induktionsbehauptung

(die Behauptung, dass es für alle n gilt. Bei Summen hier in der Regel $n + 1$ einfügen)

Schritt 5: Induktionsschritt (der eigentliche Beweis))

6.2.2 Beispiel 1

Induktionsannahme :

z.Z. : $\forall n \in \mathbb{N} : 11^n - 4^n$ ist ein Vielfaches von 7

Induktionsanfang :

$n = 1$:

$$11^1 - 4^1 \stackrel{!}{=} x \cdot 7, x \in \mathbb{N}$$

$$11 - 4 = 7 = x \cdot 7$$

$$x = 1 \checkmark$$

Induktionsbehauptung :

$$11^{n+1} - 4^{n+1} = a \cdot 7, a \in \mathbb{N}$$

Induktionsschluss :

$$11^{n+1} - 4^{n+1} = 11^n \cdot 11 - 4^n \cdot 4$$

$$= 11^n(7 + 4) - 4^n \cdot 4$$

$$= 7 \cdot 11^n + 4 \cdot 11^n + 4 \cdot 4^n$$

$$= \underbrace{7 \cdot 11^n}_{= (*)} + \underbrace{4(11^n - 4^n)}_{= (**)}$$

(*) ist durch 7 teilbar da 7 ein Faktor ist, (**) ist ebenfalls durch 7 teilbar, da (**) ein Vielfaches der Induktionsannahme ist, also gilt:

$$7 \cdot 11^n + 4(11^n - 4^n) = b \cdot 7, b \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow b = 11^n + \frac{4 \cdot x \cdot 7}{7} = 11^n + 4 \cdot x$$

Somit ist $b \cdot 7$ ein Vielfaches von 7 was zu zeigen war.

6.3 Binomialkoeffizienten

Satz 6.1. *Es gibt $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots < \cdot (n - 1) \cdot n$ Permutationen des n -Tupels $(1, \dots, n)$.*

Bemerkung 6.2. *Bezeichnung: $n!$ heißt n Fakultät.*

Die Verallgemeinerung der binomischen Formel ist gegeben durch:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (6.3.1)$$

wobei

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)!k!} \quad (6.3.2)$$

Binomialkoeffizient heißt und $0! = 1$ gilt.

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & (a + b) \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & (a + b)^2 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & (a + b)^3 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & (a + b)^4 \\ & & & & & & & & & & & & (a + b)^5 \\ & & & & & & & & & & & & \vdots \end{array} \quad (6.3.3)$$

bzw.

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\ & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\ & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\ & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\ & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\ \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\ & & & & & & & & & & & & \vdots \end{array} \quad (6.3.4)$$

7 Mengen, Relationen und Abbildungen

Definition 7.1. Mengen sind Ansammlungen von Elementen.

7.1 Arten von Mengen

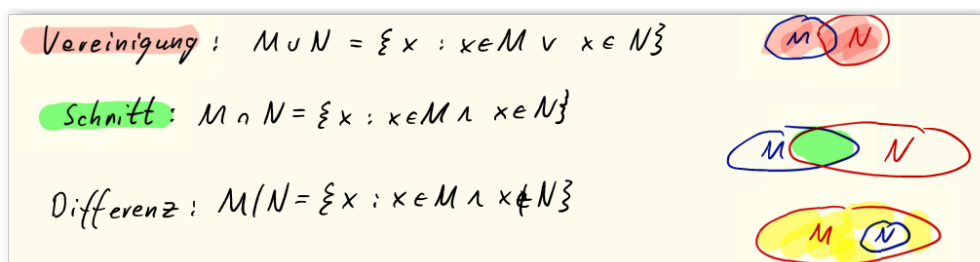


Abbildung 5: Arten von Mengen (Schneider 2018)

Definition 7.2. Ist $N \subset M$ dann heißt $N^c = M/N$ das Komplement von N . M und N heißen disjunkt, falls $M \cap N = \emptyset$, wobei $\emptyset = \{\}$ die leere Menge ist.

Definition 7.3. Kartesisches Produkt: $M \times N = \{(a, b) : a \in M \wedge b \in N\}$

Definition 7.4. Potenzmenge: $P(M) = \{X : X \subset M\}$

7.1.1 Abkürzungen

- $\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup \dots \cup A_n$
- $\bigcap_{k=1}^n A_k = A_1 \cap \dots \cap A_n$
- $\prod_{k=1}^n A_k = A_1 \times \dots \times A_n = \underbrace{\{(a_1, \dots, a_n) : \forall k : a_k \in A_k\}}_{n\text{-Tupel}}$

7.2 Relationen

Definition 7.5. Relationen setzen Elemente zweier Mengen in Verbindung. Eine Relation ist eine Teilmenge $R \subset M \times N$ mit M und N als Mengen. Man schreibt:

$$xRy \text{ genau dann wenn } (x, y) \in R \subset M \times N$$

Jede Funktion $f \rightarrow f(x)$ ist eine Relation $R = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

7.2.1 Äquivalenzrelationen

Eigenschaften:

- aRa , d.h. $(a, a) \in R$ (Reflexivität)
- $aRb \Leftrightarrow bRa$, d.h. mit $(a, b) \in R$ ist auch $(b, a) \in R$ (Symmetrie)
- $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$, d.h. mit $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ ist auch $(a, c) \in R$ (Transitivität)

Satz 7.6. Ist R eine Äquivalenzrelation, d.h. eine Relation mit obigen Eigenschaften, so zerfällt die Menge M in disjunkte Teilmengen.

Beispiel:

$$M = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{(1, 3), (3, 1), (1, 1), (3, 3), (2, 4), (4, 2), (2, 2), (4, 4)\}$$

R zerlegt M in zwei Klassen (Teilmengen):

$$\{2, 4\} = [2]_R = [4]_R$$

$$\{1, 3\} = \underbrace{[1]_R = [3]_R}_{\substack{\text{Repräsentanten} \\ \text{der Klasse}}}$$

bzw. allgemein: Äquivalenzklasse zu einem Element a bezüglich einer Äquivalenzrelation R

$$[a]_R = \{b \in M : aRb\}$$

Die Menge aller Äquivalenzklassen ist: $M/R = \{[a]_R : a \in M\}$. Es gilt entweder $[a]_R = [b]_R$ oder $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

Bemerkung 7.1. Es wird häufig anstatt R das Zeichen \sim verwendet.

7.2.2 Ordnungsrelationen

Definition 7.7. Eine Halbordnung $R \subset M \times M$ auf einer Menge M erfüllt

- (i) xRx
- (ii) $xRy \wedge yRx \Rightarrow y = x$
- (iii) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (Transitivität)

Definition 7.8. Ordnungsaxiome im \mathbb{R}

- (i) $x \leq x$
- (ii) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow y = x$
- (iii) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
- (iv) $x \vee y \leq x$ (Totalordnung)

(v) $x \Rightarrow x + z \leq y + z$ (*Zusammenhang mit Addition*)

(vi) $x \leq y \wedge z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$ (*Zusammenhang mit Multiplikation*)

Definition 7.9. Zu $a \in \mathbb{R}$ heißt

$$|a| := \begin{cases} a & , \text{ falls } a \geq 0 \\ -a & , \text{ falls } a < 0 \end{cases} \quad (7.2.1)$$

der Betrag von a .

7.3 Maximum, Minimum, Supremum, Infimum

Im Folgenden sei M eine Teilmenge von \mathbb{R} .

Definition 7.10. $x \in \mathbb{R}$ heißt eine obere Schranke von M , falls $y \leq x$ für alle $y \in M$ gilt.

Definition 7.11. $x \in \mathbb{R}$ heißt eine untere Schranke von M , falls $y \geq x$ für alle $y \in M$ gilt.

Definition 7.12. M heißt beschränkt, falls M nach oben und unten beschränkt ist, d.h. eine obere und eine untere Schranke existieren.

Definition 7.13. $s = \sup M \in \mathbb{R}$ heißt das Supremum von M und ist die kleinste obere Schranke, d.h. falls s eine obere Schranke von M ist und ferner jede andere obere Schranke x von M die Ungleichung $x \geq s$ erfüllt.

Definition 7.14.

Infimum: $\inf M \in \mathbb{R}$ ist die größte untere Schranke

Maximum: $s = \max M \in \mathbb{R}$ heißt das Maximum von M , falls $s \in M$ und für alle $x \in M$ gilt: $x \leq s$.

Minimum: $s = \min M \in \mathbb{R}$ heißt das Minimum von M , falls $s \in M$ und für alle $x \in M$ gilt: $s \leq x$.

Bemerkung 7.2. Für jede endliche Menge existiert das Maximum und Minimum.

Satz 7.15. Jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum. (Analog jede nach unten beschränkte Menge ein Infimum)

Bemerkung 7.3.

$$\sup(T) \in T \Rightarrow \sup(T) = \max(T) \quad (7.3.1)$$

$$\inf(T) \in T \Rightarrow \inf(T) = \min(T) \quad (7.3.2)$$

7.4 Abbildungen

Abbildungen sind spezielle Relationen. Eine Abbildung f von einer Menge M in eine Menge N ist eine Vorschrift, die jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zuordnet. M heißt der Definitionsbereich und N heißt der Bildbereich.

Definition 7.16. $f : M \rightarrow N$ heißt *surjektiv*, falls die Gleichung $f(x) = y$ mindestens eine Lösung besitzt und zwar für alle $y \in N$.

$f : M \rightarrow N$ heißt *injektiv*, falls für alle $x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

f heißt *bijektiv*, falls f sowohl injektiv, als auch surjektiv ist.

7.5 Unendlichkeit

Definition 7.17. Eine Menge M heißt *endlich*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $\Phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow M$ gibt. Eine Menge M heißt *abzählbar*, falls es eine bijektive Abbildung $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow M$ gibt. Sonst heißt die Menge *überabzählbar*.

Satz 7.18. Die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} ist abzählbar.

Satz 7.19. Die reellen Zahlen sind überabzählbar.

7.6 Elementare realwertige Funktionen

7.6.1 Algebraische Funktionen

Durch arithmetische Operationen aufgebaut $(+, -, \cdot, \backslash)$, z.B.:

$$f(x) = x^2 + 5x, \quad f(x) = \sqrt[3]{x}$$

7.6.1.1 Polynome $(+, -, \cdot)$

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_j \in \mathbb{R} \quad (7.6.1)$$

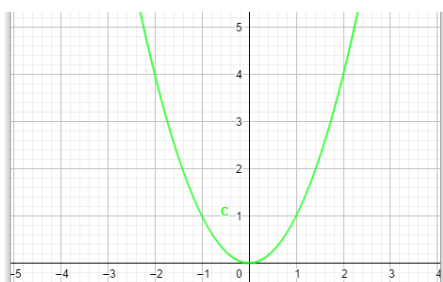


Abbildung 6: $y = x^2$ (vgl. x^4, x^6, \dots)

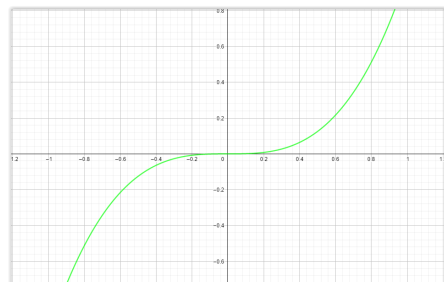


Abbildung 7: $y = x^3$ (vgl. x^5, x^7, \dots)

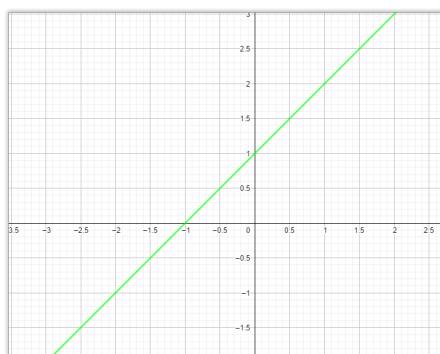


Abbildung 8: $y = ax + b$

7.6.1.2 Rationale Funktionen (+, -, ·, \)

$$y = f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{mit } p, q \text{ sind Polynome} \quad (7.6.2)$$

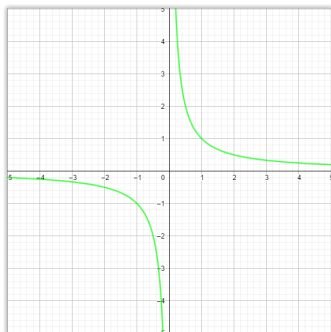


Abbildung 9: $y = \frac{1}{x}$

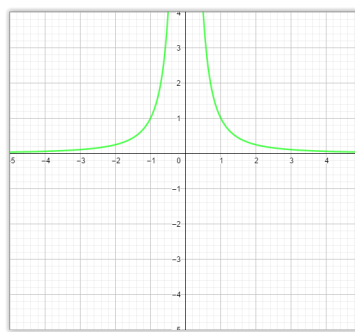


Abbildung 10: $y = \frac{1}{x^2}$

7.6.1.3 n-te Wurzel

$$y = f(x) = \sqrt[n]{x} \quad (7.6.3)$$

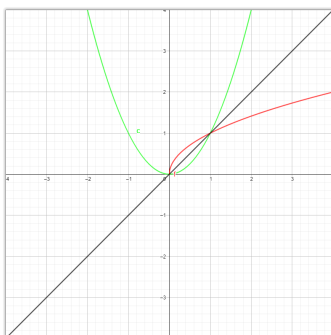


Abbildung 11: Quadratwurzel

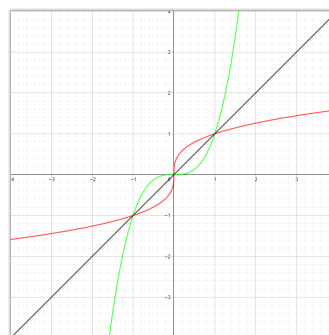


Abbildung 12: Kubische Wurzel

Wie man an den Graphiken erkennt ist die Wurzel gerade die Spiegelung an der Ursprungsgeraden des korrelierenden Polynoms.

7.6.2 Transzendente Funktionen

7.6.2.1 Exponentialfunktionen

$$y = f(x) = e^x, \quad e = 2,7182... \quad (7.6.4)$$

Streng monoton wachsende Funktion. Es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (7.6.5)$$

7.6.2.2 Unendliche Summen

Zum Beispiel Taylorreihen, Potenzreihen

7.6.2.3 (Natürlicher) Logarithmus

$$y = f(x) = \ln(x) \quad (7.6.6)$$

Bildet das Inverse der e-Funktion.

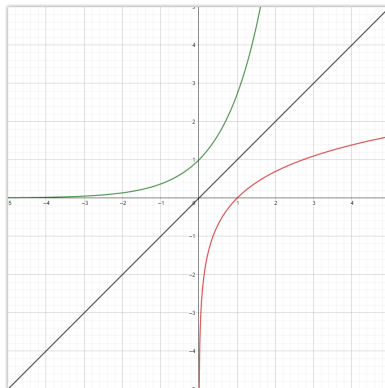


Abbildung 13: Grün: $y = e^x$; Rot: $y = \ln(x)$

Zum Wechsel der Basis können die Logarithmusgesetze angewandt werden:

$$\begin{aligned} h(x) &= a^x = e^{x \cdot \ln(a)}, \text{ da } \ln(a^x) = x \ln(a) \\ k(x) &= \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned} \quad (7.6.7)$$

7.6.2.4 Trigonometrische Funktionen

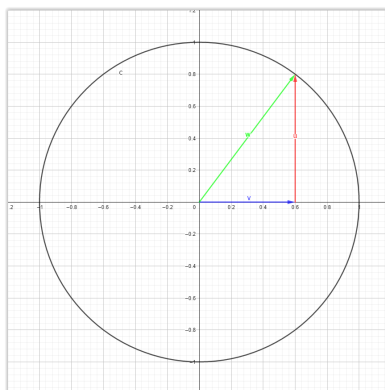


Abbildung 14: Grün: 1; Rot: $\sin(x)$; Blau: $\cos(x)$

Aus dem Einheitskreis geht die Identität

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad (7.6.8)$$

direkt hervor.

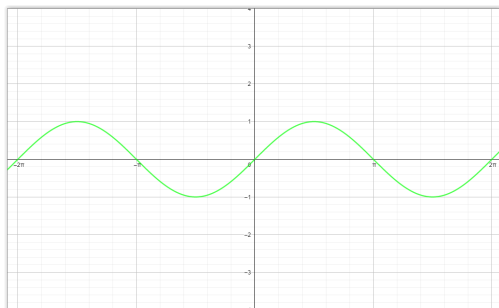


Abbildung 15: Sinusfunktion

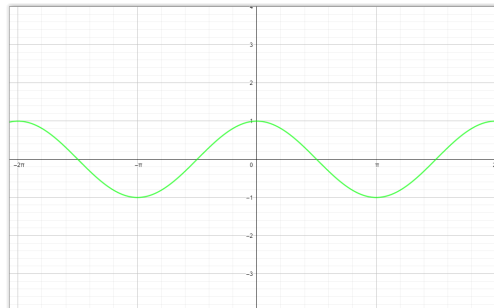


Abbildung 16: Cosinusfunktion

Es gelten folgende Zusammenhänge:

- $\cos(x) = \cos(-x)$
 - $-\sin(x) = \sin(-x)$
 - $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
 - $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- | |
|--|
| • $e^z = e^{\operatorname{Re}\{z\}} (\cos(\operatorname{Im}\{z\}) + i\sin(\operatorname{Im}\{z\}))$, $z \in \mathbb{C}$ |
| • $\sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$, $x \in \mathbb{R}$ |
| • $\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$, $x \in \mathbb{R}$ |

Weiterhin gilt:

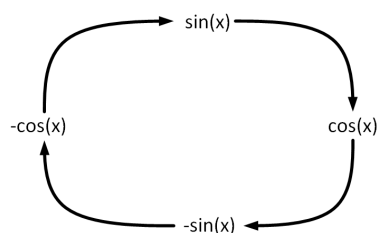


Abbildung 17: Ableitungsregel

7.6.2.5 Weitere trigonometrische Funktionen

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad \cot(x), \dots \quad (7.6.9)$$

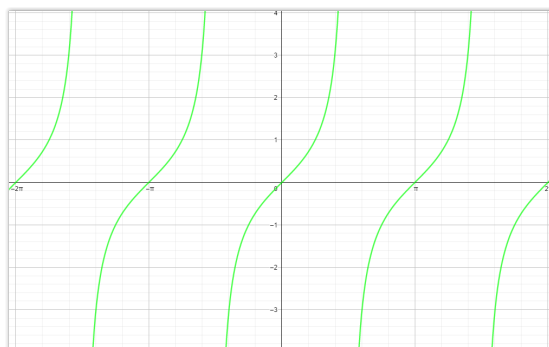
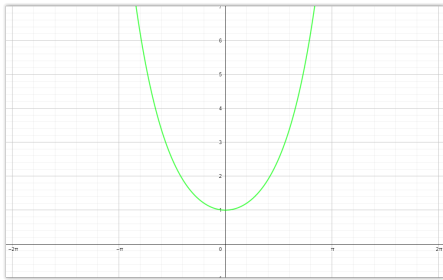
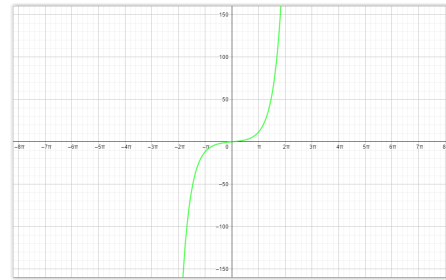
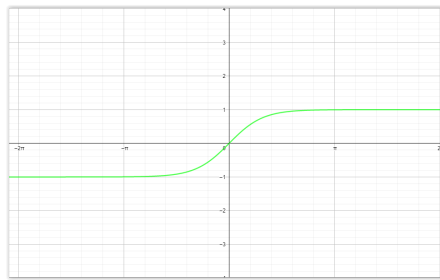


Abbildung 18: $\tan(x)$

7.6.2.6 Hyperbolische Funktionen

$$\begin{aligned}
 \cosh(x) &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \\
 \sinh(x) &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \\
 \tanh(x) &= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\
 \operatorname{sech}, \operatorname{coth}, \dots, \text{etc.}
 \end{aligned}
 \tag{7.6.10}$$


Abbildung 19: $y = \cosh(x)$

Abbildung 20: $y = \sinh(x)$

Abbildung 21: $y = \tanh(x)$

Es gelten folgende Identitäten:

$$(\cosh(x))' = \sinh(x) \tag{7.6.11}$$

$$(\sinh(x))' = \cosh(x) \tag{7.6.12}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \tag{7.6.13}$$

$$\cos(z) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \cosh(iz) \quad , z \in \mathbb{C} \tag{7.6.14}$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = -i \sinh(iz) \quad , z \in \mathbb{C} \tag{7.6.15}$$

8 Konvergente Folgen

Definition 8.1. Eine Folge in einer Menge M ist eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow M$, $n \rightarrow a_n$. Wir schreiben $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Für $n_j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ heißt $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beispiele:

$$\begin{aligned} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n &= \frac{1}{n} && , 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \\ \text{Teilfolge } a_1, a_5, a_8, a_{17}, \dots &&& , 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{17}, \dots \end{aligned}$$

8.1 Vergleich expliziter und rekursiver Darstellung

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N} && \rightarrow && a_{n+1} = -a_n, \quad a_1 = -1 \\ a_n &= n! \quad n \in \mathbb{N} && \leftarrow && a_n = n \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 2, \quad a_1 = 1 \\ &&& && a_1 = 1 \\ &&& && a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 \\ &&& && a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

8.2 Definitionen $\varepsilon - N$ -Kriterium/Konvergenzkriterium

Definition 8.2. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} .

- a) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt beschränkt, falls es ein $C > 0$ gibt, mit $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- b) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent mit Grenzwert (Limes) a , falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$. Eine nicht konvergente Folge heißt divergent.

$$\text{Konvergenzkriterium : } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \quad (8.2.1)$$

- c) Die möglichen Grenzwerte von Teilfolgen heißen Häufungspunkte.

Bemerkung 8.1. Konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a schreibt man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (8.2.2)$$

bzw.

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$$

Bemerkung 8.2. Die Schranke N ist i.A. von ε abhängig. Daher schreibt man $N(\varepsilon)$.

Bemerkung 8.3. Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig.

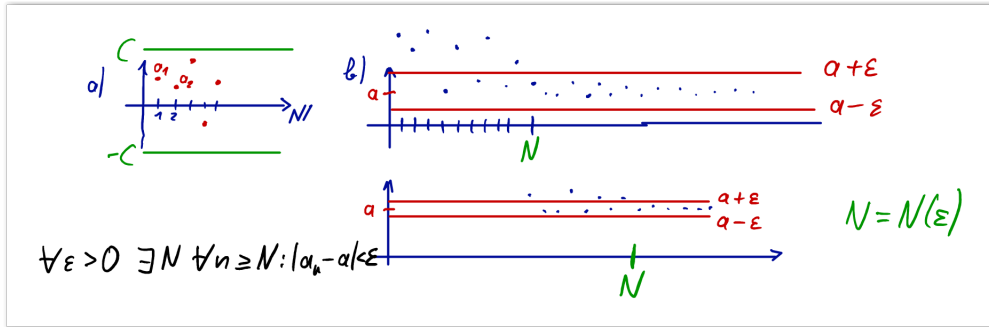


Abbildung 22: Epsilon Kriterium(Schneider 2018)

8.3 Ausdrücke mit Brüchen

(a_n) mit $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ mit P, Q sind Polynome.

- (1) $\text{grad}(P) > \text{grad}(Q) \Rightarrow (a_n)$ divergiert
- (2) $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q) \Rightarrow (a_n)$ konvergiert gegen 0
- (3) $\text{grad}(P) = \text{grad}(Q) \Rightarrow (a_n)$ konvergiert gegen Quotient der Leitkoeffizienten

8.4 Dreiecksungleichung

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad , \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (8.4.1)$$

bzw. in umgekehrter Form

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad (8.4.2)$$

8.5 Beschränktheit

Satz 8.3. Eine konvergente reelle Folge ist beschränkt.

8.6 Grenzwertsätze

Satz 8.4. Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen. Dann konvergieren auch die Folgen $(|a_n|), (a_n + b_n)$ und (λa_n) für $\lambda \in \mathbb{R}$, und es gilt:

$$i) \quad \lim |a_n| = |\lim a_n| \quad (8.6.1)$$

$$ii) \quad \lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n \quad (8.6.2)$$

$$iii) \quad \lim(\lambda a_n) = \lambda \lim a_n \quad (8.6.3)$$

Satz 8.5. Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen.

iv) Dann konvergiert auch $(a_n b_n)$ und es gilt

$$\lim(a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n) \quad (8.6.4)$$

v) Ist $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, so konvergiert auch $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ mit

$$\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} \quad (8.6.5)$$

vi) Sei $m \in \mathbb{N}$. Ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert auch $(\sqrt[m]{a_n})$ und es gilt

$$\lim \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim a_n} \quad (8.6.6)$$

Bemerkung 8.4. Bei rationalen Ausdrücken mit der höchsten Potenz durchkürzen. Beispiel:

$$\frac{n}{n^2 + 4n + 8} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{8}{n^2}} \rightarrow \frac{0}{1} = 0$$

8.6.1 Beispiele wichtiger Grenzwerte

- 1) $\lim \frac{1}{n} = 0$
- 2) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$:
 $\lim q^n = 0$
- 3) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ und $p \in \mathbb{Z}$:
 $\lim n^p q^n = 0$
- 4) Sei $a \in \mathbb{R}$:
 $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$
- 5)
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$
- 6)
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$
- 7)
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

8.7 Konvergenzsätze

Satz 8.6.

- 1) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.
- 2) Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- 3) Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.
 - a) (a_n) ist monoton wachsend und nach oben beschränkt

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n)$$

b) (a_n) ist monoton fallend und nach unten beschränkt

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} (a_n)$$

8.8 Monotone Folgen

Definition 8.7. Eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie heißt streng monoton wachsend, falls $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Analog monoton fallend und streng monoton fallend.

Satz 8.8. Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, so konvergiert die Folge und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad (8.8.1)$$

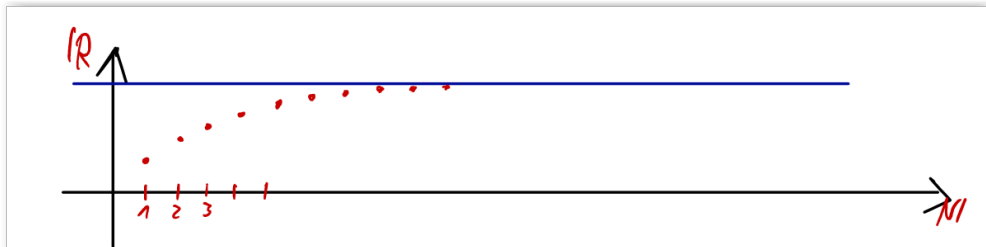


Abbildung 23: Konvergenz mw u. beschr. Folgen (Schneider 2018)

8.8.1 Intervallschachtelung

Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei monoton wachsend und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei monoton fallend. Es gelte $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{ex.}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (8.8.2)$$

9 Ableitung

9.1 Differenzenquotient/Differentialquotient

Definition 9.1. Die Änderung einer Funktion heißt Differenzenquotient:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \quad (9.1.1)$$

Definition 9.2. Gegeben sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Punkt $x_0 \in I$. Die Funktion f heißt differenzierbar in x_0 , falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (9.1.2)$$

existiert. Der Grenzwert heißt der Differentialquotient bzw. die Ableitung von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bzw. $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet.

Bemerkung 9.1. Die Ableitung $f'(x_0)$ gibt die Steigung der Tangente an f in x_0 an. Die Tangentengleichung ist:

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (9.1.3)$$

Es gilt:

$$l(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0) \quad (9.1.4)$$

und

$$l'(x_0) = f'(x_0) \quad (9.1.5)$$

d.h. der Funktionswert und die Ableitung von f und l stimmen in x_0 überein.

9.2 Stetigkeit

Definition 9.3. Eine Funktion f heißt stetig in x_0 , falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (9.2.1)$$

Satz 9.4. Jede in x_0 differenzierbare Funktion ist auch stetig in x_0

Bemerkung 9.2. Merkregel:

Stetig: f kann durchgezeichnet werden.

Diffbar: f hat keinen Knick

Beispiel:

$f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ stetig aber nicht diffbar.

Bemerkung 9.3. Bezeichnungen:

- C^0 : Menge aller stetigen Funktionen
- C^1 : Menge aller diffbaren Funktionen mit f, f' stetig
- C^n : Menge der n -mal stetig diffbaren Funktionen, d.h. $f, f', \dots, f^{(n)}$
- C^∞ : Menge aller unendlich oft stetig diffbaren Funktionen

9.3 Wichtige Ableitungen

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \quad (9.3.1)$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \quad (9.3.2)$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad (9.3.3)$$

$$f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(\tan(y))'} \quad (9.3.4)$$

$$f(x) = \arcsin(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(\sin(y))'} \quad (9.3.5)$$

9.4 Ableitungsregeln

Satz 9.5. *Produkt-/Quotientenregel*

a) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \text{ (Linearität der Ableitung)} \quad (9.4.1)$$

b) $(fg)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (9.4.2)$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} \quad (9.4.3)$

Satz 9.6. *Kettenregel*

a) Es gilt:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (9.4.4)$$

b) Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend mit $f'(x_0) \neq 0$ und diffbar. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$ und besitzt die Ableitung

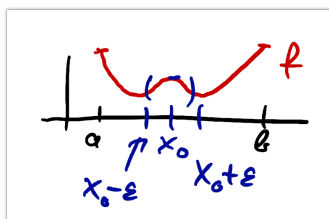
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (9.4.5)$$

mit $y_0 = f(x_0)$.

9.5 Mittelwertsätze

Definition 9.7. Es sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$.

- $f(x)$ hat in x_0 ein lokales Maximum, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in (a, b)$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$.
- Analog für lokales Minimum.

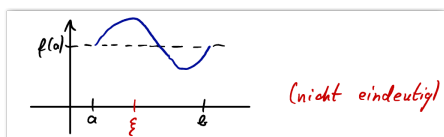


Abbildungung 24: Lokales Minimum/Maximum (Schneider 2018)

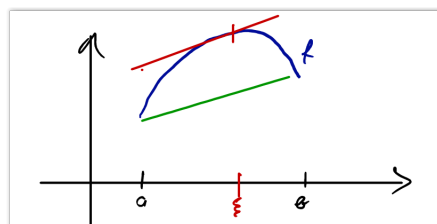
Satz 9.8. Besitzt eine stetig diffbare Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Stelle $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Maximum oder Minimum, so gilt notwendigerweise $f'(x_0) = 0$.

Satz 9.9. Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) diffbar mit $g'(x) > 0$ bzw. $g'(x) < 0$ jeweils für alle $x \in (a, b)$.

- Satz von Rolle:** Gilt $f(a) = f(b)$, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.
- 1. Mittelwertsatz:** Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
- 2. Mittelwertsatz:** Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.



Abbildungung 25: Zu a) (Schneider 2018)



Abbildungung 26: Zu b) (Schneider 2018)

9.6 Monotonie

Satz 9.10.

- Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f'(x_0) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$, so ist f konstant.
- $$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \quad \forall x \in (a, b) &\Leftrightarrow f \text{ ist monoton wachsend} \\ f'(x) &> 0 \quad \forall x \in (a, b) &\Rightarrow f \text{ ist streng monoton wachsend} \\ f'(x) &\leq 0 \quad \forall x \in (a, b) &\Leftrightarrow f \text{ ist monoton fallend} \\ f'(x) &< 0 \quad \forall x \in (a, b) &\Rightarrow f \text{ ist streng monoton fallend} \end{aligned}$$

9.7 Das Prinzip von l'Hospital

Satz 9.11. Gilt $\lim_{b \rightarrow a} f(b) = 0$, $\lim_{b \rightarrow a} g(b) = 0$ und existiert $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f'(b)}{g'(b)}$, so existiert auch $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b)}{g(b)}$ und er ist gleich $\lim_{b \rightarrow a} \frac{f'(b)}{g'(b)}$. Analog $\lim_{b \rightarrow a} f(b) = \infty$ und $\lim_{b \rightarrow a} g(b) = \infty$.

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow a} f(b) = 0 \wedge \lim_{b \rightarrow a} g(b) = 0 \wedge \lim_{b \rightarrow a} \frac{f'(b)}{g'(b)} \Rightarrow \lim_{b \rightarrow a} \frac{f'(b)}{g'(b)} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b)}{g(b)} \quad (9.7.1)$$

Bemerkung 9.4. Zur Berechnung muss der Ausdruck gegebenenfalls auf " $\frac{0}{0}$ " zurückgeführt werden. Entspricht zum Beispiel $\frac{f(b)}{g(b)}$ der Form " $\frac{\infty}{\infty}$ " kann durch Umformung zu $\frac{\frac{1}{\frac{f(b)}{g(b)}}}{\frac{1}{g(b)}}$ l'Hospital angewandt werden.

Liegt ein Ausdruck in der Form " $\infty \cdot 0$ " wie zum Beispiel $\lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{x}_{\rightarrow \infty} \underbrace{\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)}_{\rightarrow 0}$ vor,

kann durch Umformung zu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)}{\left(\frac{1}{x} \right)}$ wieder in die Form " $\frac{0}{0}$ " gebracht werden.

10 Taylorpolynome

Satz 10.1. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^{n+1} Funktion und sei $x_0 \in I$ und heißt Entwicklungspunkt. Dann ist

a) das Taylorpolynom n -ten Grades zum Entwicklungspunkt x_0 gegeben durch

$$T_n(f, x, x^*) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x^*)}{k!} (x - x^*)^k \quad (10.0.1)$$

und stimmt mit f in x_0 bis zur n -ten Ableitung überein.

b) Der Fehler

$$R_n(x, x_0) = f(x) - T_n(x, x_0) \quad (10.0.2)$$

ist gegeben durch die Restgliedformel nach Lagrange

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (10.0.3)$$

wobei $\xi = x_0 + \Theta(x - x_0)$ mit $\Theta \in (0, 1)$, d.h. ξ ist eine Zahl zwischen x und x_0 . Es gilt dann

$$|R_n(x, x_0)| = \frac{\sup_{\xi \in (x_0, x)} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{(n+1)} \quad (10.0.4)$$

11 Reihen

11.1 Satz von Bolzano-Weierstraß (Kompaktheitssatz)

Satz 11.1. Jede beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bemerkung 11.1. Im Prinzip unterteilt man das Intervall jeweils mittig und erhält so eine Folge von Teilintervallen mit je unendlich vielen Folgengliedern. Daraus konstruiert man eine konvergente Teilfolge.

Bemerkung 11.2. Der Satz gilt auch im \mathbb{R}^d aber nicht im \mathbb{R}^∞ .

Definition 11.2. x heißt Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn eine Teilfolge existiert, die gegen x konvergiert.

Formuliert man den Satz von Bolzano Weierstraß dahingehen um, lautet er

Bemerkung 11.3. Jede beschränkte reelle Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Definition 11.3.

limes inferior : $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{x : x \text{ ist ein Häufungspunkt von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$

limes superior : $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{x : x \text{ ist ein Häufungspunkt von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$

11.2 Häufungspunkte

Bemerkung 11.4. Ein Häufungspunkt a einer Folge (a_n) ist der Grenzwert einer Teilfolge (a_{n_k}) .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$$

$$\text{Größter HP} \quad : \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

$$\text{Kleinster HP} \quad : \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

Es gilt:

$$(1) \quad \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \Rightarrow a_n \text{ konvergiert}$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow \text{jede Teilfolge } a_{n_k} \text{ konvergiert.}$$

11.3 Cauchy-Folgen

Definition 11.4. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ (im Script steht $n \in \mathbb{N}$, aber irgendwie unlogisch) existiert, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \quad \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad (11.3.1)$$

(vgl. Konvergenzkriterium (8.2) bzw. (8.2.1)).

Satz 11.5. Jede konvergente Folge ist auch eine Cauchy-Folge.

Satz 11.6. *In den reellen Zahlen gilt: Jede Cauchy-Folge ist konvergent.*

Bemerkung 11.5. *Jede Cauchy-Folge ist beschränkt (somit ist Bolzano Weierstraß anwendbar).*

Die Konsequenzen aus dem Beweis der obigen Aussagen sind:

Bemerkung 11.6.

- Um Konvergenz nachzuweisen reicht der Nachweis einer Cauchy-Folge (Cauchy-Kriterium)
- Supremumsvollständigkeit \Rightarrow Cauchyfolgenvollständigkeit

11.4 Reihen reeller Zahlen

Definition 11.7. *Bildet man zu einer gegebenen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ eine neue Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit*

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad (11.4.1)$$

so wird die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Reihe genannt. Die einzelnen s_n heißen Partialsummen der Reihe. Ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so wird der Grenzwert $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$ mit

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Oft wird $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ als Abkürzung für $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ verwendet.

Satz 11.8.

a) *Es gilt das Cauchysche Konvergenzkriterium.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m \geq N : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon \quad (11.4.2)$$

b) *Notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist, dass a_k eine Nullfolge ist, also das gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$*

c) *Sind*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen, so konvergieren auch

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) \\ \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

11.4.1 Wichtige Reihen

- Exponentialreihe:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (11.4.3)$$

- Geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad |q| < 1 \quad (11.4.4)$$

- Sinusreihe

$$\sin(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} = y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 + \dots \quad (11.4.5)$$

- Cosinusreihe

$$\cos(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 + \dots \quad (11.4.6)$$

11.4.2 Konvergenzen und Divergenzen ausgewählter Reihen

- Geometrische Reihe

Konvergenz kann nur für $|q| < 1$ vorliegen da a_k eine Nullfolge sein muss. Sonst divergent.

- Harmonische Reihe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} = \infty \quad (11.4.7)$$

11.4.3 Leibnizkriterium für alternierende Reihen

Satz 11.9. Ist $a_k \geq 0$ und ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend, oder anders ausgedrückt ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge, so ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konvergent.

11.5 Absolut konvergente Reihen

Definition 11.10. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}$ heißt absolut konvergent, falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz 11.11. Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

11.5.1 Konvergenzkriterien

Satz 11.12. a) Die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist äquivalent zur Beschränktheit von $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$.

b) Majorantenkriterium

Sei $|a_k| \leq b_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, so folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt konvergente Majorante.

c) Divergenzkriterium

Sei $0 \leq a_k \leq b_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent (d.h. $= \infty$). Dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt divergente Minorante.

Bemerkung 11.7. Zu (11.12) b): Häufig wird die geometrische Reihe als konvergente Majorante genutzt.

Satz 11.13. Vergleichsreihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \begin{cases} \text{konvergiert für } \alpha > 1 \\ \text{divergiert für } \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (11.5.1)$$

Satz 11.14. Wurzelkriterium: Gegeben sei die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Man setzt $\alpha = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$.

a) Ist $\alpha < 1$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

b) Ist $\alpha > 1$, so divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

c) Ist $\alpha = 1$, so ist keine Aussage möglich.

Satz 11.15. Quotientenkriterium: Gegeben sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \neq 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen $\underline{\alpha} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ und $\overline{\alpha} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$.

a) Ist $\overline{\alpha} < 1$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut.

b) Ist $\underline{\alpha} > 1$, so divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Bemerkung 11.8. Das Wurzelkriterium (11.14) wird häufig bei n -ten Wurzeln angewandt, das Quotientenkriterium (11.15) häufig bei Fakultäten.

11.6 Umordnung von Reihen

Satz 11.16. *Umordnung absolut konvergenter Reihen: Sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine bijektive Abbildung (erzeugt Umnummerierung der Folgenglieder). Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist auch jede umgeordnete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} \quad (11.6.1)$$

Satz 11.17. *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_m$ absolut konvergent. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k}$ für jede Nummerierung: $(\sigma, \mu) : (\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0^2)$ mit $k \rightarrow (\sigma_k, \mu_k)$ absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_m \right) \quad (11.6.2)$$

11.7 Potenzreihen

Definition 11.18. *Eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ heißt Potenzreihe.*

11.7.1 Taylorreihe

Ist eine Funktion unendlich oft diffbar kann aus dem Taylorpolynom $T_n(x, x_0)$ für $n \rightarrow \infty$ die sogenannte Taylorreihe

$$T_{\infty}(x, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (11.7.1)$$

erhalten werden.

Satz 11.19. *Die Taylorreihe $T_{\infty}(f, x, x_0)$ konvergiert in $x \in \mathbb{R}$ genau dann gegen $f(x)$, falls*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, x, x_0) = 0$$

Satz 11.20. *Identitätssatz:*

$$\begin{aligned} \text{Taylorreihe: } f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ \text{Potenzreihe: } f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \\ &\Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \end{aligned} \quad (11.7.2)$$

11.7.2 Konvergenz der Potenzreihen

Satz 11.21.

- a) Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ gibt es eine Zahl $r \in [0, \infty]$, den sogenannten Konvergenzradius der Potenzreihe, mit der Eigenschaft, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ absolut konvergent für $|z - z_0| < r$ ist und divergent für $|z - z_0| > r$.
- b) Für den Konvergenzradius gilt die Formel von Cauchy-Hadamard:

$$r = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}} \quad (11.7.3)$$

wobei $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$ gesetzt wird.

Dazu:

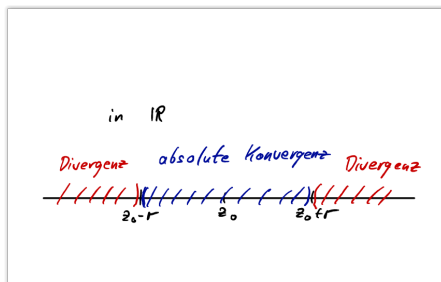


Abbildung 27: Potenzradius in \mathbb{R} (Schneider 2018)

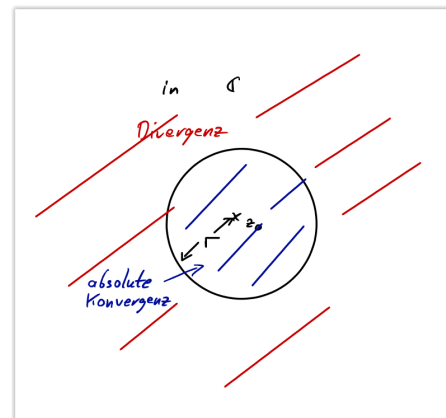


Abbildung 28: Potenzradius in \mathbb{C} (Schneider 2018)

Bemerkung 11.9. Falls einer der folgenden Grenzwerte existiert bzw. ∞ ist, ist er gleich dem Konvergenzradius.

$$r = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}} \quad \text{bzw.} \quad r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

Bemerkung 11.10. Da absolute Konvergenz vorliegt, können Potenzreihen miteinander multipliziert werden. Der Konvergenzradius ist mindestens so groß wie das Minimum der Konvergenzradien.

Bemerkung 11.11. Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzradius beliebig oft diffbar und können gliedweise abgeleitet werden.

Satz 11.22. Die formal abgeleitete Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ hat den gleichen Konvergenzradius wie die Ausgangsreihe.

Satz 11.23. *Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1. Ist die Reihe auch in $x = 1$ konvergent, d.h. konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so gilt*

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad (11.7.4)$$

12 Stetigkeit

Definition 12.1. A:

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt stetig in $x^* \in D$, falls $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = f(x^*)$.

Bemerkung 12.1. Jede in x^* differenzierbare Funktion ist auch stetig in x^* .

Definition 12.2. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt stetig, falls f stetig für alle $x^* \in D$ ist.

Satz 12.3. Sind f, g stetige Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind innerhalb ihres Definitionsbereich auch λf , $f + g$, $f \cdot g$, $f \circ g$, $\frac{f}{g}$ stetige Funktionen.

Satz 12.4. Stetige Fortsetzbarkeit: Eine Definitionslücke einer gebrochen rationalen Funktion ist hebbar, wenn die Vielfachheit der Nullstelle x_0 im Zählerpolynom \geq der Vielfachheit der Nullstelle x_0 im Nennerpolynom ist.

12.1 Arten von Unstetigkeiten

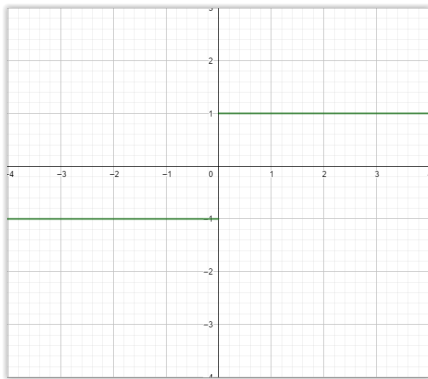


Abbildung 29: $f(x) = \frac{|x|}{x}$
(Sprungstelle)

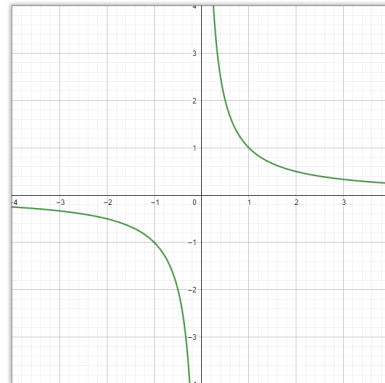


Abbildung 30: $f(x) = \frac{1}{x}$
(Polstelle)

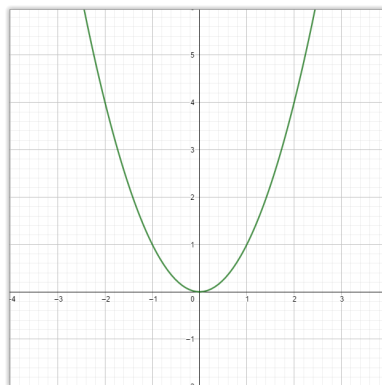


Abbildung 31: $f(x) = \frac{x^3}{x}$
(Lücke)

Definition 12.5. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ ist stetig in $x_0 \in D$ falls

1) Falls z.z. ist dass f stetig ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon \quad \forall x \in D : (|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \quad (12.1.1)$$

2) Falls z.z. ist dass f nicht stetig ist:

$$\forall \text{ Folgen } (x_n) \text{ mit } x_n \rightarrow x_0 \text{ für } n \rightarrow \infty \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0) \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (12.1.2)$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad (12.1.3)$$

12.2 Nullstellensatz und Zwischenwertsatz

Satz 12.6. Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

- a) Es sei $f(a)f(b) < 0$. Dann existiert ein $x^* \in (a, b)$ mit $f(x^*) = 0$, d.h. eine Nullstelle von f .
- b) Sei $f(a) < c < f(b)$. Dann existiert ein $x^* \in (a, b)$ mit $f(x^*) = c$.

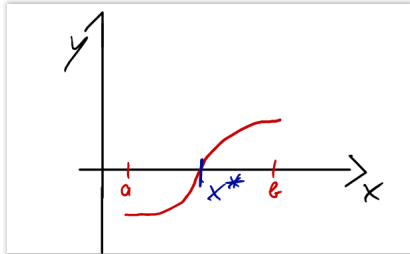


Abbildung 32: Zu a)
(Nullstellensatz) (Schneider 2018)

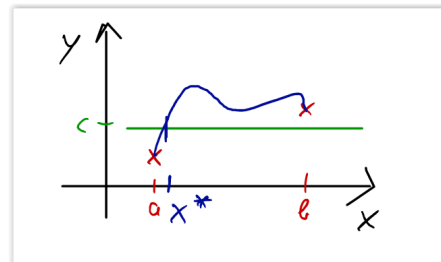


Abbildung 33: Zu b)
(Zwischenwertsatz) (Schneider 2018)

12.2.1 Sätze zu Stetigkeit und Monotonie

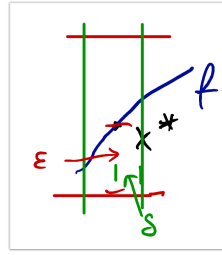
Satz 12.7. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei streng monoton wachsend und stetig. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$. Diese ist streng monoton wachsend und stetig.

Definition 12.8. B: ($\varepsilon - \delta$ Definition)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$. Dann heißt f stetig in x^* , wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass gilt:

$$\forall x \in D : |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon \quad (12.2.1)$$

Es muss zu jeder beliebig kleinen Seitenlänge ε immer ein Rechteck mit Mitte x^* existieren, sodass f das Rechteck an den Seiten verlässt.


Abbildung 34: $\varepsilon - \delta$ Kriterium (Schneider 2018)

Definition 12.9. a) f heißt Lipschitz-stetig in x^* , wenn es ein $L > 0$ und $\delta > 0$ gibt, sodass für $x \in D$ mit $|x - x^*| < \delta$

$$|f(x) - f(x^*)| \leq L|x - x^*| \quad (12.2.2)$$

gilt.

b) f heißt Hölder-stetig mit Exponent $\alpha \in (0, 1]$, falls

$$|f(x) - f(x^*)| \leq L|x - x^*|^\alpha \quad (12.2.3)$$

gilt.

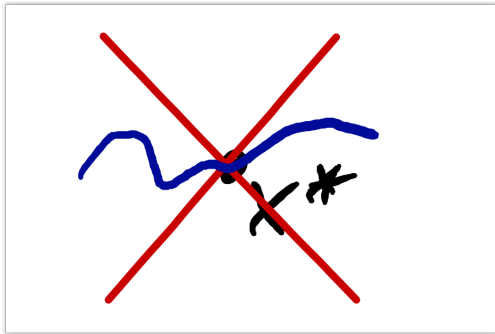


Abbildung 35: Zu a)

(Lipschitzstetigkeit) (Schneider 2018)

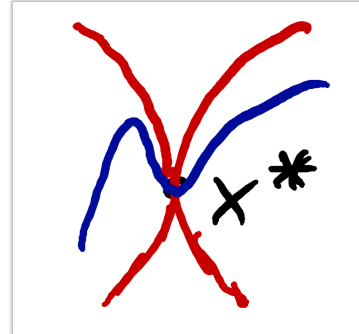


Abbildung 36: Zu b)

(Hölder-Stetigkeit) (Schneider 2018)

Bemerkung 12.2. Zu a) Es ist die Idee, eine Sekante so in den Graph zu legen, dass sie zwei Punkte des Graphen schneidet. Existiert nun eine Sprungstelle, so kann man diese Bedingung einhalten und die Steigung der Sekanten gegen unendlich treiben (praktisch eine senkrechte gerade). Liegt keine Sprungstelle vor, so wird die Steigung unter Einhaltung der Bedingung immer kleiner unendlich sein. Die Schranke für die Steigung ist hier L .

Satz 12.10. Definition A (12.1) und Definition B (12.8) der Stetigkeit sind äquivalent.

Definition 12.11. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt Hölder- bzw. Lipschitzstetig, falls f Hölder- bzw. Lipschitzstetig in jedem $x^* \in D$ ist. Bezeichnungen: $C^{0,\alpha}$ steht für Hölder-stetig, $C^{0,1} = \text{Lip}$ steht für Lipschitzstetig.

Bemerkung 12.3. Es gilt:

$$\text{differenzierbar} \Rightarrow \text{Lipschitzstetig} \Rightarrow \text{Hölder-stetig} \Rightarrow \text{stetig} \quad (12.2.4)$$

13 Extremalprobleme

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist $f'(x^*) = 0$ notwendige Bedingung dafür, dass ein Minimum oder Maximum vorliegt, sofern f diffbar ist.

Satz 13.1. Globale Theorie: $[a, b]$ sei ein abgeschlossenes Intervall. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gibt es je ein $\underline{x}, \bar{x} \in [a, b]$ mit $f(\underline{x}) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ und $f(\bar{x}) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$.

Bemerkung 13.1. (Zu (13.1)) Stetige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen das Maximum und Minimum an.

Satz 13.2. Lokale Theorie: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \in \mathbb{C}^3$ (also 3 mal stetig diffbar). Für $x^* \in (a, b)$ gilt dann:

- a) Aus $f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) > 0$ folgt, dass f in x^* ein lokales Minimum hat.
- b) Aus $f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) < 0$ folgt, dass f in x^* ein lokales Maximum hat.

14 Funktionenfolgen

Definition 14.1. Eine Funktionenfolge ist allgemein eine Folge von Funktionen f_1, f_2, \dots bei denen alle Funktion dieselbe Definitions- und Zielmenge haben.

$$f : D \times \mathbb{N} \rightarrow Z, \quad (x, n) \rightarrow f_n(x) \quad (14.0.1)$$

Wobei D die Definitionsmenge und Z die Zielmenge ist.

Definition 14.2. a) Eine Folge von Funktionen f_n mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt für $n \rightarrow \infty$ punktweise gegen f konvergent, falls für alle $x \in D$:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ gilt.

b) Eine Funktionenfolge heißt gleichmäßig konvergent, falls
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$ gilt.

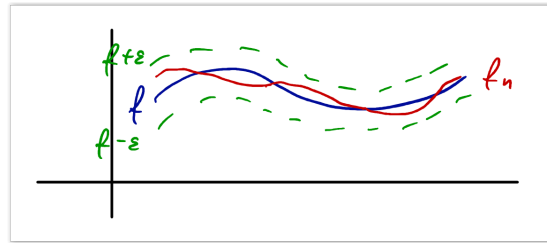


Abbildung 37: Epsilonkanal Funktionenfolge (Schneider 2018)

Satz 14.3. Gegeben sei eine Folge stetiger Funktionen mit $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$. Gilt $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf D , so ist auch die Grenzfunktion stetig.

Satz 14.4. Zu jeder Potenzreihe gibt es den Konvergenzradius r mit $0 \leq r \leq \infty$ mit der Eigenschaft, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ absolut konvergent für $|z - z_0| < r$ und divergent für $|z - z_0| > r$ ist.

Ferner konvergiert die Potenzreihe auf jeder Kreisscheibe $|z - z_0| < \delta$ mit $\delta < r$ auch gleichmäßig.

Bemerkung 14.1. Die Konsequenz aus obigem Satz ist, dass Potenzreihen für alle z mit $|z - z_0| < r$ stetig sind.

Satz 14.5. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien auf $[a, b]$ differenzierbar. Für ein $x_0 \in [a, b]$ sei $f_n(x_0)$ konvergent. Ferner konvergiere $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig (gegen g) auf $[a, b]$. Dann gilt:

- 1) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig.
- 2) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ist differenzierbar auf $[a, b]$ und es gilt $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ (und es gilt $f' = g$).

Bemerkung 14.2. Die Konsequenz aus obigem Satz ist, dass Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius beliebig oft differenzierbar sind und gliedweise abgeleitet werden können.

15 Formelverzeichnis

16 Nachwort

Dieses Dokument versteht sich einzig als Zusammenfassung der Vorlesungsunterlagen aus der HM1-2 Vorlesung von Prof. Dr. Guido Schneider mit einigen zusätzlichen Beispielen. Der Sinn ist einzig mir selbst und meinen Kommilitonen das Studieren der Mathematik zu erleichtern. In diesem Sinne erhebe ich keinerlei Anspruch auf das hier dargestellte Wissen, da es sich in großen Teilen nur um Neuformulierungen aus der Vorlesung und aus dem Begleitkurs vom Mint Kolleg handelt, in dem Frau Dr. Monika Schulz den Stoff bereits hervorragend zusammengefasst hat. Sollten sich einige Fehler eingeschlichen haben (was sehr wahrscheinlich ist) würde ich mich freuen, wenn man mir das kurz mitteilen würde damit ich eine Korrektur vornehmen kann. Das kann entweder über die Fachschaft erfolgen, oder gerne per E-Mail an f.leuze@outlook.de.

17 Literatur

Fischer, G. (2014), *Lineare Algebra*, 18 edn, Springer Spektrum.

Gauss, N. (2017), ‘Hm1 vortragsuebung’. Vorlesungsuebung.

Schneider, P. D. G. (2018), ‘Hm1-2 script’. Vorlesungsscript.