5 Separierbare DGL

5.1 Wiederholung klassische DGL

Bisher: lineare DGl mit konstanten Koeffizienten.
z.B.: $y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = e^{2t} \qquad , y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

Homogene DGL: $y(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4$
$\Rightarrow yh(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t} \qquad , C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$

Inhomogenes DGL: $\underbrace{yp(t) = re^{2t}}_{\text{da 2 keine NST}}$

$$\Rightarrow yp'(t) = 2re^{2t},\ yp''(t) = 4re^{2t}$$
$$\stackrel{DGL}{=} 4re^{2t} - 10re^{2t} + 4re^{2t} \stackrel{!}{=} e^{2t} \Rightarrow -2re^{2t} = e^{2t}$$
$$\Rightarrow r = -\frac{1}{2}$$

Allgemeine Lösung: $y(t) = yh(t) + yp(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t} - \frac{1}{2}e^{2t}$

5.2 Lösen von DGL mit Koeffizienten die von t abhängig sind

z.B. $y'(t) - ty(t) = t \qquad , y(0) = 1$

Spezielle Form:

$$y'(t) = f(t)g(y(t)) \qquad , y(t_0) = y_0 \tag{5.1}$$

$$\Rightarrow y'(t) = t + ty(t) = \underbrace{t}_{f(t)}\underbrace{g(y(t))}_{(1+y(t))}$$

Lösung: Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(t) \stackrel{y'=\frac{dy}{dt}}{\Rightarrow} \int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(t)dt + C \quad , C \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

C erhält man aus der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$.

5.2.1 Beispiele

1)

$$y' = t(1+y) \qquad , y(0) = 1$$
$$\int \frac{1}{1+y}dy = \int tdt + C \qquad , C \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow ln|1+y| = \frac{1}{2}t^2 + C \Rightarrow |1+y| = e^{\frac{1}{2}t^2 + C}$$
$$\Rightarrow y = e^C e^{\frac{1}{2}t^2} - 1 \Rightarrow y(t) = \underbrace{d}_{\in\mathbb{R}^+} e^{\frac{1}{2}t^2} - 1 \qquad \text{Anfangsbedingungen: } y(0) = 1 = d - 1 \Rightarrow d =$$

2)

$$
\begin{aligned}
&y' = e^{-y} \qquad , \; y(2) = 0 \\
&\int \frac{1}{e^{-y}} dy = \int 1dt + C \qquad , \; C \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \int e^y dy = e^y = t + C \\
&\Rightarrow y(t) = ln(t+C), \quad y(2) = ln(2+C) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow C = -1 \\
&\Rightarrow y(t) = ln(t-1)
\end{aligned}
$$

3)

$$
\begin{aligned}
&y' - y^2 = 1 \qquad , \; y(0) = 1 \\
&y' = y^2 + 1 \Rightarrow \int \frac{1}{1+y^2} dy = \int 1dt + C \qquad , \; C \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow arctan(y) = t + C \Rightarrow y(t) = tan(t+C) \\
&y(0) = tan(C) \overset{!}{=} 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y(t) = tan(t + \frac{\pi}{4})
\end{aligned}
$$

6 Lineare Algebra

6.1 Definitionen

V sei ein Vektorraum (im Folgenden VR), $v_1, \; ..., \; v_m \in V \quad , \; \lambda_i \in \mathbb{R}$.

(1) $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ Linearkombinationen der v_i. (6.1)

(2) $span(v_1, \; ..., \; v_m) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \quad , \; \lambda_i, \; v_i \in \mathbb{R} \right\}$ Spann der v_i.
Gilt $span(v_1, \; ..., \; v_m) = V \Rightarrow \{v_1, \; ..., \; v_m\}$ ist ein Erzeugendensystem. (6.2)

(3) $v_1, \; ..., \; v_m$ linear unabhänig, falls
$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$
0 darf die einzige Lösung sein, sonst linear abhängig. (6.3)

(4) $B = \{b_1, \; ..., \; b_n\} \subset V$ ist Basis von V, falls
(B1) b_i linear unabhängig, $i = 1, \; ..., \; n$
(B2) B ist ein Erzeugendensystem. (6.4)

Es gilt:

(1) $dimV = |b|$ (Mächtigkeit von B)
(2) $dimV = n$ ($\Rightarrow n+1$ Vektoren sind linear abhängig)
(3) $\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ eindeutig darstellbar.
$\Rightarrow B^v = (\lambda_1,\ ...,\ \lambda_n)^T$ (Koordinaten von v bezüglich B)

(6.5)

6.1.1 Beispiel

$$P_2 = \{p(x) = ax^2 + bx + c \quad , a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\}$$
$$B = \{\underbrace{1}_{b_1}, \underbrace{1-x}_{b_2}, \underbrace{x^2-x}_{b_3}\} \qquad Basis?$$

(B_1) : $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(1-x) + \lambda_3(x^2-x) = 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 + \lambda_2}_{=0} + \underbrace{(-\lambda_2 - \lambda_3)}_{=0} x + \underbrace{\lambda_3}_{=0} x^2 = 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow b_i$ sind linear unabhängig

Alternativ: 3 Zahlen für x einsetzen und LGS lösen. (6.6)

(B_2) : $dimP_2 = 3$ (6.7)

6.2.3 Untervektorraum

V sei ein Vektorraum und es gelte $U \subset V$.

Definition 6.2. *Eigenschaften $(V1)$ - $(V4)$, $(S1)$ - $(S4)$ sind als Teilmenge von V erfüllt, aber mit $u,\ v \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ muss auch $u + v \in U$, $\alpha u \in U$ gelten (Abgeschlossenheit bezüglich Vektoraddition und skalarer Multiplikation). (Schneider 2018)*

6.2.3.1 Untervektorraumkriterien

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{UV0}) & 0 \in U \\ (\mathbf{UV1}) & u,\ v \in U \Rightarrow u + v \in U \\ (\mathbf{UV2}) & u \in U,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in U \end{array} \tag{6.14}$$

Es gilt: $U_1,\ U_2$ UVR von V

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{1}) & U_1 \cap U_2 = \{v \in V : v \in U_1 \wedge v \in U_2\} \text{ UVR von V} \\ (\mathbf{2}) & U_1 \cup U_2 = \{v \in V : v \in U_1 \vee v \in U_2\} \text{ kein UVR von V} \end{array} \tag{6.15}$$

6.2.3.2 Triviale UVR von V

$$U = \{0\}$$
$$U = V$$

6.2.3.3 Beispiele

1)

$$U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}\}\text{,, UVR von } V = R^2?$$
$$U \text{ ist Ursprungsgreade}$$
$$(UV0) : \checkmark da \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U (\text{setze t} = 0)$$
$$(UV1) : \checkmark da\ u,\ v \in U \Rightarrow \exists t_1,\ t2 \in \mathbb{R}$$
$$u = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow u + v = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{t_1 + t_2}_{r \in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in U$$
$$(UV2) : \checkmark dau \in U \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \quad u = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \lambda u = \underbrace{\lambda t}_{\tilde{r} \in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in U$$
$$\Rightarrow u \text{ ist } UVR$$

2)

$$U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}\},\ UVR \text{ von } \mathbb{R}?$$

$$(UV0) : \lightning,\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow 0 = 1 \quad \lightning$$

3)

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} UVR \text{ vom } \mathbb{R}^2?$$

$$(UV0) : \checkmark (0, 0) \in U,\ da\ 0 = 0^2$$

$$(UV2) : \lightning\ (2, 4) \in U\ da\ 4 = 2^2$$

$$\lambda \in \mathbb{R} = 3 \Rightarrow 3(2, 4) = (6, 12) \notin U\ da\ 12 \neq 6^2 \Rightarrow kein\ UVR$$

4)

$$U_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}\},\quad U_2 = \{x \in \mathbb{R} : x = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}\}$$

$$U_1,\ U_2\ UVR\ von\ \mathbb{R}^2$$

a) $U_1 \cap U_2 = \{(0, 0)\}\ UVR\ von \mathbb{R}^2$

b) $U_1 \cup U_2 = \{x = r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vee x = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ r,\ s \in \mathbb{R}\}$

$$(UV0) : \checkmark r = 0 \wedge s = 0$$

$$(UV2) : \checkmark$$

$$(UV1) : \lightning\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u + v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_1 \cup U_2$$

5)

$$V = \{f : f : [-1, 1] \to \mathbb{R}\}$$

$$U = \{\underbrace{f}_{\text{wahrscheinlich g}} : [-1, 1] \to \mathbb{R} : f(0) = 0\},\ UVR \text{ von } V?$$

$$(UV0) : \checkmark da\ f(x) = 0 \forall x \in [-1, 1] \in U$$

$$(UV1) : \checkmark f,\ g \in U \Rightarrow f(0) = 0 \wedge g(0) = 0$$

$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow f + g \in U$$

$$(UV2) : \checkmark f \in U,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0) = 0 = (\lambda f)(0)$$

$$= \lambda f(0) = \lambda 0 = 0 = rf \in U$$

kontrollieren, irgendwie komisch