

HM3 Kurzzusammenfassung

Florian Leuze

„Was wirklich zählt
ist Intuition.“
(Albert Einstein)

Inhaltsverzeichnis

Versionierung

Datum	Vers.	Kürzel	Änderung
08.12.2018	0.1	FL	Erzeugung Dokument; Erzeugung Inhaltsverzeichnis; Erzeugung Versionierung; Erzeugung Literaturverzeichnis; Einführung, Maß, Integrationstheorie
09.12.2018	0.2	FL	Erzeugung Volumen und Oberflächenrechnung, Transformation und Koordinatensysteme;
11.12.2018	0.3	FL	Erzeugung Oberflächenintegrale, Integralsätze;
12.12.2018	0.4	FL	Erzeugung Begriffe, Laplace Operator;
13.12.2018	1.0	FL	Erzeugung Gewöhnliche DGL n-ter und 1. Ordnung, Picard Iteration, DGL 2. Ordnung, Integraltransformation; Kleinere Korrekturen, kleinere Umstrukturierungen
13.12.2018	1.1	FL	Kleinere Korrekturen
14.12.2018	1.2	FL	Kleinere Korrekturen
14.12.2018	1.3	FL	Kleinere Korrekturen
14.12.2018	1.4	FL	Kleinere Korrekturen
15.12.2018	1.5	FL	Kleinere Korrekturen, insbesondere bei den Definitionen von Normalbereichen
15.12.2018	1.6	FL	Kleinere Korrekturen, insbesondere Laplace-transformation der Ableitung
15.12.2018	1.7	FL	Kleinere Korrekturen, insbesondere Laplaceop. in ell. Koord.

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Einige kurze Erinnerungen und Einführungen die zum Verständnis notwendig sein könnten.

1.1 Notationen

1.1.1 Charakteristische Funktion

Die charakteristische Funktion einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch:

$$x_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \in \mathbb{R}_{\setminus A}^n \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Dabei gilt

$$x_A \cdot x_B = x_{A \cap B} \quad (1.1.2)$$

1.1.2 Kartesisches Produkt

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\} \quad (1.1.3)$$

1.1.3 Infimum/Supremum

Das Infimum einer Menge ist die größte untere Schranke, das Supremum die kleinste obere Schranke. Schreibweise:

$$\inf_{x \in A} A \quad (1.1.4)$$

$$\sup_{x \in B} B \quad (1.1.5)$$

1.1.4 Randpunkt und Rand

Ein Randpunkt a von $A \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ mit

$$B_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \quad (1.1.6)$$

$$B_\varepsilon(a) \cap A^c \neq \emptyset \quad (1.1.7)$$

für alle $\varepsilon > 0$. Der Rand ∂A von A ist die Menge aller Randpunkte.

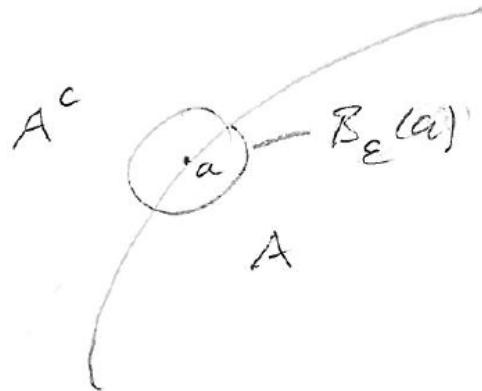


Abbildung 1.1: Randpunkte (?)

1.1.5 Nützliche Hilfssätze

1.1.5.1 Reduktionsformel Sinus

$$\int_a^b \sin^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b \sin^{n-2}(x) dx , \quad a, b \in \frac{\pi}{2} \cdot \mathbb{Z} \quad (1.1.8)$$

Kapitel 2

Integration im R^n

In diesem Kapitel befassen wir uns mit Integrationsproblemen im mehrdimensionalen Raum. Dazu zählen die wichtigsten Integralsätze, deren Anwendungen und Transformationsregeln.

2.1 Maß

Das Ergebnis einer Lebegueschen Integration kann ganz allgemein als n -dimensionales Maß betrachtet werden. Abhängig von der Dimension kann es sich dabei um eine Strecke, Fläche, Volumen oder abstraktere Formen handeln. Um eine Intuition zu vermitteln soll in diesem Abschnitt sehr knapp die Lebeguesche Maßtheorie eingeführt werden.

2.1.1 Motivation

Volumenberechnung, Flächenberechnung, Dichtenberechnung.

2.1.2 d-dimesionales Volumen

Gegeben sei ein Quader $Q \subset \mathbb{R}^d$. Dies lässt sich beschreiben als die Menge

$$Q = \{(x_1, \dots, x_d) \mid a_i \leq x_i \leq b_i \mid i = 1, \dots, d\} \subset \mathbb{R}^d \quad (2.1.1)$$

Dabei gilt $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$ und jedes \leq darf durch $<$ ersetzt werden. Das Volumen dieses Quaders ist nun gegeben durch

$$v_d(Q) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i) \quad \in \mathbb{R} \quad (2.1.2)$$

Wichtig hierbei ist der Unterschied des im Sprachgebrauch bekannten Volumen (bekanntermaßen im R^3) und dem hier verwendeten Volumen, dass dem Maß der jeweiligen Dimension entspricht. Zur Bestimmung des Volumens einer beliebigen Menge pflastert man diese gedanklich mit mehreren der bereits bekannten Quadern und erhält

$$v_d(E) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} v_d(Q_k) \quad (2.1.3)$$

wobei (Q_k) eine beliebige Folge von Quadern $Q_k \subset \mathbb{R}^d$ ist. Dabei muss gelten:

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \quad (2.1.4)$$

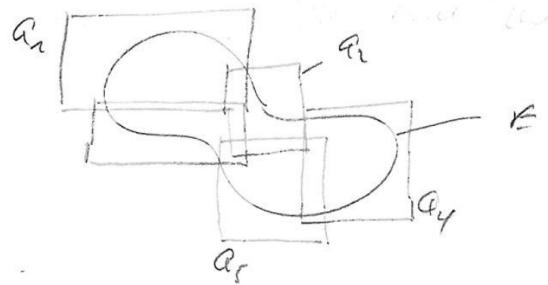


Abbildung 2.1: Rasterung (?)

2.1.3 Elementarfunktionen

Eine Funktion $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ die nur endlich viele Werte $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ annimmt heißt Elementar- oder auch Treppenfunktion. Setzt man

$$A_k := \{x \in \mathbb{R}^d \mid s(x) = x_k\} \quad (2.1.5)$$

dann gilt

s = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_{A_k} \quad (2.1.6)

Satz 2.1.1. Zu jeder Funktion $f \geq 0$ gibt es eine Folge von Elementarfunktionen $s_n, n \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} 0 \leq s_n &\leq s_{n+1} \leq \dots \leq f \\ \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) &= f(x) \end{aligned}$$

Man kürzt ab mit $s_n(x) \nearrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$).

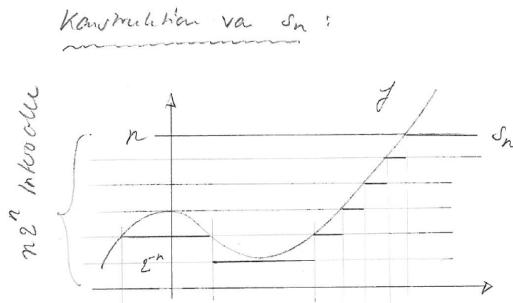


Abbildung 2.2: Treppenfunktion (?)

2.2 Integrationstheorie

2.2.1 Integration einer positiven Funktion $f > 0$

Für $s : R^d \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$s = \sum_{k=1}^n \alpha_k x k \quad \alpha_{A_k} \neq 0 \quad (2.2.1)$$

ist das Integral gegeben durch

$$\int s \, dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_d(A_k) \leq \infty \quad (2.2.2)$$

Der Wert ∞ tritt immer nur dann auf, wenn $v_d(A_k) = \infty$ und $\alpha_k > 0$. Es folgt

$$v(E) = \int x_E dx \quad (2.2.3)$$

Das Integral einer Funktion $f : R^d \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$ ist definiert durch

$$\int f \, dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n \, dx \leq \infty \quad (2.2.4)$$

wobei mit $s_n \leq s_{n+1} \leq \dots$ $s_n \rightarrow f$ (siehe Satz ??)

$$\int_E f \, dx := \int x_E f \, dx \quad (2.2.5)$$

gilt.

Satz 2.2.1. Für jede Funktion $f \geq 0$ gilt

$$v(E) = 0 \Rightarrow \int_E f \, dx = 0 \quad (2.2.6)$$

2.2.2 Monotone Konvergenz

Satz 2.2.2. Satz über monotone Konvergenz

Ist $f \geq 0$ und $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq f$ mit $f_n(x) \rightarrow f(x)$ fast überall, dann gilt

$$\int_E f \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, dx \leq \infty \quad (2.2.7)$$

(wobei fast überall überall bis auf eine Nullmenge meint).

Beispiel 2.2.1.

$$\int_{[1, \infty]} \frac{1}{x} \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x} \, dx$$

2.2.3 Integrierbare Funktionen

Eine Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ heißt integrierbar wenn (analog zur absoluten Konvergenz bei Reihen siehe HM1)

$$\int_E |f| dx < \infty \quad (2.2.8)$$

gilt. Weiterhin ist

$$\int_E f dx := \int_E f_+ dx - \int_E f_- dx \quad \in \mathbb{R} \quad (2.2.9)$$

wobei folgende Zusammenhänge gelten

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \geq 0 \quad (2.2.10)$$

$$f_-(x) = \max\{-f(x), 0\} \geq 0 \quad (2.2.11)$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x) \quad (2.2.12)$$

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x) \quad (2.2.13)$$

und damit gilt auch:

$$\int_E f_\pm dx \leq \int_E |f| dx < \infty \quad (2.2.14)$$

2.2.4 Eigenschaften des Integrals

Seien $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gelten folgende Eigenschaften:

1)

$$\int_E (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_E f dx + \beta \int_E g dx \quad (2.2.15)$$

2)

$$f \leq g \Rightarrow \int_E f dx \leq \int_E g dx \quad (2.2.16)$$

3)

$$\left| \int_E f dx \right| \leq \int_E |f| dx \quad (2.2.17)$$

4)

$$v(E) = 0 \Rightarrow \int_E f dx = 0 \quad (2.2.18)$$

5)

$$v(E_1 \cap E_2) = 0 \Rightarrow \int_{E_1 \cup E_2} f dx = \int_{E_1} f dx + \int_{E_2} f dx \quad (2.2.19)$$

6)

$$f(x) = g(x) \text{ (fast überall)} \Rightarrow \int_E f dx = \int_E g dx \quad (2.2.20)$$

7) Falls $|f_n| \leq |f|$ und $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$) fast überall, dann gilt

$$\int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dx \quad (2.2.21)$$

Satz 2.2.3. *Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz*

Sei $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ fast überall. Falls $g > 0$ existiert mit $\int g dx < \infty$ und $|f_n| \leq g \forall n$, dann ist f integrierbar und

$$\int_E f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dx \quad (2.2.22)$$

2.2.5 Grundlegende Sätze zur Integration

2.2.5.1 Satz von Fubini

Definition 2.2.4. *Lebesgue-integrierbare Funktionen*

Für ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ ist die Menge $L \uparrow(D)$ die Menge derjenigen Funktionen, die fast überall in D Grenzwert einer monoton wachsenden Folge von Treppenfunktionen (φ_k) sind und für die die Folge $(\int_D \varphi_k(\vec{x}) d\vec{x})$ konvergiert. Für $f \in L \uparrow(D)$ ist

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_D \varphi_k(\vec{x}) d\vec{x} \quad (2.2.23)$$

Die Menge $L \uparrow(D)$, definiert durch

$$\begin{aligned} L(I) &= L \uparrow(D) - L \uparrow(D) \\ &= \{f = f_1 - f_2 : f_1, f_2 \in L \uparrow(D)\} \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

heißt die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen über D . Für $f \in L(D)$ ist das Integral definiert durch:

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_D f_1(\vec{x}) d\vec{x} - \int_D f_2(\vec{x}) d\vec{x} \quad (2.2.25)$$

Satz 2.2.5. *Satz von Fubini*

Sind $I \subset \mathbb{R}^q$ und $J \subset \mathbb{R}^p$ (möglicherweise unbeschränkte) Quader sowie $f \in L(Q)$ eine auf dem Quader $Q = I \times J \subset \mathbb{R}^{p+q}$ integrierbare Funktion, so gibt es Funktionen $g \in L(I)$ und $h \in L(J)$ mit

$$g(\vec{x}) = \int_J f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \quad f.f.a. \vec{x} \in I, \quad (2.2.26)$$

$$h(\vec{y}) = \int_I f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} \quad f.f.a. \vec{y} \in J \quad (2.2.27)$$

Wobei mit f.f.a. für fast alle gemeint ist. Ferner ist

$$\begin{aligned} \int_Q f(\vec{x}, \vec{y}) d(\vec{x}, \vec{y}) &= \int_I \int_J f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} d\vec{x} = \int_I g(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \int_J \int_I f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} = \int_J h(\vec{y}) d\vec{y} \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

Bemerkung 2.2.1. Mit dieser Formulierung werden sämtliche Dimensionen abgedeckt. Letztendlich besagt der Satz von Fubini aber, dass sich Gebietsintegrale über Quader immer als iterierte Integrale über einzelne Koordinaten berechnen lassen wobei die Integrationsreihenfolge egal ist.

Satz 2.2.6. Satz von Fubini: Spezialfall Quader

Sei $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ und sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\int_Q f(x, y) d(x, y) = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y) \quad (2.2.29)$$

Satz 2.2.7. Satz von Fubini und Tonelli

Sei $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar oder positiv. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int f(x, y) d(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{E_x} dy f(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} dy \int_{E^y} dx f(x, y) \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

wobei

$$\begin{aligned} E_x &= \{y | (x, y) \in E\} \subset \mathbb{R}^m \\ E^y &= \{x | (x, y) \in E\} \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

2.2.5.2 Integrationsbereiche

Definition 2.2.8. Normalbereiche:

Allgemein: Es existiert ein Intervall I und Funktionen $g_j, h_j : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}; j = 1, \dots, n - 1$ sodass

$$\begin{aligned} D = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n | &x_1 \in I, \\ &g_1(x_1) \leq x_2 \leq h_1(x_1) \\ &g_2(x_1, x_2) \leq x_3 \leq h_2(x_1, x_2) \\ &\dots \\ &g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq h_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \} \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Im \mathbb{R}^2 : $E \subset \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich vom Typ I, wenn die Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und C^0 -Funktionen $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existieren mit

$$E = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\} \quad (2.2.32)$$

Nach Fubini gilt dann:

$$\int_E f d(x, y) = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} dy f(x, y) \quad (2.2.33)$$

Ein Normalbereich vom Typ II hat die Form

$$E = \{(x, y) | c \leq y \leq d, l(y) \leq x \leq r(y)\} \quad (2.2.34)$$

und es gilt :

$$\int_E f \, d(x, y) = \int_c^d dy \int_{l(x)}^{r(x)} dx \, f(x, y) \quad (2.2.35)$$

Anders formuliert:

Normalbereich Typ I

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \quad (2.2.36)$$

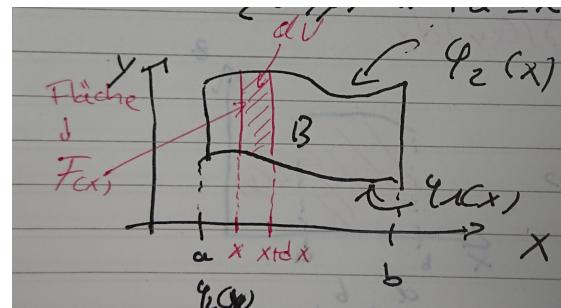


Abbildung 2.3: Normalbereich Typ I

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \\ dV &= F(x) \, dx \\ \Rightarrow V &= \int_a^b F(x) \, dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

Normalbereich Typ II

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \eta_1(y) \leq x \leq \eta_2(y), c \leq y \leq d\} \quad (2.2.38)$$

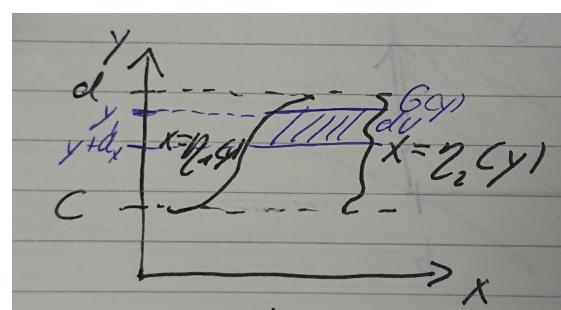


Abbildung 2.4: Normalbereich Typ II

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_{\eta_1(y)}^{\eta_2(y)} f(x, y) \, dx \\ dV &= G(y) \, dy \\ \Rightarrow V &= \int_c^d G(y) \, dy = \int_c^d \int_{\eta_1(y)}^{\eta_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

2.3 Volumen und Oberflächenrechnung

2.3.1 Volumen eines beschränkten Körpers

Das Volumen eines beschränkten Körpers $K \subset \mathbb{R}^n$ erhalten wir als das Gebietsintegral

$$V(K) = \int_K 1 d\vec{x} \quad (2.3.1)$$

falls das obige Integral existiert.

2.3.2 Prinzip von Cavalieri (1598-1647)

Sind 2 Körper und eine Gerade im \mathbb{R}^n gegeben und sind die Inhalte der 2 Schnitte der Körper mit jeder $(n - 1)$ dimensionalen Ebene senkrecht zur Geraden gleich, so haben die Körper auch dasselbe Volumen.

Beispiel 2.3.1. Halbkugel und Zylinder:

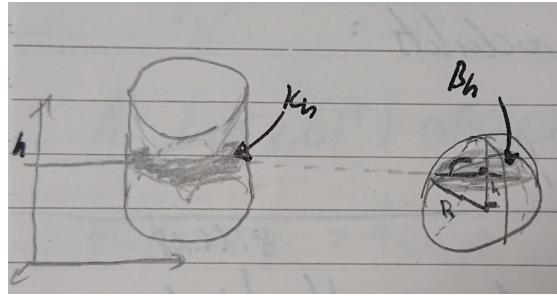


Abbildung 2.5: Cavalieri Beispiel

Das Volumen der Halbkugel stimmt mit dem Zylinder mit heraus geschnittenem Kegel überein, wenn beide Körper denselben Kreis als Grundfläche haben.

Aus Vorlesung der Vollständigkeit halber: Nach Fubini gilt für $E \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} V_{n+m}(E) &= \int_E d(x, y) 1 = \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{E \times \mathbb{R}^m} dy 1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dx v_m(E_x) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Insbesondere im \mathbb{R}^3

$$v_3(E) = \int_{\mathbb{R}} dz v_2(E_z) \quad (2.3.3)$$

Nun zu vorangegangenem Beispiel:

Die Halbkugel sei gegeben durch: Radius = R , Schnittfläche auf Höhe h = B_h . Dann gilt:

$$v(B_h) = \pi r^2 = \pi(R^2 - h^2) \quad , r^2 = R^2 - h^2$$

Wobei $B_h \in \mathbb{R}^2$ also einen Flächeninhalt darstellt.

Der Zylinder sei gegeben durch: Radius = R , Höhe $h = R$, Schnittfläche auf Höhe $h = K_h$. Dann gilt:

$$v(K_h) = R^2\pi - h^2\pi = \pi(R^2 - h^2) = v(B_h)$$

Also ergibt sich das Volumen im \mathbb{R}^3 nach Cavalieri zu

$$\begin{aligned} v(B) = v(K) &= \underbrace{R^3\pi}_{Vol.Zyl.} - \underbrace{R^2 \frac{1}{3}\pi h}_{Vol.Kegel} \stackrel{h=R}{=} R^3\pi - R^3\pi \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Somit folgt durch Addition zweier identischer Halbkugeln das Volumen einer Kugel mit Radius R , dass mit $\frac{4}{3}\pi R^3$ gegeben ist. Mit dem hier genannten Satz wurden in der Vergangenheit die Volumina vieler einfacher Körper bestimmt.

2.3.3 Ablauf der Volumenintegration

Der allgemeine Ablauf einer Volumenintegration über einen Nicht-Normalbereich soll im folgenden anhand eines Beispiels gezeigt werden.

Angaben zum Beispiel

Das Problem lässt sich wie in Abbildung ?? in karthesischen Koordinaten beschreiben.

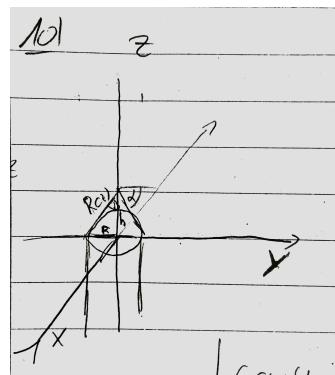


Abbildung 2.6: Volumenintegral Bsp. Bleistift

Ferner ist

$$\alpha = 45^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha = 45^\circ \quad (2.3.4)$$

$$r = 1 \quad (2.3.5)$$

$$h = \frac{r}{\tan \beta} = 1 = R \quad (2.3.6)$$

direkt bekannt oder kann direkt an den Angaben geschlossen werden. Zu bestimmen ist das weggefräste Volumen des in ?? gegebenen Bleistifts.

Schritt 1: Parametrisierung des zu integrierenden Körpers aufstellen

$$\gamma = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (2.3.7)$$

$$\text{mit } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h, \quad 0 \leq r \leq R(z) := R - \frac{R}{h} \cdot z \quad (2.3.8)$$

Schritt 2: Gegebenenfalls Verzerrungsfaktor bestimmen

$$\det J_\gamma(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

Schritt 3: Integral(e) aufstellen

$$\Rightarrow V_{Kegel} = \int_{\gamma} r \, d(\varphi, r, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(z)} \int_0^h r \, d\varphi dr dz$$

$$\Rightarrow V_{Zyl} = \int_{\gamma_z} r \, d(\varphi, r, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r \, d\varphi dr dz$$

Wobei zu beachten ist, dass γ_1 analog zu γ parametrisiert ist. Einzig geändert hat sich die obere Schranke für r wie unschwer an den Integralsgrenzen zu erkennen ist.

Schritt 4: Integral(e) bestimmen

$$\Rightarrow V_{Kegel} = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{R(z)} d\varphi dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^h \left(R - \frac{R}{h} z \right)^2 d\varphi dz$$

$$= \frac{1}{2} R^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} \frac{z^3}{h^2} - \frac{z^2}{h} + z \right]_0^h d\varphi = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{h}{3} - h + h \right) 2\pi = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$\Rightarrow V_{Zyl} = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{1}{2} R^2 d\varphi dz = \pi R^2 h$$

Schritt 4.1: Gegebenenfalls Differenz/Summe bilden

$$\Rightarrow V_{Fräse} = V_{Zyl} - V_{Kegel} = \frac{2}{3} \pi R^2 h \stackrel{R=h=1}{=} \frac{2\pi}{3}$$

2.3.4 Masse und Volumen

Idee: Berechnen der Masse als

$$\sum dV \cdot d\varrho$$

wobei durch ϱ die Dichte des entsprechenden Körpers/Materials gegeben ist. Bildet man nun den Grenzprozess erhält man:

$$m(K) = \int_K \varrho(\vec{x}) d\vec{x} \quad (2.3.9)$$

mit $K \subset \mathbb{R}^3$ und $\varrho : K \rightarrow \mathbb{R}$. Den geometrischen Schwerpunkt erhält man, indem man die Dichte auf 1 setzt. Es ergibt sich folglich

$$\vec{x}_{s,geom} = \frac{1}{A} \int_K \vec{x} dA \quad (2.3.10)$$

Idealerweise bestimmt man den Schwerpunkt koordinatenweise. Im \mathbb{R}^2 also beispielsweise:

$$S = (s_1, s_2)^T \quad (2.3.11)$$

$$s_1 = \frac{1}{A} \int_K x dA \quad (2.3.11)$$

$$s_2 = \frac{1}{A} \int_K y dA \quad (2.3.12)$$

2.3.5 Schwerpunkt

Eine Wichtige Anwendung der bisher betrachteten Integrale einer Dichte über ein Gebiet anderer Größe ist die Bestimmung des Schwerpunktes. Als Schwerpunkt bezeichnet man jenen Punkt, an dem sich bei fester Ladung alle Drehmomente gegenseitig aufheben. Man sagt Schwerpunkt \vec{x}_s eines Körpers K . Bei kontinuierlicher Masseverteilung ergibt sich die Forderung:

$$\int_K (\vec{x} - \vec{x}_s) \varrho(\vec{x}) d\vec{x} = 0 \quad (2.3.13)$$

Damit folgt für die Koordinaten des Schwerpunktes sofort

$$\vec{x}_s = \frac{1}{m(K)} \int_K \vec{x} \varrho(\vec{x}) d\vec{x} \quad (2.3.14)$$

2.4 Transformation und Koordinatensysteme

2.4.1 Motivation

Problem: Bisher ist war es uns nur möglich über Quader oder Normalbereiche zu integrieren. Es fehlt eine universelle Möglichkeit.

Idee: 1-dimensionale Substitution $\int_{x(a)}^{x(b)} f(t) dt = \int_a^b f(x(u))x'(u) du$. \Rightarrow Es wird ein Integral über dem Intervall $(x(a), x(b))$ durch ein Integral über dem Intervall (a, b) angenähert.

Ist es möglich ein Gebietsintegral über einem komplizierten Gebiet D durch ein Integral über einem einfachen Gebiet B darzustellen?

Also:

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_B g(\vec{y}) d\vec{y} \quad (2.4.1)$$

Wobei B idealerweise ein Normalbereich sein sollte. Wir brauchen eine Verknüpfung beider Integrale!

$$\Rightarrow \Psi : B \rightarrow D$$

Idee: 1-dimensionale Substitutionsregel nutzt die Ableitung der Funktion. Funktioniert das analog im n-dimensionalen mit der Jacobi-Matrix?

2.4.2 Transformation

Eine Transformation bewirkt einen Wechsel des Koordinatensystems. Wir stellen folgende Bedingungen an die Transformationsabbildung:

- (1) Sie soll bijektiv sein.
- (2) Sie soll stetig differenzierbar sein und für die Funktionaldeterminanten soll

$$\det \Psi'(\vec{x}) < 0 \text{ oder } \det \Psi'(\vec{x}) > 0 \quad (2.4.2)$$

f.f.a. $\vec{x} \in B$ gelten. (1) Stellt dabei sicher, dass das komplette Volumen von B berücksichtigt wird und das keine Bereiche doppelt gezählt werden. (2) vermeidet Widersprüche durch konstruierte Funktionen die z.B. bei einer Transformation zu einer Nullmenge führen würden.

Bemerkung 2.4.1. Die Funktionaldeterminante ist gegeben durch

$$\Psi' := |J(f(\vec{x}))| \quad (2.4.3)$$

Für B, D und $\Psi : B \rightarrow D$ sollen die eben formulierten Voraussetzungen gelten. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann über D integrierbar, wenn $f(\Psi(\cdot))|\det \Psi'|$ über B integrierbar ist und es gilt

$$\int_D f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_B f(\Psi(\vec{y})) |\det \Psi'(\vec{y})| \, d\vec{y} = \int_B f(\vec{u}) |\det J_{\vec{x}}(\vec{u})| \, dB \quad (2.4.4)$$

2.4.2.1 Ablauf der Koordinatentransformation

Der allgemeine Ablauf einer Koordinatentransformation soll hier anhand einer Oberflächeninteration gezeigt werden.

Angaben zum Beispiel

Zu bestimmen ist der Flächeninhalt des folgenden Graphen:

$$f_1 : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy \quad (2.4.5)$$

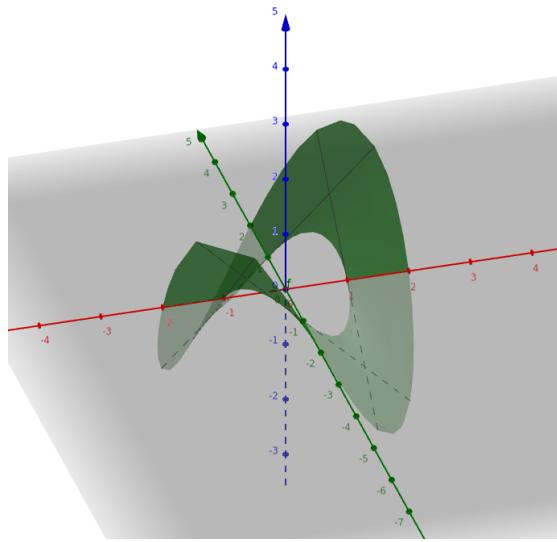


Abbildung 2.7: Zu untersuchendes Gebiet

Schritt 1: Vektorfeld aus den Angaben schließen

$$v\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix} \quad (2.4.6)$$

Schritt 2: Allgemeines Oberflächenintegral aufstellen und vereinfachen

$$\begin{aligned} O_F(f_1) &= \int_F d\sigma = \int_B \left| \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right| \right| d(x, y) \\ &= \int_B \sqrt{y^2 + x^2 + 1} d(x, y) \end{aligned}$$

Schritt 3: Parametrisierung auf die transformiert werden soll aufstellen (hier Polarkoordinaten)

$$\gamma = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}, 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Wobei zu beachten ist, dass γ_1 analog zu γ parametrisiert ist. Einzig geändert hat sich die obere Schranke für r wie unschwer an den Integralsgrenzen zu erkennen ist.

Schritt 4: Verzerrungsfaktor berechnen

$$|\det J_\gamma(r, \varphi)| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

Schritt 5: Transformationsparametrisierung und Verzerrungsfaktor einsetzen

$$\begin{aligned} O_F(f_1) &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{r^2 + 1} r dr d\varphi, \text{ mit } u := 1 + r^2 \Rightarrow du = 2r dr \text{ folgt} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{1+1^2}^{1+2^2} \sqrt{u} du d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_2^5 d\varphi = \frac{\pi}{3} \left(\sqrt{5^3} - \sqrt{2^3} \right) = \frac{2\pi}{3} \left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

2.4.3 Wichtige Koordinatensysteme

2.4.3.1 Polarkoordinaten

Im \mathbb{R}^2 gegeben durch eine Parametrisierung mit (r, φ) , wobei $0 \leq r$ den Abstand eines Punktes vom Ursprung und $\varphi \in (-\pi, \pi)$ den Winkel zwischen der Verbindungsstrecke des Punktes mit dem Ursprung und der positiven $x - 1$ -Achse bezeichnet. Die Parametrisierung ist gegeben durch;

$$\Psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}, (r, \varphi) \in B \quad (2.4.7)$$

mit $0 \leq r$ und $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ oder $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

damit ergibt sich

$$J_\Psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.4.8)$$

$$\Rightarrow \Psi'(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \quad (2.4.9)$$

Ist $D \subset \mathbb{R}^2$, $f \in L(D)$ und B die Beschreibung von D durch Polarkoordinaten, so gilt

$$\int_D f(x_1, x_2) d(x_1, x_2) = \int_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) \quad (2.4.10)$$

2.4.3.2 Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten erweitern Polarkoordinaten um eine dritte Dimension. Es wird praktisch einfach eine dritte Koordinate angefügt. Damit ergibt sich für die Parametrisierung

$$\Psi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (2.4.11)$$

mit $(r, \varphi, z) \in B$, $0 \leq r$ und $-\pi \leq \varphi \leq pi$ oder $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Damit ergibt sich

$$J_\Psi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4.12)$$

$$\Rightarrow \Psi'(r, \varphi, z) = r \quad (2.4.13)$$

Ist $D \subset \mathbb{R}^3$, $f \in L(D)$ und B die Beschreibung von D durch Zylinderkoordinaten, so gilt

$$\int_D f(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3) = \int_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d(r, \varphi, z) \quad (2.4.14)$$

2.4.3.3 Kugelkoordinaten

Man überträgt die Idee der Darstellung durch einen Abstand r und Winkel φ wie aus den Polarkoordinaten bekannt auf den \mathbb{R}^3 . Zusätzlich variiert man einen Winkel um die z -Koordinate herum. So ergibt sich die Parametrisierung zu:

$$\Psi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.4.15)$$

mit $0 \leq r, -\pi \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi$

Damit ergibt sich

$$J_\Psi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & 0 & -r \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.4.16)$$

$$\Rightarrow \Psi'(r, \varphi, \vartheta) = -r^2 \sin \vartheta \quad (2.4.17)$$

Ist $D \subset \mathbb{R}^3$, $f \in L(D)$ und B die Beschreibung von D durch Kugelkoordinaten, so gilt

$$\begin{aligned} \int_D f(x_1, x_2, x_3) d(x_1, x_2, x_3) \\ = \int_b f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) \cdot r^2 \sin \vartheta d(r, \varphi, \vartheta) \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

2.5 Oberflächenintegrale

2.5.1 Notation

Definition 2.5.1. Das vektorielle Flächenelement sei gegeben durch:

$$d\vec{\sigma} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} d(u, v) \quad (2.5.1)$$

Definition 2.5.2. Das skalare Flächenelement sei gegeben durch:

$$d\vec{\sigma} = \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\| d(u, v) \quad (2.5.2)$$

2.5.2 Allgemeines Oberflächenintegral

Das Integral

$$F = \int_F d\sigma = \int_B \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\| d(u, v) \quad (2.5.3)$$

heißt Flächeninhalt von F .

Sei F eine durch $\vec{x}(u, v)$ mit $(u, v) \in B$ parametrisierte Fläche, so ergibt sich das Oberflächenintegral der Funktion $G, \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ über F zu

$$I = \int_F G(\vec{x}) d\vec{\sigma} = \int_B G(\vec{x}(u, v)) \underbrace{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\|}_{\text{Fläche Parallelogramm}} d(u, v) \quad (2.5.4)$$

Wobei durch $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u}$ und $\frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$ die Tangentialvektoren des Parallelogramms gegeben sind.

2.5.2.1 Ablauf der Oberflächenintegration

Da im Beispiel zur Koordinatentransformation (siehe ??) ein Oberflächenintegral gelöst wurde und der Ablauf entsprechend analog ist wird hier auf eine weitere Ausführung verzichtet.

2.5.3 Fluss durch eine Fläche

Integriert man ein Vektorfeld über eine Fläche, so erhält man den Fluss des Feldes durch die Fläche.

Zur Beschreibung definiert man für eine infinitesimale Fläche mit Einheitsvektor \vec{n} den Vektor $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\vec{\sigma}$. Ist das Vektorfeld \vec{v} parallel zu $d\vec{\sigma}$ so erhält man den Fluss \vec{v} durch die Fläche gerade durch

$$d\Phi = \|\vec{v}\| d\vec{\sigma} \quad (2.5.5)$$

Im antiparallelen Fall ergibt sich gerade

$$d\Phi = -\|\vec{v}\| d\vec{\sigma} \quad (2.5.6)$$

Ganz allgemein gilt

$$d\Phi = \vec{v} d\vec{\sigma} = \vec{v} \vec{n} d\vec{\sigma} \quad (2.5.7)$$

Setzt man nun die Fläche aus infinitesimalen Flächeneinheiten zusammen erhält man

$$\Phi = \int_F \vec{v} d\vec{\sigma} = \int \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle d\vec{\sigma} = \int_B \vec{v} \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right)}_{=d\vec{\sigma}} d(u, v) \quad (2.5.8)$$

Bemerkung 2.5.1. Oft wird folgende Schreibweise genutzt:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} := \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \quad (2.5.9)$$

Bemerkung 2.5.2. Wichtig ist dass durch die Wahl von \vec{n} folglich auch die Orientierung der Fläche bestimmt wird. Ein Fluss durch eine Fläche lässt sich nur bei orientierten Flächen sinnvoll bestimmen, da sonst nicht klar wäre in welche Richtung der Fluss positiv oder negativ zu werten ist.

2.6 Integralsätze

Integralsätze bilden Zusammenhänge zwischen Kurven-, Oberflächen- und Volumenintegralen.

Analogie 1-d: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im eindimensionalen

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (2.6.1)$$

⇒ Das Integral über eine Funktion f lässt sich bestimmen, wenn man die Werte einer verwandten Funktion F an den Randpunkten kennt. **Übertragung aufs n-d:** Bestimmte Integrale über \vec{v} lassen sich ermitteln, wenn die Werte eines verwandten Vektors \vec{w} am Rand bekannt sind. Der Rand einer Fläche oder eines Volumens ist aber ausgedehnt, also muss auch hier integriert werden.

Bemerkung 2.6.1. Hier kann nun eine alternative Interpretation für den Begriff Integralsatz getroffen werden - Ein Integralsatz ist eine Beziehung, die eine Verbindung zwischen dem Integral über ein Objekt und dessen Rand herstellt.

2.6.1 Kurvenintegrale (Erinnerung HM2)

2.6.1.1 Wegintegral erster Art

Definition 2.6.1. Das Wegintegral erster Art ist definiert durch:

$$\int_c^b \varrho dx = \int_x^b \varrho ds = \int_a^b \varrho(c(t)) \|\dot{c}(t)\| dt \quad (2.6.2)$$

Bemerkung 2.6.2. Aus (??) geht

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

hervor. Damit folgt:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dt}{dt} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{dt} \sqrt{dx^2 + dy^2} dt \\ &= \sqrt{\frac{1}{dt^2} (dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \end{aligned}$$

Überträgt man das bekannte Integral aus dem \mathbb{R}^2 , das mit $\int_a^b f(x) dx$ gegeben ist, und obigen Zusammenhang ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{t=a}^{t=b} f(x, y) ds &= \int_{t=a}^{t=b} f(x, y) \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_{t=a}^{t=b} \underbrace{f(x(t), y(t))}_{\text{Höhe}} \underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}_{ds} dt \end{aligned}$$

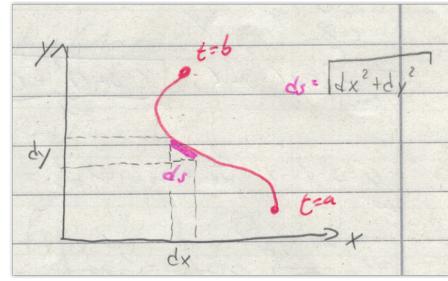
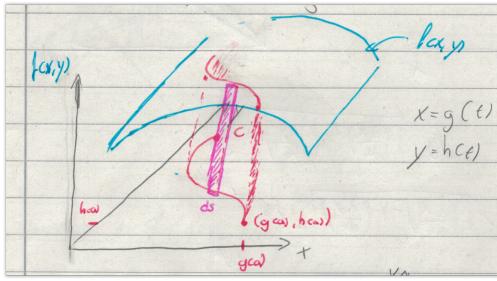


Abbildung 2.8: Graphische Interpretation Abbildung 2.9: Interpretation von (??)

Bemerkung 2.6.3. a) Integrale sind unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

b) Falls c geschlossen ist so schreibt man

$$\oint_c \varrho \, ds \quad (2.6.3)$$

2.6.1.2 Wegintegrale zweiter Art

Definition 2.6.2. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein stetiges Vektorfeld mit $D \subset \mathbb{R}^d$ und sei $c : [a, b] \rightarrow D$ eine stückweise C^1 -Kurve, dann heißt

$$\int_c \langle f(x), dx \rangle = \int_a^b \langle f(c(t)), \dot{c}(t) \rangle dt \quad (2.6.4)$$

das Wegintegral 2-ter Art. Falls c geschlossen ist schreibt man

$$\oint_c \langle f(x), dx \rangle \quad (2.6.5)$$

Bemerkung 2.6.4. Das Wegintegral ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

Bemerkung 2.6.5. Eine Alternative ältere Schreibweise ist

$$\int_c \langle f(X), dX \rangle$$

Achtung, es handelt sich nur um eine Schreibweise. Nicht das Skalarprodukt aus $f(X)$ und dX bilden!

Definition 2.6.3. Ein stetiges Vektorfeld f heißt wirbelfrei, falls die Kurvenintegrale längs aller stückweise stetig diffbaren Kurven verschwinden, d.h.

$$\oint_c \langle f(x), dx \rangle = 0 \quad (2.6.6)$$

gilt.

Als Konsequenz daraus folgt die Wegunabhängigkeit der Kurvenintegrale für den Fall das f wirbelfrei ist. Das heißt, ist f wirbelfrei, so gilt:

$$\int_{c_1} < f(x), dx > = \int_{c_2} < f(x), dx > \quad (2.6.7)$$

für beliebige Wege c_1 und c_2 mit gleichen Anfangs- und Endpunkten.

Definition 2.6.4. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^d$ heißt (weg)-zusammenhängend, falls je zwei Punkte $x, y \in D$ durch eine stückweise C^1 -Kurve in D verbunden werden können.



Abbildung 2.10: Visualisierung zusammenhängend (?)

2.6.1.3 Potential

Definition 2.6.5. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein Vektorfeld auf $D \subset \mathbb{R}^d$. Wir sagen f ist ein gradientenfeld, falls es eine skalare C^1 -Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\nabla \varphi(x) = f(x) \quad (2.6.8)$$

φ heißt das Potential von f .

Satz 2.6.6. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend und f ein stetiges Vektorfeld auf D .

a) Besitzt f ein Potential φ , so gilt für alle stückweisen C^1 -Kurven c , dass

$$\int_c < f(x), dx > = \varphi(c(b)) - \varphi(c(a)) \quad (2.6.9)$$

wobei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$. D.h. das Wegintegral ist damit wegunabhängig und f wirbelfrei.

b) Ist f wirbelfrei, so besitzt f ein Potential φ mit der Darstellung

$$\varphi(x) = \int_{c_x} < f(\tilde{x}), d\tilde{x} > \quad (2.6.10)$$

wobei c_x ein Weg nach x mit fest gewähltem Startpunkt x^* sein soll.

2.6.1.3.1 Berechnung von Potentialen

Die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Existenz eines Potentials ist:

$$\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = 0 \Rightarrow \operatorname{rot}(f) = 0 \Rightarrow \text{Potential ex.} \quad (2.6.11)$$

Definition 2.6.7. Ein Gebiet G heißt *einfach zusammenhängend*, falls jeder geschlossene Weg in G auf einen Punkt im Gebiet zusammen gezogen werden kann.

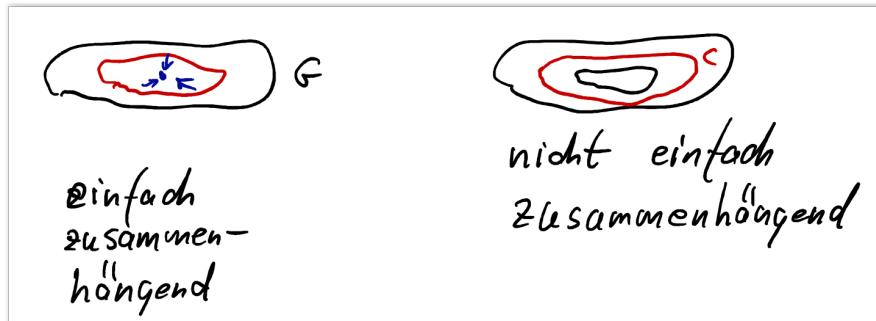


Abbildung 2.11: Visualisierung einfach zusammenhängend (?)

2.6.2 Definitionen

2.6.2.1 2D-Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = \lim_{|A(x,y)| \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{|A(x,y)|} \oint_c \vec{F} \vec{n} \, ds}_{\text{Fluss pro Flächeneinheit}} \quad (2.6.12)$$

2.6.2.2 3D-Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \lim_{R \rightarrow (x,y,z)} \frac{1}{|R|} \int \int_s \vec{F} \vec{n} \, ds \quad (2.6.13)$$

2.6.2.3 2D-Rotation

$$\operatorname{rot}_2 \vec{F}(x, y) = \lim_{A(x,y) \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{|A(x,y)|} \oint_c \vec{F} \, dr}_{\text{durchschnittliche Rotation pro Flächeneinheit}} \quad (2.6.14)$$

2.6.2.4 3D-Rotation

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y) \cdot \hat{e}_x = \lim_{|A(x,y,z), \hat{e}_x \rightarrow 0} \frac{1}{|A(x,y,z), \hat{e}|} \oint_c \vec{F} \, dr \quad (2.6.15)$$

Analog für \hat{e}_y und \hat{e}_z .

2.6.3 Satz von Green

Sei f ein C^1 -Vektorfeld, $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend. $K \subset D$ sei komplett und bezüglich beider Koordinatenrichtungen ein Normalbereich. K werde von einer C^1 -Kurve $c : t \rightarrow c(t)$ berandet. Die Parametrisierung sei so gewählt, dass K links von der Durchlaufrichtung liegt. Dann gilt

$$\oint_c \underbrace{\langle f(\vec{x}), d\vec{x} \rangle}_{\in \mathbb{R}^2} = \int_K \operatorname{rot}_2 f(\vec{x}) d\vec{x} \quad (2.6.16)$$

Und es ist

$$\operatorname{rot}_2 f(\vec{x}) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \quad (2.6.17)$$

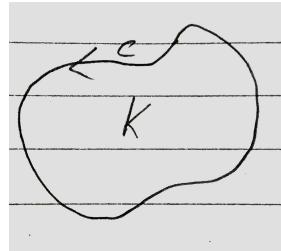


Abbildung 2.12: Durchlaufrichtung

Bemerkung 2.6.6. Ist $K \subset \mathbb{R}^2$ ein regulärer Bereich, dann gilt

$$v(K) = \int_{\partial K} x dy = - \int_{\partial K} y dx \quad (2.6.18)$$

2.6.4 Satz von Gauss

2.6.4.1 Überleitung

Der Fluss über den Rand im \mathbb{R}^2 ist gegeben durch

$$\underbrace{\int_{\partial R} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dr}_{\text{Fluss über den Rand}} = \iint_R \operatorname{div} \vec{F} dA \quad (2.6.19)$$

Der Fluss über den Rand im \mathbb{R}^3 ist gegeben durch

$$\underbrace{\int_{\partial R} \int \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dr}_{\text{Fluss über den Rand}} = \iiint_R \operatorname{div} \vec{F} dV \quad (2.6.20)$$

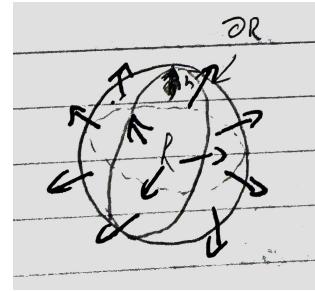
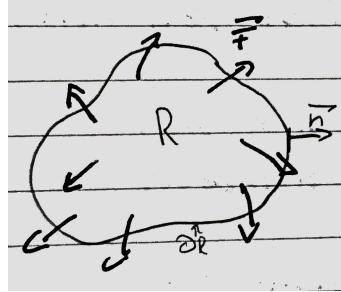


Abbildung 2.13: Fluss über Rand im \mathbb{R}^2 Abbildung 2.14: Fluss über Rand im \mathbb{R}^3

2.6.4.2 Satz von Gauss (Divergenztheorem)

Ist B ein kompakter Teilbereich des \mathbb{R}^3 mit der Oberfläche ∂B , die sich auf stückweise stetige Weise parametrisieren lässt, und ist $\vec{v}(\vec{r})$ ein in ganz B stetig differenzierbares Vektorfeld, so gilt, sofern alle vorkommenden Funktionen über die entsprechenden Bereiche integrierbar sind:

$$\int_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_B \operatorname{div} \vec{v} d\vec{x} \quad (2.6.21)$$

2.6.4.3 Satz von Gauss in der Ebene

Für einen kompakten, einfach zusammenhängenden Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$, dessen positiv durchlaufener Rand durch eine stetig diffbare Abbildung $\vec{x} = \vec{x}(t)$, $t \in [a, b]$ parametrisiert werden kann, gilt sofern alle beteiligten Funktionen über die entsprechenden Bereiche integrierbar sind

$$\int_a^b (v_1(\vec{x}(t)) \frac{dx_2}{dt} - v_2(\vec{x}(t)) \frac{dx_1}{dt}) dt = \int_B \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2) \quad (2.6.22)$$

2.6.4.4 Satz von Gauss im R^2 aus der Vorlesung

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein C^1 -Vektorfeld. Dann gilt für jeden regulären Bereich $B \subset D$.

$$\int_{\partial B} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle ds = \int_B \operatorname{div}(\vec{v}) d(x, y) \quad (2.6.23)$$

wobei $|\vec{n}| = 1$, $\vec{n} \perp \partial B$ aus B hinaus zeigt.

2.6.5 Satz von Stokes

Der Satz von Stokes verknüpft das Kurvenintegral über einen geschlossenen Weg c mit dem Integral der Rotation über eine beliebige von c umrandete Fläche F .

Für eine orientierbare, stückweise glatte Fläche F mit dem stückweise glatten Rand ∂F und ein auf dem Bild dieser Fläche stetig diffbaren Vektorfeld \vec{v} gilt, sofern alle vorkommenden Funktionen über die entsprechenden Bereiche integrierbar sind

$$\oint_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_F \operatorname{rot} \vec{v} d\vec{\sigma} \quad (2.6.24)$$

Dabei ist die Kurve ∂F so parametrisiert, dass sie den nach außen weisenden Normalenvektor $\vec{n} = \frac{d\vec{\sigma}}{d\sigma}$ der Fläche im mathematisch positiven Sinn umläuft.

Bemerkung 2.6.7. Einheitsnormalenfeld: Ein Vektorfeld, dass überall auf der Fläche einen Normalenvektor wirken lässt heißt Einheitsnormalenfeld.

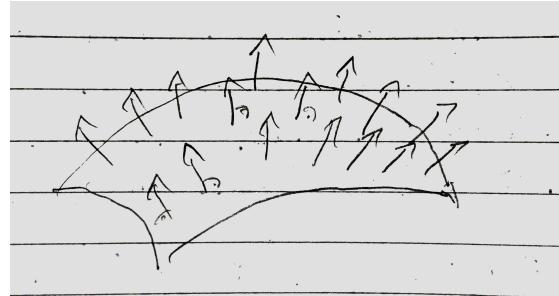


Abbildung 2.15: Einheitsnormalenfeld

2.6.6 Greensche Identität

$$\int_A (f \cdot \Delta g - \Delta f \cdot g) d^3x = \int \partial A \langle f \nabla g - g \nabla f, \vec{n} \rangle d\vec{\sigma} \quad (2.6.25)$$

2.6.7 Weitere Definitionen

2.6.7.1 Regulär

Definition 2.6.8. Eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt stückweise regulär, wenn sie zusammengesetzt ist aus endlich vielen regulären Flächenstücken $s_1 \dots s_n$:

$$S = \sum_{i=1}^n s_i \quad (2.6.26)$$

wobei sich nur die Ränder berühren dürfen. Der Rand ∂S von S besteht dann per Definition aus allen Randstücken ∂s_i die nur zu einem s_i gehören.

Kapitel 3

Differentialgleichungen

3.1 Begriffe

3.1.1 Richtungsfeld

Bemerkung 3.1.1. Darstellung in der an jedem Punkt die Richtung der Tangente gezeichnet wird.

3.1.2 Allgemeine und Partikuläre Lösung

Bemerkung 3.1.2. Eine Lösung einer DGL n -ter Ordnung heißt allgemeine Lösung, wenn sie n frei wählbare Parameter enthält, d.h. $y(x) = y(x, c_1, \dots, c_n)$. Eine allgemeine Lösung heißt vollständige Lösung, wenn Sie alle Lösungen enthält. Bei linearen DGL ist i.A. die allgemeine Lösung vollständig.

3.2 Laplace Operator

3.2.1 Laplace in karthesischen Koordinaten

$$\Delta\varphi = \nabla\nabla\varphi = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_d^2} \quad (3.2.1)$$

3.2.2 Laplace in Polarkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (3.2.2)$$

3.2.3 Laplace in Zylinderkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (3.2.3)$$

3.2.4 Laplace in Kugelkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (3.2.4)$$

3.2.5 Laplace in Elliptischen Koordinaten

$$\Delta = \frac{1}{a^2(\sinh^2(u) \cos^2(v) + \cosh^2(u) \sin^2(v))} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \quad (3.2.5)$$

3.2.6 Laplace Beltrami Operator

Ist $f \in C^2(V)$ dann gilt $\tilde{\Delta}f = \tilde{\Delta}\tilde{f}$ wobei

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= \frac{1}{\sqrt{g(u)}} \sum_{k,l}^n \frac{\partial}{\partial u_k} \sqrt{g(u)} g^{kl} \frac{\partial}{\partial u_l} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g(u)}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial u_k} \sqrt{g(u)} g^{kl} \frac{\partial}{\partial u_l} \right) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Wobei $g(u) = \det G(u)$ ist. g_{kl} sind dabei die einzelnen Komponenten von $G(u)$. g^{kl} sind die Komponenten der Inversen von $G(u)$.

Weiterhin gilt

$$G(u) = J_{\vec{x}}^T \cdot J_{\vec{x}} \quad (3.2.7)$$

Man nennt $G(u)$ die Grahmsche Matrix. \vec{x} ist hierbei die Transformationsabbildung.

3.2.6.1 Ablauf am Beispiel der Polarkoordinaten

Parametrisierung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$

Schritt 1: Jacobi -Matrix bilden und transponieren:

$$J_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\vec{x}}^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Grahmsche Matrix bestimmen

$$G = J_{\vec{x}}^T J_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Schritt 3: Inverse bestimmen

$$G^{-1} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$$

Schritt 4: In Laplace-Beltrami Operator einsetzen

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= \frac{1}{r} \left(\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial r} r \cdot \overbrace{1}^{g^{11}} \frac{\partial}{\partial r} \right)}_{k=1, l=1} + \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial r} r \cdot \overbrace{0}^{g^{12}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)}_{k=1, l=2} + \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} r \cdot \overbrace{0}^{g^{21}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right)}_{k=2, l=1} + \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} r \cdot \overbrace{\frac{1}{r^2}}^{g^{22}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)}_{k=2, l=2} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} r \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$$

3.3 Gewöhnliche DGL n-ter Ordnung

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Die Gleichung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3.3.1)$$

für eine gewöhnliche Funktion $x \rightarrow y(x)$ heißt gewöhnliche DGL n-ter Ordnung. Eine explizite Lösung davon ist eine n-mal differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, wobei I ein Intervall ist für das gilt

$$\begin{aligned} (x, y(x)), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x) &\in G \\ y^{(n)}(x) &= f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \end{aligned}$$

für alle $x \in I$.

Eine Gleichung $U(x, y) = C$ mit einer C^1 -Funktion U heißt implizite Lösung von (??), wenn die Auflösung nach $y, x \rightarrow y(x)$ eine explizite Lösung ist. Eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3.3.2)$$

nennt man eine implizite gewöhnliche DGL.

3.4 Gewöhnliche DGL 1. Ordnung

3.4.1 Allgemeine Form

Eine DGL der Form

$$y' = a(x)y + f(x) \quad (3.4.1)$$

heißt linear. Sind $a, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf I und ist (??) homogen, dann ist mit

$$y(x) = Ce^{A(x)} \quad , C \in \mathbb{R} \quad (3.4.2)$$

mit einer beliebigen Stammfunktion $A : A' = a$ die vollständige allgemeine Lösung gegeben.

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung (??) nutzt man den Ansatz der Variation der Konstanten. Hierbei macht man den Ansatz

$$y(x) = c(x)e^{A(x)} \quad (3.4.3)$$

mit einer gesuchten Funktion $c(x)$. Einsetzen in (??) liefert

$$\begin{aligned} f &= y' - ay = c'e^A + ce^A A' - ace^A = c'e^A \\ &\Rightarrow c' = e^{-A} f \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Also gilt

$$c(x) = c + \int_{x_0}^x e^{-A(t)} f(t) dt \quad (3.4.5)$$

mit $x_0 \in I$ beliebig.

3.4.2 Variation der Konstanten

Beim Ansatz der Variation der Konstanten untersucht man die Struktur der DGL. Erkennt man eine bekannte Struktur gilt es herauszufinden, durch welche Funktion die bekannte Struktur gestört wird. Dies soll am Beispiel der DGL

$$\underbrace{y' + 2xy}_{:=p} = x^e - x^2 \quad , y(1) = e \quad (3.4.6)$$

gezeigt werden.

p ist die Gleichung die entsteht, wenn man bei der bekannten DGL $y' = xe^{-x^2}$ auf der linken Seite $2xy$ addiert. Die Struktur ist also gegeben durch

$$y' = xe^{-x^2} \stackrel{(??)}{=} \left(-\frac{1}{2}e^{-x^2} \right)' = xe^{-x^2} \quad (3.4.7)$$

was mit

$$y = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \quad (3.4.8)$$

leicht zu lösen ist. Für die Lösung der DGL bedeutet das, dass alle Funktionen der Form

$$y(x) = c(x)e^{-x^2} \quad (3.4.9)$$

zu betrachten sind. Wie muss nun also $c(x)$ beschaffen sein, damit $y(x)$ die Lösung von (??) ist?

$$\begin{aligned} y' + 2xy &\stackrel{!}{=} xe^{-x^2} \Leftrightarrow c(x)(-2x)e^{-x^2} + c'(x)e^{-x^2} + 2xc(x)e^{-x^2} = e^{-x^2} \\ &\Leftrightarrow \cancel{-2xe(x)} + c'(x) + \cancel{2xe(x)} = x \\ &\Rightarrow c'(x) = x \Rightarrow c(x) = \frac{1}{2}x^2 + C \quad , C \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + Ce^{-x^2} \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Nun kann wie in allen Ansätzen einfach das AWP gelöst werden.

$$\begin{aligned} y(1) \stackrel{!}{=} e &= \frac{1}{2e} + \frac{C}{e} \Leftrightarrow C = e^2 - \frac{1}{2} \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + \left(e^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2} = e^{-x^2} \left(e^2 + \frac{1}{2}(x^2 - 1)\right) \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

3.4.3 Superpositionsprinzip

Sind y_1, y_2 C^1 -Funktionen mit

$$\begin{aligned} y'_1 - ay_1 &= f_1 \\ y'_2 - ay_2 &= f_2 \end{aligned}$$

dann ist

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2 \quad (3.4.12)$$

eine Lösung von $y' - ay = \alpha f_1 + \beta f_2$. Die allgemeine Lösung von (??) ist also von der Form

$$y(x) = ce^{A(x)} + y_p(x), \quad c \in \mathbb{R} \quad (3.4.13)$$

wobei $ce^{A(x)}$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' - ay = 0$ und y_p eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

3.4.4 Separierbare DGL

Eine gewöhnliche DGL erster Ordnung heißt separierbar, wenn sie von der Form

$$y' = f(x)g(y) \quad (3.4.14)$$

mit stetigen Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ auf Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$ ist. Jede Nullstelle y_0 von g liefert eine spezielle Lösung $y(x) = y_0$. Die übrigen Lösungen erhält man durch folgendes formale Vorgehen.

Schritt 1: Trennung der Variablen

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

Schritt 2: Unbestimmte Integration beider Seiten

$$\underbrace{\int \frac{1}{g(y)} dy}_{:=G(y)} = \underbrace{\int f(x) dx}_{:=F(x)}$$

Schritt 3: Allgemeine implizite Lösung aufstellen

$$G(y) - F(y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Schritt 4: Das eventuell gegebene AWP implizit lösen

AWP: Gegeben durch (??), $y(x_0) = y_0$, $g(y_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} ds = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

3.4.5 Autonome DGL

Eine DGL der Form

$$y' = g(y) \quad (3.4.15)$$

heißt autonom oder x-frei. Sie ist separierbar:

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy = x + c \quad (3.4.16)$$

Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y_c(x) = G^{-1}(x + c), c \in \mathbb{R} \quad (3.4.17)$$

3.4.6 Substitution

Substitution eignet sich häufig als Hilfsmittel, um vorher nicht oder schwer lösbarer DGL in separable oder lineare Form zu bringen.

1) Die homogene DGL

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3.4.18)$$

wird durch die Substitution

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}, xu = y(x) \quad (3.4.19)$$

zur separablen DGL

$$u + xu' = f(u) \quad (3.4.20)$$

2) Die DGL

$$y' = f(ax + by + c), a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0 \quad (3.4.21)$$

wird durch die Substitution

$$u = ax + by + c \quad (3.4.22)$$

zur separablen Gleichung

$$u' = a + bf(u) \quad (3.4.23)$$

3) Die riccatische DGL

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha, \alpha \neq 0, 1 \quad (3.4.24)$$

wird durch die Substitution

$$u(x) = y^{1-\alpha} \quad (3.4.25)$$

zur linearen Gleichung

$$u' = (1 - \alpha)a(x)u + (1 - \alpha)b(x) \quad (3.4.26)$$

3.4.7 Exakte DGL

Definition 3.4.1. Eine DGL der Form

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0 \quad (3.4.27)$$

mit p und q stetig auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ heißt exakt, wenn die Koeffizientenfunktionen p und q stetig partiell differenzierbar sind und die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial y}p(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}q(x, y) \quad (3.4.28)$$

erfüllen. Man schreibt exakte DGL auch oft in folgender Form:

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0 \quad (3.4.29)$$

Bemerkung 3.4.1. Einfach zusammenhängend:

Ein Gebiet das stetig auf einen Punkt zusammenziehbar ist heißt einfach zusammenhängend. Im \mathbb{R}^2 würde das beispielsweise bedeuten, dass das Gebiet keine Löcher haben darf.

3.4.8 Integrierender Faktor

G sei ein einfache zusammenhängendes Gebiet. Gegeben sei die Form

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0 \quad (3.4.30)$$

wie sie aus Def. ?? bekannt ist und sei in diesem Fall eine nicht exakte DGL. Man kann nun versuchen diese DGL in eine exakte Form zu bringen, indem man sie mit einer auf G stetigen, nirgendwo verschwindenden Funktion μ multipliziert. Dann hat die Gleichung

$$\mu(x, y)p(x, y) + \mu(x, y)q(x, y)y' = 0 \quad (3.4.31)$$

die gleiche Lösungsmenge wie die ursprüngliche Gleichung (??).

Eine solche Funktion μ nennt man integrierenden Faktor (oder eulerschen Multiplikator), wenn die entstandene DGL exakt ist. Die Bedingung für die Exaktheit der neuen Gleichung ist

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu \cdot p = \frac{\partial}{\partial x}\mu \cdot q \quad (3.4.32)$$

Dies ist eine partielle DGL, von der allerdings nur eine Lösung nötig ist.

Aus der Bedingung für den integrierenden Faktor lassen sich direkt Findungsmeethoden für einfache μ herleiten. Für die zwei einfachsten Fälle $\mu(x, y) = \mu(x)$ bzw.

$\mu(x, y) = \mu(y)$ sei dies hier der Kürze halber gezeigt. $\mu = \mu_1(x)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} \mu_1(x) \cdot p &= \mu_1(x) \frac{\partial}{\partial y} p \\
 \frac{\partial}{\partial x} \mu_1(x) q &= \mu_1(x)' q + \mu_1(x) \frac{\partial}{\partial x} q \\
 \Rightarrow \mu_1(x) \frac{\partial}{\partial y} p &\stackrel{!}{=} \mu_1(x)' q + \mu_1(x) \frac{\partial}{\partial x} q \\
 \Rightarrow \mu_1(x) \left(\frac{\partial}{\partial y} p \right) - \frac{\partial}{\partial x} q &= \mu_1(x)' q \\
 \Rightarrow \frac{\mu_1(x)}{\mu_1(x)'} &= \frac{q}{\frac{\partial}{\partial y} p - \frac{\partial}{\partial x} q} \Leftrightarrow \frac{\mu_1(x)'}{\mu_1(x)} = \frac{\frac{\partial}{\partial y} p - \frac{\partial}{\partial x} q}{q} \tag{3.4.33}
 \end{aligned}$$

$\mu = \mu_2(y)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} \mu_2(y) \cdot p &= \mu_2(y) \frac{\partial}{\partial y} p \\
 \frac{\partial}{\partial x} \mu_2(y) q &= \mu_2(y)' q + \mu_2(y) \frac{\partial}{\partial x} q \\
 \Rightarrow \mu_2(y) \frac{\partial}{\partial y} p &\stackrel{!}{=} \mu_2(y)' q + \mu_2(y) \frac{\partial}{\partial x} q \\
 \Rightarrow \mu_2(y) \left(\frac{\partial}{\partial y} p \right) - \frac{\partial}{\partial x} q &= \mu_2(y)' q \\
 \Rightarrow \frac{\mu_2(y)}{\mu_2(y)'} &= \frac{p}{\frac{\partial}{\partial x} q - \frac{\partial}{\partial y} p} \Leftrightarrow \frac{\mu_2(y)'}{\mu_2(y)} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} q - \frac{\partial}{\partial y} p}{p} \tag{3.4.34}
 \end{aligned}$$

Die so erarbeiteten Bedingungen (??) und (??) lassen sich leicht als separable DGL lösen.

μ :

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{\mu(a)'}{\mu(a)} &\Rightarrow \int \frac{\mu(a)'}{\mu(a)} = \int \dots da \\
 \text{Substitution } \mu = \mu(a) \Rightarrow d\mu &= \mu(a) da \\
 \Rightarrow \int \frac{1}{\mu} d\mu &= \int \dots da \tag{3.4.35}
 \end{aligned}$$

Wobei für a entsprechend x oder y einzusetzen ist.

3.5 Picard Iteration

3.5.1 Lokale Lösung, Fortsetzung und Eindeutigkeit

Eine lokale Lösung von (??) und entsprechenden ABs ist eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ in einem offenen Intervall $x_0 \in I$, das beliebig klein sein kann, z.B.

$$I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

Sind $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{y} : J \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Lösungen des obigen AWP und gilt weiterhin $I \subset J$ und

$$y(x) = \tilde{y}(x) \quad , x \in I \quad (3.5.1)$$

dann nennt man \tilde{y} eine Fortsetzung der Lösung y .

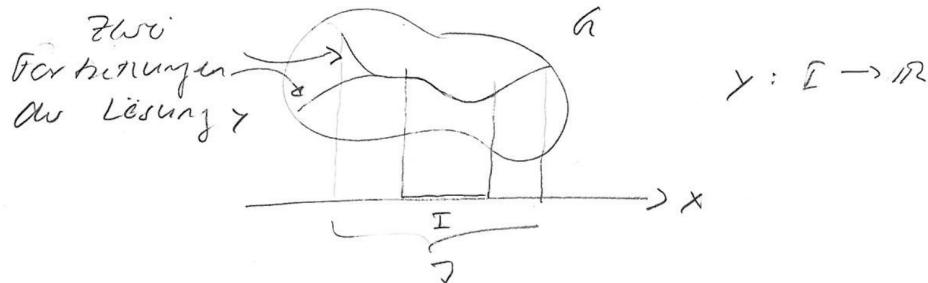


Abbildung 3.1: Fortgesetzte Lösungen von y

Satz 3.5.1. Sind f und $\partial_y f$ stetig auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ und ist $(x_0, y_0) \in G$, dann hat das AWP

$$y' = f(x, y) \quad , y(x_0) = y_0 \quad (3.5.2)$$

genau eine Lösungskurve, die sich für $x < x_0$ und für $x > x_0$ bis zum Rand von G erstreckt.

Dass die Lösung von $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ sich rechts von x_0 bis zum Rand von G erstreckt bedeutet, dass

$$\Gamma^+ = \{(x, y(x)) | x \geq x_0\} \quad (3.5.3)$$

dem Rand ∂G beliebig nahe kommt, oder unbeschränkt ist

3.5.2 Satz von Picard-Lindelöf

Satz 3.5.2. Für $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{C}^n$, $a, b > 0$ setze

$$I = [x_0 - a, x_0 + a] \quad (3.5.4)$$

und

$$Q = \{\vec{z} \in \mathbb{C}^n \mid \max_{j=1, \dots, n} |z_j - <_{j_0}| \leq b\} \quad (3.5.5)$$

Ist die Funktion $F : I \times Q \rightarrow \mathbb{C}^n$ stetig, komponentenweise durch R beschränkt und genügt sie bezüglich ihres 2. Arguments einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante L , so hat das AWP

$$y'(x) = F(x, y(x)) \quad (3.5.6)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (3.5.7)$$

auf dem Intervall $J = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ mit $\alpha = \min\{a, \frac{b}{R}\}$ genau eine stetig differenzierbare Lösung $y : J \rightarrow Q$.

Bemerkung 3.5.1. Da jedes DGL-System als System 1. Ordnung geschrieben werden kann, folgt aus obigem Satz, dass jedes AWP für ein DGL-System zumindest in einer kleineren Umgebung des AWs genau eine Lösung besitzt.

Bemerkung 3.5.2. Genügsamkeit einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante L wie in Satz ?? gefordert bedeutet

$$|F_j(x, \vec{u}) - F_j(x, \vec{v})| \leq L \sum_{k=1}^n |u_k - v_k| \quad (3.5.8)$$

Beispiel 3.5.1. Es sei gegeben

$$y'(x) = \frac{x}{1 - y(x)} \quad \in (-1, 1), \quad y(0) = 0 \quad (3.5.9)$$

und ist eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung die durch Separation einfach lösbar ist.

$$\Rightarrow y'(x) - y'(x)y(x)0x \Leftrightarrow \int y'(x) dx - \int y'(x)y(x) dx = \int x dx$$

mit $y(x) := u \Rightarrow du = y'(x) dx$ folgt

$$\Rightarrow y(x) - \int u du = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow y(x) - \frac{1}{2}y^2(x) = \frac{1}{2}x^2 + C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y^2(x) - 2y(x) = -2\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) \Leftrightarrow 1 - 2y(x) + y^2(x) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$$

$$\Leftrightarrow (y(x) - 1)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) \Rightarrow y(x) = 1 \pm \sqrt{1 - 2\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)}$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{1 - x^2 - 2C} + 1$$

$$\Rightarrow y(0) = \pm\sqrt{1 - 2C} + 1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 1 = 1 - 2C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

Es gilt $I = [-a, a]$ und $Q = [-b, b]$. Weiterhin gilt nach (??) und mit $y'(x) := F(x, y)$

$$F(x, y) = \frac{x}{1 - y} \quad \text{fr } x \in I, y \in Q \quad (3.5.10)$$

Durch die Wahl von a und b wird die Aussage des Satzes beeinflusst (Größe von J). Hier muss $b < 1$ sein (wegen der Definition von F). Da wir die Lösung kennen, macht ein $\alpha \geq 1$ keinen Sinn. Somit ergibt sich

$$|F(x, y)| \leq \frac{a}{1 - b} := R \quad , x \in I, y \in Q \quad (3.5.11)$$

Mit

$$\begin{aligned} |F(x, y) - F(x, z)| &= \left| \frac{x}{1 - y} - \frac{x}{1 - z} \right| = |x| \left| \frac{1 - z - (1 - y)}{(1 - y)(1 - z)} \right| \\ &\leq \frac{a}{(1 - b)^2} |y - z| \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

folgt Lipschitz-Stetigkeit bezüglich y für alle $x \in I$ und alle $y, z \in Q$. α ergibt sich somit zu

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{R}\right\} = \min\left\{a, \frac{b(1 - b)}{a}\right\} \quad (3.5.13)$$

3.5.3 Näherung durch sukzessive Approximation (Picard Iteration)

Die grundlegende Idee ist die Umformulierung des AWP durch eine Integration. Damit ergibt sich

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi \quad (3.5.14)$$

für alle $x \in J$, wobei J das Intervall au dem Satz von Picard-Lindelöf (Satz ??) ist.

Beginnend mit einer konstanten Funktion

$$y_0(x) := y_0 \quad (3.5.15)$$

kann man durch Rekursion

$$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(\xi, y_{k-1}(\xi)) d\xi \quad x \in J, k \in \mathbb{N} \quad (3.5.16)$$

eine Folge von Funktionen definieren, die wir (y_k) nennen. Diese Folge konvergiert gegen die Lösung des AWP, und zwar so, dass für die j-ten Komponenten von y_k und y gilt

$$\max_{j=1 \dots n} \max_{x \in J} |y_{jk}(x) - y_j(x)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (3.5.17)$$

(y_k) heißt auch Folge der sukzessiven Approximation. Die Konvergenzaussage kann durch eine Abschätzung weiter konkretisiert werden.

$$\max_{j=1 \dots n} \max_{x \in J} |y_{jk}(x) - y_j(x)| \leq \frac{(Ln\alpha)^k}{k!} \cdot e^{Ln\alpha} \cdot \max_{j=1 \dots n} \max_{x \in J} |y_{j1}(x) - y_{j0}(x)| \quad (3.5.18)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit den Konstanten L und α aus dem Satz von Picard-Lindelöf (Satz ??). Man nennt diese Ungleichung A-Priori Abschätzung für die Güte der Approximation durch die Lösung der k-ten sukzessiven Approximation. Damit kann die Güte für alle Folgenglieder sofort abgeschätzt werden, solange zumindest y_0 und y_1 bestimmt worden sind.

Beispiel 3.5.2. Gegeben sei

$$u'(x) = x(u(x))^2 \quad , u(0) = \frac{1}{2} \quad (3.5.19)$$

Die DGL lässt sich zunächst leicht über einen Separationsansatz lösen.

$$\begin{aligned} \frac{u'(x)}{u(x)^2} = x &\Leftrightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)^2} dx = \int x dx \\ \text{mit } u(x) := s &\Rightarrow ds = u' dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{1}{s^2} ds = -\frac{1}{s} = -\frac{1}{u(x)} = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\ &\Rightarrow u(x) = -\frac{2}{x^2 + 2C_1} = -\frac{2}{x^2 + C} \quad , C_1, C \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow u(0) = \frac{1}{2} = -\frac{2}{C} \Rightarrow C = -4 \\ &\Rightarrow u(x) = -\frac{2}{x^2 - 4} = \frac{2}{4 - x^2} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Bestimmung der Konstanten

$$\begin{aligned}\Rightarrow F(x, u) &= xu^2 \quad , x \in [-1, 1], u \in [0, 1] \\ \Rightarrow |F(x, u)| &\leq 1 \\ \Rightarrow |F(x, u) - F(x, v)| &\leq |x(u - v)(u + v)| \leq 2|u - v| \\ \Rightarrow a &= 1, b = \frac{1}{2}, R = 1, L = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Nun lässt sich die AB $u_0 = \frac{1}{2}$ in die Rekursionsvorschrift (??) einsetzen.

$$\begin{aligned}\Rightarrow u_1(x) &= \frac{1}{2} + \int_0^x t \left(\frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{8x^2} \\ \Rightarrow u_2(x) &= \frac{1}{2} + \int_0^x t \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}t^2\right)^2 dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{384}x^6 \\ &\dots\end{aligned}$$

So können weitere Werte berechnet werden. Mit den nun bekannten Größen kann direkt eine Abschätzung durchgeführt werden.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \max x \in J |u_1(x) - u_0(x)| &= \max x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{32} := (*) \\ \Rightarrow \frac{(Lnk)^k}{k!} e^{Lnk} &= \frac{(2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2})^1}{1} e^{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} = e := (**) \\ \Rightarrow (*) \cdot (**) &\approx 0,08494631\end{aligned}$$

\Rightarrow Bei Polynomen als Ergebnis sind die Näherungen oft sehr schnell sehr gut.

3.6 DGL 2. Ordnung

3.6.1 Allgemeines zu DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten lineare DGL

$$Ly := y'' + ay' + by = f(x) \quad (3.6.1)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und Anfangsbedingungen der Form

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0 \quad (3.6.2)$$

Satz 3.6.1. Ist f stetig auf einem Intervall $I \in \mathbb{R}$, dann hat jedes AWP genau eine Lösung die auf ganz I existiert.

Satz 3.6.2. Superpositionsprinzip:

Sind y_1, y_2 C^2 -Funktionen mit

$$\begin{aligned}Ly_1 &= f_1 \\ Ly_2 &= f_2\end{aligned}$$

dann gilt für alle $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ und $y = C_1y_1 + C_2y_2$

$$Ly = C_1f_1 + C_2f_2 \quad (3.6.3)$$

wobei

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1y_1(0) + C_2y_2(0) \\ y'(0) &= C_1y'_1(0) + C_2y'_2(0) \end{aligned}$$

Folgerung: Die Menge \mathcal{L} der Lösungen der homogenen Gleichung

$$Ly = 0 \quad (3.6.4)$$

ist ein Vektorraum über \mathbb{R} . Jede Basis von \mathcal{L} heißt Fundamentalsystem von (??).

Satz 3.6.3. Der Raum \mathcal{L} der Lösungen von (??) ist zweidimensional. Sind $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ linear unabhängig, dann gilt

$$\mathcal{L} = \{C_1x_1 + C_2y_2 \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\} \quad (3.6.5)$$

Bemerkung 3.6.1. Zwei Funktionen heißen linear unabhängig, wenn

$$C_1y_1 + C_2y_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = 0 \quad (3.6.6)$$

Satz 3.6.4. ist $\{y_1, y_2\}$ ein Fundamentalsystem von (??), und y_p eine partikuläre Lösung von (??), dann ist

$$y = y_p + C_1y_1 + C_2y_2 \quad , C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (3.6.7)$$

die vollständige Lösung von (??).

3.6.2 Ansätze (Erinnerung an HM1)

Definition 3.6.5. Lineare skalare Diff.gleichungen mit konst. Koeffizienten sind Gleichungen der bauart:

$$Ly(x) = a_ny^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x)$$

3.6.2.1 Ansätze

a) Homogene Diff.gleichung: Mit λ als einfache NST:

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad (3.6.8)$$

Mit λ als n -fache NST:

$$f(x) = e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{n-1}e^{\lambda x} \quad (3.6.9)$$

Mit $\lambda = \alpha + \beta i$ (komplexe Nullstellen):

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x) \quad (3.6.10)$$

- b) Inhomogenität der Form $f(x) = p_k(x)e^{sx}$ mit $p_k(x)$ als ein Polynom k -ten Grades.

$$y_p(x) = R_k(x)e^{sx}x^q \quad (3.6.11)$$

Mit $R_k(x) = a_kx^k + \dots + a_0$ und q als Vielfachheit der Nullstelle s (ist s keine Nullstelle so ist $q = 0$ und damit $x^q = 1$).

- c) Inhomogenität der Form $\cos(kx)$ oder $\sin(kx)$.

$$yp(x) = (a\cos(kx) + b\sin(kx))x^q \quad (3.6.12)$$

Beispiel Umformung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(4x) \\ \text{Mit } (1) \quad e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi \\ \text{und } (2) \quad e^{-i\varphi} &= \cos\varphi - i\sin\varphi \\ \text{folgt mit } (1) + (2) \quad \text{bzw. } (1) - (2) \\ e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} &= 2\cos\varphi \quad \text{bzw. } e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2\sin\varphi \\ \Rightarrow \cos\varphi &= \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad \Rightarrow \sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}), \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

q im Ansatz gibt die Vielfachheit der NST $i\varphi$ im charakteristischen Polynom des homogenen Teils der Gleichung an.

- d) Inhomogenität der Form $q_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ oder $q_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

$$yp(x) = R_k(x)x^q e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \tilde{R}_k(x)x^q e^{\alpha x} \cos\beta x \quad (3.6.14)$$

3.6.2.2 Vorgehensweise

Schritt 1: Ansatz wählen

Schritt 2: Ansatz einsetzen und charakteristisches Polynom bilden

Beispiel:

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= 0 \\ \stackrel{(??)}{\Rightarrow} (e^{\lambda x})'' + 3(e^{\lambda x})' + 2e^{\lambda x} &= 0 \\ (e^{\lambda x})' &= \lambda e^{\lambda x} \Rightarrow (e^{\lambda x})'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \\ \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Schritt 3.1: Nullstellen des char. Polynoms suchen und in Ansatz einsetzen

Beispiel :

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1$$

Schritt 3.2: Gegebenenfalls komplexe NST in reale umwandeln

Beispiel :

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{-x+ix} + C_2 e^{-x-ix} \\ \Rightarrow y(x) &= \tilde{C}_1 e^{-x} \cos x + \tilde{C}_2 e^{-x} \sin x \quad , \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Schritt 4: Allgemeine Lösung aufstellen

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} \quad , C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3.6.2.2.1 Anfangswertproblem

Falls Anfangswerte vorhanden sind können an dieser Stelle die Konstanten Koeffizienten explizit bestimmt werden.

Beispiel :

$$\begin{aligned} y(0) &= 1, \quad y'(0) = 0 \\ y(t) &= C_1 e^{5t} + C_2 e^{-2t} \\ \Rightarrow y(0) &= C_1 e^{5 \cdot 0} + C_2 e^{-2 \cdot 0} = 1 \\ \Rightarrow C_1 &= 1 - C_2 \\ y'(t) &= 5C_1 e^{5t} - 2C_2 e^{-2t} \Rightarrow y'(0) = 5C_1 - 2C_2 = 0 \\ \Rightarrow y'(0) &= 0 = 5(1 - C_2) - 2C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{5}{7} \\ \Rightarrow C_1 &= 1 - C_2 = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{2}{7} e^{5t} + \frac{5}{7} e^{-2t} \end{aligned}$$

3.6.2.2.2 Inhomogenität

Schritt 1: Ansatz wählen

Schritt 2: Ansatz gegebenenfalls ableiten und in homogenen Teil einsetzen

Schritt 3: Über Koeffizientenvergleich Vorfaktoren bestimmen

Schritt 4: Allgemeine Lösung bilden

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) \quad (3.6.15)$$

Schritt 5: Gegebenenfalls Anfangswertproblem lösen

3.7 Integraltransformation

3.7.1 Allgemein zu transformierbaren Funktionen

Ist eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben, so erhalten wir die transformierte Funktion $\mathcal{A}f$ durch ein Parameterintegral

$$\mathcal{A}f(s) = \int_D k(t, s)f(t)dt \quad \text{für } s \in G \quad (3.7.1)$$

Die neue Funktion ist somit durch f und den Ausdruck $k : G \times D \rightarrow \mathbb{C}$ festgelegt. k ist dabei der Kern des Integraloperators \mathcal{A} .

Eine Integraltransformation ist somit durch ihre Definitionsmenge und ihren Kern definiert.

Beispiel 3.7.1. Laplace:

$$f(t) = 1 \Rightarrow \mathcal{L}f(t) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s} \quad (3.7.2)$$

Bemerkung 3.7.1. Man spricht bei Abbildungen die Funktionen auf Funktionen abbilden von Operatoren.

Bemerkung 3.7.2.

- \mathcal{A} ist ein linearer Operator, d.h. es gilt

$$\mathcal{A}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{A}f + \beta \mathcal{A}g \quad (3.7.3)$$

- Es existiert eine Inverse \mathcal{A}^{-1} zu \mathcal{A}

3.7.1.1 Schema bei Integraltransformationen

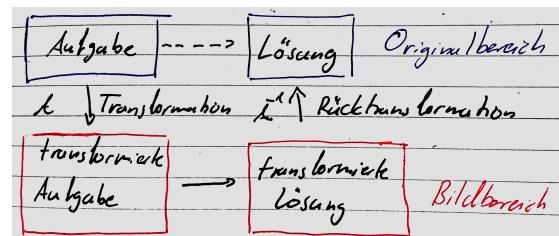


Abbildung 3.2: Schema Transformation

Oft lassen sich DGL im Bildbereich einfacher lösen als im Originalbereich.

Bemerkung 3.7.3. Schreibweise:

Originalbereich		Bildbereich
f	○—●	\mathcal{L}
1	○—●	$\frac{1}{s}$

3.7.2 Laplace Transformation

Satz 3.7.1. Zu einer Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ist auf einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R} \geq 0$ die Laplacetransformierte definiert als die Funktion $\mathcal{L}f : J \rightarrow \mathbb{C}$ durch das Parameterintegral

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad , s \in J \quad (3.7.4)$$

gegeben ist, wenn das Integral für $s \in J$ existiert.

Beispiel 3.7.2.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , t > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}f(s) = \int_0^1 e^{st} dt = -\frac{1}{s}e^{-st} \Big|_0^1 = -\frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$$

Hierzu seien folgende wichtigen Laplacetransformierte genannt (aus VL, also in Prüfung nutzbar):

$f(t)$	$F(s)$	Anmerkungen
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{kt}	$\frac{1}{s - k}$	$s > k \in \mathbb{R}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$

(3.7.5)

Wobei $f(t)$ die Funktion im Originalbereich und $F(s)$ die Laplacetransformierte im Laplace-Raum ist.

Bemerkung 3.7.4. Oft ist es möglich einen Teil der zu transformierenden Funktion in eine Potenz von e umzuformen und so mit der e -Funktion im Laplace Integral zu verrechnen. Durch diese Vereinfachung erhält man ein neues \tilde{s} und kann die Transformation wieder auf bekannte Laplacetransformierte zurückführen.

Beispiel 3.7.3.

$$f_1(t) = t^2 \cos(\omega t) = t^2 \left(\frac{1}{2}e^{-i\omega t} + \frac{1}{2}e^{i\omega t} \right) = \frac{t^2}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f_1)(s) = \int_0^\infty t^2 \cos(\omega t) e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^2 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) e^{-st} dt$$

$$\text{Linearität} \Rightarrow = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\mathcal{L}(t^2 e^{i\omega t})}_{:=q} + \underbrace{\mathcal{L}(t^2 e^{-i\omega t})}_{:=p} \right) = (*)$$

Beide Transformationen können nun einfach einzeln berechnet werden.

$$q = \int_0^\infty t^2 e^{-\overbrace{(-iw+s)}^{:=\tilde{s}_1} t} dt = \int_0^\infty t^2 e^{-\tilde{s}_1 t} dt = \mathcal{L}(t^2)(\tilde{s}_1 - iw)$$

Für t^2 kann jetzt der entsprechende Ansatz aus obiger Tabelle ?? benutzt werden:

$$= \frac{2!}{\tilde{s}_1^{2+1}} = \frac{2}{(s - iw)^3}$$

Analoges Vorgehen für p führt zu

$$p = \frac{2}{(s + i\omega)^3}$$

Und damit

$$\mathcal{L}(t^2 \cos(\omega t))(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{(si\omega)^3} + \frac{2}{(s + i\omega)^3} \right) = \frac{1}{(s - i\omega)^3} + \frac{1}{(s + i\omega)^3}$$

3.7.2.1 Rücktransformation

Vorgehen wie in obigem Beispiel ist oft zielführend. Auch bei der Rücktransformation sollte der erste Ansatz zunächst das Zerlegen sein. Hilfsmittel sind dabei die Differenzierung/Integration (wie in ?? beschrieben) der Transformierten und die Partialbruchzerlegung. Die Nutzung der Rücktransformationsformel sollte aufgrund ihrer Komplexität nur als letztes Mittel genutzt werden. Meist ist es möglich die Laplacetransformierte geschickt zu zerlegen und so bekannte Transformierte zu finden. Auf die Beschreibung der Partialbruchzerlegung wird hier bewusst verzichtet da sich in der Zusammenfassung der HMII eine ausführliche Darstellung der Methode finden lässt.

3.7.2.2 Funktionen exponentiellen Typs

Beispiel 3.7.4. *Funktionen exponentiellen Typs:*

Es gelte die Voraussetzung, dass $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ auf jedem kompakten Intervall $I \subset [0, \infty)$ integrierbar und von exponentiellem Typ ist, d.h. es gibt Konstanten $c > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x)| \leq ce^{ax} \quad f.f.a. x \geq 0 \quad (3.7.6)$$

Dann ergibt sich für Funktionen exponentiellen Typs

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|f(t)|(s) &= \int_0^T |f(t)|e^{-st} dt = \int_0^T ce^{at}e^{-st} dt = c \int_0^T e^{(a-s)t} dt \\ &= c \int_0^T e^{-\overbrace{(s-a)}^{=\tilde{s}} t} dt = c \left(\frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^T \right) = \frac{c}{s-a} (-e^{-(s-a)T} + e^0) \\ &= \frac{c}{s-a} (1 - e^{-(s-a)}) \leq \frac{c}{s-a} \quad \forall s > a \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

Da das Integral unabhängig von T beschränkt ist gilt nach dem Konvergenzkriterium für Integrale (Arens S.538), dass die Laplacetransformierte für $s > a$ existiert und durch

$$\mathcal{L}f(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t)e^{-st} dt \quad (3.7.8)$$

gegeben ist.

Fasst man alle Funktionen zusammen die diesen Bedingungen entsprechen erhält man:

- $\varepsilon = \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} | f \text{ ist integrierbar auf kompakten Intervallen und von exponentiellem Typ}\}$.
- ε ist ein Vektorraum der Funktionen.

Im Folgenden sei $\mathcal{L} : \varepsilon \rightarrow W$.

Satz 3.7.2. Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung σ . Dann gilt

- a) $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ existiert für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re\{s\} > \sigma$ und

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0 \quad (3.7.9)$$

- b) An Stetigkeitsstellen $t \geq 0$ ist $f(t)$ durch F eindeutig bestimmt (und rekonstruierbar).

3.7.2.3 Ähnlichkeitssatz

$$\begin{aligned} g(t) &= f(\lambda t) \\ \mathcal{L}g(s) &= \int_0^\infty f(\lambda t)e^{-st} dt \quad , \tau = \lambda t \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{s}{\lambda}\tau} d\tau = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}f\left(\frac{s}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

3.7.2.4 Dämpfungssatz

Betrachtung von $s - \lambda > a$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(s - \lambda) &= \int_0^\infty f(t)e^{-(s-\lambda)t} dt \\ &= \int_0^\infty (e^{\lambda t} f(t)) e^{-st} dt = \mathcal{L}(e^{\lambda t} f(t))(s) \end{aligned} \quad (3.7.11)$$

3.7.2.5 Verschiebungssatz

Betrachtung von $\lambda > 0$, $f \in \varepsilon$.

$$\begin{aligned} g(t) &= \begin{cases} 0 & , 0 \leq t < \lambda \\ f(t - \lambda) & , t \geq \lambda \end{cases} \\ \mathcal{L}g(s) &= \int_0^\infty f(t - \lambda) e^{-st} dt \quad , \tau = t - \lambda \\ &= \int_0^\infty f(\tau) e^{-s(\tau+\lambda)} d\tau = e^{-s\lambda} \mathcal{L}f(s) \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

Bemerkung 3.7.5. Zu Dämpfung und Verschiebung lassen sich vereinfacht auch folgende Identitäten nutzen:

$$\begin{aligned} e^{at} f(t) &\circlearrowleft F(s - a) \quad a \in \mathbb{R} \\ u(t - a)f(t - a) &\circlearrowleft e^{-as} F(s) \quad a \geq 0 \\ u(t - a) &\circlearrowleft e^{-as} \frac{1}{s} \quad a \geq 0 \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

3.7.2.6 Heaviside Funktion

Die in der obigen Bemerkung ?? verwendete Funktion u heißt Heaviside Funktion. Sie ist definiert durch

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t \geq 0 \end{cases} \quad (3.7.14)$$

3.7.2.7 Linearität

Sind f, g von exponentieller Ordnung und $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g) \quad (3.7.15)$$

3.7.2.8 Skalierung

Sei f stückweise stetig, von exponentieller Ordnung σ und sei $c > 0$. Dann gilt

$$f(c \cdot t) \circlearrowleft \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right) \quad , \frac{s}{c} > \sigma \quad (3.7.16)$$

3.7.2.9 Periodische Funktion

Ist f stückweise stetig und $f(t + p) = f(t)$ für alle $t \geq 0$, dann gilt

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt \quad (3.7.17)$$

3.7.2.10 Laplacetransformierte der Ableitung

Differenziation im Originalbereich:

Ist f eine auf $[0, \infty)$ n -mal stetig diffbare Funktion und sind alle Ableitungen $f^{(j)} \in \varepsilon$ für $j = 0, \dots, n$, dann gilt

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}f(s) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0)s^{n-j-1} \quad (3.7.18)$$

für $s < a$ und $n \in \mathbb{N}$. Dabei ist mit $a > 0$ das gemeinsame Intervall (a, ∞) beschrieben, auf dem die Laplacetransformierte $\mathcal{L}f^{(j)}$, $j = 0, \dots, n$ existieren. Damit ergibt sich für Ableitungen erster und zweiter Ordnung:

- Ist $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ von der Klasse PC^1 und f' von exponentieller Ordnung σ , dann gilt

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0) \quad , s > \sigma \quad (3.7.19)$$

- Ist $f' \in PC^1$ und f'' von exponentieller Ordnung σ , dann gilt

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0) \quad (3.7.20)$$

Beispiel 3.7.5.

$$\begin{aligned} u'(t) - u(t) &= e^t \quad , u(0) = 1 \\ \mathcal{L}(u' - u) &= \mathcal{L}(e^t) \\ \xrightarrow{\text{Linearität}} \mathcal{L}(u') - \mathcal{L}u &= \int_0^\infty e^t e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{t(1-s)} dt = \frac{1}{1-s} e^{-(s-1)} \Big|_0^\infty \\ \Leftrightarrow -u(0) + s\mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(u) &= \lim_{Z \rightarrow \infty} -\frac{1}{s-1} e^{-(s-1)t} \Big|_0^Z = \frac{1}{s-1} \\ \Leftrightarrow s\mathcal{L}(u) - \mathcal{L}(u) - \underbrace{u(0)}_{=1} &= \frac{1}{s-1} \\ \Leftrightarrow s\mathcal{L}(s-1) &= \frac{1}{s-1} + 1 \Rightarrow \mathcal{L}(u) = \frac{s}{(s-1)^2} = \underbrace{\frac{1}{s-1}}_{\text{Bekannte Funktionen}} + \underbrace{\frac{1}{(s-1)^2}}_{\text{Bekannte Funktionen}} \\ \Rightarrow \mathcal{L} &= \mathcal{L}(e^t) + \mathcal{L}(te^t) \Leftrightarrow u(t) = e^t + te^t \end{aligned}$$

3.7.2.11 Laplacetransformierte des Integrals

Ist f stückweise stetig und $F = \mathcal{L}(f)$, dann gilt

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{F(s)}{s} \quad (3.7.21)$$

3.7.2.12 Eindeutigkeit der Laplace-Transformation

Sind $f, g \in \varepsilon$ mit $\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}g(s)$ für $s > a$. Dann ist $f(t) = g(t)$ für fast alle $t \geq 0$.
 \Rightarrow Der Operator \mathcal{L} ist auf der Menge ε injektiv.

3.7.2.13 Ableitung und Integration der Bildfunktion

Ist $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig, von exponentieller Ordnung σ und $F = \mathcal{L}(f)$, dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(tf) &= -F' & s > \sigma \\ \mathcal{L}(t^n f) &= (-1)^n F^{(n)} & s > \sigma\end{aligned}\quad (3.7.22)$$

Ist zusätzlich $\frac{1}{t}f(t)$ von exponentieller Ordnung σ , dann

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{t}f\right)(s) = \int_s^\infty F(u) du \quad (3.7.23)$$

3.7.2.14 Anfangs und Endwertsatz

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung σ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}f(0+) &:= \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \\ f(\infty) &:= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)\end{aligned}\quad (3.7.24)$$

falls $f(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existiert. Die Grenzwerte $\lim_{t \rightarrow \infty, 0} f(t)$ können direkt aus F bestimmt werden.

3.7.2.15 Faltung

Die Faltung $f * g$ von zwei stückweise stetigen Funktionen $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau \quad (3.7.25)$$

Es gilt gelten folgende Identitäten

$$\begin{aligned}f * g &= g && \text{Kommutativität} \\ f * (g * h) &= (f * g) * h && \text{Assoziativität} \\ f * (g + h) &= f * g + f * h && \text{Distributivität} \\ \mathcal{L}(f * g)(s) &= F(s) G(s) && \text{Faltungssatz}\end{aligned}\quad (3.7.26)$$

3.7.2.16 Anwendung auf ein AWP mit konstanten Koeffizienten

Angaben zum Beispiel

Zu bestimmen ist der Flächeninhalt des folgenden Graphen:

$$AWP : \begin{cases} \ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t) & , a, b \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \quad (3.7.27)$$

Schritt 1: Laplace Transformation beider Seiten

$$(s^2 + as + b)X(s) - sx_0 - v_0 - ax_0 = F(s) \quad (3.7.28)$$

Schritt 2: Auflösen nach $X(s)$

$$X(s) = \frac{F(s)}{s^2 + as + b} + x_0 \frac{s + a}{s^2 + as + b} + v_0 \frac{1}{s^2 + as + b}$$

Schritt 3: Rücktransformation mit Rechenregeln und Tabelle)

$$x = \mathcal{L}^{-1}(X)$$

Alternativ:

Schritt 1: Löse das einfache AWP mit Laplace Transformation

$$\begin{aligned} \ddot{x} + a\dot{x} + bx &= f(t) & , x(0) = \dot{x} = 0 \\ \Rightarrow x_p(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F}{p}\right) \end{aligned}$$

wobei p gegeben ist als das charakteristische Polynom $p(s) = s^2 + as + b$.

Schritt 2: Bestimme die Lösung $x_h(t)$ ohne Laplacetransformation

Zu lösender homogener Teil: $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$

Schritt 3: Die gesuchte Lösung ist gegeben durch

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Kapitel 4

Anhänge

4.1 Nachwort

Dieses Dokument versteht sich einzig als Zusammenfassung des HM3 Stoffes auf Basis der Literatur und der Vorlesungsunterlagen aus der HM3 Vorlesung von Prof. Dr. Marcel Griesemer mit einigen zusätzlichen Beispielen. Der Sinn ist einzig mir selbst und meinen Kommilitonen das studieren der Mathematik zu erleichtern. In diesem Sinne erhebe ich keinerlei Anspruch auf das hier dargestellte Wissen, da es sich in großen Teilen nur um Neuformulierungen aus der Literatur, den Vorlesungen und aus dem Begleitkurs vom Mint Kolleg handelt, in dem Frau Dr. Monika Schulz den Stoff aus der HMI und HMII bereits hervorragend zusammengefasst hat. Sollten sich einige Fehler eingeschlichen haben (was sehr wahrscheinlich ist) würde ich mich freuen, wenn man mich per Email (f.leuze@outlook.de) kontaktieren und entsprechende Fehler mitteilen würde.