HM2 Kurzzusammenfassung

Florian Leuze

Inhaltsverzeichnis

0.1 Versionierung

Datum	Vers.	Kürzel	Änderung
19.04.2018	0.1	FL	Erzeugung Dokument; Erzeugung Inhaltsverzeichnis; Erzeugung Versionierung; Erzeugung 2.1 - 2.7.4
19.04.2018	0.2	FL	Korrekturen 2.6.1 - 2.6.9 u. 2.7.1 - 2.7.2 Titel
20.04.2018	0.2.1	FL	Erzeugung 2.7.1.1 - 2.7.1.4; Korrektur Riemannsche Untersumme; Erzeugung Literaturverzeichnis
23.06.2018	0.2.3	FL	Neustrukturierung; Löschung HM1 Stoff; Erzeugung HM2 Stoff

1 Allgemeines

1.1 Trigonometrie

1.1.1 Winkelfunktionen

$$sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse} \tag{1.1.1}$$

$$cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse} \tag{1.1.2}$$

$$tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \tag{1.1.3}$$

1.1.2 Sinussatz

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2r = \frac{abc}{2F} \tag{1.1.4}$$

1.1.3 Cosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha \tag{1.1.5}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2cacos\beta \tag{1.1.6}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma \tag{1.1.7}$$

1.1.4 Tangenssatz

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} = \frac{cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} \tag{1.1.8}$$

Analog für $\frac{a+b}{a-b}$ und $\frac{a+c}{a-c}$.

1.1.5 Umwandlung

$$tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \tag{1.1.9}$$

$$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1 \tag{1.1.10}$$

$$1 + tan^2(\alpha) = \frac{1}{cos^2(\alpha)} = sec^2(\alpha) \tag{1.1.11}$$

$$1 + cot^2(\alpha) = \frac{1}{sin^2(\alpha)} = csc^2(\alpha) \tag{1.1.12}$$

1.1.6 Additionstheoreme

$$sin(x \pm y) = sin(x)cos(y) \pm cos(x)sin(y) \tag{1.1.13}$$
$$cos(x \pm y) = cos(x)cos(y) \mp sin(x)sin(y) \tag{1.1.14}$$
$$\tag{1.1.15}$$
$$tan(x \pm y) = \frac{tan(x) \pm tan(y)}{1 \mp tan(x)tan(y)} = \frac{sin(x \pm y)}{cos(x \pm y)} \tag{1.1.16}$$
$$cot(x \pm y) = \frac{cot(x)cot(y) \mp 1}{cot(y) \pm cot(x)} = \frac{cos(x \pm y)}{sin(x \pm y)} \tag{1.1.17}$$
$$\tag{1.1.18}$$
$$sin(x+y) \cdot sin(x-y) = cos^2(y) - cos^2(x) = sin^2(x) - sin^2(y) \tag{1.1.19}$$
$$cos(x+y) \cdot cos(x-y) = cos^2(y) - sin^2(x) = cos^2(x) - sin^2(y) \tag{1.1.20}$$

1.1.7 Folgerungen aus den Additionstheoremen

$$cos^2(\frac{x}{2}) + sin^2(\frac{x}{2}) = cos(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2}) + sin(\frac{x}{2})sin(\frac{x}{2}) \tag{1.1.21}$$
$$\overset{(1.1.20)}{=} cos(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}) = cos(0) = 1 \tag{1.1.22}$$
$$\tag{1.1.23}$$
$$2sin(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2}) = sin(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2}) + sin(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2}) \tag{1.1.24}$$
$$\overset{(1.1.20)}{=} sin(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = sin(x) \tag{1.1.25}$$
$$\tag{1.1.26}$$
$$sin(2x) = sin(x+x) \overset{(1.1.20)}{=} sin(x)cos(x) + sin(x)cos(x) \tag{1.1.27}$$
$$= 2sin(x)cos(x) \tag{1.1.28}$$

2 Integralberechnung

2.1 Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)dx = F(x) + C = [F(x)] \qquad ,C \in \mathbb{R} \tag{2.1.1}$$

2.2 Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{2.2.1}$$

2.3 Partielle Integration

Entspricht der "Produktregel"der Differentialrechnung.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{2.3.1}$$

Bietet sich zum Beispiel bei Produkten aus x-Potenz mit e-Funktionen, log, sin oder cos an.

2.4 Integration durch Substitution

Entspricht der "Kettenregel"der Differentialrechnung.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy \qquad (setze \quad y = g(x) \tag{2.4.1}$$

2.4.1 Spezialfall

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln(|f(x)|) + C \qquad , C \in \mathbb{R} \tag{2.4.2}$$

2.5 Gerade/Ungerade Funktionen

$$\int_{-a}^a f(x) = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & , f\ gerade \\ 0 & , f\ ungerade \end{cases} \tag{2.5.1}$$

f gerade, falls $f(-x) = f(x)$ $\qquad (z.B.: cos(x), x^2)$
f ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ $\qquad (z.B.: sin(x), x^3)$

2.6 Allgemeines zur Integration

2.6.1 Riemann Integrierbarkeit

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig bzw. monoton
$\Rightarrow$ f ist R-integrierbar.

2.6.1.1 Riemannsches Unterintegral

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \sup\{U_f(Z) : \text{ Z Zerlegung von } [a, b]\} \tag{2.6.1}$$

2.6.1.2 Riemannsches Oberintegral

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx = \inf\{O_f(Z) : \text{ Z Zerlegung von } [a,b]\} \tag{2.6.2}$$

→ f heißt Riemann-integrierbar über $[a,b]$, falls

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx \tag{2.6.3}$$

In diesem Fall heißt der Wert das Riemannn-Integral und wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.

2.6.1.3 Riemannsche Untersumme

$$U_f(Z) = \sum_{j=0}^{n-1} \inf_{\xi\in[x_j,X_{j+1}]} f(\xi)\cdot(x_{j+1}-x_j) \tag{2.6.4}$$

2.6.1.4 Riemannsche Obersumme

$$O_f(Z) = \sum_{j=0}^{n-1} \sup_{\xi\in[x_j,X_{j+1}]} f(\xi)\cdot(x_{j+1}-x_j) \tag{2.6.5}$$

2.6.1.5 Eigenschaften

a) Falls $a < b$ setzen wir:

$$\begin{aligned}\int_b^a f(x)dx &= -\int_a^b f(x)dx\\ \int_a^a f(x)dx &= 0\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

b) f, g seien R-integrierbar, $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \to \lambda f + \mu g$ ist R-integrierbar (Vektorraumeigenschaft).

$$\int_a^b \lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \mu\int_a^b g(x)dx \tag{2.6.7}$$

c) $a < C < b$, f ist R-integrierbar.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^C f(x)dx + \int_C^b f(x)dx \tag{2.6.8}$$

d)

$$\begin{aligned}f(x) \geq 0 &\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0\\ f(x) \geq g(x) &\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

e)

$$\text{Sind } f \text{ und } g \text{ R-integrierbar ist auch } f * g \text{ R-integrierbar.} \tag{2.6.10}$$

f)

$$g(x) \geq C > 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \text{ ist R-integrierbar.} \tag{2.6.11}$$

g)

$$\text{Ist } f \text{ R-integrierbar dann ist auch } |f| \text{ R-integrierbar.} \tag{2.6.12}$$

h)

$$(b-a) \inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} f(x) \tag{2.6.13}$$

2.6.1.6 Kriterien zur Riemann-Integrierbarkeit

a) f monoton $\Rightarrow f$ R-integrierbar.

b) f stetig $\Rightarrow f$ R-integrierbar

Satz 2.1. *„Jede stetige Funktion $f : k \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge k, d.h. für $k < \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und beschränkt, ist dort gleichmäßig stetig und damit R-integrierbar.“(Schneider 2018) Beispiel für k: $k : [a, b]$*

c)

Satz 2.2. *Kriterium: Jede Funktion deren Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge bilden (z.B. abzählbare Mengen) sind R-integrierbar. „Satz: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann R-integrierbar, wenn f beschränkt ist und die Menge der Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge ist. “(Schneider 2018)*

Die Konsequenz daraus lautet, dass jede stetige Funktion mit endlich vielen Sprungstellen R-integrierbar ist. (Vgl. Schneider 2018)

d)

Satz 2.3. *„Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f R-integrierbar genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Partition Z gibt, so dass $O_f(Z)U_f(Z) < \varepsilon$. “(Schneider 2018)*

Anmerkung: „In der Mengenlehre ist eine Partition (auch Zerlegung oder Klasseneinteilung) einer Menge M eine Menge P, deren Elemente nichtleere Teilmengen von M sind, sodass jedes Element von M in genau einem Element von P enthalten ist. Anders gesagt: Eine Partition einer Menge ist eine Zerlegung dieser Menge in nichtleere paarweise disjunkte Teilmengen.“(Wikimedia-Foundation 2018)

2.6.2 MWS der Integralrechnung

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann $\exists\, \xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

2.6.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ diffbar und $F'(x) = f(x)$.

2.6.3.1 Folgerungen

Satz 2.4. *Ist f ungerade, so ist f'' gerade, und alle Stammfunktionen vonm f sind gerade.(vgl. Gauss 2018)*

Satz 2.5. *Ist f gerade, so ist f' ungerade, und f besitzt eine ungerade Stammfunktion.(vgl. Gauss 2018)*

2.7 Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \qquad p, q \text{ Polynome} \tag{2.7.1}$$

Vorgehensweise:

1) Zähler und Nennergrad untersuchen
ist $grad(p) > grad(q)$, also Zählergrad > Nennergrad umformen in
$R(x) = p_1(x) + \frac{p_2(x)}{q(x)} \Rightarrow$ Polynomdivision.

2) Nullstellen und faktorisieren

- Nullstellen des Nenners bestimmen
- Nenner Faktorisieren in $p1, p2, ...$

3) Ansatz

- Ansatz für Partialbruchzerlegung $R(x) = \frac{A}{p1} + \frac{B}{p2} + ...$
- Bestimmung von A, B, C, ...

Bei quadratischen oder höhergradigen Nullstellen lautet der Ansatz:

$$NST = x^n \Rightarrow R(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + ... + \frac{N}{x^n} \tag{2.7.2}$$

Bei komplexen Nullstellen muss der Ansatz angepasst werden.

$$\begin{aligned} &NST : 2, -2, 2i, -2i \\ &Ansatz : R(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

Es werden also die komplexen Nullstellen ausmultipliziert und so reell dargestellt.

2.8 Uneigentliche Integrale

Satz 2.6. *Sei $f : [a, \infty] := I \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Konvergiert $\int_a^\infty f(x)dx$ absolut. d.h. ist $\int_a^\infty |f(x)|dx$ konvergent, so konvergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$.*

Satz 2.7. *Majorantenkriterium: Gilt für alle $x \in I$, dass $|f(x)| \leq g(x)$, und ist $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergent, so ist $\int_a^\infty dx$ (im Script vom Prof ist hier die untere Grenze 0, ich denke es sollte aber a sein) absolut konvergent.*

Satz 2.8. *Minorantenkriterium: Gilt für alle $x \in I$, dass $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und divergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, so divergiert auch $\int_a^\infty dx$.*

2.8.1 Typen uneigentlicher Integrale

$$\begin{aligned} \textbf{Singularität:} \quad & \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ \textbf{Unbeschränktes Gebiet:} \quad & \int_1^\infty e^{-x} dx \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

Definition 2.9. *Eine Singularität ist die Stelle, an der die Funktion divergieren würde oder undefiniert wäre.*

Methode: Ersetzen der kritischen Stelle durch z und setzen eines Grenzüberganges, z.B.:

$$\lim_{z \to 0} \int_z^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \quad \lim_{z \to \infty} \int_1^z e^{-x} dx$$

Vergleichsintegrale

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx &= \begin{cases} \text{konvergiert} & , \alpha > 1 \\ \text{divergiert} & , \alpha \leq 1 \end{cases} \\ \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx &= \begin{cases} \text{divergiert} & , \alpha \geq 1 \\ \text{konvergiert} & , \alpha < 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.8.2}$$

2.9 Wichtige Integrale

$$\int \frac{1}{1+y^2} dx = arctan(y) \tag{2.9.1}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad n \neq -1 \tag{2.9.2}$$

$$\int \frac{1}{cos^2(x)} dx = tan(x) \tag{2.9.3}$$

$$\int \frac{1}{sin^2(x)} dx = cot(x) \tag{2.9.4}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)} \tag{2.9.5}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| \tag{2.9.6}$$

$$\int \frac{1}{cosh^2(x)} dx = tanh(x) \tag{2.9.7}$$

$$\int \frac{1}{sinh^2(x)} dx = -coth(x) \tag{2.9.8}$$

$$\int ln(x) dx = xln(x) - x \tag{2.9.9}$$

$$\int \frac{1}{x - x_1} dx = ln|x - x_1| \tag{2.9.10}$$

$$\int \frac{1}{/x - x_1)^k} dx = \frac{1}{-k+1}(x - x_1)^{-k+1}, \quad k > 1 \tag{2.9.11}$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^2 + b^2} dx = \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{b} arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) \tag{2.9.12}$$

2.10 Separierbare DGL

2.10.1 Wiederholung klassische DGL

Bisher: lineare DGl mit konstanten Koeffizienten.
z.B.: $y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = e^{2t} \quad , y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

Homogene DGL: $y(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$
$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4$
$\Rightarrow yh(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t} \quad , C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$

Inhomogenes DGL: $\underbrace{yp(t) = re^{2t}}_{\text{da 2 keine NST}}$

$$\Rightarrow yp'(t) = 2re^{2t},\ yp''(t) = 4re^{2t}$$
$$\overset{DGL}{=} 4re^{2t} - 10re^{2t} + 4re^{2t} \overset{!}{=} e^{2t} \Rightarrow -2re^{2t} = e^{2t}$$
$$\Rightarrow r = -\frac{1}{2}$$

Allgemeine Lösung: $y(t) = yh(t) + yp(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t} - \frac{1}{2} e^{2t}$

2.10.2 Lösen von DGL mit Koeffizienten die von t abhängig sind

z.B. $y'(t) - ty(t) = t \quad , y(0) = 1$

Spezielle Form:

$$y'(t) = f(t)g(y(t)) \qquad , y(t_0) = y_0 \tag{2.10.1}$$

$$\Rightarrow y'(t) = t + ty(t) = \underbrace{t}_{f(t)} \underbrace{g(y(t))}_{(1+y(t))}$$

Lösung: Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(t) \overset{y' = \frac{dy}{dt}}{\Rightarrow} \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt + C \quad , C \in \mathbb{R} \tag{2.10.2}$$

C erhält man aus der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$.

3 Lineare Algebra

3.1 Definitionen

3.1.1 Linearkombinationen

V sei ein Vektorraum (im Folgenden VR), $v_1, \dots, v_m \in V \quad , \lambda_i \in \mathbb{R}$.

(1) $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ Linearkombinationen der v_i.

(3.1.1)

3.1.2 Spann und Erzeugendensystem

(2) $span(v_1, \dots, v_m) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \quad , \lambda_i, v_i \in \mathbb{R} \right\}$ Spann der v_i.
Gilt $span(v_1, \dots, v_m) = V \Rightarrow \{v_1, \dots, v_m\}$ ist ein Erzeugendensystem.

(3.1.2)

3.1.3 Lineare Unabhängigkeit

(3) $v_1, \dots, v_m$ linear unabhänig, falls
$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$
0 darf die einzige Lösung sein, sonst linear abhängig.

(3.1.3)

3.1.4 Basis

(4) $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ ist Basis von V, falls
(B1) b_i linear unabhängig, $i = 1, \dots, n$
(B2) B ist ein Erzeugendensystem.

(3.1.4)

Es gilt:

(1) $dimV = |b|$ (Mächtigkeit von B)
(2) $dimV = n$ ($\Rightarrow n+1$ Vektoren sind linear abhängig)
(3) $\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ eindeutig darstellbar.
$\Rightarrow B^v = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ (Koordinaten von v bezüglich B)

(3.1.5)

3.1.5 Kanonische Basis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0, \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.1.6}$$

3.2 Vektorräume

3.2.1 Definitionen

3.2.1.1 $\mathbb{R}^d$

$$\mathbb{R}^d : v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ v_d \end{pmatrix}, \; w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_d \end{pmatrix} \tag{3.2.1}$$

3.2.1.2 Vektoraddition

$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ . \\ . \\ . \\ w_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_d + w_d \end{pmatrix} \tag{3.2.2}$$

3.2.1.3 Skalare Multiplikation

$$\alpha \in \mathbb{R}, \; v \in \mathbb{R}^d$$

$$\alpha \cdot v = \begin{pmatrix} \alpha \cdot v_1 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha \cdot v_d \end{pmatrix} \tag{3.2.3}$$

3.2.1.4 Nullvektor

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.4}$$

3.2.2 Struktur

Für $v, \; w, \; z \in \mathbb{R}^d$ gelten die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{lll} \textbf{(V1)} & v + w = w + v & \\ \textbf{(V2)} & v + (w + z) = (v + w) + z & \\ \textbf{(V3)} & v + 0 = 0 + v = v & \text{(0 ist das neutrale Element)} \\ \textbf{(V4)} & v + (-v) = (-v) + v = 0 & \text{(-v ist das inverse Element)} \end{array} \tag{3.2.5}$$

Für $\alpha\ \beta \in \mathbb{R},\ v,\ w \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\begin{array}{ll} \textbf{(S1)} & 1 \cdot v = v \qquad\qquad\qquad (1 \in \mathbb{R}) \\ \textbf{(S2)} & \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \\ \textbf{(S3)} & (\alpha+\beta)v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v \\ \textbf{(S4)} & \alpha(v+w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w \end{array} \tag{3.2.6}$$

$(V1) - (V4)$ und $(S1) - (S4)$ gelten auch für Funktionen.

Definition 3.1. *Ist V eine Menge für deren Elemente eine Addition und eine skalare Multiplikation erklärt ist, so heißt sie Vektorraum, falls die Eigenschaften $(V1)$ - $(V4)$ und $(S1)$ - $(S4)$ erfüllt sind, wobei jetzt $v,\ w,\ z \in V$. Je nach Skalarkörper, also $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sprechen wir von einem reellen oder komplexen Vektorraum. Teilmengen von Vektorräumen, die ebenfalls Vektorräume sind, heißen Untervektorräume. (Schneider 2018)*

3.2.3 Untervektorraum

V sei ein Vektorraum und es gelte $U \subset V$.

Definition 3.2. *Eigenschaften $(V1)$ - $(V4)$, $(S1)$ - $(S4)$ sind als Teilmenge von V erfüllt, aber mit $u,\ v \in U$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ muss auch $u+v \in U$, $\alpha u \in U$ gelten (Abgeschlossenheit bezüglich Vektoraddition und skalarer Multiplikation). (Schneider 2018)*

3.2.3.1 Untervektorraumkriterien

$$\begin{array}{ll} \textbf{(UV0)} & 0 \in U \\ \textbf{(UV1)} & u,\ v \in U \Rightarrow u+v \in U \\ \textbf{(UV2)} & u \in U,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in U \end{array} \tag{3.2.7}$$

Es gilt: $U_1,\ U_2$ UVR von V

$$\begin{array}{ll} \textbf{(1)} & U_1 \cap U_2 = \{v \in V : v \in U_1 \wedge v \in U_2\} \text{ UVR von V} \\ \textbf{(2)} & U_1 \cup U_2 = \{v \in V : v \in U_1 \vee v \in U_2\} \text{ kein UVR von V} \end{array} \tag{3.2.8}$$

3.2.3.2 Triviale UVR von V

$$U = \{0\}$$
$$U = V$$

3.2.3.3 Interessante Untervektorräume

- Die Menge der stetigen Funktionen: $(([a,b]\,,\mathbb{R}))$
- Die Menge der n-mal stetig diffbaren Funktionen $\mathbb{C}^n\left([a,b]\,,\mathbb{R}\right)$
- Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen

3.3 Erzeugendensystem, Basis, Dimension, Kern lineare Unabhängigkeit

3.3.1 Linearkombination, Spann

Definition 3.3. *Für $v_1, ..., v_m \in V$ (Vektorraum) und $\lambda_j \in \mathbb{R}$ heißt ein Vektor der Form*

$$v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_i \tag{3.3.1}$$

eine Linearkombination der Vektoren $v_1, ..., v_m$. Die Menge aller Linearkombinationen heißt der Spann von $v_1, ..., v_m$, d.h.

$$Spann(v_1, ..., v_m) = \{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j : \lambda_j \in \mathbb{R}\} \tag{3.3.2}$$

bzw. der von $v_1, ..., v_m$ aufgespannte Raum. (Schneider 2018)

Beispiel:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = v_1 + v_2 \qquad v_4 = v_2 - v_1$$

$$\Rightarrow Spann\,(v_1, ..., v_4) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

3.3.2 Lineare Unabhängigkeit

Definition 3.4. *Die Vektoren $v_1, ..., vm$ heißen linear unabhängig, falls aus*

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j = \mathcal{O} \in V \tag{3.3.3}$$

bereits

$$\lambda_1 = ... = \lambda_m = 0 \in \mathbb{R} \tag{3.3.4}$$

folgt.

3.3.3 Dimension

Satz 3.5. *Für jede mxn Matrix A gilt die Dimensionsformel:*

$$dim(KernA) + RangA = n \tag{3.3.5}$$

3.3.4 Kern

Satz 3.6. *Die Lösungen von $Ax = 0$ bilden einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$, der sogenannte Kern von A, Schreibweise $KernA$.*

3.3.5 Rang

Definition 3.7. *Die maximale Anzahl linearer Zeilenvektoren der Matrix A heißt der Rang von A.*

3.3.6 Basis

Definition 3.8. *$B = \{v_1, ..., v_M\} \subset V$ heißt eine Basis von V, falls B linear unabhängig und $V = spann\{v_1, ..., v_m\}$ ist.*

Satz 3.9. *„(Basen von endlich-dimensionalen Vektorräumen sind gleich groß). Sei V ein Vektorraum mit Basis $\{v_1, ..., v_m\}$. Dann sind je n Vektoren $w_1, ..., w_n$ aus V mit $n > m$ linear abhängig. "(Schneider 2018)*

3.3.6.1 Folgerungen

Definition 3.10. *„Ist $\{v_1, ..., v_m\}$ eine Basis des Vektorraums V, so lässt sich jeder Vektor $v \in V$ eindeutig als Linearkombination der $\{v_1, ..., v_m$ schreiben, d.h.:*

$$\exists x_k \text{ mit } v = \sum_{k=1}^{m} x_k v_k \tag{3.3.6}$$

"(Schneider 2018)
Mit x_k und v_k als Koordinaten bezüglich dieser Basis.

Definition 3.11. *„Die Anzahl der Elemente einer Basis von V ist unabhängig von der speziellen Wahl der Basis. Die Anzahll der Elemente der Basis heißt die Dimension des Vektorraumes V."(Schneider 2018) Schreibweise:*

$$dim V = m \tag{3.3.7}$$

Definition 3.12. *„Besitzt V eine Basis mit endlich vielen Elementen, so heißt V edlich dimensional, sonst heißt V unendlich dimensional. "(Schneider 2018)*

3.3.6.2 Matrixdarstellung einer linearen Abbildung bezüglich zweier Basen

Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit der Basis $C = c_1, c_2$ mit $c_1 = (1,1)^T$ und $c_2 = (0, -2)^T$, sowie der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Basis B. Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von L bezüglich der Basen B und C.

Matrixdarstellung $m_L^{C,B}$

1. Schritt: Bilde die Basisvektoren von B mit der linearen Abb. L ab:

$$L\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$
$$L\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$
$$L\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

2. Schritt: Stelle die Bildvektoren als LInearkombination der Basiselemente von C dar:

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$$

3. Schritt: Eintragen der Koeffizienten in eine Matrix:

$$m_L^{C,B}=\begin{pmatrix}2&2&1\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\tag{3.3.8}$$

3.4 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix}a_{11}x_1&+&\ldots&+&a_{1n}x_n&=&b_1\\\cdot&&&&\cdot&&\cdot\\\cdot&&&&\cdot&&\cdot\\\cdot&&&&\cdot&&\cdot\\a_{m1}x_1&+&\ldots&+&a_{mn}x_n&=&b_m\end{pmatrix}\rightarrow Ax=b\tag{3.4.1}$$

3.4.1 Zeilenvektoren

Die Koeffizienten der Zeilen nennt man Zeilenvektoren.

$$v_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\a_{1n}\end{pmatrix},\quad\ldots,\quad v_m=\begin{pmatrix}a_{m1}\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\a_{mn}\end{pmatrix}\tag{3.4.2}$$

3.4.2 Gauss Algorithmus

Beim Gauss-Algorithmus werden Linearkombinationen der Zeilenvektoren gebildet. Das LGS hat nach der Anwendung folgende Form:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \tilde{a}_{11}x_1 & + & ... & + & \tilde{a}_{1r}x_r & + & ... & + & \tilde{a}_{1n}x_n & = & \tilde{b}_1 \\ 0 & + & \tilde{a}_{22}x_1 & + & ... & + & \tilde{a}_{2r}x_r & + & ... & = & \tilde{b}_1 \\ & . & & & & & & & & & \\ & . & & & & & & & & & \\ & & . & & & & & & & & \\ & & . & & & & & & & & \\ & & & & \tilde{a}_{rr}x_r & + & ... & + & \tilde{a}_{rn}xn & = & \tilde{b}_r \\ & & & & & & & & 0 & = & \tilde{b}_r + 1 \\ & & & & & & & & 0 & = & \tilde{b}_n \end{array} \tag{3.4.3}$$

Die neuen Zeilenvektoren nach dem Gauss-Algorithmus sind:

$$\tilde{v_1} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} \\ . \\ . \\ . \\ \tilde{a}_{1n} \end{pmatrix}, \quad ..., \quad \tilde{v_m} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{m1} \\ . \\ . \\ . \\ \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.4.4}$$

Da beim Gauss-Algorithmus nur Linearkombinationen verwendet werden bleibt der Spannn erhalten.

3.4.3 Gauss-Algorithmus: Spann

$$span\{v_1, ..., v_m\} = span\{\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_m\} \tag{3.4.5}$$

3.4.4 Gauss-Algorithmus: Dimension, Rang

Weiterhin gilt:

$$dim\{span\{v_1, ..., v_m\}\} = dim\{\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_m\} = r \tag{3.4.6}$$

r heißt Zeilenrang von A bzw. der Rang von A.

3.4.5 Folgerungen

Satz 3.13.
a) *„Die Lösungen von $Ax = 0$ bilden einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$, den sogenannten Kern von A. “(Schneider 2018)*
Schreibweise:

$$Kern(A) = ker(A) = kernel(A) \tag{3.4.7}$$

b)

$$\underbrace{dim\{ker\{A\}\}}_{n-r} + \underbrace{Rang\{A\}}_{r} = n \tag{3.4.8}$$

c) *„Ein LGS $Ax = 0$ mit $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ besitzt nur die Lösung $x = 0$, wenn $Rang\{A\} = n$."(Schneider 2018)*
d) *„Ist $(w_1, ..., w_k)$ eine Basis des Kerns, so lautet die allgemeine Lösung von $Ax = 0$:*

$$x = sum_{j=1}^{k} \alpha_j w_j \qquad , \alpha_j \in \mathbb{R} \qquad (Superpositionsprinzip) \tag{3.4.9}$$

"(Schneider 2018)
e) *„Ist x_s eine spezielle Lösung von $Ax = b$, so lautet die allgemeine Lösung von $Ax = b$:*

$$x = x_s + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w_j \qquad , \qquad , \alpha_j \in \mathbb{R} \tag{3.4.10}$$

Die Lösungsmenge von $Ax = b$ ist ein affiner Raum, d.h. die Differenz von jeweils zwei Elementen bildet einen Vektorraum."(Schneider 2018)

3.5 Lineare Abbildungen und Matrizen

Definition 3.14. *„Es seien V und V Vektorräume. Eine Abbildung $T : V \to W$ heißt linear, falls für alle $u, v \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$*

$$T(v + w) = T(v) + T(w) \tag{3.5.1}$$
$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \tag{3.5.2}$$

gilt."(Schneider 2018)

Wie erhält man die Matrix zu einer linearen Abbildung?
„ Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. $\{v_1, ..., v_n\}$ sei eine Basis von V und $\{w_1, ..., w_n\}$ sei eine Basis von W. Dann lässt sich jeder Vektor $T(v_j)$ in eindeutiger Weise als Linearkombintion der $w_1, ..., w_m$ darstellen, d.h. es gibt $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i. \tag{3.5.3}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ heißt die Matrix der linearen Abbildung T bezüglich der Basen $\{v_1, ..., v_m\}$ und $\{w_1, ..., w_m\}$. "(Schneider 2018)

Satz 3.15. *„ Die Koordinaten von $w = T(v)$ entstehhen aus den Koordinaten von* *v durch Multiplikation mit der Matrix A.*

$$w = T(v)$$
$$mit\ v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j\ und\ w = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i$$

ergibt sich

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3.5.4}$$

bzw. $y = Ax$. *"(Schneider 2018)*

3.5.1 Das Matrizenkalkül

Matrizenmultiplikation tritt bei der Hintereinanderausführung linearer Abbildungen auf.

$$T(v) = Av, \quad S(w) = Bw \rightarrow (SoT)(v) = \underbrace{BA}_{Matrizen} \underbrace{v}_{Vektoren} \tag{3.5.5}$$

Der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von BA sieht wie folgt aus:

$$a_{ij} = \sum_k b_{ik} a_{kj} \tag{3.5.6}$$

Damit Matrizen multipliziert werden könnnen, müssen sie die richtige Größe haben.

$$Mit\ A \in \mathbb{R}^{mxn}\ und\ B \in \mathbb{R}^{nxk} = C \in \mathbb{R}^{mxk} \tag{3.5.7}$$

Matrizenmultiplikation ist im allgemeinen

- nicht kommutativ, d.h. $AB \neq BA$
- nicht nullteilerfrei

3.5.2 Rechenregeln

$$\begin{array}{ll} \textbf{(M1)} & (A+B)C = AC + BC \\ \textbf{(M2)} & A(B+C) = AB + AC \\ \textbf{(M3)} & A(BC) = (AB)C \\ \textbf{(M4)} & A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB) \end{array} \tag{3.5.8}$$

3.5.3 Einheitsmatrix

Die Einheitsmatrix (Identität) Besteht nur aus in der Diagonale Einsen, alle anderen Stellen sind mit Nullen aufgefüllt.

$$I = id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & . & 0 \\ 0 & . & 0 \\ & & .\ 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5.9}$$

Die Einträge an i-ter Zeile und j-ter Spalte sind über das Kronecker-Delta beschrieben.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3.5.10}$$

3.5.4 Inverse Matrix

Es gilt

$$A^{-1} = A \tag{3.5.11}$$

3.5.4.1 Bestimmung der Inversen bei nxn Matrizen

$\Rightarrow$ Gauss Algorithmus angewandt auf $A|I$ bis A zu I umgeformt ist.

3.5.4.2 Inverse bei $2x2$ Matrizen

$$\text{Mit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{3.5.12}$$

3.5.5 Symmetrische Matrizen

Definition 3.16. *Eine reelle nxn Matrix A heißt symmetrisch, falls* $A = A^T$.

3.5.6 Schiefsymmetrische Matrizen

Definition 3.17. *Eine Matrix A heißt schiefsymmetrisch, falls* $A^T = -A$.

Bemerkung 3.1. $detA = 0$, *falls n gerade*

Bemerkung 3.2. $x^T Ax = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$

3.5.7 Hermitesche Matrizen

Definition 3.18. $A^* := \bar{A}^T$
Eine komplexe nxn Matrix A heißt hermitesch, falls $A = \bar{A}^T$.

3.5.8 Transposition

Die Transposition besitzt folgende Eigenschaften

$$\begin{array}{ll} \textbf{(T1)} & (A+B)^T = A^T + B^T \\ \textbf{(T2)} & (\lambda A)^T = \lambda A^T \\ \textbf{(T3)} & (A^T)^T = A \\ \textbf{(T4)} & (AB)^T = B^T A^T \\ \textbf{(T5)} & (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \end{array} \tag{3.5.13}$$

3.6 Determinanten

Satz 3.19. *Determinantenentwicklungssatz:*
$det(AB) = detA \cdot detB$

Bemerkung 3.3. *Aussagen zu Determinante einer Matrix* $A \in \mathbb{R}^{nxn}$

$$det(A) \neq 0 \leftrightarrow Rang(A) = n \leftrightarrow A^{-1} existiert$$
$$det(A) = 0 \leftrightarrow \text{ Zeilen bzw. Spalten linear unabhängig}$$
$$det(A^T) = det(A)$$
$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$
$$det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$$
$$det(A+B) \neq det(A) + det(B)$$
$$detA = \prod_j \lambda_j$$

3.6.1 Bestimmung der Determinanten

3.6.1.1 Determinante einer $2x2$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad detA = ab - cd \tag{3.6.1}$$

3.6.1.2 Determinante einer $3x3$ Matrix

Die Determinante wird über die Sarrussche Regel bestimmt:

$$\det A = \begin{vmatrix} A_{aa} & A_{ab} & A_{ac} \\ A_{ba} & A_{bb} & a_{bc} \\ A_{ca} & A_{cb} & A_{cc} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{aa} & A_{ab} & A_{ac} \\ A_{ba} & A_{bb} & A_{bc} \\ A_{ca} & A_{cb} & A_{cc} \end{vmatrix} \begin{matrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \\ A_{ca} & A_{cb} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det A = & A_{aa}A_{bb}A_{cc} + A_{ab}A_{bc}A_{ca} + A_{ac}A_{ba}A_{cb} \\ & - A_{ca}A_{bb}X_{ac} - A_{cb}A_{bc}A_{aa} - A_{cc}A_{ba}A_{ab} \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

3.6.1.3 Determinante einer Matrix $> 3x3$

Satz 3.20. *Determinantenentwicklungssatz: Für $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ bezeichne A_{ik} die aus A durch Streichung der $i-ten$ Zeile und $k-ten$ Spalte entstehende Matrix. Dann gilt:*

$$detA = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} def A_{ik}$$

wobei i fest gewählt wird.

Es bietet sich hierbei an i so zu wählen, dass möglichst viele Teile der Entwicklung sich durch eine 0 löschen.

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = a_{11} det(A_{11})(-1)^{1+1} + a_{12} det(A_{12})(-1)^{2}1 + 2 + a_{13} det(A_{13})(-1)^{1+3}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-2) - 2(-4) + 2(-2) = 2$$

3.7 Eigenwerttheorie

Definition 3.21. *Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert (EW) der Matrix A, falls es einen Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ gibt mit $Av = \lambda v$ und $v \neq 0$. v heißt ein zum Eigenwert λ gehöriger Eigenvektor (EV). Die Menge aller Eigenvektoren eines Eigenwertes λ zusammen mit 0 heißt der Eigenraum.*

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n | Av = \lambda v\} \tag{3.7.1}$$

Satz 3.22. *$\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein EW von A genau dann, wenn*

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0 \tag{3.7.2}$$

3.7.1 Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren

Schritt 1: (3.7.2) anwenden und NST bestimmen. Es gilt

$$\text{Vielfachheit der NST} = \text{algebraische Vielfachheit}; Schreibweise : \tag{3.7.3}$$

$$a(\lambda_j) = x \in \mathbb{R} \tag{3.7.4}$$

Schritt 2: Eigenvektoren zur Matrix A bestimmen. Es gilt:

$$Av = \lambda_j v \Rightarrow (A - \lambda_j I)v = 0 \tag{3.7.5}$$

Schritt 2.1: Gegebenenfalls geometrische Vielfachheiten ablesen(Anzahl an Nullzeilen), es gilt:

$$\text{geometrische Vielfachheit} := g(\lambda_j) = dim(A_{\lambda_j}) = n - Rang(A - \lambda I) \tag{3.7.6}$$

Bemerkung 3.4. *Die Anzahl an Eigenvektoren pro Eigenwert müssen der geometrischen Vielfachheit entsprechen. Die Eigenvektoren pro Eigenwert müssen linear unabhängig sein.*

3.7.2 Basis des Eigenraumes bestimmen

Die Eigenvektoren bilden eine Basis des Eigenraumes. Es gilt:

$$S_1 = (v_1, v_2, ..., v_j) \tag{3.7.7}$$

Satz 3.23. *Sei $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ eine hermitesche Matrix (siehe* (3.18)*). Dann gilt:*

- *Die Eigenwerte von A sind reell*
- *Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander*

3.7.3 Orthonormalbasis des Eigenraumes bestimmen (Gram Schmidt)

Im Folgenden sei davon ausgegangen, dass die Eigenvektoren nicht orthogonal zueinander stehen. Im Falle bereits orthogonaler Eigenvektoren kann auf die Orthogonalisierung verzichtet werden (nicht jedoch auf die Normierung). Es seien v_1, v_2, v_3 Eigenvektoren von A.

Schritt 1: Ersten Eigenvektor normieren

$$w_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$$

Schritt 2: Zweiten Eigenvektor orthogonalisieren

$$\tilde{w_2} = v_2 - < w_1, v_2 > w_1$$

Schritt 3: Zweiten Eigenvektor normieren

$$w_2 = \frac{\tilde{w_2}}{||\tilde{w_2}||}$$

Schritt 4: Dritten Eigenvektor orthonormieren

$$\begin{gathered} \tilde{w_3} = v_3 - < w_2, v_3 > w_2 - < w_1, v_3 > w_1 \\ w_3 = \frac{\tilde{w_3}}{||\tilde{w_3}||} \end{gathered} \tag{3.7.8}$$

Das Verfahren kann auf beliebig viele Eigenvektoren erweitert werden. Die so erhaltenen Vektoren bilden eine Orthonormalbasis des Eigenraums:

$$S_2 = (w_1, w_2, w_3) \tag{3.7.9}$$

Weiter gilt:

$$S_2 S_2^T = I, \qquad \text{da } S_2 \text{ orthogonal ist} \tag{3.7.10}$$

und

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda 3 \end{pmatrix} = S_2^T A S_2 \tag{3.7.11}$$

und somit

$$A^{-1} = (S_2 D S_2^T)^{-1} = (S_2^{-1})^{-1} D^{-1} S_2^{-1} = S_2 D^{-1} S_2^T \tag{3.7.12}$$

3.8 Differentialgleichungssysteme

Schritt 1: Überführung in Matrixdarstellung

Schritt 2: Eigenwerte und Eigenvektoren bestimme (siehe (3.4)

Schritt 3: Allgemeine Lösung bilden:

$$x(t) = Sy(t) = (v_1, ..., v_n) \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} + ... + C_n e^{\lambda_n t}$$

Schritt 4: Anfangsbedingungen (z.B. $x^* = 0$) einsetzen und bestimmen

$$S := (v_1, ..., v_n)$$
$$x(0) = Sy(x^*) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = x^*$$

3.9 Quadriken bestimmen

3.9.1 Methode

Schritt 1: Diagonalmatrix A, Vektor b und Konstante c ablesen

Beispiel:

$$-1x_1^2 - 1x_2^2 + 1x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 12x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 11 = 0$$
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}, c = 11$$

Im Zuge der Vorlesung gilt immer $A = A^T$.

Schritt 1.1: Als Quadrik aufschreiben

$$q(x) = x^T Ax + b^T x + c$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 11$$

Schritt 2: Diagonalmatrix Λ bestimmen

Dazu nach (3.7.6) Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen, nach (3.7.8) eine Orthonormalmatrix mit den Eigenvektoren erzeugen und schließlich nach (3.7.11) die Diagonalmatrix Λ bilden.

Schritt 3: Vektor $\tilde{b}$ bestimmen sodass gilt $q(Sy) = y^T \Lambda y + \tilde{b}^T y + c$:

$$\begin{aligned} q(Sy) &= (Sy)^T A S y + \tilde{b}^T S y + c = y^T S^T A S y + (S^T \tilde{b})^T y + c \\ &= y^T \Lambda y + \tilde{b}^T y + c \Rightarrow \tilde{b} := S^T b \end{aligned}$$

Schritt 4: In $q(Sy) = y^T \Lambda y + \tilde{b}^T y + c$ einsetzen:

$$\begin{aligned} q(Sy) &= y^T \Lambda y + \tilde{b}^T y + c \\ &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{b_1} \\ \tilde{b_2} \\ \tilde{b_3} \end{pmatrix} + c \end{aligned}$$

Schritt 5: Ausmultiplizieren und quadratisch ergänzen

Schritt 6: Quadrik anhand nachfolgender Tabelle ablesen

3.9.2 Normalformen von Quadriken im $\mathbb{R}^3$

Ellipsoid	:	$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$	(3.9.1)
Einschaliges Hyperboloid	:	$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$	(3.9.2)
Zweischaliges Hyperboloid	:	$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$	(3.9.3)
Elliptisches Paraboloid	:	$x^2 + y^2 - 2z = 0$	(3.9.4)
Hyperbolisches Paraboloid	:	$x^2 - y^2 - 2z = 0$	(3.9.5)

3.10 Äquivalenzaussagen

Satz 3.24. *Für $A \in \mathbb{R}^{dxd}$ sind folgende Aussagen äquivalent*

a) *A ist regulär*

b) *Rang von A ist gleich d*

c) *Die Zeilenvektoren von A sind linear unabhängig*

d) $Ax = 0$ *hat nur* $x = 0$ *als Lösung*

e) $Ax = b$ *ist eindeutig lösbar*

f) *Die Spaltenvektoren sind linear unabhängig*

g) *Die Matrix besitzt eine Inverse* A^{-1}

h) *Die Determinante von A ist ungleich* 0

i) A *besitzt keinen Eigenwert* 0

4 Mehrdimensionale Analysis

4.1 Partielle Ableitung

Definition 4.1. *$f(x)$ heißt in $x^* \in \mathbb{R}^d$ nach der $j-ten$ Koordinate x_j partiell diffbar, falls der Grenzwert*

$$\frac{\partial f}{partial x_j}(x^*) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x^* + te_j) - f(x^*)}{t} \tag{4.1.1}$$

existiert bzw. falls $\tilde{f}_j(x_j)$ in x_j diffbar ist. $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*)$ heißt die partielle Ableitung von f.

Bemerkung 4.1. *Alternative Schreibweisen:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{partial}{\partial x_j} f = \partial_{x_j} f = D_j f = f_{x_j} = ... \tag{4.1.2}$$

Definition 4.2. *Allgemein: n-te partielle Anleitung:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \tag{4.1.3}$$

4.1.1 Gradient und Nabla Operator

Definition 4.3. *Der Zeilenvektor*

$$\operatorname{grad} f(x^*) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*), ..., \frac{\partial f}{\partial x_d}(x^*) \right) \tag{4.1.4}$$

heißt der Gradient von f in x^*. Es gilt weiter:

$$\nabla f(x^*) = (\operatorname{grad} f(x^*))^T \tag{4.1.5}$$

Der eingeführte Operator heißt Nabla-Operator.

Bemerkung 4.2. *Es gilt weiterhin:*

$$\operatorname{grad}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{grad} f + \beta \operatorname{grad} f, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{4.1.6}$$

$$\operatorname{grad}(f \cdot g) = f \cdot \operatorname{grad} g + g \cdot \operatorname{grad} f \tag{4.1.7}$$

4.1.2 Jacobi Matrix

Definition 4.4. *Die Matrix der ersten Ableitung heißt die Jacobi Matrix.*

$$Jf = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_d} \end{pmatrix} \tag{4.1.8}$$

4.2 Richtungsableitung

Definition 4.5. *Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Für $x^* \in \mathbb{R}^d$ und $v \in \mathbb{R}^d_{/\{0\}}$ heißt*

$$D_v f(x^*) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x^* + tv) - f(x^*)}{t} \tag{4.2.1}$$

die Richtungsableitung von f in x^* in Richtung v. (Andere Schreibweise: $\frac{\partial f}{\partial v}$)

Wenn alle Ableitungen existieren gilt:

$$D_v f = \operatorname{grad} f \cdot v \tag{4.2.2}$$

Bemerkung 4.3. *Der Gradient zeigt dabei selbst in Richtung des steilsten Anstiegs.*

Satz 4.6. *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^d$ offen in einer Umgebung von $x^* \in D$ partiell diffbar und sind die partiellen Ableitungen dort beschränkt, dann ist f stetig in x^*.*

Satz 4.7. *Existieren in einer Umgebung von x^* alle partiellen Ableitungen und sind dann stetig in x^*, so ist f diffbar in x^*. Allgemein gilt, existieren alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k und sind diese stetig, so ist $f \in C^k$, d.h. $k - fach$ stetig diffbar.*

Bemerkung 4.4. *Folgerung: Alle Polynome, alle sin, cos, exp, ... Funktionen sind mehrdimensional diffbar.*

Bemerkung 4.5. *Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung U von x^* partiell diffbar und sind diese in x^* stetig, so ist f diffbar in x^*.*

4.3 Mehrdimensionale Kettenregel

Satz 4.8. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$. Sei f in x^* diffbar und g in $y^* = f(x^*)$ diffbar. Dann ist $g \circ f$ in x^* diffbar mit Jacobimatrix.*

$$J(g \circ f)(x^*) = Jg(f(x^*)) \cdot Jf(x^*) \tag{4.3.1}$$

Somit gilt für $h(x) = g(f(x))$, dass

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial z_k}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \tag{4.3.2}$$

4.4 Wichtige Operatoren

4.4.1 Divergenz

$$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, f = (f_1, ..., f_d), x = (x_1, ..., x_d)$$

$$\operatorname{div} f = \sum_{j=1} d \frac{\partial f_j}{\partial x_j} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial f_d}{\partial x_d} \tag{4.4.1}$$

Bemerkung 4.6. *Die Divergenz ist die Spur der Jacobimatrix, also die Summe der Diagonalelemente.*

4.4.2 Laplace-Operator

$$\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$
$$\Delta\varphi = \nabla\nabla\varphi = \sum_{j=1}^{d} \frac{diffp^2\varphi}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_d^2} \tag{4.4.2}$$

Bemerkung 4.7. *Der Laplace Operator bildet die Spur der Hesse Matrix.*

4.4.3 Rotation

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{4.4.3}$$

Bemerkung 4.8. *Die Bestandteile der Rotation sind die Nebendiagonalelemente der Jacobimatrix. Die Rotation gibt an wie „schief" die Jacobimatrix ist.*

4.5 Lemma von Schwarz

Satz 4.9. *Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion, so gilt für alle $i, j \in \{1, ..., d\}$:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \tag{4.5.1}$$

Bemerkung 4.9. *Allgemein: Ist $f \in C^k$, dann ist die Reihenfolge des Differezierens bis zur $k - ten$ Ordnung egal.*

4.6 Taylorscher Satz

4.6.1 Wiederholung eindimensionaler Taylorscher Satz

$$T(f, x, x^*) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x^*)}{k!}(x - x^*)^k \tag{4.6.1}$$

4.6.2 Mehrdimensionaler Mittelwertsatz

Satz 4.10. *Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (hier wichtig: $\mathbb{R}$, nicht $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$) diffbar. Dann gibt es ein $\Theta \in (0, 1)$ mit*

$$f(b) - f(a) = \underbrace{\operatorname{grad} f(a + \Theta(b - a))}_{\in\mathbb{R}^d} \underbrace{(b - a)}_{\in\mathbb{R}^d} \tag{4.6.2}$$

Bemerkung 4.10. *Der MWS gilt nicht für vektorwertige Funktionen.*

4.6.3 Mehrdimensionaler Taylorscher Satz

Definition 4.11. *Offen: Um jeden Punkt $x \in D$ lässt sich eine Kugel in D legen mit $r < 0$.*

Definition 4.12. *Konvex: Zu $x, y \in D$ ist auch die Verbindungsstrecke in D.*

Satz 4.13. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine C^{m+1} Funktion auf einer offenen und konvexen Menge $D \in \mathbb{R}^d$ und $x^* \in D$. Dann gilt:*

$$f(x) = Tm(x, x^*) + Rm(x, x^*) \tag{4.6.3}$$

mit

$$Tm(x, x^*) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{j_1+j_2+...+j_d=j} \frac{1}{j_1!j_2!...j_d!}(x_1 - x_1^*)^{j_1}...(x_d - x_d^*)^{j_d} \frac{\partial^m f(x^*)}{\partial x_1^{j_1}...\partial x_d^{j_d}} \tag{4.6.4}$$

und

$$\begin{aligned} Rm(x, x^*) = \sum_{j_1+j_2+...+j_d=m+1} &\frac{1}{j_1!j_2!...j_d!}(x_1 - x_1^*)^{j_1}... \\ &\cdot (x_d - x_d^*)^{j_d} \frac{\partial^m f(x^*)}{\partial x_1^{j_1}...\partial x_d^{j_d}}(x^* + \Theta(x - x^*)) \end{aligned} \tag{4.6.5}$$

Bemerkung 4.11. *Taylorpolynome sind lokal die beste Approximation.*

$$T1(x, x^*) = f(x^*) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)(x_1 - x_1^*) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_d - x_d^*) \tag{4.6.6}$$

ist die Tangentialebene an x^*.

Bemerkung 4.12. *Zum Berechnen der Taylorpolynome ist es oft einfacher bekannte 1-dim Taylorpolynome bzw. Taylorreihne zu verwenden. Es git dann:*

$$Tm(f, x, x^*) = T_a(f_a, x, x^*) \cdot ... \cdot T_d(f_d, x, x^*) \tag{4.6.7}$$

Wobei auch mehrere Dimensionen mit einer 1-dim Reihe substituiert werden können.

4.6.4 Wichtige 1-dim Reihen

- Exponentialreihe:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.6.8}$$

- Geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \qquad |q| < 1 \tag{4.6.9}$$

- Sinusreihe

$$sin(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} = y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 + ... \tag{4.6.10}$$

- Cosinusreihe

$$cos(y) = \sum_{k=0}^{\infty} = (-1)^k \frac{y^2 k}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 + ... \tag{4.6.11}$$

4.7 Mehrdimensionale Extremwertaufgaben

Im Folgenden sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Satz 4.14. *Besitzt $f = f(x)$ in einem Punkt x^* ein lokales Extremum (d.h. Minimum oder Maximum), so gilt*

$$\nabla f(x^*) = 0 \tag{4.7.1}$$

Bemerkung 4.13. $\nabla f(x^*) = 0$ *liefert häufig keine Extrema sondern Sattelpunkte (je höher die Raumdimension desto wahrscheinlicher, dass kein Extrema vorliegt).*

f um x^* lässt sich besser verstehen in dem man das Taylorpolynom 2. Grades um x^* betrachtet. Dieses lässt sich mit Hilfe der Hesse-Matrix folgendermaßen formulieren:

$$T2(x, x^*) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T Hf(x^*)(x - x^*) \tag{4.7.2}$$

4.7.1 Hesse Matrix

Die Hesse Matrix ist die Matrix der zweiten Ableitung.

$$Hf(x^*) = J(Jf(x^*)) = f''(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_d} \end{pmatrix} \tag{4.7.3}$$

Bemerkung 4.14. *Die Hesse Matrix ist symmetrisch. Daher besitzt sie reelle Eigenwerte und kann durch eine orthogonale Transformation diagonalisiert werden.*

Bemerkung 4.15.

$$\begin{aligned} &\forall \lambda_j > 0 \Rightarrow Minimum \\ &\forall \lambda_j < 0 \Rightarrow Maximum \\ &\exists \lambda_j \textit{ und } \lambda_i \textit{ mit unterschiedliche Vorzeichen } \Rightarrow Sattelpunkt \\ \textit{Umkehrung:}& \\ &Minimum \Rightarrow \forall \lambda_j | \lambda_j \geq 0 \\ &Maximum \Rightarrow \forall \lambda_j | \lambda_j \leq 0 \end{aligned} \tag{4.7.4}$$

Satz 4.15. *Sei* $f \in C^2$ *mit* $\nabla f(x^*) = 0$ *(*x^* *ist ein kritischer Punkte).*

a) *Ist* x^* *ein lokales Minimum, so ist* $Hf(x^*)$ *positiv semidefinit, d.h. es gilt* $v^T Hf(x^*)v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^d$.

b) *Ist* x^* *ein lokales Maximum, so ist* $Hf(x^*)$ *negativ semidefinit, d.h. es gilt* $v^T Hf(x^*)v \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^d$.

c) *Ist* $Hf(x^*)$ *positiv definit, d.h. es gilt* $v^T Hf(x^*)v > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^d_{/\{0\}}$*, so ist* x^* *ein Minimum.*

d) *Ist* $Hf(x^*)$ *negativ definit, d.h. es gilt* $v^T Hf(x^*)v < 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^d_{/\{0\}}$*, so ist* x^* *ein Maximum.*

Bemerkung 4.16. *Für* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *ist die Hessematrix eine 2x2 Matrix.*

$$\Rightarrow \operatorname{spur} Hf = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad \det Hf = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \tag{4.7.5}$$

Satz 4.16. *Hurwitz Kriterium für 2x2 Matrizen: Sei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \in \mathbb{C}^2$*,* x^* *sei ein kritischer Punkt von* f *und sei* $\det Hf(x^*) > 0$*, dann gilt:*

$$\begin{aligned} \partial^2_{x_1} f(x^*) > 0 &\Rightarrow \textit{lokales Minimum} \\ \partial^2_{x_1} f(x^*) < 0 &\Rightarrow \textit{lokales Maximum} \end{aligned} \tag{4.7.6}$$

4.7.2 Untersuchung nach Extremwerten

Schritt 1: Gradient und Hesse Matrix von f bestimmen:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d}(x^*) \end{pmatrix}, \qquad Hf(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_d} \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Kritische(n) Punkt(e) bestimmen

$$\nabla f(x) = 0$$

Schritt 3: Kritische Punkte in Hessematrix einsetzen und auswerten

Abhängig der Dimension der Matrix (4.7.6), (4.15) oder (4.7.4) anwenden.

5 Literatur

Gauss, N. (2018), ‘Hm2 vortragsuebung’. Vorlesungsuebung.

Schneider, P. D. G. (2018), ‘Hm1-2 script’. Vorlesungsscript.

Wikimedia-Foundation (2018), ‘Partition (mengenlehre)’, https://de.wikipedia.org/wiki/Partition_(Mengenlehre). Accessed: 2018-04-20.