# Mikroelektronik Formelsammlung

Florian Leuze

# 1 Inhalt

## Inhaltsverzeichnis

## 1.1 Versionierung

| Datum | Vers. | Kürzel | Änderung |
|---|---|---|---|
| 04.05.2018 | 0.1 | FL | Erzeugung Dokument; Erzeugung Inhaltsverzeichnis; Erzeugung Versionierung; Erzeugung Leitf. u. Energieb. |
| 05.05.2018 | 0.1 | FL | Korrektur formTabL |
| 06.05.2018 | 0.1 | FL | Erzeugung Elek. u. Löch. in Halbl.; Erzeugung Abk; Donatoren u. Akzeptoren; Eff. Massen; Bandl.; Eckd.; u. Konst. |
| 12.05.2018 | 1.0 | FL | Komplette Neustrukturierung; Fertigstellung Inhalt |

# 2 Mikroelektronik I

Im Folgenden sei U = V.

## 2.1 Leitfähigkeit und Energiebänder

### 2.1.1 Spezifischer Widerstand

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ohmsches Gesetz | : | $V = RI\,[V]$ | (2.1.1) |
| Widerstand | : | $R = \frac{V}{I}\,[\Omega]$ | (2.1.2) |
| Leitwert | : | $G = \frac{1}{G} = \frac{I}{V}\,\left[\frac{1}{\Omega} = S\right]$ | (2.1.3) |
| Spezifischer Widerstand | : | $R = \rho\frac{L}{A}\,[\Omega]$ | (2.1.4) |
| Leitfähigkeit(a) | : | $\sigma\frac{A}{L}\,[S]$ | (2.1.5) |
| Leitfähigkeit(b) | : | $\sigma = \frac{1}{\rho}$ | (2.1.6) |

### 2.1.2 Energiebänder

| | | | |
|---|---|---|---|
| Wellenlänge | : | $\frac{ch}{E} = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{f}$ | (2.1.7) |

Mit $h$ als Plancksches Wirkungsquantum, $c$ als Lichtgeschwindigkeit (siehe 3.7) und $\nu$ hier als Frequenz (siehe 3.1).

| | | | |
|---|---|---|---|
| Photoneneergie | : | $\frac{1{,}240}{\lambda[\mu m]} = \frac{hc}{\lambda}\,[eV]$ | (2.1.8) |

$h$ ist hier in $eV$ einzusetzen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ionisierungs-energie der i-ten Schale | : | $E_i = -\frac{m_0 q^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 i^2} \sim \frac{m_0}{(\varepsilon_0)^2}$ | (2.1.9) |

Gegebenenfalls muss $m_0$ mit der effektiven Masse multipliziert werden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Radien der Energieniveaus | : | $r_i = \frac{\varepsilon_0 i^2 h^2}{q^2 \pi m_0}$ | (2.1.10) |
| Aufzubringende Energie | : | $E_f = \lvert E_i - E_j \rvert = \left\lvert \frac{m_0 q^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{i^2}\right)\right\rvert$ | (2.1.11) |
| Größengleichung zu (2.1.11) | : | $E_f = \left\lvert \frac{9{,}11kg(1{,}602As)^4}{8(8{,}885\frac{As}{Vm}6{,}633s)^2} \cdot 10^{-15}\left(\frac{1}{j^2}\,\frac{1}{i^2}\right)\right\rvert$ | (2.1.12) |

### 2.1.3 Siliciumkristalle

| | | | |
|---|---|---|---|
| Atomdichte Silizium | : | $N_{Si} = \frac{Atomzahl}{Volumen} = \frac{n_{cell}}{a^3}$ | (2.1.13) |
| Größenwert zu (2.1.13) | : | $= \frac{8}{(5{,}43 \cdot 10^{-8} cm)^3} = 5,00 \cdot 10^{22} \frac{1}{cm^3}$ | (2.1.14) |
| Atomdichte Si Valenzelektr. | : | $N_{val} = 4N_{Si} = 2,00 \cdot 10^{23} \frac{1}{cm^3}$ | (2.1.15) |

Im Folgenden sei $EZ$ eine Einheitszelle.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Atomanzahl Einheitszelle Si | : | $n_{cell} = \frac{\text{8in Ecken}}{8EZ} + \frac{\text{6in Flächen}}{2EZ} + \frac{\text{4im Volumen}}{1EZ}$ | (2.1.16) |

## 2.2 Elektronen und Löcher in Halbleitern

### 2.2.1 Energie

Im Folgenden sei $E_c$ die Leitungsbandkante und $E_v$ die Valenzbandkante.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $E = E_c$ | : | $E_{pot} = E_c \; und \; E_{kin} = 0$ | (2.2.1) |
| $E > E_c$ | : | $E_{pot} = E_c \; und \; E_{kin} = \frac{1}{2} m_n^* v^2$ | (2.2.2) |
| $E = E_v$ | : | $E_{pot} = E_v \; und \; E_{kin} = 0$ | (2.2.3) |
| $E < E_c$ | : | $E_{pot} = E_v \; und \; E_{kin} = \frac{1}{2} m_p^* v^2$ | (2.2.4) |
| Therm. Energie | : | $E_{th} = E_{kin} = \frac{1}{2} m_o v_{th}^2 \cdot 1.08 = \frac{3}{2} kT \, [J]$ | (2.2.5) |

### 2.2.2 Elektrisches Feld

| | | | |
|---|---|---|---|
| El. Feld(a) | : | $\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{d\varphi}{dx} = -\left(-\frac{1}{q}\frac{dE_{pot}}{dx}\right) = \frac{1}{q}\frac{dE_i}{dx}$ | (2.2.6) |

Mit $i$ als Platzhaler für $c$ oder $v$.

### 2.2.3 Differentielles Ohmsches Gesetz

| | | | |
|---|---|---|---|
| El. Feld(b) | : | $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{V}{l} \left[\frac{V}{cm}\right]$ | (2.2.7) |
| Stromdichte | : | $J = \frac{I}{A} \left[\frac{A}{cm^2}\right]$ | (2.2.8) |

Mit (2.1.5) folgt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Leitfähigkeit(c) | : | $\sigma = G\frac{l}{A} = \frac{I \cdot l}{V \cdot A} = \frac{J}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ | (2.2.9) |
| Driftstromdichte | : | $J_{drift} = \sigma \boldsymbol{\varepsilon} = \rho_e v_d = qnv_d$ | (2.2.10) |

Wobei $\rho_e$ die Ladungsdichte und $v_d$ die Driftgeschwindigkeit sind. Damit folgt

| | | | |
|---|---|---|---|
| Leitfähigkeit(d) | : | $\sigma = qn\frac{v_d}{\varepsilon}$ | (2.2.11) |
| Beweglichkeit | : | $\mu = \frac{v_d}{\varepsilon} \left[\frac{cm^2}{Vs}\right]$ | (2.2.12) |
| Leitfähigkeit(f) | : | $\sigma = q\mu n$ | (2.2.13) |

### 2.2.4 Gesamtleitfähigkeit

| | | | |
|---|---|---|---|
| Gesamtleitfähigkeit | : | $\sigma_{ges} = \sigma_n + \sigma_p = q\mu_n n + q\mu_p p$ | (2.2.14) |

### 2.2.5 Ladungsträgerkonzentration in den Bändern

| | | | |
|---|---|---|---|
| Zustandsdichte Leitungsband | : | $D_C(E) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2\hbar^3}\left(m_n^*\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{E-E_c}$ | (2.2.15) |

Die in (2.2.15) formulierte Gleichung ist als Zustandsdichte pro Energieintervall zu verstehen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Größengleichung zu (2.2.15) | : | $D_C(E) = 6,8\cdot 10^{21}\left(\frac{m_n^*}{m_o}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot\sqrt{(E-E_c)\,[eV]}\left[\frac{1}{eVcm^3}\right]$ | (2.2.16) |
| Größengleichung zu (2.2.15) im Valenzband | : | $D_C(E) = 6,8\cdot 10^{21}\left(\frac{m_p^*}{m_o}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot\sqrt{(E_v-E)\,[eV]}\left[\frac{1}{eVcm^3}\right]$ | (2.2.17) |
| Elektronenkonzentration | : | $n = \int\limits_{E_c}^{\infty} D_c(E)\cdot f(E)dE$ | (2.2.18) |
| Löcherkonzentration | : | $p = \int\limits_{-\infty}^{E_v} D_v(E)f_h(E)dE$ | (2.2.19) |

mit $f(E)$ als Besetzungswahrscheinlichkeit.

### 2.2.6 Fermi-Dirac-Verteilung

| | | | |
|---|---|---|---|
| Fermi-Dirac-Verteilung(a) | : | $f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}}+1}$ | (2.2.20) |

Mit $E_F$ als Fermi Energie.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $E = E_F$ | : | $f(E=E_F) = \frac{1}{2}$ | (2.2.21) |
| Fermi-Dirac-Verteilung(b) | : | $f(E) := f_e(E)$ | (2.2.22) |
| Fermi-Dirac-Verteilung(c) | : | $f_h(E) = 1 - f_e(E)$ | (2.2.23) |
| Fermi-Dirac-Verteilung(d) | : | $f_h(E) + f_e(E) = 1$ | (2.2.24) |

#### 2.2.6.1 Boltzmann-Näherung

Boltzmann-Näherung(a) : $f_{e,Boltz}(E) = e^{-\dfrac{E-E_F}{kT}}$ (2.2.25)

Die Boltzmann-Näherung ist nur für den Fall $E - E_f > 3kT$ zureichend genau.

$E - E_F >> kT$ : $f_h(E) = 1 - f_e(E) \cong 1$ (2.2.26)

$E_F - E >> kT$ : $f_e(E) = \dfrac{1}{e^{\dfrac{E-E_F}{kT}} + 1} \cong 1$ (2.2.27)

Prozentualer Fehler der Boltzmann-Näherung : $F_{boltz,\%} = \dfrac{f(\Delta E) - f_{boltz}(\Delta E)}{f(\Delta E)}$ (2.2.28)

#### 2.2.6.2 Ladungsträgerkonzentration in der Boltzmann-Näherung

Elektronenkonzentration : $n = N_C e^{-\dfrac{E_C-E_F}{kT}}$ (2.2.29)

Lochkonzentration : $p = N_V e^{-\dfrac{E_F-E_V}{kT}}$ (2.2.30)

Effektive Zustandsdichte(a) : $N_C = 2\left(\dfrac{2\pi m_n^* kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sim (m_n^* T)^{\frac{3}{2}}$ (2.2.31)

Effektive Zustandsdichte(b) : $N_V = 2\left(\dfrac{2\pi m_p^* kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sim \left(m_p^* T\right)^{\frac{3}{2}}$ (2.2.32)

Größengleichung zu (2.2.31) und (2.2.32) : $N_{C,V} = 2,50 \cdot 10^{19} \left(\dfrac{m_{n,p}^*}{m_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{T[K]}{300}\right)^{\frac{3}{2}} [cm^{-3}]$ (2.2.33)

### 2.2.7 Massenwirkungsgesetz

Massenwirkungsgesetz(a) : $np = N_C N_V e^{-\frac{E_C-E_F}{kT}} e^{-\frac{E_F-E_V}{kT}}$ (2.2.34)

Bandlücke : $E_g = E_C - E_V$ (2.2.35)

(2.2.35) in (2.2.34) (wobei $n_i$ die intrinsische Ladungsträgerdichte ist):

Massenwirkungsgesetz(b) : $np = N_C N_V e^{\frac{E_g}{kT}} = n_i^2$ (2.2.36)

Also gilt ganz allgemein (und zwar unabhängig von der Dotierung)

| | | |
|---|---|---|
| Massenwirkungsgesetz(c) | : $np = n_i^2$ | (2.2.37) |
| Intrinsische Ladungsträgerdichte | : $ni = \sqrt{N_C N_V} \cdot e^{-\frac{E_g}{2kT}}$ | (2.2.38) |

#### 2.2.7.1 Umformulierungen

| | | |
|---|---|---|
| $E_C - E_F$ | : $E_C - E_F = kT \cdot ln\left(\frac{N_C}{n}\right)$ | (2.2.39) |
| $E_F - E_V$ | : $E_F - E_V = kT \cdot ln\left(\frac{N_V n}{n_i^2}\right)$ | (2.2.40) |

### 2.2.8 Fermi-Niveau

| | | |
|---|---|---|
| Fermi-Niveau(a) | : $E_{Fi} = \frac{EC+EV}{2} - \frac{kT}{2} ln\left(\frac{N_C}{N_V}\right)$ | (2.2.41) |

Mit (2.2.31) und (2.2.32) in (2.2.41) folgt:

| | | |
|---|---|---|
| Fermi-Niveau(b) | : $E_{fi} = \frac{EC+EV}{2} - \frac{3}{4} kT \cdot ln\left(\frac{m_n^*}{m_p^*}\right)$ | (2.2.42) |

#### 2.2.8.1 Umformulierungen

$$|E_{Fi} - E_V| = \frac{E_g}{2} - \frac{kT}{2} \cdot ln\left(\frac{N_C}{N_V}\right) \tag{2.2.43}$$

$$\begin{aligned} E_C = E_F + E_g \Rightarrow \frac{E_C + E_V}{2} \\ = \frac{E_V + E_g + E_V}{2} = E_V + \frac{E_g}{2} \overset{Ev:=0V}{=} \frac{E_g}{2} \end{aligned} \tag{2.2.44}$$

$$\begin{aligned} E_g = E_C - E_V = (E_C - E_F) + (E_F - E_V) \\ \Rightarrow E_C - E_F = E_g - (E_F - E_V) \end{aligned} \tag{2.2.45}$$

### 2.2.9 Bandbesetzung im intrinsischen Halbleiter

Definiert man

$$n_e = D_C(E) f(E) dE \tag{2.2.46}$$

wo $n_e$ die Elektronenkonzentration pro Energieintervall beschreibt erhält man aus (2.2.18)

$$n = \int_{E_C}^{\infty} n_e dE \tag{2.2.47}$$

bzw. mit $p_e = D_V(E)(1 - f(E))$ aus (2.2.19)

$$p = \int_{-\infty}^{E_V} p_e dE \tag{2.2.48}$$

### 2.2.10 Bandbesetzung im extrinsischen Halbleiter

Aus der Annahme, dass alle Donatoren und Akzeptoren ionisiert seien, folgt

$$N_D^+ \approx N_D \qquad\qquad N_A^- \approx N_A \tag{2.2.49}$$

Aus der Ladungsneutralität und (2.2.37) folgt

$$n = \frac{N_D^+ - N_A^-}{2} + \sqrt{\frac{(N_D^+ - N_A^-)^2}{4} + n_i^2} \tag{2.2.50}$$

#### 2.2.10.1 Wichtige Näherung zur Bestimmung der Minoritäten

Beispiel an einem n-typ Halbleiter: Mit (2.2.49) und

$$N_D >> N_A, \qquad\qquad N_D >> n_i \tag{2.2.51}$$

folgt dann:

$$n \approx N_D \tag{2.2.52}$$

Mit (2.2.37) lassen sich so die Minoritäten bestimmen

$$p = \frac{n_i^2}{n} \tag{2.2.53}$$

## 2.3 Ströme im Halbleiter

### 2.3.1 Driftstrom

**Def.:** Erfolgt die Ladungsträgerbewegung als Folge einer elektrischen Feldstärke, so spricht man im Halbleiter von einem Driftstrom.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Driftstrom Elektronen | : | $J_{drift,n} = q\mu_n n\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_n \boldsymbol{\varepsilon} \left[\frac{A}{m^2}\right]$ | (2.3.1) |
| Driftstrom Löcher | : | $J_{drift,p} = q\mu_n p\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_p \boldsymbol{\varepsilon}$ | (2.3.2) |
| Gesamtdrift-strom | : | $J_{drift} = J_{drift,n} + J_{drift,p} = (\sigma_n + \sigma_p)\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{V}{l\rho}$ | (2.3.3) |

### 2.3.2 Beweglichkeit

| | | | |
|---|---|---|---|
| Drift-geschwindigkeit $n$ | : | $v_{d,n} = -\mu_n \boldsymbol{\varepsilon}$ | (2.3.4) |
| Drift-geschwindigkeit $p$ | : | $v_{d,p} = +\mu_p \boldsymbol{\varepsilon}$ | (2.3.5) |

### 2.3.3 Partikelstromdichte

| | | | |
|---|---|---|---|
| Partikelstrom-dichte | : | $J_{part}(x) = -D\frac{dM}{dx} \left[\frac{cm^2}{s}\right]$ | (2.3.6) |

### 2.3.4 Diffustionsstromdichte

| | | | |
|---|---|---|---|
| Diffusionsstromdichte(a) | : | $J_{diff} = qJ_{part}$ | (2.3.7) |
| Diffusionsstromdichte $n$ | : | $J_{diff,n} = -qJ_{part} = -q\left(-D_n\frac{dn}{dx}\right) = qD_n\frac{dn}{dx}$ | (2.3.8) |
| Diffusionsstromdichte $p$ | : | $J_{diff,p} = qJ_{part} = q\left(-D_p\frac{dn}{dx}\right) = -qD_p\frac{dp}{dx}$ | (2.3.9) |

### 2.3.5 Einsteingleichung

| | | | |
|---|---|---|---|
| Diffusionskonstante $n$ | : | $D_n = \mu_n\frac{kT}{q}$ | (2.3.10) |
| Diffusionskonstante $p$ | : | $D_p = \mu_p\frac{kT}{q}$ | (2.3.11) |

$kT$ ist jeweils in Joule einzusetzen. Liegt der Wert von $kT$ in $eV$ vor, muss auf das normieren auf die Elementarladung verzichtet werden!

### 2.3.6 Gesamtstrom im Halbleiter

| | | | |
|---|---|---|---|
| Elektronenstromdichte | : | $J_n = q\mu_n n\boldsymbol{\varepsilon} + qD_n\frac{dn}{dx} = \sigma_n\boldsymbol{\varepsilon} + qD_n\frac{dn}{dx}$ | (2.3.12) |
| Löcherstromdichte | : | $J_p = q\mu_p p\boldsymbol{\varepsilon} + qD_p\frac{dp}{dx} = \sigma_p\boldsymbol{\varepsilon} + qD_p\frac{dp}{dx}$ | (2.3.13) |
| Gesamtstromdichte | : | $J_{tot} = J_n + J_p = J_{drift,n} + J_{diff,n} + J_{drift,p} + J_{diff,p}$ | (2.3.14) |

In den meisten Bauelementen kann die Driftstromdichte für Minoritäten vernachlässigt werden.

### 2.3.7 Rekombination und Generation

| | | | |
|---|---|---|---|
| Injektion von Ladungsträgern | : | $np > n_i^2$ | (2.3.15) |
| Extraktion von Ladungsträgern | : | $np < n_i^2$ | (2.3.16) |

#### 2.3.7.1 Niederinjektion

| | | | |
|---|---|---|---|
| Lochkonzentration vor Injektion | : | $p_0 = \frac{n_i^2}{n_0} = 10^5 cm^{-3}$ | (2.3.17) |

Niederinjektion bedeutet, dass sich die Majoritätenkonzentration während dem Betreiben des Bauelements (praktisch) nicht ändert. (Vgl. Werner 2017)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Näherung Minoritäten | : | $p \approx \Delta p$ | (2.3.18) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Näherung Majoritäten | : | $n \approx n_0$ | (2.3.19) |

„PN-Übergänge, npn- und pnp Transistoren, Thyristoren, etc. betreibt man normalerweise im Bereich der Niederinjektion. “(Werner 2017)

#### 2.3.7.2 Minoritätsladungsträgerlebensdauer/ -diffusionslänge

| | | | |
|---|---|---|---|
| Minoritätsladungsträgerlebensdauer | : | $\Delta p(t) = \Delta p(t_0) e^{-\dfrac{t-t_0}{\tau}}$ | (2.3.20) |

Wobei $\tau = \frac{1}{K_1}$ den zeitlichen Abfall von p charackterisiert und Minoritätsladungsträgerlebensdauer heißt. (Vgl. Werner 2017)

$$\Rightarrow \tau = \frac{\Delta p}{\frac{d\Delta p}{dt}}\bigg|_{t=0} \tag{2.3.21}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Minoritätsladungsträgerdiffusionslänge | : | $\Delta p(x) = \Delta p(x_0) e^{-\dfrac{x-x_0}{L}}$ | (2.3.22) |

Wobei $L = \frac{1}{K_2}$ den räumlichen Abfall der Überschusskonzentration charackterisiert und Minoritätsladungsträgerdiffusionslänge heißt. (Vgl. Werner 2017)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Diffusionslänge Löcher | : | $L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$ | (2.3.23) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Diffusionslänge Elektronen | : | $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$ | (2.3.24) |

### 2.3.8 Quasi-Fermi-Niveaus (QFN oder Imref)

Liegt Injektion oder Extraktion vor, also gilt $np > n_i^2$ oder $np < n_i^2$, gelten die Zusammenhänge aus (2.2.36) nicht mehr, da hier ein gleiches Fermi-Niveau für Löcher und Elektronen vorrausgesetzt wird. Um das zu korrigieren werden für Löcher und Elektronen Quasiferminiveaus eingeführt.

Elektronenkonzentration : $$n = N_C e^{-\dfrac{E_C - E_{Fn}}{kT}} \quad (2.3.25)$$

Lochkonzentration : $$p = N_V e^{-\dfrac{E_{Fp} - E_V}{kT}} \quad (2.3.26)$$

Massenwirkungsgesetz(b) : $$np = N_C N_V e^{\frac{E_g}{kT}} e^{\frac{E_{Fn}-E_{Fp}}{kT}} = n_i^2 e^{\dfrac{E_{Fn} - E_{Fp}}{kT}} \quad (2.3.27)$$

Es gilt:

Gleichgewicht : $$np = n_i^2 \Leftrightarrow E_{Fn} = E_{Fp} = E_F \quad (2.3.28)$$

Injektion : $$np > n_i^2 \Leftrightarrow E_{Fn} > E_{Fp} \quad (2.3.29)$$

Extraktion : $$np < n_i^2 \Leftrightarrow E_{Fn} < E_{Fp} \quad (2.3.30)$$

Elektronenstromdichte : $$J_n(x) \overset{(2.3.12),(2.2.29)}{=} \sigma_n(x) \frac{1}{q} \frac{dE_{Fn}}{dx} \quad (2.3.31)$$

Löcherstromdichte : $$J_p(x) \overset{(2.3.13),(2.2.30)}{=} \sigma_p(x) \frac{1}{q} \frac{dE_{Fp}}{dx} \quad (2.3.32)$$

## 2.4 Elektrostatik des PN-Übergangs

### 2.4.1 Poisson-Gleichung

Poisson-Gleicunung : $$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_d} \quad (2.4.1)$$

Mit $\varphi(x)$ als Potential und $\rho_Q(x)$ als räumliche Ladungsdichte.

Dielektrizitätskonstante : $$\varepsilon_d = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (2.4.2)$$

Mit

Potentielle Energie(a) : $$\varphi(x) = -\frac{1}{q} E_{pot}(x) \quad (2.4.3)$$

folgt

| | | | |
|---|---|---|---|
| Potentielle Energie(b) | : | $\frac{1}{q}\frac{d^2E_{pot}(x)}{dx^2} = \frac{\rho_Q(x)}{\varepsilon_d}$ | (2.4.4) |

Mit (2.2.6) und (2.4.1) folgt

| | | | |
|---|---|---|---|
| differentielles El. Feld | : | $\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}(x)}{dx} = \frac{\rho_Q(x)}{\varepsilon_d}$ | (2.4.5) |

### 2.4.2 Ladungsneutralität und elektrostatisches Helebgesetz

| | | | |
|---|---|---|---|
| Verarmungsnäherung | : | $\rho_Q(x) = \begin{cases} -qN_A & \text{für } -dp \leq x \ < 0 \\ +qN_D & \text{für } 0 < x \leq d_n \end{cases}$ | (2.4.6) |

Wobei sich der pn-Übergang zwischen $-d_p$ und $d_n$ befindet und somit $-d_p$ und $d_n$ die Grenzen der RLZ darstellen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Flächenladungsdichte links v. pn-Übergang | : | $Q_L = \rho_L d_p = -qN_A d_P$ | (2.4.7) |
| Flächenladungsdichte rechts v. pn-Übergang | : | $Q_R = \rho_R d_n = +qN_D d_n$ | (2.4.8) |
| Flächenladung gesamt | : | $G_{F,total} = Q_L + Q_R = 0$<br>$= -qN_A d_p + qN_D d_n$ | (2.4.9) |
| Folgerung aus (2.4.9)(a) | : | $N_A d_p = N_D d_n$ | (2.4.10) |
| Folgerung aus (2.4.9)(b) | : | $\frac{d_p}{d_n} = \frac{N_D}{N_A}$ | (2.4.11) |

### 2.4.3 Potential und Feldstärke

| | | | |
|---|---|---|---|
| Elektrische Feldstärke(a1) | : | $\boldsymbol{\varepsilon}_L(x) = -\frac{q}{\varepsilon_d} N_A(x + d_p$ | (2.4.12) |
| Elektrische Feldstärke(b2) | : | $\boldsymbol{\varepsilon}_R(x) = \frac{q}{\varepsilon_d} N_D(x - d_n$ | (2.4.13) |
| Maximale el. Feldstärke(a) | : | $\boldsymbol{\varepsilon}_{max} = \boldsymbol{\varepsilon}(x = 0) = \boldsymbol{\varepsilon}_{L,R}(x = 0)$ | (2.4.14) |
| Elektrische Feldstärke(a2) | : | $\boldsymbol{\varepsilon}_L(x) = \boldsymbol{\varepsilon}_{max}\left(1 + \frac{x}{d_p}\right)$ für $-d_p \leq x \leq 0$ | (2.4.15) |
| Elektrische Feldstärke(b2) | : | $\boldsymbol{\varepsilon}_R(x) = \boldsymbol{\varepsilon}_{max}\left(1 - \frac{x}{d_n}\right)$ für $0 \leq x \leq d_n$ | (2.4.16) |

### 2.4.4 Diffusionsspannung und Weite der RLZ

| | | | |
|---|---|---|---|
| Weite(a) | : | $w = d_n + d_p$ | (2.4.17) |
| Diffusionsspannung(a) | : | $V_{bi} = \varphi_R(d_n) = -\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{max}}{2}(d_n + d_p) = -\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{max}}{2} w$ | (2.4.18) |

Mit (2.4.14) erhält man

| | | | |
|---|---|---|---|
| Diffusionsspannung(b) | : | $V_{bi} = \frac{qN_A}{2\varepsilon_d} d_p(d_n + d_p)$ | (2.4.19) |

Mit (2.4.10) erhält man schließlich

| | | | |
|---|---|---|---|
| Teilweite $d_p$ | : | $d_p = \sqrt{\frac{2\varepsilon_d N_D V_{bi}}{qN_A(N_A + N_D)}} \sim \sqrt{V_{bi}}$ | (2.4.20) |
| Weite(b) | : | $w = dp\left(1 + \frac{N_A}{N_D}\right)$ | (2.4.21) |
| Weite(c) | : | $w = \sqrt{\frac{2\varepsilon_d}{q} \frac{N_A + N_D}{N_A N_D} V_{bi}} \sim \sqrt{V_{bi}}$ | (2.4.22) |
| Folgerung(a) | : | $w \uparrow \quad \Rightarrow \quad V_{bi} \uparrow$ | (2.4.23) |
| Diffusionsspannung(c) | : | $qV_{bi} = kT\ ln\left(\frac{n_{n0}p_{p0}}{n_i^2}\right) \approx kT\ ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right)$ | (2.4.24) |
| Diffusionsspannung(d) | : | $V_{bi}^0 = \frac{kT}{q} ln\left(\frac{N_D N_A}{n_i^2}\right)$ | (2.4.25) |
| Diffusionsspannung(e) | : | $V_{bi} = V_{bi}^0 - V$ | (2.4.26) |

Aus (2.4.10) und (2.4.17) folgen

| | | | |
|---|---|---|---|
| Relative Weite $p$ | : | $d_p = w\frac{N_D}{N_A+N_D}$ | (2.4.27) |
| Relative Weite $n$ | : | $d_n = w\frac{N_A}{N_A+N_D}$ | (2.4.28) |
| Maximale el. Feldstärke(b) | : | $\lvert\boldsymbol{\varepsilon}_{max}\rvert = 2\frac{V_{bi}}{w}$ | (2.4.29) |
| Flächenladungsdichte | : | $Q_F = \lvert Q_R\rvert = \lvert Q_L\rvert = qN_A d_p = qN_D d_n = q\frac{N_A N_D}{N_A+N_D} w = \sqrt{2\varepsilon_d \frac{N_A N_D}{N_A+N_D} q V_{bi}}$ | (2.4.30) |

## 2.5 Kennlinie des pn-Übergangs

| | | | |
|---|---|---|---|
| Minoritätenkonzentration(a) | : | $\Delta p\big\|_{d_n} = p_n - p_{n0} = p_{n0}\left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1\right)$ | (2.5.1) |
| Minoritätenkonzentration(b) | : | $\Delta n\big\|_{-d_p} = n_p - n_{p0} = p_{n0}\left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1\right)$ | (2.5.2) |
| Stromdichte $n$ | : | $J_n(-d_p) = J_{n0}\left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1\right)$ | (2.5.3) |
| Stromdichte $p$ | : | $J_p(d_n) = J_{p0}\left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1\right)$ | (2.5.4) |
| Bandlücke | : | $E_g = -\frac{ln\left(J_0(T_4)\right) - ln\left(J_0(T_2)\right)}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}$ | (2.5.5) |
| Stromdichte(a) | : | $J = \left(\frac{qD_n}{L_n}n_{p0} + \frac{qD_p}{L_p}p_{n0}\right)\left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1\right)$ | (2.5.6) |

Mit $p_{n0} = \frac{n_i^2}{N_D}$ und $n_{po} = \frac{n_i^2}{N_A}$ folgt

| | | | |
|---|---|---|---|
| Stromdichte(b) | : | $J = qn_i^2\left(\frac{D_n}{L_nN_A} + \frac{D_p}{L_pN_D}\right)\left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1\right)$ | (2.5.7) |

Die e-Funktion wird bei negativen Spannungen sehr klein, das impliziert direkt einen sehr kleinen Stromfluss beim Sperrverhalten. Bei einer großen Bandlücke erhält man so ein sehr gutes Sperrverhalten.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Sperrsättigungsstromdichte | : | $J_0 = qn_i^2\left(\frac{D_n}{L_nN_A} + \frac{D_p}{L_pN_D}\right)$ | (2.5.8) |
| Stromdichte(c) | : | $J = J_0\left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1\right)$ | (2.5.9) |
| Elektronensperrsättigungsstromdichte | : | $J_{no} = qn_i^2\left(\frac{D_n}{L_nN_A}\right)$ | (2.5.10) |
| Löchersperrsättigungsstromdichte | : | $J_{po} = qn_i^2\left(\frac{D_p}{L_pN_D}\right)$ | (2.5.11) |

Bei stark unsymmetrischer Dotierung wird die Sperrsättigungsstromdichte ebenso stark unsymmetrisch und es kann vereinfacht werden. Im Fall $N_A >> N_D$ z.B:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Näherung(a) | : | $J_0 = qn_i^2\left(\frac{D_p}{L_pN_D}\right)$ | (2.5.12) |
| Näherung(b) | : | $J = \frac{qD_p}{L_p}\frac{n_i^2}{N_D}\left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1\right)$ | (2.5.13) |

### 2.5.1 Kapazität des pn-Übergangs

| | | | |
|---|---|---|---|
| Kapazität(a) | : | $C = \frac{dQ}{dW}$ | (2.5.14) |
| Kapazität(b) | : | $C_{platt} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{w} = \varepsilon_d \frac{A}{w}$ | (2.5.15) |
| Kapazität der RLZ(a) | : | $C_{RLZ} = A\sqrt{\frac{q\varepsilon_d}{2}\frac{N_A N_D}{N_A+N_D}}\sqrt{\frac{1}{V_{bi}^0 - V}}$ | (2.5.16) |

Mit (2.4.26) folgt

| | | | |
|---|---|---|---|
| Kapazität der RLZ(b) | : | $C_{RLZ} = A\frac{\varepsilon_d}{\sqrt{\frac{q\varepsilon_d}{2}\frac{N_A+N_D}{N_A N_D}V_{bi}}}$ | (2.5.17) |

Setzt mein weiter (2.4.22) ein erhält man schließlich

| | | | |
|---|---|---|---|
| Kapazität der RLZ(c)] | : | $C_{RLZ} = A\frac{\varepsilon_d}{w}$ | (2.5.18) |
| Diffusionskapazität der Minoritäten | : | $C_{diff} = \frac{dQ_{min}}{dV} = A\frac{q^2}{kT}L_p p_{n0} e^{\frac{qV}{kT}}$ | (2.5.19) |

### 2.5.2 Kleinsignalleitwert des pn-Übergangs

| | | | |
|---|---|---|---|
| Kleingisnalleitwert | : | $G_d = \frac{dI}{dV} = A\frac{dJ}{dV}$ | (2.5.20) |
| Differnetieller Leitwert | : | $G_d = A\frac{dJ}{dV} = A\frac{q}{kT}J$ | (2.5.21) |

### 2.5.3 Abweichung in der Vorwärtskennlinie

#### 2.5.3.1 Rekombinationsströme

| | | | |
|---|---|---|---|
| Rekombinationssperrsättigungsstrom | : | $J_{ro} = qn_i\frac{w}{2\tau_{RLZ}}$ | (2.5.22) |
| Rekombinationsstrom | : | $J_r = J_{ro}\left(e^{\frac{qV}{2kT}} - 1\right)$ | (2.5.23) |
| Totale Stromdichte(a) | : | $J_t = J_0\left(\frac{qV}{kT} - 1\right) + J_{ro}\left(\frac{qV}{2kT}\right)$ | (2.5.24) |
| Verhältnis(a) | : | $\frac{J_{id}}{J_r} = \frac{J_0}{J_{ro}}\frac{qV}{2kT}$ | (2.5.25) |

Mit $\tau_{RLZ} \approx \tau$ folgt mit $L = \sqrt{D\tau}$ (siehe (2.3.23), (2.3.24))

$$\text{Verhältnis(b)} \quad : \quad \frac{J_{id}}{J_r} = \frac{2n_i}{w}\left(\frac{L_n}{N_A} + \frac{L_p}{N_D}\right)\frac{qV}{2kT} \tag{2.5.26}$$

Bei

$$\frac{L_n}{N_A} >> \frac{L_p}{N_D}$$

gilt

$$\text{Näherung(a)} \quad : \quad \frac{J_{id}}{J_r} = \frac{2n_i}{w}\frac{L_n}{N_A}\frac{qV}{2kT} \tag{2.5.27}$$

#### 2.5.3.2 Idealität

$$\text{Totale Stromdichte(b)} \quad : \quad J_{to}\left(\frac{qV}{n_{id}kT} - 1\right) \tag{2.5.28}$$

$$\text{Idealität} \quad : \quad n_{id} = \frac{\frac{dV}{dlog(J_t)}}{2,3026 \cdot \frac{kT}{q}} \tag{2.5.29}$$

# 3 Anhänge

## 3.1 Abkürzungen/Formelzeichen

| **Zeichen** | **Einheit** | **Bedeutung** |
|---|---|---|
| $A$ | $m^2$ | Fläche |
| $a$ | $\frac{m}{s^2}$ | Beschleunigung |
| $b$ | $\frac{cm^2}{Vs}$ | Ladungsträgerbeweglichkeit |
| $d$ | $m$ | Dicke |
| $D_n$ | $\frac{m^2}{s}$ | Diffusionskonstante für Elektronen |
| $D_p$ | $\frac{m^2}{s}$ | Diffusionskonstante für Löcher |
| $e$ | $C$ | Elementarladung |
| $E$ | $\frac{N}{C} = \frac{VAs}{mAs} = \frac{V}{m}$ | Elektrische Feldstärke |
| $E_c$ | $eV$ | Leitungsbandkante |
| $E_F$ | $eV$ | Fermi-Energie |
| $E_g$ | $eV$ | Energie der Bandlücke |
| $E_v$ | $eV$ | Valenzbandkante |
| $f$ | $Hz$ | Frequenz |
| $\vec{F}$ | $N = \frac{kgm}{s^2}$ | Kraft |
| $G$ | $\frac{A}{V} = \frac{1}{\Omega} = S$ | Leitwert |
| $h$ | $eVs$ | Plank-Konstante |
| $\hbar$ | $eVs$ | Planksches Wirkungsquantum |
| $i$ | $A$ | Elektrischer Strom |
| $j$ | $\frac{A}{m2}$ | Elektrische Stromdichte |
| $J_n$ | $\frac{A}{m2}$ | Elektronenstromdichte |
| $J_p$ | $\frac{A}{m2}$ | Löcherstromdichte |
| $J_{diff}$ | $\frac{A}{m2}$ | Diffusionsstromdichte |
| $J_{part}$ | $\frac{A}{m2}$ | Partikelstromdichte |
| $J_to$ | $\frac{A}{m2}$ | Totale Stromdichte |
| $J_r$ | $\frac{A}{m2}$ | Rekombinationsstromdichte |

Fortsetzung auf Folgeseite

Tabelle 1: Abkürzungen/Formelzeichen

| **Zeichen** | **Einheit** | **Bedeutung** |
|---|---|---|
| $J_{drift}$ | $\frac{A}{m2}$ | Driftstromdichte |
| $l$ | $m$ | Länge |
| $L$ | $m$ | Minoritätsladungsträgerdiffusionslänge |
| $L_n$ | $m$ | Diffusionslänge Elektronen |
| $L_p$ | $m$ | Diffusionslänge Löcher |
| $n$ | ... | Elektronenkonzentration |
| $n_i$ | ... | Intrinsische Ladungsträgerdichte |
| $n_{id}$ | ... | Idealität einer Diode |
| $N_A$ | $m^{-3}$ | Akzeptorendichte |
| $N_D$ | $m^{-3}$ | Donatorendichte |
| $N_C$ | $cm^{-3}$ | Effektive Zustandsdichte der Elektronen |
| $N_V$ | $cm^{-3}$ | Effektive Zustandsdichte der Löcher |
| $p$ | ... | Lochkonzentration |
| $q$ | $C$ | Probeladung (in der Regel $= e$) |
| $\vec{r}$ | $m$ | Weg |
| $r$ | $\Omega$ | Differentieller Widerstand |
| $R$ | $\Omega$ | Widerstand |
| $R_F$ | $\frac{\Omega}{square}$ | Flächenwiderstand |
| $U$ | $V$ | Elektrische Spannung |
| $U_g$ | $V$ | Gesamtspannung |
| $v$ | $\frac{m}{s}$ | Geschwindigkeit |
| $v_D, v_d$ | $\frac{m}{s}$ | Driftgeschwindigkeit |
| $w$ | $m$ | Weite bzw. Breite |
| $W$ | $Ws = J = \frac{kgm^2}{s^2}$ | Arbeit bzw. Energie |
| $\alpha$ | $\frac{1}{°C}$ | Temperturkoeffizient des Ohmwiderstandes |
| $\nu$ | $Hz$ | Hier Frequenz der Welle |
| $\rho$ | $\frac{Vcm}{A} = \Omega cm$ | Spezifischer Widerstand |

Fortsetzung auf Folgeseite

Tabelle 1: Abkürzungen/Formelzeichen

| **Zeichen** | **Einheit** | **Bedeutung** |
|---|---|---|
| $\rho_e$ | ... | Ladungsdichte |
| $\kappa$ | $\frac{1}{\Omega cm} = \frac{S}{cm}$ | Spezifische Leitfähigkeit |
| $\varepsilon_0$ | $\frac{As}{Vm}$ | Dielektrizitätskonstante im Vakuum |
| $\varphi$ | $V$ | Elektrisches Potential |
| $\tau$ | $s$ | Stoßzeit |
| $\tau$ | $s$ | Minoritätsladungsträgerlebensdauer |
| $\mu$ | $\frac{cm^2}{Vs}$ | Beweglichkeit |

## 3.2 Wichtige Donatoren und Akzeptoren

| **Ch. Sym.** | **Name** | **Typ** |
|---|---|---|
| $B$ | Bor | Akzeptor |
| $Al$ | Alluminium | Akzeptor |
| $Ga$ | Gallium | Akzeptor |
| $In$ | Indium | Akzeptor |
| $P$ | Phosphor | Donator |
| $As$ | Arsen | Donator |
| $Sb$ | Antimon | Donator |
| $Bi$ | Wismut | Donator |

## 3.3 Effektive Massen

| **Band** | **Wert** | **Element** |
|---|---|---|
| $\frac{m_n^*}{m_0}$ | $1,08$ | Silizium |
| $\frac{m_n^*}{m_0}$ | $1,561$ | Germanium |
| $\frac{m_n^*}{m_0}$ | $1,067$ | Gallium-Arsenid |
| $\frac{m_p^*}{m_0}$ | $1,10$ | Silizium |
| $\frac{m_p^*}{m_0}$ | $1,291$ | Germanium |
| $\frac{m_p^*}{m_0}$ | $1,473$ | Gallium |

## 3.4 Bandlücken wichtiger Materialien

| **Zeichen** | **Wert in eV** | **Material** |
|---|---|---|
| $E_{g,SiO_2}$ | $9$ | Siliziumdioxid |
| $E_{g,C}$ | $5,47$ | Diamant |
| $E_{g,CdS}$ | $2,42$ | Cadmiumsulfid |
| $E_{g,GaP}$ | $2,26$ | Galliumphosphid |
| $E_{g,GaAs}$ | $1,42$ | Gallium-Arsenid |
| $E_{g,InP}$ | $1,35$ | Indiumphosphid |
| $E_{g,Si}$ | $1,12$ | Silizium |
| $E_{g,Ge}$ | $0,66$ | Germanium |
| $E_{g,InSb}$ | $0,17$ | Indiumantimonid |

## 3.5 Eckdaten wichtiger Halbleiter

| **Ch. Sym.** | $E_g$ **in** $[eV]$ | $N_C$ **in** $[cm^{-3}]$ | $N_V$ **in** $[cm^{-3}]$ | $n_i$ **in** $[cm^{-3}]$ |
|---|---|---|---|---|
| Si | $1,124$ | $2,81 \cdot 10^{19}$ | $2,88 \cdot 10^{19}$ | $1,04 \cdot 10^{10}$ |
| Ge | $0,67$ | $1,05 \cdot 10^{19}$ | $3,92 \cdot 10^{18}$ | $1,55 \cdot 10^{13}$ |
| GaAs | $1,424$ | $4,33 \cdot 10^{17}$ | $8,13 \cdot 10^{18}$ | $2,04 \cdot 10^{6}$ |

## 3.6 Niederfeld- und Niederdotierungsbeweglichkeiten ($T = 300K$)

| $n/p$ | **Si** | **Ge** | **GaAs** |
|---|---|---|---|
| $\mu_n \left[\frac{cm^2}{Vs}\right]$ | 1340 | 3900 | 8000 |
| $\mu_p \left[\frac{cm^2}{Vs}\right]$ | 460 | 1900 | 400 |

## 3.7 Konstanten

| **Ze.** | **Wert** | **Bedeutung** |
|---|---|---|
| $c$ | $2,998... \cdot 10^8 \left[fracms\right]$ | Lichtgeschwindigkeit |
| $e,q$ | $1,602176... \cdot 10^{-19} \left[C\right]$ | Elementarladung |
| $e,q$ | $1,602176... \cdot 10^{-19} \left[J\right]$ | Elementarladung |
| $h$ | $6,63 \cdot 10^{-34} \left[Js\right]$ | Planck-Konstante |
| $h$ | $4,136... \cdot 10^{-15} \left[eVs\right]$ | Planck-Konstante |
| $\hbar$ | $\frac{h}{2\pi}$ | Plancksches Wirkungsquantum |
| $k$ | $8,6173 \cdot 10^{-5} \left[\frac{eV}{K}\right]$ | Boltzmann Konstante |
| $kT$ | $25,85 \left[meV\right]$ | mit der Boltzmann Konstante und $T = 300K$ |
| $m_0$ | $9,11 \cdot 10^{-31} \left[kg\right]$ | Elektronenmasse |
| $\varepsilon_0$ | $8,854.. \cdot 10^{-12} \left[\frac{As}{Vm}\right]$ | Dielektrizitätskonstante des Vakuums |
| $\varepsilon_{Si}$ | $11,90$ | Korrekturfaktor Dielektrizitätskonstante für Silizium |

### 3.8 Nachwort

Diese Formelsammlung wurde nahezu ausschließlich auf Basis des Mikroelektronik-I Scripts von Prof. Dr. Jürgen H. Werner erstellt. Nahezu sämtliche Formeln und Werte sind direkt dem Script entnommen und wurden nicht für diese Sammlung eigenständig hergeleitet. Für ausführlichere Beschreibungen empfehle ich sehr das eben angesprochene Script zu studieren, dass unter (Werner 2017) im Literaturverzeichnis zu finden ist. Es kann direkt im "Kopierlädle"der Universität Stuttgart gedruckt werden. Diese Formelsammlung ist einzige ein Hilfsmittel für mich und meine Kommilitonen und sehr wahrscheinlich nicht fehlerfrei. Sollten Fehler gefunden werden, würde ich mich sehr freuen wenn man mir das kurz in einer E-Mail (f.leuze@outlook.de) mitteilen würde, damit ich entsprechende Korrekturen vornehmen kann.

# 4 Literatur

Werner, P. D.-N. J. H. (2017), *Mikroelektronik I.* Vorlesungsscript.