

## NT2 Kurzzusammenfassung

Florian Leuze

---

„Information is  
the resolution of uncertainty.“  
(C. E. Shannon)

## 3 Anhänge

### 3.1 Nachwort

Dieses Dokument versteht sich einzig als Zusammenfassung des NT2 Stoffes auf Basis der Literatur und der Vorlesungsunterlagen aus der NT2 Vorlesung von Prof. Dr.-Ing Stephan ten Brink. Der Sinn ist einzig mir selbst und meinen Kommilitonen das Studieren der Nachrichtentechnik zu erleichtern. In diesem Sinne erhebe ich keinerlei Anspruch auf das hier dargestellte Wissen, da es sich in großen Teilen nur um Neuformulierungen aus der Literatur, den Vorlesungen und aus der Begleitübung. Sollten sich einige Fehler eingeschlichen haben (was sehr wahrscheinlich ist) würde ich mich freuen, wenn man mich per Email (f.leuze@outlook.de) kontaktieren und mir entsprechende Fehler mitteilen würde.

## 4 Literatur

ten Brink, P. D.-I. S. (2019), 'Nt2 script'. Vorlesungsscript.

$$\begin{array}{l} \text{Logarithmische} \\ \text{Darstellung} \end{array} : X(f)|_{dB} = 10 \log(X^2(f)) \quad (2.28)$$

Das komplexe Basisbandsignal erhält man mit

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{K-1} s_k g(T - kT_s) = \sum_{k=0}^{K-1} (s_{k, re} + j s_{k, im}) g(t - kT_s) \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{K-1} s_{k, re} g(t - kT_s)}_{I \in \mathbb{R}} + j \underbrace{\sum_{k=0}^{K-1} s_{k, im} g(t - kT_s)}_{Q \in \mathbb{R}} \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (2.29)$$

## 2.6 Bandbreite für verschiedene $s_k$

$$\begin{array}{l} \text{Basisbandlage} \\ \text{für reelle } s_k \end{array} : B = \frac{1}{2} R_s = f_{max} \quad (2.30)$$

$$\begin{array}{l} \text{Basisbandlage} \\ \text{für komplexe } s_k \end{array} : B = R_s = 2 \cdot f_{max} \quad (2.31)$$

$$\begin{array}{l} \text{Passband für} \\ \text{reelle und} \\ \text{komplexe } s_k \end{array} : B = R_s = 2 \cdot f_{max} \quad (2.32)$$

## 2.7 Komplexer AWGN Kanal

$$\begin{array}{l} \text{Kapazität} \end{array} : C_{AWGN, komplex}(SNR) = 2 \cdot C_{AWGN, reell}(SNR) = \text{ld}(1 + SNR) \quad (2.33)$$

$$\begin{array}{l} \text{Rauschleis-} \\ \text{tungsdichte} \end{array} : N_0 = 2\sigma^2 \quad (2.34)$$

$$\begin{array}{l} \text{Signal-Rausch} \\ \text{Abstand} \end{array} : SNR = \frac{E_s}{N_0} \quad (2.35)$$

## Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>4</b>
<b>1 Grundlagen der Informationstheorie</b>	<b>5</b>
1.1 Allgemeine Zusammenhänge	5
1.1.1 Fourier Korrespondenzen	5
1.2 Wahrscheinlichkeit von Quellsymbolen	6
1.3 Relative Häufigkeit	7
1.4 Verbundwahrscheinlichkeit	7
1.5 Informationsgehalt	7
1.6 Mittlerer Informationsgehalt einer Quelle	7
1.6.1 Mittlerer Informationsfluss	7
1.7 Redundanz einer Quelle	7
1.8 Quellencodierung	8
1.8.1 Huffman Codierung	9
1.9 Vergleich von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen	10
1.9.1 Einzelwahrscheinlichkeit	10
1.9.2 Verbundwahrscheinlichkeit	10
1.9.3 Übergangswahrscheinlichkeit/Bedingte Wahrscheinlichkeit	10
1.9.4 Übergangsmatrix	10
1.9.5 Binärkanal (BC)	10
1.9.6 Symmetrischer Binärkanal (BSC)	11
1.9.7 Binärer Verlustkanal (BEC)	11
1.10 Kanalkapazität	12
1.10.1 Wechselseitige Information/Transinformation/mutual information	12
1.10.2 Mittlere wechselseitige Information	12
1.10.3 Kanalkapazität	13
1.11 AWGN-Kanal (Additive White Gaussian Noise)	13
1.11.1 Signal Noise Ratio (SNR)	13
1.11.2 Sonderfall Hard Decision	13
1.11.3 Kapazität	13
1.12 Kanalcodierung	14
1.12.1 Hamming-Distanz	15
<b>2 Modulation cosinus-förmiger Träger</b>	<b>15</b>
2.1 Bandbreite	15
2.2 Einzelimpuls	15
2.3 Amplitudenmodulation (AM)	16
2.3.1 Frequenzmultiplex	16
2.3.2 Kohärente Demodulation	16
2.3.3 Inkohärente Demodulation	17
2.4 Quadraturamplitudenmodulation	17
2.5 Digitale QAM	17
2.6 Bandbreite für verschiedene $s_k$	18

2.7	Komplexer AWGN Kanal . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Anhänge</b>	<b>19</b>
3.1	Nachwort . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Literatur</b>	<b>19</b>

## Versionierung

Datum	Vers.	Kürzel	Änderung
30.08.2019	0.1	FL	Erzeugung Dokument; Erzeugung Inhaltsverzeichnis; Erzeugung Versionierung; Erzeugung Literaturverzeichnis; 1.1-1.8;
01.09.2019	0.110	FL	1.9 - 1.10
02.09.2019	0.111	FL	1.11
06.09.2019	0.112	FL	2.1; 2.2; 2.3
09.09.2019	0.2	FL	2.3; 2.4; 2.5; 2.6; 2.7
09.09.2019	0.21	FL	small correction about sectioning

## Abbildungsverzeichnis

1	Codebaum (ten Brink 2019) . . . . .	9
2	Huffman Codierung (ten Brink 2019) . . . . .	9
3	Binärkanal (BC) (ten Brink 2019) . . . . .	10
4	Symmetrischer Binärkanal (BSC) (ten Brink 2019) . . . . .	11
5	Binärer Verlustkanal (BEC) (ten Brink 2019) . . . . .	11
6	Einzelimpuls (ten Brink 2019) . . . . .	15

### 2.3.3 Inkohärente Demodulation

$$\begin{array}{ll} \text{Demodulation} & : z(t) = [A_{off} + a(t)] \cdot \cos(w_0 t), \quad A_{off} + a(t) \stackrel{!}{>} 0 \\ \text{t-domain} & \end{array} \quad (2.16)$$

### 2.4 Quadraturamplitudenmodulation

Bei der QAM wählt man  $x(t) \in \mathbb{C}$  so, dass  $X(f)$  asymmetrisch wird und damit die Redundanz der Seitenbänder verschwindet. Es wird ein zusätzlicher Träger der orthogonal zum cos-Träger steht verwendet. Dadurch beeinflussen sich beide Träger nicht.

$$\text{QAM} \quad : \quad u(t) = \alpha_A [x_1(t) \cdot \cos(\omega_0 t) - x_2(t) \cdot \sin(\omega_0 t)] \quad (2.17)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{re}(t) + jx_{im}(t) = x_1(t) + jx_2(t) = x_I(t) + jx_Q(t) + x_N(t) + jx_Q(t) \\ &\Rightarrow u(t) = \Re\{\alpha_A x(t) \cdot e^{j\omega_0 t}\} \\ &= \Re\{\alpha_A (x_1(t) + jx_2(t))(\cos(\omega_0 t) + j \cdot \sin(\omega_0 t))\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\stackrel{\alpha_A=1}{\Rightarrow} u(t) = x_1(t) \cdot \cos(\omega_0 t) - x_2(t) \cdot \sin(\omega_0 t) \quad (2.19)$$

Im Spektrum ergibt sich folglich

$$\begin{aligned} u(t) &= \Re\{\alpha_A x(t) \cdot e^{j\omega_0 t}\} \stackrel{\alpha_A=\sqrt{2}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} (x(t) \cdot e^{j\omega_0 t} + (x(t) \cdot e^{j\omega_0 t})^*) \\ \Rightarrow u(t) &\quad \longleftrightarrow \quad U(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} (X(\omega - \omega_0) + X^*(-\omega - \omega_0)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\text{Demodulation} \quad : \quad v(t) = \beta \cdot u(t) \cdot e^{-j\omega_0 t} \quad (2.21)$$

### 2.5 Digitale QAM

$$\begin{array}{ll} \text{Komplexes} & : s_k = s_{k,I} + js_{k,Q} \quad , \quad s_k \in \frac{1}{\sqrt{2}}\{\pm 1 \pm j\} \\ \text{Symbol} & \end{array} \quad (2.22)$$

$$\text{Basisbandsignal} \quad : \quad x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} s_k g(t - T_s) \quad , \quad T = T_s \quad (2.23)$$

$$\text{Symbolrate} \quad : \quad R_s = \frac{1}{T_s} \quad (2.24)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Übertragene} & : M_b = \text{ld}(M) \\ \text{Bits pro Symbol} & \end{array} \quad (2.25)$$

$$\text{Bitrate} \quad : \quad R_b = M_b R_s \quad (2.26)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Bandbreite (bei} & \\ \text{Brickstone} & : B = R_s \\ \text{Impuls)} & \end{array} \quad (2.27)$$

## 2.3 Amplitudenmodulation (AM)

$$\text{Träger} : c(t) = \cos(w_0 t + \varphi_0) \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Signal im Passband} : u(t) &= \alpha_A \cdot x(t) \cdot c(t) = \alpha_A \cdot x(t) \cdot \cos(w_0 t + \varphi_0) \\ &= \Re\left\{ \underbrace{x_A \cdot x(t)}_{\text{kompl. Hüllkurve}} \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{jw_0 t} \right\} \quad (2.4) \\ &= \Re\{x(t) \cdot e^{jw_0 t}\} \quad (\text{für } \varphi = 0 \text{ und } \alpha_A = 1) \end{aligned}$$

Mit (1.10) erhält man durch Nutzung der Eulerschen Formel

$$U(w) = \alpha_A \frac{1}{2} [X(w + w_0) + X(w - w_0)] \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Signal mit Offset} : u(t) &= (x(t) + A_{\text{off}}) \cdot \cos(w_0 t) \\ &= (x(t) + A_{\text{off}}) \left[ \frac{1}{2} \cdot e^{jw_0 t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-jw_0 t} \right] \quad (2.6) \end{aligned}$$

Mit (1.11) folgt

$$x(t) + A_{\text{off}} \quad \circ \bullet \quad X(w) + 2\pi A_{\text{off}} \delta(w) \quad (2.7)$$

## 2.3.1 Frequenzmultiplex

$$\text{Fourier Identität} : u(t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) \quad \circ \bullet \quad U(f) = \sum_{i=1}^N U_i(f) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Kanalraster (bei } \Delta f = \text{const}) : \Delta f &= f_{i+1} - f_i \quad (2.9) \end{aligned}$$

## 2.3.2 Kohärente Demodulation

$$\begin{aligned} \text{Demodulation t-domain} : y(t) &= u(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \psi) \cdot \beta \\ &= u(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \psi) \cdot K \quad (2.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Demodulation } \omega \text{-/f-domain} : Y(\omega) &= \frac{1}{2} X(\omega) \cdot \cos(\psi) \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2} X(\omega - 2\omega_0) \frac{1}{2} \cdot e^{j\psi} + \frac{1}{2} X(\omega + 2\omega_0) \frac{1}{2} \cdot e^{-j\psi}}_{\text{wird herausgefiltert}} \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\text{Typische Normierung} : \alpha_A = \beta = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\alpha_K \beta}{2} = 1 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \text{Tiefpass Filtereigenschaft} : f_{TP, \max} &= f_{LP, \max} = f_{\max, LP} \\ f_{\max} &< f_{\max, LP} < 2f_0 - f_{\max} \quad (2.13) \end{aligned}$$

$$\text{Orthogonalitätsbedingung} : \psi \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{sonst } v(\omega) = 0 \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \text{Identität} : V(\omega) &= \frac{1}{2} X(\omega) \cdot \cos(\psi) \\ \circ \bullet \quad v(t) &= \frac{1}{2} x(t) \cdot \cos(\psi) \quad (2.15) \end{aligned}$$

## 1 Grundlagen der Informationstheorie

## 1.1 Allgemeine Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \text{Logarithmus zu beliebiger Basis} : \log_b(x) &= \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \quad (1.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Asymptote } a \text{ zu } \log_b(x) \text{ an } (1, 0) : a &= \frac{1}{\ln(b)}(x - 1) \quad (1.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Fourier Transformation} : X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt \quad (1.3) \end{aligned}$$

## 1.1.1 Fourier Korrespondenzen

Für reelle  $x(t)$  gilt die komplex konjugierte Symmetrie für die Transformierte:

$$\text{Symmetrie} : X(-f) = X^*(f) \quad \wedge \quad |X(-f)| = |X(f)| \quad (1.4)$$

$$g(t) \cdot T = \begin{cases} 1 & , t = 0 \\ \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\pi \frac{t}{T}} & , \text{sonst} \end{cases} \longleftrightarrow G(f) = \begin{cases} 1 & , |f| \leq \frac{R_s}{2} = \frac{1}{2T} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (1.5)$$

$$A \longleftrightarrow A \cdot 2\pi\delta(w) \quad (1.6)$$

$$A \longleftrightarrow A \cdot 2\pi\delta(f) \quad (1.7)$$

$$x(t) \cdot e^{\pm j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f \mp f_0) \quad (1.8)$$

$$x(t) \cdot e^{\pm j2\pi w_0 t} \longleftrightarrow X(w \mp w_0) \quad (1.9)$$

$$u(t) = \alpha_A \cdot x(t) \cdot \cos(w_0 t) \longleftrightarrow U(w) = \alpha_A \frac{1}{2} [X(w + w_0) + X(w - w_0)] \quad (1.10)$$

$$x(t) + A_{\text{off}} \longleftrightarrow X(w) + 2\pi \cdot A_{\text{off}} \cdot \delta(w) \quad (1.11)$$

$$V(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega) \cdot \cos(\psi) \longleftrightarrow v(t) = \frac{1}{2} x(t) \cdot \cos(\psi) \quad (1.12)$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (1.13)$$

$$\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \quad (1.14)$$

$$\sin(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{\pi}{j}(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)) \quad (1.15)$$

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (1.16)$$

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) \quad (1.17)$$

$$X(t) \longleftrightarrow 2\pi x^*(-\omega) \quad (1.18)$$

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \quad (1.19)$$

$$X(f) \longleftrightarrow x^*(-\omega) \quad (1.20)$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & , |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \longleftrightarrow G(f) \cdot R_s = \begin{cases} 1 & , f = 0 \\ \frac{\sin(\pi \frac{f}{R_s})}{\pi \frac{f}{R_s}} & , \text{sonst} \end{cases} \quad (1.21)$$

$$g(t) \cdot T = \begin{cases} 1 & , t = 0 \\ \frac{\sin(\pi \frac{t}{T})}{\pi \frac{t}{T}} & , \text{sonst} \end{cases} \longleftrightarrow G(f) = \begin{cases} 1 & , |f| \leq \frac{R_s}{2} = \frac{1}{2T} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (1.22)$$

## 1.2 Wahrscheinlichkeit von Quellsymbolen

$$\begin{array}{ll} \text{Auftrittswahr-} & \\ \text{scheinlichkeit} & : P[x_i] = P_i \text{ mit } 0 \leq P_i \leq 1 \end{array} \quad (1.23)$$

von  $x_i$  a)

$$\begin{array}{ll} \text{Auftrittswahr-} & \\ \text{scheinlichkeit} & : \sum_{i=1}^N P_i \stackrel{!}{=} 1 \end{array} \quad (1.24)$$

von  $x_i$  b)

$$\begin{array}{ll} \text{Bedingung für} & \\ \text{Gleichvertei-} & : P_i \stackrel{!}{=} \frac{1}{N} \\ \text{lung} & \end{array} \quad (1.25)$$

### 1.1.2.1 Hamming-Distanz

$$\begin{array}{ll} \text{Hamming-} & \\ \text{Distanz} & : h(c_i, c_h) = \sum_{i=1}^N c_{1,i} \oplus c_{2,i} \end{array} \quad (1.82)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimale} & \\ \text{Hamming-} & : h_{\min} = d_{\min} = \min_{\forall i,j (i \neq j)} (h(c_i, c_j)) \\ \text{Distanz} & \end{array} \quad (1.83)$$

**Bemerkung 1.7.** Die minimale Hamming Distanz lässt sich auch einfacher bestimmen. Dazu wird das Codewort mit den wenigsten 1en gesucht. Die Anzahl der Bitstellen die 1wertig sind entsprechen der minimalen Hamming-Distanz.

## 2 Modulation cosinus-förmiger Träger

### 2.1 Bandbreite

$$\begin{array}{ll} \text{Basisbandband-} & \\ \text{breite für reelle} & : B = f_{\max} \end{array} \quad (2.1)$$

$x(t)$

$$\begin{array}{ll} \text{Bandbreite für} & \\ \text{komplexe } x(t) & : B = 2 \cdot f_{\max} \end{array} \quad (2.2)$$

### 2.2 Einzelimpuls

Der Einzelimpuls ist gegeben durch

$$g(t) \cdot T = \begin{cases} 1 & , t = 0 \\ \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\pi \frac{t}{T}} & , \text{sonst} \end{cases}$$

Nach (1.5) ist die Fouriertransformierte

$$G(f) = \begin{cases} 1 & , |f| \leq \frac{R_s}{2} = \frac{1}{2T} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

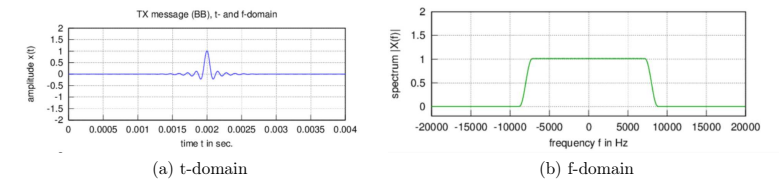


Abbildung 6: Einzelimpuls (ten Brink 2019)

### 1.12 Kanalcodierung

Der Satz von Shannon gibt an ab wann eine fehlerfreie Übertragung prinzipiell möglich ist.

$$\text{Satz von Shannon} : H(X) \leq I(X; Y) \quad (1.71)$$

$$\text{Kanalcodierrate} : R_C = \frac{K}{N} \quad (1.72)$$

Wobei  $K$  der Bitlänge der uncodierten Nachricht und  $N$  der Bitlänge des Codewortes entsprechen.

$$\begin{array}{l} \text{Maximale} \\ \text{Bitfehler damit} \\ \text{Fehlerkorrektur} \\ \text{möglich ist} \end{array} : n_{err} \leq \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor \quad (1.73)$$

Meis wird für die Kanalcodierung eine Codewortmatrix  $CWT$  mit Codivorschrift  $\mathbf{c}$  aufgestellt:

$$CWT = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \textcolor{blue}{1} & \textcolor{blue}{1} & 0 & 0 & \textcolor{blue}{1} & \textcolor{blue}{1} \\ \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (1.74)$$

$$\mathbf{c} = (\mathbf{u}, u_1 \oplus u_2, u_1 \oplus u_3, u_2 \oplus u_3) \quad (1.75)$$

$$u(0, 0, 0) = 000\,000 \quad (1.76)$$

$$\textcolor{blue}{N} = 6 \quad (1.77)$$

$$\textcolor{red}{K} = 3 \quad (1.78)$$

wobei die linke Spalte alle möglichen Bitkombinationen für die uncodierte Nachricht und die rechte Spalte die kontrollierte Redundanz mit Codewort-Vorschrift enthält. Eine komplette Zeile über beide Spalten entspricht einem Codewort (in grün dargestellt) für die entsprechende uncodierte Nachricht. Anhang der Anzahl der Bitstellen einer Zeile der linken Spalte (in rot dargestellt) lässt sich  $K$  ablesen. Anhand der Bitstellen einer gesamten Zeile (blau dargestellt) lässt sich  $N$  ablesen.

$$\text{Energie pro bit} : E_b = \frac{1}{R_C} \cdot E_s \quad (1.79)$$

$$\begin{array}{l} \text{Normierter} \\ \text{Signal-} \\ \text{Rauschabstand} \end{array} : SNR_b = \frac{1}{R_C} \cdot SNR_s = \frac{E_b}{\sigma^2} = \frac{1}{C} \frac{E_s}{\sigma^2} \quad (1.80)$$

$$\text{Signal-} \\ \text{Rauschabstand} : SNR = SNR_s = \frac{E_s}{\sigma^2} \quad (1.81)$$

### 1.3 Relative Häufigkeit

$$\begin{array}{l} \text{Relative} \\ \text{Häufigkeit} \end{array} : h = \frac{\text{Zahl der Treffer}}{\text{Zahl der Versuche}} = \frac{k_T}{K} \leq 1 \quad (1.26)$$

$$\begin{array}{l} \text{Definition der} \\ \text{Wahrscheinlich-} \\ \text{keit} \end{array} : P[\text{Treffer}] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{k_T}{K} = P \quad (1.27)$$

### 1.4 Verbundwahrscheinlichkeit

$$\begin{array}{l} \text{Verbundwahr-} \\ \text{scheinlichkeit} \end{array} : P[X_A, X_B] = P[\text{Ereignis A} \cap \text{Ereignis B}] \quad (1.28)$$

$$\begin{array}{l} \text{Multiplikations-} \\ \text{satz} \end{array} : P[X_A, X_B] = P[X_A] \cdot P[X_B] \quad (1.29)$$

**Bemerkung 1.1.** Der in (1.29) genannte Satz gilt nur für statistisch unabhängige Ereignisse, also Ereignisse die sich gegenseitig nicht beeinflussen.

### 1.5 Informationsgehalt

$$\begin{array}{l} \text{Informationsge-} \\ \text{halt} \end{array} : I(x_i) = \log_2 \left( \frac{1}{P_i} \right) \left[ \frac{\text{bit}}{\text{Symbol}} \right] \quad (1.30)$$

### 1.6 Mittlerer Informationsgehalt einer Quelle

$$\begin{array}{l} \text{Entropie} \end{array} : H(X) = E[I(x_i)] = \sum_{i=1}^N P_i \cdot I(x_i) \quad (1.31)$$

$$= \sum_{i=1}^N P_i \cdot \log_2 \left( \frac{1}{P_i} \right)$$

$$\text{Maximierung} : \max H(X) = H_0 = \log_2(N) \quad (1.32)$$

**Bemerkung 1.2.** Das Maximum der Entropie wird für gleichförmig verteilte Symbolquellen erreicht, also muss gelten:  $0 \leq H(X) \leq \log_2(N)$  und  $P_i = \frac{1}{N}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

#### 1.6.1 Mittlerer Informationsfluss

$$\begin{array}{l} \text{Mittlerer Infor-} \\ \text{mationsfluss} \end{array} : H^* = \frac{H(X)}{T} \quad (1.33)$$

### 1.7 Redundanz einer Quelle

$$\text{Redundanz} : R(X) = H_0 - H(X) = \log_2(N) - H(X) \quad (1.34)$$

$$\begin{array}{l} \text{Relative} \\ \text{Redundanz} \end{array} : r = \frac{R(X)}{H_0} = 1 - \frac{H(X)}{H_0} \quad (1.35)$$

**Bemerkung 1.3.** Die Redundanz wird hauptsächlich durch zwei Methoden beeinflusst. Die Quellencodierung, die Redundanz entfernt und die Kanalcodierung, die Redundanz kontrolliert einfügt. Meist werden beide Verfahren zweistufig kombiniert.

## 1.8 Quellencodierung

$$\begin{array}{ll} \text{Mittlere} & \\ \text{Codewortlänge} & : \quad \bar{m} = E(m_i) = \sum_{i=1}^N P_i \cdot m_i \end{array} \quad (1.36)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimale} & \\ \text{mittlere} & : \quad \bar{m} \geq H(X) \\ \text{Codewortlänge} & \end{array} \quad (1.37)$$

**Bemerkung 1.4.**

- Ordnet einem Symbol bijektiv ein Codewort (CW) zu.
- Die Codewortlänge  $m_i$  gibt die Anzahl der Stellen an.
- Ziel ist es die mittlere Codewortlänge  $\bar{m}$  zu minimieren.
- $\bar{m}$  wird durch einen präfixfreien Code minimiert.
- Bei Constant Length Codewörtern gilt:  $m_0 = \bar{m} = \lceil \log(N) \rceil$ .

### 1.10.3 Kanalkapazität

$$\text{Kanalkap. a)} : C = \max_{\forall P[x_i]} I(X; Y) = I^*(X; Y) \quad (1.55)$$

$$\text{Kanalkap. b)} : C = f(P[y_j|x_i]) \quad (1.56)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Kanalkap. BSC} & : \quad C_{BSC}(P_{err}) = 1 - H_b(P_{err}) \\ & \text{für } P[x_1] = P[x_2] = \frac{1}{2} \end{array} \quad (1.57)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Entropie} & \\ \text{Binärkanal} & : \quad H_b = -P_{err} \cdot \log(P_{err}) - (1 - P_{err}) \cdot \log(1 - P_{err}) \\ & = p \cdot \log\left(\frac{1}{p}\right) + (1 - p) \cdot \log\left(\frac{1}{1-p}\right) \end{array} \quad (1.58)$$

### 1.11 AWGN-Kanal (Additive White Gaussian Noise)

$$\text{AWGN-Signal} : y_k = x_k + n_k \quad y_k \in \mathbb{R}, x_k \in \{-1, 1\}, n_k \in \mathbb{R} \quad (1.59)$$

$$\text{Noise} : n_k \sim \mathbf{N}(0, \sigma^2) \quad (1.60)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Gauss Funktion} & \\ \text{a)} & : \quad p_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\xi^2} \end{array} \quad (1.61)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Gauss Funktion} & \\ \text{b)} & : \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_n(\xi) d\xi = 1 \end{array} \quad (1.62)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Varianz der} & \\ \text{Gauss Funktion} & : \quad \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (n_i - \mu)^2 \quad \text{meist } \mu = 0 \end{array} \quad (1.63)$$

#### 1.11.1 Signal Noise Ratio (SNR)

$$\begin{array}{ll} \text{Signal-Noise-} & \\ \text{Ratio} & : \quad SNR = \frac{E_s}{\sigma^2} = \frac{P_s}{P_n} = \frac{E[|x_k|^2]}{E[|n_k|^2]} = [Q^{-1}(P_{err})]^2 \end{array} \quad (1.64)$$

$$\text{Signalleistung} : P_s = E[|x_k|^2] \quad (1.65)$$

$$\text{Rauschleistung} : P_n = E[|n_k|^2] = \sigma^2 \quad (1.66)$$

$$\text{Q-Funktion} : Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} (1 - \text{erf}(\frac{x}{\sqrt{2}})) \quad (1.67)$$

#### 1.11.2 Sonderfall Hard Decision

$$\text{Fehler} : P_{err} = Q(\sqrt{SNR}) \quad , \text{ mit } SNR = \frac{1}{\sigma^2} \quad (1.68)$$

#### 1.11.3 Kapazität

$$\begin{array}{ll} \text{Kapazität BSC} & : \quad C_{BSC}(SNR) = 1 - H_b(\underbrace{Q(\sqrt{SNR})}_{=P_{err}}) \\ & = 1 - H_b(P_{err}) \end{array} \quad (1.69)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Kapazität} & \\ \text{AWGN} & : \quad C_{AWGN}(SNR) = \frac{1}{2} \log_2(1 + SNR) \end{array} \quad (1.70)$$



## 1.10 Kanalkapazität

### 1.10.1 Wechselseitige Information/Transinformation/mutual information

$$\begin{array}{l} \text{Informationsgehalt a priori} \\ : \end{array} \quad I(x_i) = \text{ld} \left( \frac{1}{P[x_i]} \right) \quad (1.47)$$

$$\begin{array}{l} \text{Informationsgehalt posteriori} \\ : \end{array} \quad I(x_i) = \text{ld} \left( \frac{1}{P[x_i|y_j]} \right) \quad (1.48)$$

Differenzbildung aus (1.47) und (1.48) liefert die wechselseitige Information also den Informationsgewinn:

$$\begin{array}{l} \text{Wechselseitige Information} \\ : \end{array} \quad I(x_i; y_j) = \text{ld} \left( \frac{1}{P[X=x_i]} \right) - \text{ld} \left( \frac{1}{P[X=x_i|Y=y_j]} \right) \\ = \text{ld} \left( \frac{P[X=x_i|Y=y_j]}{P[X=x_i]} \right) \quad (1.49)$$

$$\begin{array}{l} \text{Rausch- und störungsfrei} \\ : \end{array} \quad I(X; Y) = H(X) \quad (1.50)$$

$$\begin{array}{l} \text{Vollständig gestört} \\ : \end{array} \quad I(X; Y) = 0 \quad (1.51)$$

$$\begin{array}{l} \text{Symmetrie} \\ : \end{array} \quad I(x_i; y_j) = I(y_j, x_i) \quad (1.52)$$

Bestimmungsgleichungen für  $I(x_i; y_j)$ :

$$\begin{aligned} P[x_i, y_j] &= P[y_j|x_i] \cdot P[x_i] \\ I(x_i; y_j) &= \text{ld} \left( \frac{1}{P[x_i]} \cdot P[x_i|y_j] \right) \\ P[x_i|y_j] \cdot P[y_j] &= P[y_j|x_i] \cdot P[x_i] = P[x_i, y_j] \\ P[y_j] &= \sum_{i=1; j \text{ fest}}^M P[x_i, y_j] = \sum_{i=1; j \text{ fest}}^M P[y_j, x_i] \cdot P[x_i] \\ \Rightarrow I(x_i; y_j) &= f(P[x_i], P[y_j|x_i]) \end{aligned} \quad (1.53)$$

### 1.10.2 Mittlere wechselseitige Information

$$\begin{array}{l} \text{Mittlere wechselseitige Information} \\ : \end{array} \quad I(X; Y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M P[X=x_i, Y=y_j] \cdot \text{ld} \left( \frac{P[X=x_i|Y=y_j]}{P[X=x_i]} \right) \\ = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M P[X=x_i, Y=y_j] \cdot I(x_i; y_j) \quad (1.54) \\ = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M P[X=x_i, Y=y_j] \cdot \text{ld} \left( \frac{P[Y=y_j|X=x_i]}{P[Y=y_j]} \right) \\ = I(Y; X)$$

**Bemerkung 1.5.** Zum Aufbau eines prüfaffreien Codebuches bietet es sich an einen Codebaum zu nutzen. An jedem Knoten werden jeweils die bits 0 und 1 angeschlossen wobei die Auswahl völlig beliebig ist. Zur Bestimmung der Codewörter wird der Baum dann von links nach rechts durchgearbeitet.

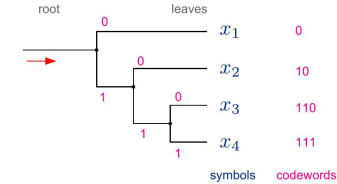


Abbildung 1: Codebaum (ten Brink 2019)

### 1.8.1 Huffman Codierung

**Bemerkung 1.6.** Ziel der Huffman-Codierung ist es einen minimierten und prüfaffreien Code zu erzeugen. Mathematisch ausgedrückt lautet die Bedingung also:

$$\bar{m} = \sum_{i=1}^N P_i \cdot m_i \stackrel{!}{=} \min_{\forall \{m_1, \dots, m_N\}} \quad (1.38)$$

Damit folgt  $P_i \uparrow \Rightarrow m_i \downarrow$  und  $P_i \downarrow \Rightarrow m_i \uparrow$ . Der Ablauf der Huffman-Codierung ist wie folgt:

- 1)  $x_i$  nach fallenden  $P_i$  ordnen.
- 2) Aus  $X_N$  und  $X_{N-1}$  neues Symbol mit  $P_n + P_{N-1}$  bilden.
- 3) Schritt 1) und Schritt 2) wiederholen, bis nur noch ein Symbol übrig ist.
- 4) Knoten des Baums jeweils 0 und 1 zuordnen. Die Zuordnung ist beliebig, es macht aber Sinn ein System einzuführen. Empfehlung aus der Vorlesung: 0 für größere und 1 für kleinere Wahrscheinlichkeit.

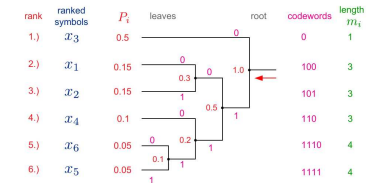


Abbildung 2: Huffman Codierung (ten Brink 2019)

## 1.9 Vergleich von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen

### 1.9.1 Einzelwahrscheinlichkeit

$P[A]$  gibt an, wie wahrscheinlich es ist, dass  $A$  eintritt.

### 1.9.2 Verbundwahrscheinlichkeit

$P[A, B]$  gibt an, wie wahrscheinlich es ist, dass  $A$  und  $B$  zusammen eintreten.

$$\text{Satz von Bayes} \quad : \quad P[x_i, y_j] = P[y_j|x_i] \cdot P[x_i] = P[x_i|y_j] \cdot P[y_j] \quad (1.39)$$

### 1.9.3 Übergangswahrscheinlichkeit/Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P[B|A]$  gibt an, wie wahrscheinlich es ist, dass  $B$  eintritt wenn  $A$  bereits eingetreten ist.

$$\text{Es gilt} \quad : \quad \sum_{j=1}^N P[y_j|x_i] = 1 \quad \text{für } i = \text{const} \quad (1.40)$$

$$\text{Bestimmung von } P[y_j] \quad : \quad P[y_j] = \sum_{i=1}^M P[x_i, y_j] = \sum_{i=1}^M P[y_j|x_i] \cdot P[x_i] \quad (1.41)$$

### 1.9.4 Übergangsmatrix

Die Übergangsmatrix definiert sich als

$$T = (P[y_j|x_i])_{M \times N} = (P_{ij})_{M \times N} = \begin{pmatrix} P[y_1|x_1] & \dots & P[y_N|x_1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P[y_1|x_M] & \dots & P[y_N|x_M] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{M1} & \dots & P_{MN} \end{pmatrix}$$

### 1.9.5 Binärkanal (BC)

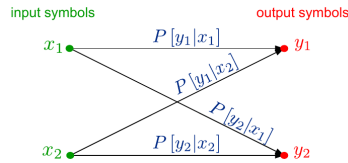


Abbildung 3: Binärkanal (BC) (ten Brink 2019)

Es gilt  $\text{input } M = 2$  und  $\text{output } N = 2$ . Ferner ist die Übergangsmatrix gegeben mit

$$T = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \text{Fehler} \quad : \quad P_{\text{err}} &= P[x_1, y_2] + P[x_2, y_1] \\ &= P[x_1] \cdot P[y_2|x_1] + P[x_2] \cdot P[y_1|x_2] \\ &= P_1 P_{12} + P_2 P_{21} \end{aligned} \quad (1.43)$$

### 1.9.6 Symmetrischer Binärkanal (BSC)

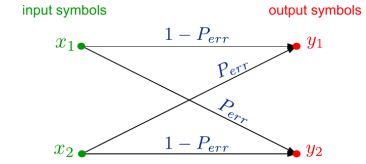


Abbildung 4: Symmetrischer Binärkanal (BSC) (ten Brink 2019)

Es gilt  $P_{12} = P_{21} = P_{\text{err}}$ . Die Übergangsmatrix ist gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 - P_{\text{err}} & P_{\text{err}} \\ P_{\text{err}} & 1 - P_{\text{err}} \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

Mit  $P_2 = 1 - P_1$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Fehler} \quad : \quad P_{\text{err}, \text{BSC}} &= P_{\text{err}} P_1 + P_{\text{err}} P_2 = P_{\text{err}} (P_1 + 1 - P_1) \\ &= P_{\text{err}} \end{aligned} \quad (1.45)$$

### 1.9.7 Binärer Verlustkanal (BEC)

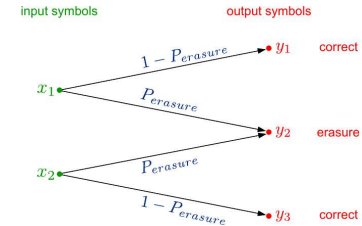


Abbildung 5: Binärer Verlustkanal (BEC) (ten Brink 2019)

Die Übergangsmatrix ergibt sich zu

$$T = \begin{pmatrix} 1 - P_{\text{erasure}} & P_{\text{erasure}} & 0 \\ 0 & P_{\text{erasure}} & 1 - P_{\text{erasure}} \end{pmatrix} \quad (1.46)$$