

NT2 Kurzzusammenfassung

Florian Leuze

„Information is
the resolution of uncertainty.“
(C. E. Shannon)

3 Anhänge

3.1 Nachwort

Dieses Dokument versteht sich einzig als Zusammenfassung des NT2 Stoffes auf Basis der Literatur und der Vorlesungsunterlagen aus der NT2 Vorlesung von Prof. Dr.-Ing Stephan ten Brink. Der Sinn ist einzig mir selbst und meinen Kommilitonen das studieren der Nachrichtentechnik zu erleichtern. In diesem Sinne erhebe ich keinerlei Anspruch auf das hier dargestellte Wissen, da es sich in großen Teilen nur um Neuformulierungen aus der Literatur, den Vorlesungen und aus der Begleitübung. Sollten sich einige Fehler eingeschlichen haben (was sehr wahrscheinlich ist) würde ich mich freuen, wenn man mich per Email (f.leuze@outlook.de) kontaktieren und mir entsprechende Fehler mitteilen würde.

4 Literatur

ten Brink, P. D.-I. S. (2019), ‘Nt2 script’. Vorlesungsscript.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis 4

1 Grundlagen der Informationstheorie 5

1.1 Allgemeine Zusammenhänge 5

1.1.1 Fourier Korrespondenzen 5

1.2 Wahrscheinlichkeit von Quellensymbolen 6

1.3 Relative Häufigkeit 6

1.4 Verbundwahrscheinlichkeit 6

1.5 Informationsgehalt 6

1.6 Mittlerer Informationsgehalt einer Quelle 6

1.6.1 Mittlerer Informationsfluss 6

1.7 Redundanz einer Quelle 7

1.8 Quellencodierung 7

1.8.1 Huffman Codierung 8

1.9 Vergleich von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen 9

1.9.1 Einzelwahrscheinlichkeit 9

1.9.2 Verbundwahrscheinlichkeit 9

1.9.3 Übergangswahrscheinlichkeit/Bedingte Wahrscheinlichkeit 9

1.9.4 Übergangsmatrix 9

1.9.5 Binärkanal (BC) 9

1.9.6 Symmetrischer Binärkanal (BSC) 10

1.9.7 Binärer Verlustkanal (BEC) 10

1.10 Kanalkapazität 11

1.10.1 Wechselseitige Information/Transinformation/mutual information 11

1.10.2 Mittlere wechselseitige Information 11

1.10.3 Kanalkapazität 12

1.11 AWGN-Kanal (Additive White Gaussian Noise) 12

1.11.1 Signal Noise Ratio (SNR) 12

1.11.2 Sonderfall Hard Decision 12

1.11.3 Kapazität 12

1.12 Kanalcodierung 13

1.12.1 Hamming-Distanz 13

2 Modulation cosinus-förmiger Träger 14

2.1 Bandbreite 14

2.2 Einzelimpuls 14

2.3 Amplitudenmodulation (AM) 14

2.3.1 Frequenzmultiplex 15

2.3.2 Kohärente Demodulation 15

2.3.3 Inkohärente Demodulation 15

2.4 Quadraturamplitudenmodulation 15

2.5 Digitale QAM 16

2.6 Bandbreite für verschiedene s_k 17

2.7 Komplexer AWGN Kanal 17

3 Anhänge 18

3.1 Nachwort 18

Versionierung

Datum	Vers.	Kürzel	Änderung
30.08.2019	0.1	FL	Erzeugung Dokument; Erzeugung Inhaltsverzeichnis; Erzeugung Versionierung; Erzeugung Literaturverzeichnis; 1.1-1.8;
01.09.2019	0.110	FL	1.9 - 1.10
02.09.2019	0.111	FL	1.11
06.09.2019	0.112	FL	2.1; 2.2; 2.3
09.09.2019	0.2	FL	2.3; 2.4; 2.5; 2.6; 2.7
09.09.2019	0.21	FL	small correction about sectioning
09.09.2019	0.22	FL	layout change

Abbildungsverzeichnis

1	Codebaum (ten Brink 2019)	8
2	Huffman Codierung (ten Brink 2019)	8
3	Binärkanal (BC) (ten Brink 2019)	9
4	Symmetrischer Binärkanal (BSC) (ten Brink 2019)	10
5	Binärer Verlustkanal (BEC) (ten Brink 2019)	10
6	Einzelimpuls (ten Brink 2019)	14

2.6 Bandbreite für verschiedene s_k

Basisbandlage
für reelle s_k
$$: B = \frac{1}{2} R_s = f_{max}$$
(2.30)

Basisbandlage
für komplexe s_k
$$: B = R_s = 2 \cdot f_{max}$$
(2.31)

Passband für
reelle und
komplexe s_k
$$: B = R_s = 2 \cdot f_{max}$$
(2.32)

2.7 Komplexer AWGN Kanal

Kapazität
$$: C_{AWGN,complex}(SNR) = 2 \cdot C_{AWGN,reell}(SNR) = \text{ld}(1 + SNR)$$
(2.33)

Rauschleis-
tungsdichte
$$: N_0 = 2\sigma^2$$
(2.34)

Signal-Rausch
Abstand
$$: SNR = \frac{E_s}{N_0}$$
(2.35)

Es gilt:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{re}(t) + jx_{im}(t) = x_1(t) + jx_2(t) = x_I(t) + jx_Q(t) + x_N(t) + jx_Q(t) \\ &\Rightarrow u(t) = \Re\{\alpha_A x(t) \cdot e^{j\omega_0 t}\} \\ &= \Re\{\alpha_A (x_1(t) + jx_2(t))(\cos(\omega_0 t) + j \cdot \sin(\omega_0 t))\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\stackrel{\alpha_A=1}{\Rightarrow} u(t) = x_1(t) \cdot \cos(\omega_0 t) - x_2(t) \cdot \sin(\omega_0 t) \quad (2.19)$$

Im Spektrum ergibt sich folglich

$$\begin{aligned} u(t) &= \Re\{\alpha_A x(t) \cdot e^{j\omega_0 t}\} \stackrel{\alpha_A=\sqrt{2}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} (x(t) \cdot e^{j\omega_0 t} + (x(t) \cdot e^{j\omega_0 t})^*) \\ \Rightarrow u(t) &\circ\bullet U(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} (X(\omega - \omega_0) + X^*(-\omega - \omega_0)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\text{Demodulation} : v(t) = \beta \cdot u(t) \cdot e^{-j\omega_0 t} \quad (2.21)$$

2.5 Digitale QAM

$$\text{Komplexes Symbol} : s_k = s_{k,I} + js_{k,Q} \quad , \quad s_k \in \frac{1}{\sqrt{2}}\{\pm 1 \pm j\} \quad (2.22)$$

$$\text{Basisbandsignal} : x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} s_k g(t - T_s) \quad , \quad T = T_s \quad (2.23)$$

$$\text{Symbolrate} : R_s = \frac{1}{T_s} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \text{Übertragene Bits pro Symbol} : M_b &= \text{ld}(M) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\text{Bitrate} : R_b = M_b R_s \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \text{Bandbreite (bei Brickstone Impuls)} : B &= R_s \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\text{Logarithmische Darstellung} : X(f)|_{dB} = 10 \log(X^2(f)) \quad (2.28)$$

Das komplexe Basisbandsignal erhält man mit

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{K-1} s_k g(t - kT_s) = \sum_{k=0}^{K-1} (s_{k,re} + js_{k,im}) g(t - kT_s) \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{K-1} s_{k,re} g(t - kT_s)}_{I \in \mathbb{R}} + j \underbrace{\sum_{k=0}^{K-1} s_{k,im} g(t - kT_s)}_{Q \in \mathbb{R}} \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (2.29)$$

1 Grundlagen der Informationstheorie

1.1 Allgemeine Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \text{Logarithmus zu beliebiger Basis} : \log_b(x) &= \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \text{Asymptote } a \text{ zu } \log_b(x) \text{ an } (1, 0) : a &= \frac{1}{\ln(b)}(x - 1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Fourier Transformation} : X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.1.1 Fourier Korrespondenzen

Für reelle $x(t)$ gilt die komplex konjugierte Symmetrie für die Transformierte:

$$\text{Symmetrie} : X(-f) = X^*(f) \quad \wedge \quad |X(-f)| = |X(f)| \quad (1.4)$$

$$g(t) \cdot T = \begin{cases} 1 & , t = 0 \\ \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\pi \frac{t}{T}} & , \text{sonst} \end{cases} \circ\bullet G(f) = \begin{cases} 1 & , |f| \leq \frac{R_s}{2} = \frac{1}{2T} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (1.5)$$

$$A \circ\bullet A \cdot 2\pi\delta(\omega) \quad (1.6)$$

$$A \circ\bullet A \cdot 2\pi\delta(f) \quad (1.7)$$

$$x(t) \cdot e^{\pm j2\pi f_0 t} \circ\bullet X(f \mp f_0) \quad (1.8)$$

$$x(t) \cdot e^{\pm j2\pi \omega_0 t} \circ\bullet X(\omega \mp \omega_0) \quad (1.9)$$

$$u(t) = \alpha_A \cdot x(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \circ\bullet U(\omega) = \alpha_A \frac{1}{2} [X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)] \quad (1.10)$$

$$x(t) + A_{off} \circ\bullet X(\omega) + 2\pi \cdot A_{off} \cdot \delta(\omega) \quad (1.11)$$

$$V(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega) \cdot \cos(\psi) \circ\bullet v(t) = \frac{1}{2} x(t) \cdot \cos(\psi) \quad (1.12)$$

$$1 \circ\bullet 2\pi\delta(\omega) \quad (1.13)$$

$$\cos(\omega_0 t) \circ\bullet \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \quad (1.14)$$

$$\sin(\omega_0 t) \circ\bullet \frac{\pi}{j}(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)) \quad (1.15)$$

$$e^{j\omega_0 t} \circ\bullet 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (1.16)$$

$$x(t) \circ\bullet X(\omega) \quad (1.17)$$

$$X(t) \circ\bullet 2\pi x^*(-\omega) \quad (1.18)$$

$$x(t) \circ\bullet X(f) \quad (1.19)$$

$$X(f) \circ\bullet x^*(-\omega) \quad (1.20)$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & , |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \circ\bullet G(f) \cdot R_s = \begin{cases} 1 & , f = 0 \\ \frac{\sin(\pi \frac{f}{R_s})}{\pi \frac{f}{R_s}} & , \text{sonst} \end{cases} \quad (1.21)$$

$$g(t) \cdot T = \begin{cases} 1 & , t = 0 \\ \frac{\sin(\pi \frac{t}{T})}{\pi \frac{t}{T}} & , \text{sonst} \end{cases} \circ\bullet G(f) = \begin{cases} 1 & , |f| \leq \frac{R_s}{2} = \frac{1}{2T} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (1.22)$$

1.2 Wahrscheinlichkeit von Quellsymbolen

$$\begin{array}{lcl} \text{Auftrittswahr-} & & \\ \text{scheinlichkeit} & : & P[x_i] = P_i \text{ mit } 0 \leq P_i \leq 1 \\ \text{von } x_i \text{ a)} & & \end{array} \quad (1.23)$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Auftrittswahr-} & & \\ \text{scheinlichkeit} & : & \sum_{i=1}^N P_i \stackrel{!}{=} 1 \\ \text{von } x_i \text{ b)} & & \end{array} \quad (1.24)$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Bedingung für} & & \\ \text{Gleichvertei-} & : & P_i \stackrel{!}{=} \frac{1}{N} \\ \text{lung]} & & \end{array} \quad (1.25)$$

1.3 Relative Häufigkeit

$$\begin{array}{lcl} \text{Relative} & & \\ \text{Häufigkeit} & : & h = \frac{\text{Zahl der Treffer}}{\text{Zahl der Versuche}} = \frac{k_T}{K} \leq 1 \end{array} \quad (1.26)$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Definition der} & & \\ \text{Wahrscheinlich-} & : & P[\text{Treffer}] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{k_T}{K} = P \\ \text{keit} & & \end{array} \quad (1.27)$$

1.4 Verbundwahrscheinlichkeit

$$\begin{array}{lcl} \text{Verbundwahr-} & & \\ \text{scheinlichkeit} & : & P[X_A, X_B] = P[\text{Ereignis A} \cap \text{Ereignis B}] \end{array} \quad (1.28)$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Multiplikations-} & & \\ \text{satz} & : & P[X_A, X_B] = P[X_A] \cdot P[X_B] \end{array} \quad (1.29)$$

Bemerkung 1.1. Der in (1.29) genannte Satz gilt nur für statistisch unabhängige Ereignisse, also Ereignisse die sich gegenseitig nicht beeinflussen.

1.5 Informationsgehalt

$$\begin{array}{lcl} \text{Informationsge-} & & \\ \text{halt} & : & I(x_i) = \log_2 \left(\frac{1}{P_i} \right) \left[\frac{\text{bit}}{\text{Symbol}} \right] \end{array} \quad (1.30)$$

1.6 Mittlerer Informationsgehalt einer Quelle

$$\begin{array}{lcl} \text{Entropie} & : & H(X) = E[I(x_i)] = \sum_{i=1}^N P_i \cdot I(x_i) \\ & & = \sum_{i=1}^N P_i \cdot \text{ld} \left(\frac{1}{P_i} \right) \end{array} \quad (1.31)$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Maximierung} & : & \max H(X) = H_0 = \text{ld}(N) \end{array} \quad (1.32)$$

Bemerkung 1.2. Das Maximum der Entropie wird für gleichförmig verteilte Symbolquellen erreicht, also muss gelten: $0 \leq H(X) \leq \text{ld}(N)$ und $P_i = \frac{1}{N}$, $i = 1, \dots, N$.

1.6.1 Mittlerer Informationsfluss

$$\begin{array}{lcl} \text{Mittlerer Infor-} & & \\ \text{mationsfluss} & : & H^* = \frac{H(X)}{T} \end{array} \quad (1.33)$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Signal mit} & & \\ \text{Offset} & : & u(t) = (x(t) + A_{\text{off}}) \cdot \cos(w_0 t) \\ & & = (x(t) + A_{\text{off}}) \left[\frac{1}{2} \cdot e^{jw_0 t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-jw_0 t} \right] \end{array} \quad (2.6)$$

Mit (1.11) folgt

$$x(t) + A_{\text{off}} \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(w) + 2\pi A_{\text{off}} \delta(w) \quad (2.7)$$

2.3.1 Frequenzmultiplex

$$\begin{array}{lcl} \text{Fourier Identität} & : & u(t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad U(f) = \sum_{i=1}^N U_i(f) \end{array} \quad (2.8)$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Kanalraster (bei} & & \\ \Delta f = \text{const}) & : & \Delta f = f_{i+1} - f_i \end{array} \quad (2.9)$$

2.3.2 Kohärente Demodulation

$$\begin{array}{lcl} \text{Demodulation} & & \\ \text{t-domain} & : & y(t) = u(t) \cdot \cos(w_0 t + \psi) \cdot \beta \\ & & = u(t) \cdot \cos(w_0 t + \psi) \cdot K \end{array} \quad (2.10)$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Demodulation } \omega & & \\ \text{-/f-domain} & : & Y(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega) \cdot \cos(\psi) \\ & & + \underbrace{\frac{1}{2} X(\omega - 2w_0) \frac{1}{2} \cdot e^{j\psi} + \frac{1}{2} X(\omega + 2w_0) \frac{1}{2} \cdot e^{-j\psi}}_{\text{wird herausgefiltert}} \end{array} \quad (2.11)$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Typische} & & \\ \text{Normierung} & : & \alpha_A = \beta = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\alpha_K \beta}{2} = 1 \end{array} \quad (2.12)$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Tiefpass} & & \\ \text{Filtreigenschaft} & : & f_{TP, \max} = f_{LP, \max} = f_{\max, LP} \\ & & f_{\max} < f_{\max, LP} < 2f_0 - f_{\max} \end{array} \quad (2.13)$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Orthogonalitäts-} & & \\ \text{bedingung} & : & \psi \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{sonst } v(\omega) = 0 \end{array} \quad (2.14)$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Identität} & : & V(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega) \cdot \cos(\psi) \\ & & \circ \text{---} \bullet \quad v(t) = \frac{1}{2} x(t) \cdot \cos(\psi) \end{array} \quad (2.15)$$

2.3.3 Inkohärente Demodulation

$$\begin{array}{lcl} \text{Demodulation} & & \\ \text{t-domain} & : & z(t) = [A_{\text{off}} + a(t)] \cdot \cos(w_0 t), \quad A_{\text{off}} + a(t) \stackrel{!}{>} 0 \end{array} \quad (2.16)$$

2.4 Quadraturamplitudenmodulation

Bei der QAM wählt man $x(t) \in \mathbb{C}$ so, dass $X(f)$ asymmetrisch wird und damit die Redundanz der Seitenbänder verschwindet. Es wird ein zusätzlicher Träger der orthogonal zum cos-Träger steht verwendet. Dadurch beeinflussen sich beide Träger nicht.

$$\begin{array}{lcl} \text{QAM} & : & u(t) = \alpha_A [x_1(t) \cdot \cos(w_0 t) - x_2(t) \cdot \cos(w_0 t)] \end{array} \quad (2.17)$$

Bemerkung 1.7. Die minimale Hamming Distanz lässt sich auch einfacher bestimmen. Dazu wird das Codewort mit den wenigsten 1en gesucht. Die Anzahl der Bitstellen die 1wertig sind entsprechen der minimalen Hamming-Distanz.

2 Modulation cosinus-förmiger Träger

2.1 Bandbreite

$$\begin{array}{ll} \text{Basisbandband-} & \\ \text{breite für reelle} & : B = f_{max} \end{array} \quad (2.1)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Bandbreite für} & \\ \text{komplexe } x(t) & : B = 2 \cdot f_{max} \end{array} \quad (2.2)$$

2.2 Einzelimpuls

Der Einzelimpuls ist gegeben durch

$$g(t) \cdot T = \begin{cases} 1 & , t = 0 \\ \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\pi \frac{t}{T}} & , \text{sonst} \end{cases}$$

Nach (1.5) ist die Fouriertransformierte

$$G(f) = \begin{cases} 1 & , |f| \leq \frac{R_s}{2} = \frac{1}{2T} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

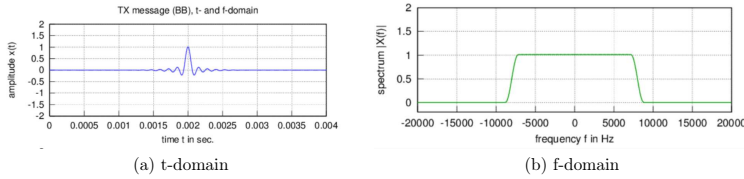


Abbildung 6: Einzelimpuls (ten Brink 2019)

2.3 Amplitudenmodulation (AM)

$$\begin{array}{ll} \text{Träger} & : c(t) = \cos(w_0 t + \varphi_0) \end{array} \quad (2.3)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Signal im} & \\ \text{Passband} & : u(t) = \alpha_A \cdot x(t) \cdot c(t) = \alpha_A \cdot x(t) \cdot \cos(w_0 t + \varphi_0) \\ & = \Re\{ \underbrace{x_A \cdot x(t)}_{\text{kompl. Hüllkurve}} \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{jw_0 t} \} \\ & = \Re\{x(t) \cdot e^{jw_0 t}\} \quad (\text{für } \varphi = 0 \text{ und } \alpha_A = 1) \end{array} \quad (2.4)$$

Mit (1.10) erhält man durch Nutzung der Eulerschen Formel

$$U(w) = \alpha_A \frac{1}{2} [X(w + w_0) + X(w - w_0)] \quad (2.5)$$

1.7 Redundanz einer Quelle

$$\begin{array}{ll} \text{Redundanz} & : R(X) = H_0 - H(X) = \text{ld}(N) - H(X) \end{array} \quad (1.34)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Relative} & \\ \text{Redundanz} & : r = \frac{R(X)}{H_0} = 1 - \frac{H(X)}{H_0} \end{array} \quad (1.35)$$

Bemerkung 1.3. Die Redundanz wird hauptsächlich durch zwei Methoden beeinflusst. Die Quellencodierung, die Redundanz entfernt und die Kanalcodierung, die Redundanz kontrolliert einfügt. Meist werden beide Verfahren zweistufig kombiniert.

1.8 Quellencodierung

$$\begin{array}{ll} \text{Mittlere} & \\ \text{Codewortlänge} & : \bar{m} = E(m_i) = \sum_{i=1}^N P_i \cdot m_i \end{array} \quad (1.36)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Minimale} & \\ \text{mittlere} & : \bar{m} \geq H(X) \\ \text{Codewortlänge} & \end{array} \quad (1.37)$$

Bemerkung 1.4.

- Ordnet einem Symbol bijektiv ein Codewort (CW) zu.
- Die Codewortlänge m_i gibt die Anzahl der Stellen an.
- Ziel ist es die mittlere Codewortlänge \bar{m} zu minimieren.
- \bar{m} wird durch einen prüffreien Code minimiert.
- Bei Constant Length Codewörtern gilt: $m_0 = \bar{m} = \lceil \text{ld}(N) \rceil$.

Bemerkung 1.5. Zum Aufbau eines präfixfreien Codebuches bietet es sich an einen Codebaum zu nutzen. An jedem Knoten werden jeweils die bits 0 und 1 angeschrieben wobei die Auswahl völlig beliebig ist. Zur Bestimmung der Codewörter wird der Baum dann von links nach rechts durchgearbeitet.

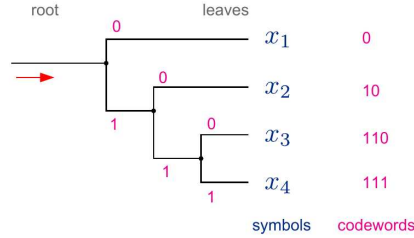


Abbildung 1: Codebaum (ten Brink 2019)

1.8.1 Huffman Codierung

Bemerkung 1.6. Ziel der Huffman-Codierung ist es einen minimierten und präfixfreien Code zu erzeugen. Mathematisch ausgedrückt lautet die Bedingung also:

$$\bar{m} = \sum_{i=1}^N P_i \cdot m_i \stackrel{!}{=} \min_{\forall \{m_1, \dots, m_N\}} \quad (1.38)$$

Damit folgt $P_i \uparrow \Rightarrow m_i \downarrow$ und $P_i \downarrow \Rightarrow m_i \uparrow$. Der Ablauf der Huffman-Codierung ist wie folgt:

- 1) x_i nach fallenden P_i ordnen.
- 2) Aus X_N und X_{N-1} neues Symbol mit $P_n + P_{N-1}$ bilden.
- 3) Schritt 1) und Schritt 2) wiederholen, bis nur noch ein Symbol übrig ist.
- 4) Knoten des Baums jeweils 0 und 1 zuordnen. Die Zuordnung ist beliebig, es macht aber Sinn ein System einzuführen. Empfehlung aus der Vorlesung: 0 für größere und 1 für kleinere Wahrscheinlichkeit.

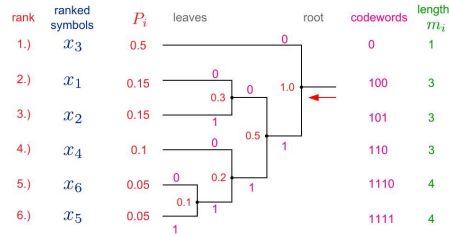


Abbildung 2: Huffman Codierung (ten Brink 2019)

1.12 Kanalcodierung

Der Satz von Shannon gibt an ab wann eine fehlerfreie Übertragung prinzipiell möglich ist.

$$\text{Satz von Shannon} : H(X) \leq I(X; Y) \quad (1.71)$$

$$\text{Kanalcodierrate} : R_C = \frac{K}{N} \quad (1.72)$$

Wobei K der Bitlänge der uncodierten Nachricht und N der Bitlänge des Codewortes entsprechen.

$$\begin{array}{l} \text{Maximale} \\ \text{Bitfehler damit} \\ \text{Fehlerkorrektur} \\ \text{möglich ist} \end{array} : n_{err} \leq \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor \quad (1.73)$$

Meis wird für die Kanalcodierung eine Codewortmatrix CWT mit Codiervorschrift \mathbf{c} aufgestellt:

$$CWT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

$$\mathbf{c} = (\mathbf{u}, u_1 \oplus u_2, u_1 \oplus u_3, u_2 \oplus u_3) \quad (1.75)$$

$$u(0, 0, 0) = 000\ 000 \quad (1.76)$$

$$N = 6 \quad (1.77)$$

$$K = 3 \quad (1.78)$$

wobei die linke Spalte alle möglichen Bitkombinationen für die uncodierte Nachricht und die rechte Spalte die kontrollierte Redundanz mit Codewort-Vorschrift enthält. Eine komplette Zeile über beide Spalten entspricht einem Codewort (in grün dargestellt) für die entsprechende uncodierte Nachricht. Anhang der Anzahl der Bitstellen einer Zeile der linken Spalte (in rot dargestellt) lässt sich K ablesen. Anhand der Bitstellen einer gesamten Zeile (blau dargestellt) lässt sich N ablesen.

$$\text{Energie pro bit} : E_b = \frac{1}{R_C} \cdot E_s \quad (1.79)$$

$$\begin{array}{l} \text{Normierter} \\ \text{Signal-} \\ \text{Rauschabstand} \end{array} : SNR_b = \frac{1}{R_C} \cdot SNR_s = \frac{E_b}{\sigma^2} = \frac{1}{C \frac{E_s}{\sigma^2}} \frac{E_s}{\sigma^2} \quad (1.80)$$

$$\begin{array}{l} \text{Signal-} \\ \text{Rauschabstand} \end{array} : SNR = SNR_s = \frac{E_s}{\sigma^2} \quad (1.81)$$

1.12.1 Hamming-Distanz

$$\text{Hamming-Distanz} : h(c_i, c_h) = \sum_{i=1}^N c_{1,i} \oplus c_{2,i} \quad (1.82)$$

$$\begin{array}{l} \text{Minimale} \\ \text{Hamming-} \\ \text{Distanz} \end{array} : h_{min} = d_{min} = \min_{\forall i,j (i \neq j)} (h(c_i, c_j)) \quad (1.83)$$

1.10.3 Kanalkapazität

$$\text{Kanalkap. a)} : C = \max_{\forall P[x_i]} I(X; Y) = I^*(X; Y) \quad (1.55)$$

$$\text{Kanalkap. b)} : C = f(P[y_j|x_i]) \quad (1.56)$$

$$\text{Kanalkap. BSC} : C_{BSC}(P_{err}) = 1 - H_b(P_{err}) \quad \text{für } P[x_1] = P[x_2] = \frac{1}{2} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} \text{Entropie} \\ \text{Binärkanal} : H_b &= -P_{err} \cdot \ln(P_{err}) - (1 - P_{err}) \cdot \ln(1 - P_{err}) \\ &= p \cdot \ln\left(\frac{1}{p}\right) + (1 - p) \cdot \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) \end{aligned} \quad (1.58)$$

1.11 AWGN-Kanal (Additive White Gaussian Noise)

$$\text{AWGN-Signal} : y_k = x_k + n_k \quad y_k \in \mathbb{R}, x_k \in \{-1, 1\}, n_k \in \mathbb{R} \quad (1.59)$$

$$\text{Noise} : n_k \sim N(0, \sigma^2) \quad (1.60)$$

$$\text{Gauss Funktion a)} : p_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\xi^2} \quad (1.61)$$

$$\text{Gauss Funktion b)} : \int_{-\infty}^{\infty} p_n(\xi) d\xi = 1 \quad (1.62)$$

$$\text{Varianz der Gauss Funktion} : \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (n_i - \mu^2) \quad \text{meist } \mu = 0 \quad (1.63)$$

1.11.1 Signal Noise Ratio (SNR)

$$\text{Signal-Noise-Ratio} : SNR = \frac{E_s}{\sigma^2} = \frac{P_s}{P_n} = \frac{E[|x_k|^2]}{E[|n_k|^2]} = [Q^{-1}(P_{err})]^2 \quad (1.64)$$

$$\text{Signalleistung} : P_s = E[|x_k|^2] \quad (1.65)$$

$$\text{Rauschleistung} : P_n = E[|n_k|^2] = \sigma^2 \quad (1.66)$$

$$\text{Q-Funktion} : Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi = \frac{1}{2}(1 - \text{erf}(\frac{1}{\sqrt{2}})) \quad (1.67)$$

1.11.2 Sonderfall Hard Decision

$$\text{Fehler} : P_{err} = Q(\sqrt{SNR}) \quad , \text{ mit } SNR = \frac{1}{\sigma^2} \quad (1.68)$$

1.11.3 Kapazität

$$\begin{aligned} \text{Kapazität BSC} : C_{BSC}(SNR) &= 1 - H_b(Q(\sqrt{SNR})) \\ &= 1 - H_b(\underbrace{P_{err}}_{=P_{err}}) \end{aligned} \quad (1.69)$$

$$\text{Kapazität AWGN} : C_{AWGN}(SNR) = \frac{1}{2} \log_2(1 + SNR) \quad (1.70)$$

1.9 Vergleich von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen

1.9.1 Einzelwahrscheinlichkeit

$P[A]$ gibt an, wie wahrscheinlich es ist, dass A eintritt.

1.9.2 Verbundwahrscheinlichkeit

$P[A, B]$ gibt an, wie wahrscheinlich es ist, dass A und B zusammen eintreten.

$$\text{Satz von Bayes} : P[x_i, y_j] = P[y_j|x_i] \cdot P[x_i] = P[x_i|y_j] \cdot P[y_j] \quad (1.39)$$

1.9.3 Übergangswahrscheinlichkeit/Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P[B|A]$ gibt an, wie wahrscheinlich es ist, dass B eintritt wenn A bereits eingetreten ist.

$$\text{Es gilt} : \sum_{j=1}^N P[y_j|x_i] = 1 \quad \text{für } i = \text{const} \quad (1.40)$$

$$\text{Bestimmung von } P[y_j] : P[y_j] = \sum_{i=1}^M P[x_i, y_j] = \sum_{i=1}^M P[y_j|x_i] \cdot P[x_i] \quad (1.41)$$

1.9.4 Übergangsmatrix

Die Übergangsmatrix definiert sich als

$$\begin{aligned} T &= (P[y_j|x_i])_{M \times N} = (P_{ij})_{M \times N} = \begin{pmatrix} P[y_1|x_1] & \dots & P[y_N|x_1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P[y_1|x_M] & \dots & P[y_N|x_M] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{M1} & \dots & P_{MN} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.9.5 Binärkanal (BC)

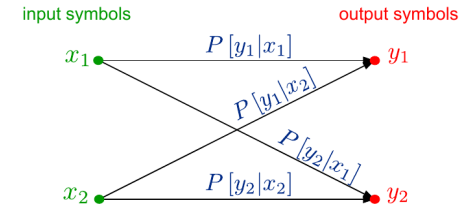


Abbildung 3: Binärkanal (BC) (ten Brink 2019)

Es gilt $input M = 2$ und $output N = 2$. Ferner ist die Übergangsmatrix gegeben mit

$$T = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned}
\text{Fehler} &: P_{err} = P[x_1, y_2] + P[x_2, y_1] \\
&= P[x_1] \cdot P[y_2|x_1] + P[x_2] \cdot P[y_1|x_2] \\
&= P_1 P_{12} + P_2 P_{21}
\end{aligned} \tag{1.43}$$

1.9.6 Symmetrischer Binärkanal (BSC)

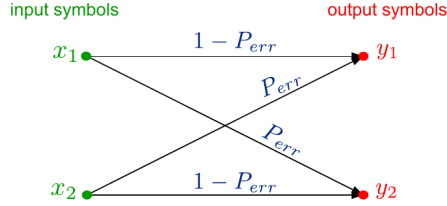


Abbildung 4: Symmetrischer Binärkanal (BSC) (ten Brink 2019)

Es gilt $P_{12} = P_{21} = P_{err}$. Die Übergangsmatrix ist gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 - P_{err} & P_{err} \\ P_{err} & 1 - P_{err} \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

Mit $P_2 = 1 - P_1$ ergibt sich

$$\text{Fehler} : P_{err, BSC} = P_{err} P_1 + P_{err} P_2 = P_{err} (P_1 + 1 - P_1) = P_{err} \tag{1.45}$$

1.9.7 Binärer Verlustkanal (BEC)

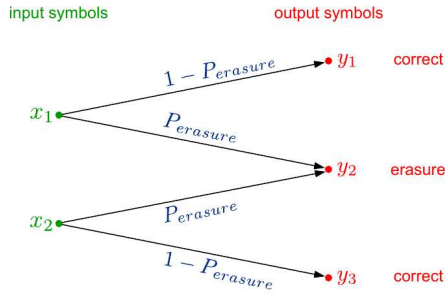


Abbildung 5: Binärer Verlustkanal (BEC) (ten Brink 2019)

Die Übergangsmatrix ergibt sich zu

$$T = \begin{pmatrix} 1 - P_{erasure} & P_{erasure} & 0 \\ 0 & P_{erasure} & 1 - P_{erasure} \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

1.10 Kanalkapazität

1.10.1 Wechselseitige Information/Transinformation/mutual information

$$\begin{aligned} \text{Informationsgehalt a priori} &: I(x_i) = \text{ld} \left(\frac{1}{P[x_i]} \right) \end{aligned} \tag{1.47}$$

$$\begin{aligned} \text{Informationsgehalt posteriori} &: I(x_i) = \text{ld} \left(\frac{1}{P[x_i|y_j]} \right) \end{aligned} \tag{1.48}$$

Differenzbildung aus (1.47) und (1.48) liefert die wechselseitige Information also den Informationsgewinn:

$$\begin{aligned} \text{Wechselseitige Information} &: I(x_i; y_j) = \text{ld} \left(\frac{1}{P[x_i]} \right) - \text{ld} \left(\frac{1}{P[x_i|y_j]} \right) \\ &= \text{ld} \left(\frac{P[x_i|y_j]}{P[x_i]} \right) \end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\text{Rausch- und störungsfrei} : I(X; Y) = H(X) \tag{1.50}$$

$$\text{Vollständig gestört} : I(X; Y) = 0 \tag{1.51}$$

$$\text{Symmetrie} : I(x_i; y_j) = I(y_j, x_i) \tag{1.52}$$

Bestimmungsgleichungen für $I(x_i; y_j)$:

$$\begin{aligned}
P[x_i, y_j] &= P[y_j|x_i] \cdot P[x_i] \\
I(x_i; y - J) &= \text{ld} \left(\frac{1}{P[x_i]} \cdot P[x_i|y_j] \right) \\
P[x_i|y_j] \cdot P[y_j] &= P[y_j|x_i] \cdot P[x_i] = P[x_i, y_j] \\
P[y_j] &= \sum_{i=1; j \text{ fest}}^M P[x_i, y_j] = \sum_{i=1; j \text{ fest}}^M P[y_j, x_i] \cdot P[x_i] \\
\Rightarrow I(x_i; y_j) &= f(P[x_i], P[y_j|x_i])
\end{aligned} \tag{1.53}$$

1.10.2 Mittlere wechselseitige Information

$$\begin{aligned}
\text{Mittlere wechselseitige Information} &: I(X; Y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M P[X = x_i, Y = y_j] \cdot \text{ld} \left(\frac{P[X=x_i|Y=y_j]}{P[X=x_i]} \right) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M P[X = x_i, Y = y_j] \cdot I(x_i; y_j) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M P[X = x_i, Y = y_j] \cdot \text{ld} \left(\frac{P[Y=y_j|X=x_i]}{P[Y=y_j]} \right) \\
&= I(Y; X)
\end{aligned} \tag{1.54}$$