Домашнее Задание №1

Дарвин Эдлеазар Пиче Круз

17 сентября 2021 г.

1.1

Для каждой из рассматриваемых дальше функций f(n) найдите наиболее компактно записываемую g(n), что $f(n) = \Theta(g(n))$ и докажите это соотношение.

a) $f(n) = 7n^2 - 7(n-3)^2$
Решение

$$f(n) = 7n^2 - 7n^2 + 42n - 63 \longrightarrow f(n) = 42n - 63$$

Ответ: $f(n) = \Theta(n)$
Доказательство:
Возьмём $c_2 = 42$ и $c_1 = 1$ тогда: $c_1 \cdot n \leq f(n) \leq c_2 \cdot n \; \forall n > n_0$

b) $f(n) = 5n + 2\sqrt[3]{n}$
Решение

$$f(n) = 5n + 2n^{\frac{1}{3}}$$

Ответ: $f(n) = \Theta(n)$
Доказательство:
Возьмём $c_2 = 7$ и $c_1 = 1$ тогда: $c_1 \cdot n \leq f(n) \leq c_2 \cdot n \; \forall n > n_0$

c) $f(n) = 10(n+1)^2 + 3(n-2)$
Решение

$$f(n) = 10n^2 + 20n + 10 + 3n - 6 \longrightarrow f(n) = 10n^2 + 23n + 4$$

Ответ: $f(n) = \Theta(n^2)$
Доказательство:
Возьмём $c_2 = 37$ и $c_1 = 1$ тогда: $c_1 \cdot n^2 \leq f(n) \leq c_2 \cdot n^2 \; \forall n > n_0$

d) $f(n) = log(\sqrt{n}) + \sqrt{log(n)}$

Решение

$$f(n) = log\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + (log(n))^{\frac{1}{2}} \longrightarrow f(n) = \frac{1}{2}log(n) + (log(n))^{\frac{1}{2}}$$

Ответ: $f(n) = \Theta(log(n))$
Доказательство:
Возьмём $c_2 = 4$ и $c_1 = \dfrac{1}{2}$ тогда: $c_1 \cdot log(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot log(n)\ \forall n > n_0$

e) $f(n) = n \cdot 3^{n+1} + n^{10}$
Ответ: $f(n) = \Theta(n \cdot 3^{n+1})$
Доказательство:
Возьмём $c_2 = 7000$ и $c_1 = 1$ тогда: $c_1 \cdot n \cdot 3^{n+1} \leq f(n) \leq c_2 \cdot n \cdot 3^{n+1}\ \forall n > n_0$

f) $f(n) = \dfrac{10n^2 + 2}{7n - 1}$
Решение

$$10n^2 + 2 = (7n - 1)\left(10n + \frac{10}{49}\right) + \frac{108}{49}$$

$$\frac{10n^2 + 2}{7n - 1} = 10n + \frac{10}{49} + \frac{108}{49(7n - 1)}$$

Ответ: $f(n) = \Theta(n)$
Доказательство:
Возьмём $c_2 = 100$ и $c_1 = 1$ тогда: $c_1 \cdot n \leq f(n) \leq c_2 \cdot n\ \forall n > n_0$

g) $f(n) = log(2nlog(n))$
Решение

$$f(n) = log(2) + log(n) + log(log(n))$$

Ответ: $f(n) = \Theta(log(n))$
Доказательство:
Возьмём $c_2 = 100$ и $c_1 = 1$ тогда: $c_1 \cdot log(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot log(n)\ \forall n > n_0$

1.2

Для следующих пар функций f(n) и g(n) покажите, верно ли, что $f(n) = O(g(n))$ и докажите свой ответ.

a)

$$f(n) = log(n)$$

$$g(n) = \sqrt{n}$$

Ответ: Верно
Доказательство:
$\forall c > 0 \; f(n) \leq c \cdot g(n) \;\; \forall n > n_0$

b)

$$f(n) = n\sqrt{n}log(n)$$

$$g(n) = n \log^3 n$$

Ответ: Неверно
Доказательство:
$\nexists c : \; f(n) \leq c{\cdot}g(n) \;\; \forall n > n_0$ т. е. Неважно, насколько большим становится c, всегда существует n, так что $f(n) > c \cdot g(n)$

c)

$$f(n) = n)$$

$$g(n) = (\log n)^{\log n}$$

Ответ: Неверно
Доказательство:
$\nexists c : \; f(n) \leq c{\cdot}g(n) \;\; \forall n > n_0$ т. е. Неважно, насколько большим становится c, всегда существует n, так что $f(n) > c \cdot g(n)$ например: если $c = 10000$, возьмём $n = 100000$ и тогда $f(n) > c \cdot g(n)$

1.3

Время работы некоторого алгоритма задано следующим рекуррентным соотношением. Найдите Θ-асимптотику времени работы этого алгоритма, построив дерево рекурсивных вызовов.

a)

$$T(n) = T(n-1) + 2n^2$$

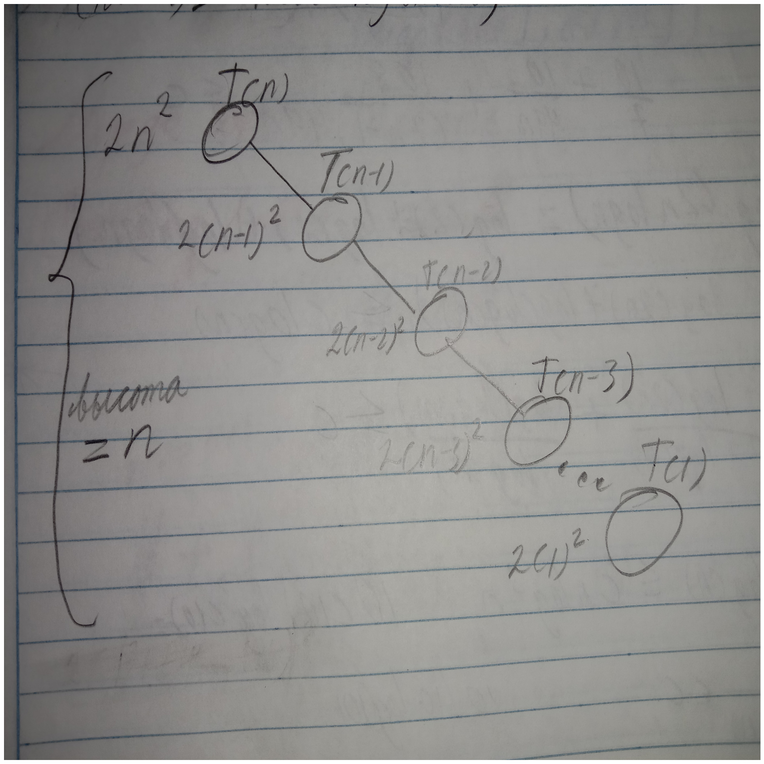

Рис. 1:

так как высота дерева = n (рис 1):

$$T(n) = 2 * (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \Theta(n^3)$$

b)

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + n$$

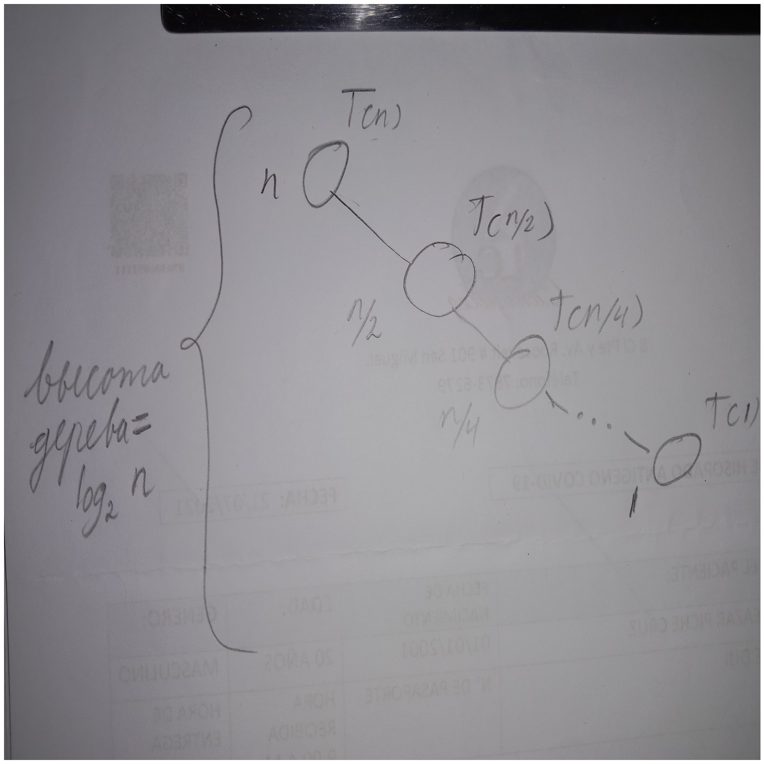

Рис. 2:

так как высота дерева $= log(n)$ (рис 2):

$$T(n) = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + ... \frac{n}{2^{log(n)}} = \cancel{n} \cdot \frac{2^{log(n)} + 2^{log(n)-1} + \cdots + 2^0}{\cancel{2^{log(n)}}}$$
$$= 2^{log(n)+1} - 1 = 2^{log(n)} * 2 - 1 = 2n - 1 = \Theta(n)$$

c)

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + 2$$

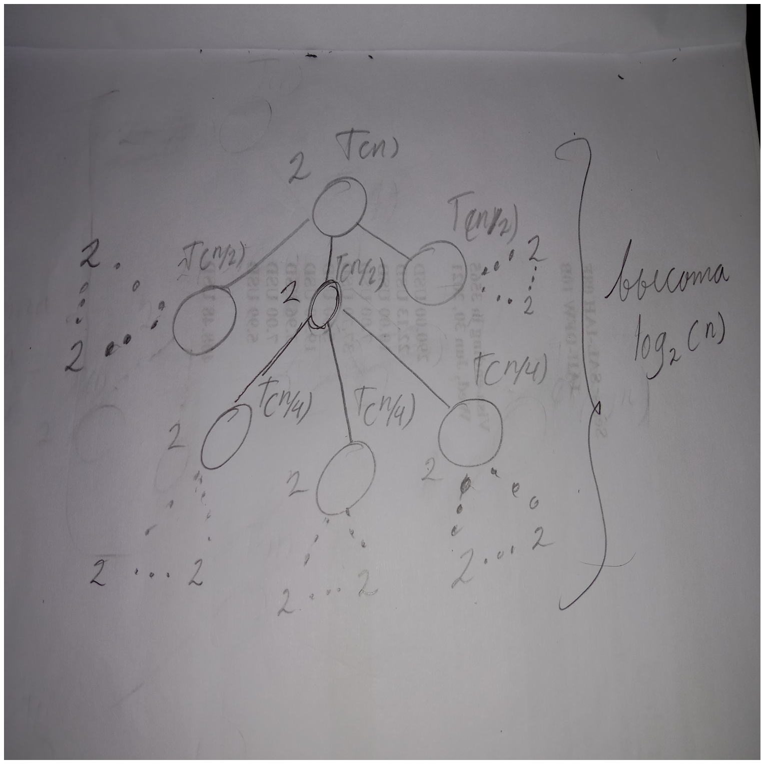

Рис. 3:

мы подсчитываем количество узлов дерева, и это количество раз, когда мы суммируем 2.
так как высота дерева = $log(n)$ (рис 3):

$$T(n) = 2 * 3^{log(n)} = 2 * 3^{\frac{\log_3 n}{\log_3 2}} = \sqrt[\log_3 2]{3^{\log_3 n}} = \sqrt[\log_3 2]{n}$$

так как $\log_3 2 \approx 1$

$$T(n) = \Theta(n)$$

d)

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + \log n$$

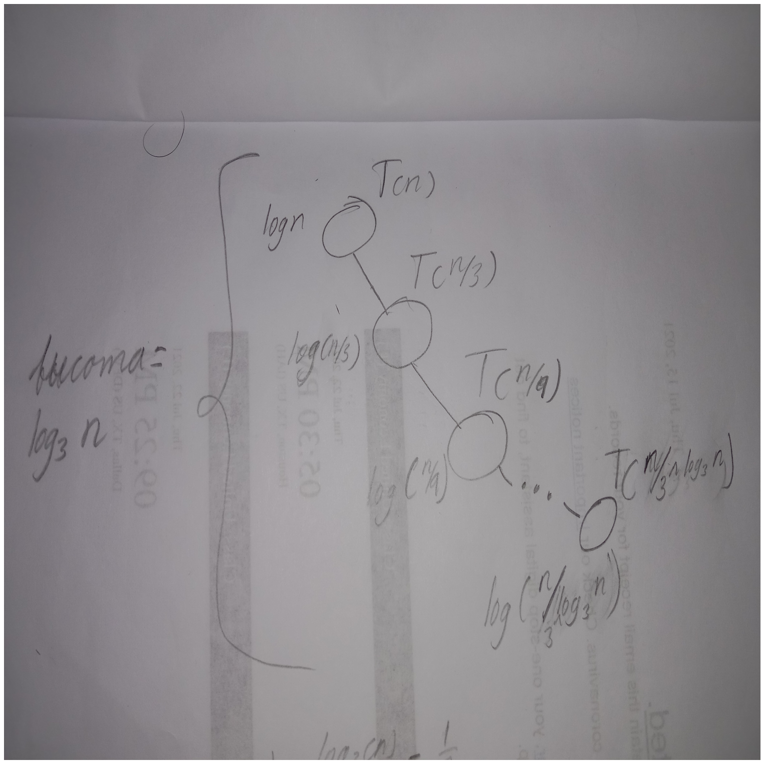

Рис. 4:

так как высота дерева $= \log_3(n)$ (рис 4):

$$T(n) = \log n + \log\left(\frac{n}{3}\right) + \log\left(\frac{n}{9}\right) + \cdots + \log\left(\frac{n}{3^{\log_3(n)}}\right)$$

$$T(n) = \log\left(\frac{n^{\log_3(n)}}{3^{1+2+3+\cdots+\log_3(n)}}\right)$$

$$T(n) = \log\left(\frac{n^{\log_3(n)}}{\sqrt{n^{\log_3(n)+1}}}\right)$$

$$T(n) = \log_3(n)\log(n) - \left(\frac{\log_3(n)+1}{2}\right)\log\left(\sqrt{n}\right)$$

$$T(n) = \Theta(\log_3(n)\log(n))$$

1.4

Докажите следующие утверждения по индукции. В качестве базы во всех пунктах можно считать, что $T(1) = 1$.

a)

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1 \longrightarrow T(n) = \mathcal{O}(\log(n))$$

Решение

Попробуем с $T(2) = 2T(\sqrt{2}) + 1 \leq c\log(2) \longrightarrow 2(1) + 1 \leq c$. Возьмём $c = 3$ и уравнение удовлетворяется.

$$\forall n > 1: \quad 2T(\sqrt{n}) + 1 \leq c\log n$$

Для $n + 1$:

$$T(n+1) = 2T(\sqrt{n+1}) + 1 = 2(2T(\sqrt{n}) + 1) + 1 = 4T(\sqrt{n}) + 3$$

Так как $T(\sqrt{n}) + 3 \leq c\log(n)$ при c достаточно большой: $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1 \;\; T(n) = \mathcal{O}(\log(n))$

b)

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \longrightarrow T(n) = \mathcal{O}(n\log(n))$$

Решение

Попробуем с $T(2) = 2T(1) + 2 \leq c * 2\log(2) \longrightarrow 4 \leq 2 * c$. Возьмём $c = 2$ и уравнение удовлетворяется.

$$\forall n > 1: \quad 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq cn\log n$$

Для $n + 1$:

$$T(n+1) = 2T\left(\frac{n+1}{2}\right) + n + 1 = 2(2T\left(\frac{n}{2}\right) + n) + n + 1 = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + 3n + 1$$

Так как $4T\left(\frac{n}{2}\right) + 3n + 1 \leq cn\log(n)$ при c достаточно большой: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \longrightarrow T(n) = \mathcal{O}(n\log(n))$

c)

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \longrightarrow T(n) = \Omega(n\log(n))$$

Решение

Попробуем с $T(2) = 2T(1) + 2 \geq c * 2\log(2) \longrightarrow 4 \geq 2 * c$. Возьмём $c = 1$ и уравнение удовлетворяется.

$$\forall n > 1: \quad 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \geq cn\log n$$

Для $n + 1$:

$$T(n+1) = 2T\left(\frac{n+1}{2}\right) + n + 1 = 2(2T\left(\frac{n}{2}\right) + n) + n + 1 = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + 3n + 1$$

Так как $T\left(\frac{n}{2}\right) + 3n + 1 \geq cn\log(n)$при c достаточно маленький: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \longrightarrow T(n) = \Omega(n\log(n))$

d)

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \longrightarrow T(n) = \Omega(n)$$

Решение

Попробуем с $T(2) = 3T(1) + 1 \geq 2c \longrightarrow 4 \geq 2 * c$. Возьмём $c = 1$ и уравнение удовлетворяется.

$$\forall n > 1: \;\; 3T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \geq cn$$

Для $n+1$:

$$T(n+1) = 3T\left(\frac{n+1}{2}\right) + 1 = 3\left(3T\left(\frac{n}{2}\right) + 1\right) + 1 = 9T\left(\frac{n}{2}\right) + 4$$

Так как $9T\left(\frac{n}{2}\right) + 4 \geq cn$ при c достаточно маленький:
$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \longrightarrow T(n) = \Omega(n)$

1.5

Докажите, что

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t} = \Omega(\log n)$$

Решение

Используя метод интегралами, так как площадь под кривой $\leq$ нашей суммы

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t} \geq \int_{1}^{n} \frac{1}{n} dn$$

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t} \geq \log(n) - \cancel{\log(1)} + C$$

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t} \geq C_2 \log(n)$$

При C_2 Достаточно маленький, уравнение удовлетворяется

1.6

6. Докажите или опровергните следующие утверждения. В качестве опровержения достаточно привести контрпример и показать, почему для него утверждение не выполняет

a)

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \longrightarrow f^2(n) = \mathcal{O}(g(n))$$

Решение так как

$$f(n) \leq c(g(n))$$

$$f(n) \cdot f(n) \leq c(g(n)) \cdot f(n) \leq c(g(n)) \cdot c(g(n))$$

$$f^2(n) \leq c^2(g^2(n))$$

Возьмём $c_2 = c^2$

$$f^2(n) \leq c_2(g^2(n))$$

Ответ: Верно

b)

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \longrightarrow 2^{f(n)} = \mathcal{O}(2^{g(n)})$$

Решение так как

$$f(n) \leq cg(n)$$

$$2^{f(n)} \leq 2^{cg(n)}$$

$$2^{f(n)} \leq 2^c * 2^{g(n)}$$

Возьмём $c_2 = 2^c$

$$2^{f(n)} \leq c_2 \cdot 2^{g(n)}$$

Ответ: Верно

c)

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \longrightarrow \log(f(n)) = \mathcal{O}(\log(g(n)))$$

Решение так как

$$f(n) \leq cg(n)$$

$$\log(f(n)) \leq \log(cg(n))$$

$$\log(f(n)) \leq \log c + \log(g(n))$$

Возьмём c_2 Достаточно болшой, такой что:

$$\log(f(n)) \leq c_2 \log(g(n))$$

Ответ: Верно