Nicht lineare Schwingungen

$F(x) = -Dx + D_2 x^2 + D_3 x^3$

$F(-x) = -F(x) \rightarrow$ ungerade Fkt $D_2 = 0$

$F(x) = -Dx + D_3 x^3$

Reaction of the spring is symmetric with respect to positive and negative displacements by the same distance

Dgl: $m\ddot{x} + Dx + D_3 x^3 = 0$

Phasendiagram

$y(t) = \dot{x}(t)$

$\frac{dx}{dt} = y$

$m\frac{dy}{dt} = -Dx + D_3 x^3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-Dx - D_3 x^3}{my}$

$my\,dy + (Dx + D_3 x^3)\,dx = 0$

$\frac{1}{2} m y^2 + \underbrace{\frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{4} D_3 x^4}_{\text{Potentielle Energie}} = E$

$X(t)$

$\dot{X}(x)$ - Diagramm

Nicht-lineare Pendel

$$\frac{d^2\theta}{dt} + \frac{g}{e}\sin(\theta) = 0 \qquad \sin(\theta) \sim \theta$$

$$\frac{1}{2}y^2 + w^2(1-\cos(x)) = E \qquad \frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -w^2 \sin x$$

$$x(t) = \theta(t)$$

$$y(t) = \theta'(t)$$

Schwingungsdauer

3

Chaos

Beispiel $m\ddot{x} + c\dot{x} + Dx + D_3 x^3 = F_0 \cos(\Omega t)$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{e}\sin(\theta) + c\dot{\theta} = F_0 \sin(\Omega t)$$

non linear pendulum exhibits simple oscillatory motion, while at high drive it can be chaotic

Analyse: F_0 wird variiert

$\theta(t)$ wird geplottet (nach 300 transients decayed away

θ als Funktion von F_0 und Ω plotten where it is in phase with the driving force

4

Why Are Nonlinear Problems So Hard?

As we've mentioned earlier, most nonlinear systems are impossible to solve analytically. Why are nonlinear systems so much harder to analyze than linear ones? The essential difference is that *linear systems can be broken down into parts*. Then each part can be solved separately and finally recombined to get the answer.

5

Grenzen der Vorhersagbarkeit [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Liegt chaotisches Verhalten vor, dann führen selbst geringste Änderungen der Anfangswerte nach einer endlichen Zeitspanne, die vom betrachteten System abhängt, zu einem völlig anderen Verhalten (sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen). Es zeigt sich also ein nichtvorhersagbares Verhalten, das sich zeitlich scheinbar irregulär entwickelt. Dabei kann das Verhalten des Systems bei bestimmten Anfangswerten (bzw. in deren Nachbarschaft) völlig regulär sein, wenn es sich z. B. um einen periodischen Orbit handelt.

Jede auch noch so kleine Änderung der Anfangswerte kann jedoch nach hinreichend langer Zeit zu einem ganz anderen Verhalten führen, das auch vollkommen unregelmäßig erscheinen kann. Um das Systemverhalten für eine bestimmte zukünftige Zeit berechnen zu können, müssen die Anfangsbedingungen deshalb mit unendlich genauer Präzision bekannt sein und berechnet werden, was praktisch unmöglich ist. Obwohl auch solche Systeme deterministisch und damit prinzipiell bestimmbar sind, sind daher praktische Vorhersagen nur für mehr oder weniger kurze Zeitspannen möglich.[4]

Dieses Phänomen ist auch unter dem Schlagwort Schmetterlingseffekt in der Öffentlichkeit bekannt geworden, wonach selbst der schwache Flügelschlag eines sehr weit entfernten Schmetterlings auf lange Sicht zu einem anderen Ablauf des großräumigen Wettergeschehens führen kann.

6

Grundlagen [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Die Chaostheorie beschreibt das zeitliche Verhalten von Systemen mit deterministisch chaotischer Dynamik. Versucht man Experimente identisch zu wiederholen, so ist das in der Praxis nicht möglich, da auf Grund unvermeidbarer Messungenauigkeiten – und durch Rauschen – die Ausgangssituation nicht identisch wiederhergestellt werden kann. Falls ein System deterministisch chaotisch ist, so kann das System nach hinreichend langer Zeit trotz experimentell fast identischer (bzw. bestmöglich identischer) Ausgangssituationen zu deutlich anderen Endzuständen bzw. Messergebnissen führen.

Dies wird als „sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen" bezeichnet. Am Computer können solche Systeme simuliert werden und diese Simulationen prinzipiell identisch oder mit kleinen Abweichungen wiederholt werden. Die Sensitivität der Anfangsbedingung tritt hier in der Form auf, dass, wenn man z. B. die Genauigkeit der Startbedingung geringfügig ändert, das Ergebnis der Simulation grundlegend modifiziert wird. Dies liegt daran, dass anfangs beliebig dicht liegende Trajektorien am Ende der Simulation diese Eigenschaft nicht mehr besitzen. (Mathematisch: Die Stetigkeit der Abbildung ist zwar für kleine Zeiten gegeben, im Limes großer Zeiten aber nicht mehr.)

7

Näherungsverfahren

$\ddot{x} + f(x) = 0$

$x(t) = A_0 + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ | $\dot{x}(0) = 0$ $\Rightarrow B = 0$

$f(x) = -f(-x) \quad \Rightarrow A_0 = 0$

$x(t) = \cos(\omega t)$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$ $\quad$ $f(x)$ ist periodisch $\Rightarrow$ Fourier-Reihe

8

Beispiel

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0$$

$$x = A \cdot \cos(\omega t)$$

Additionstheoreme

$$x^3 = A^3 \cos^3(\omega t) = \frac{3}{4} A^3 \cos(\omega t) + \frac{1}{4} A^3 \cos(3\omega t)$$

Oberschw. vernachlässigt : $\ddot{x} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon A^2}{\omega_0^2}\right) x = 0$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon \frac{A^2}{\omega_0}\right)$$ Schwingungsdauer hängt von A ab.

Erzwungene nichtlineare Schwingungen

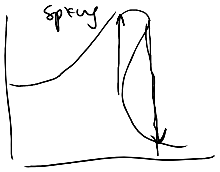
Ansatz $x(t) = A \sin(\Omega t - \varphi)$

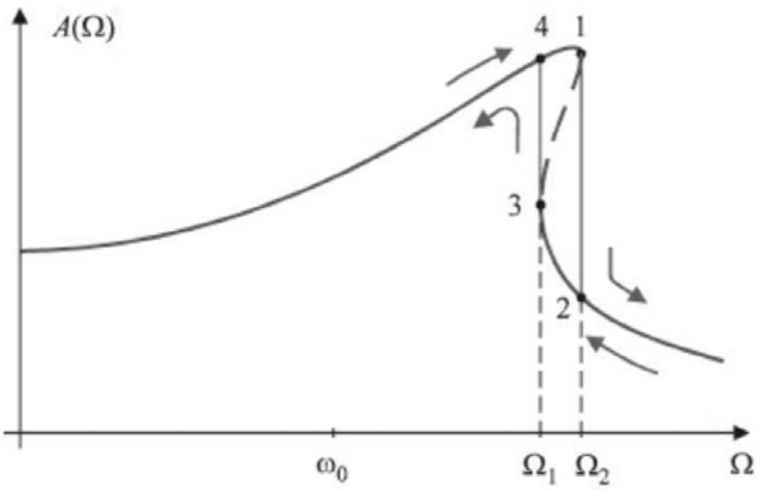
$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = f_0 \sin \Omega t$$

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)\, A \sin(\Omega t - \varphi) + 2\gamma \Omega A \cos(\Omega t - \varphi)$$
$$+ \varepsilon \frac{A^3}{4} [3 \sin \Omega t - \varphi) - \sin(3\Omega t - 3\varphi) = f_0 \sin(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \left((\omega_0^2 - \Omega^2) A + \frac{3}{4} \varepsilon A^3\right)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2 A^2 = f_0^2 \quad A(\Omega)$$

Amplituden $\tan \varphi = \dfrac{2\gamma \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \frac{3}{4} \varepsilon A^2}$





$$\left[(\omega_0^2-\Omega^2)\,A-\frac{3}{4}\varepsilon A^3\right]^2+4\gamma^2\,\Omega^2\,A^2=f_0^2$$

11

Untersuchungen von Dgln

1. Num. Lösung   Abh. der Lösungen von den Anfangsbed.

2. Analytische Näherungslösung

12