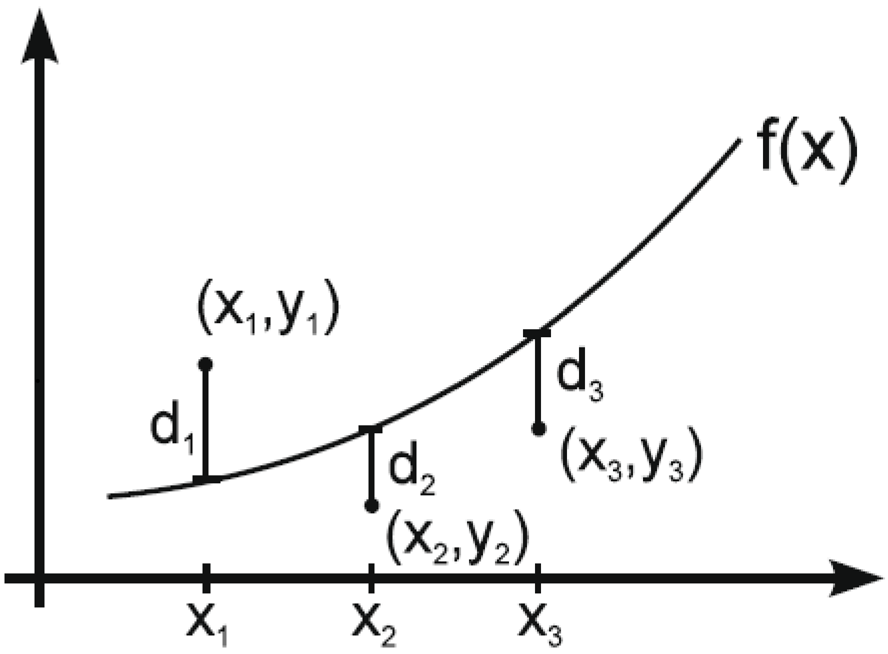
Abgabe: Bitte ein pdf und ein NB! Im Titel die Namen!

Unbekannte Daten

Prinzip der kleinsten Quadrate



$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f\left(x_i\right)\right)^2 .$$ Minimieren

Unbekannte Daten

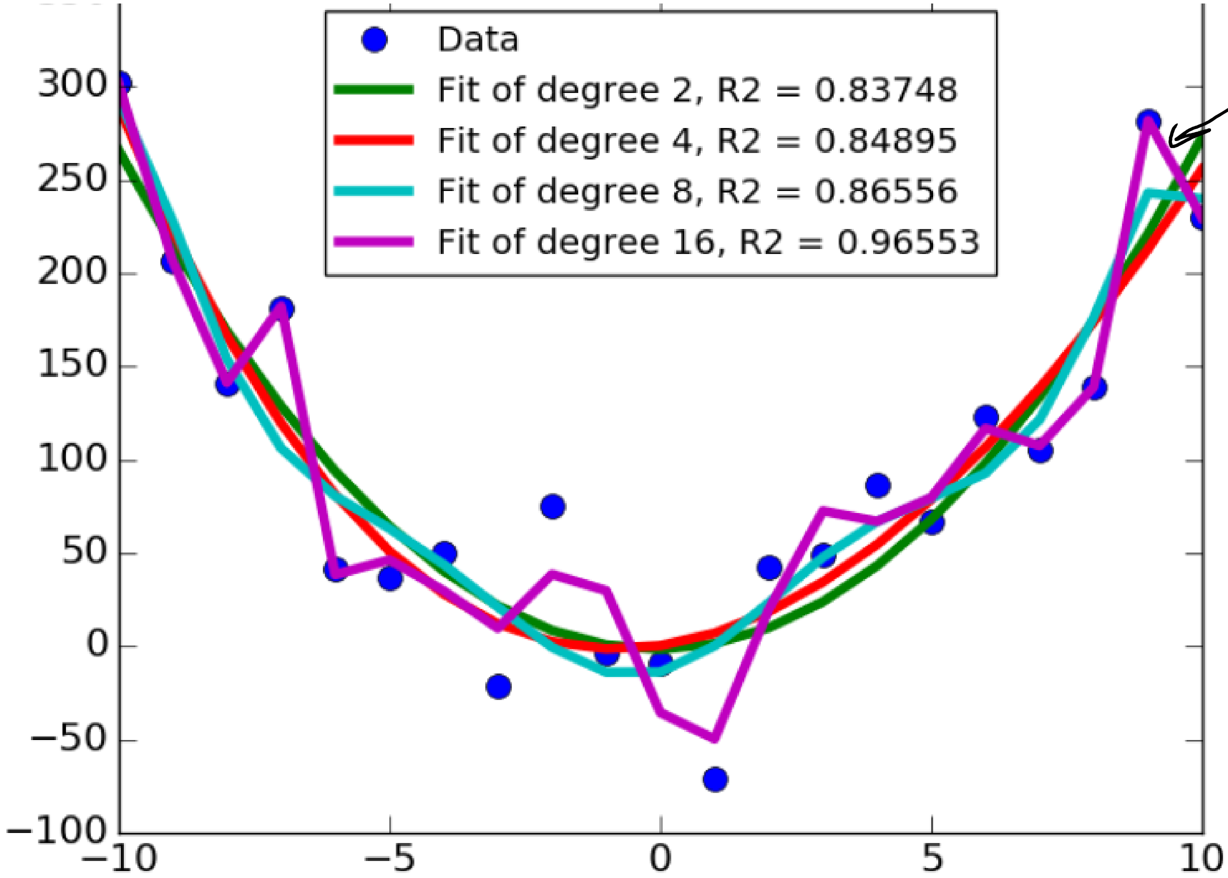
Geeignet für:

Polynomfunktion	$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$	$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$
Potenzfunktion	$f(x) = a x^b$	a, b
Exponentialfunktion	$f(x) = a e^{bx}$	a, b

$a x^b \rightarrow \underbrace{\ln a}_{\text{Achsenabschnitt}} + \overset{\text{Steigung}}{b} \ln x = \ln(y)$ doppelt logarithmisch

$\ln y = \ln a + bx$ $\ln y$ gegen x auftragen einfach logarithm.

Unbekannte Daten



over fitting

Vorhersage von „neuen" Daten ?

Daten : $3x^2$ + Gauss-Rauschen

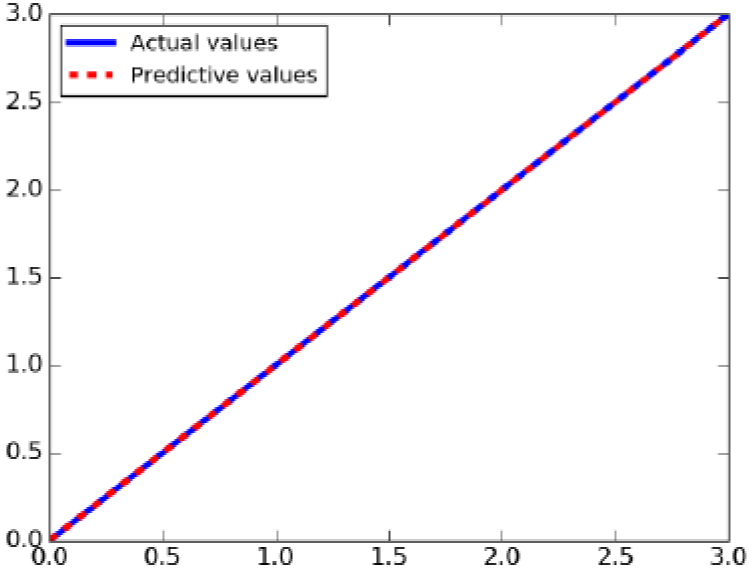
Unbekannte Daten

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - p_i)^2}{\sum_i (y_i - \mu)^2}$$

```
def rSquared(observed, predicted):
    error = ((predicted - observed)**2).sum()
    meanError = error/len(observed)
    return 1 - (meanError/numpy.var(observed))
```

Unbekannte Daten

```
xVals = (0,1,2,3)
yVals = xVals
pylab.plot(xVals, yVals, label = 'Actual values')
a,b,c = pylab.polyfit(xVals, yVals, 2)
print('a =', round(a, 4), 'b =', round(b, 4),
        'c =', round(c, 4))
estYVals = pylab.polyval((a,b,c), xVals)
pylab.plot(xVals, estYVals, 'r--', label ='Predictive values')
print('R-squared = ', rSquared(yVals, estYVals))
```



$$y = ax^2 + bx + c$$

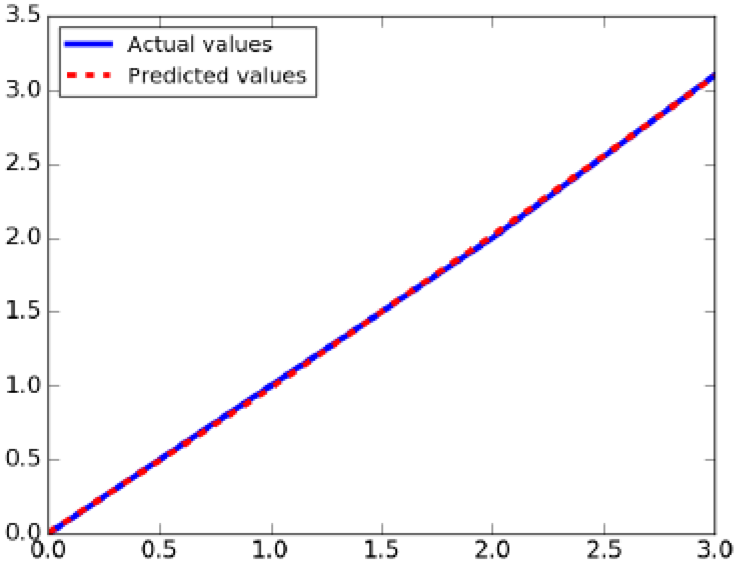
$$y = 0x^2 + 1x + 0$$

$$y = x$$

Unbekannte Daten

```
xVals = (0,1,2,3)
yVals = (0,1,2,3.1)
pylab.plot(xVals, yVals, label = 'Actual values')
model = pylab.polyfit(xVals, yVals, 2)
print(model)
estYVals = pylab.polyval(model, xVals)
pylab.plot(xVals, estYVals, 'r--', label = 'Predicted values')
print('R-squared = ', rSquared(yVals, estYVals))
```

Fehler



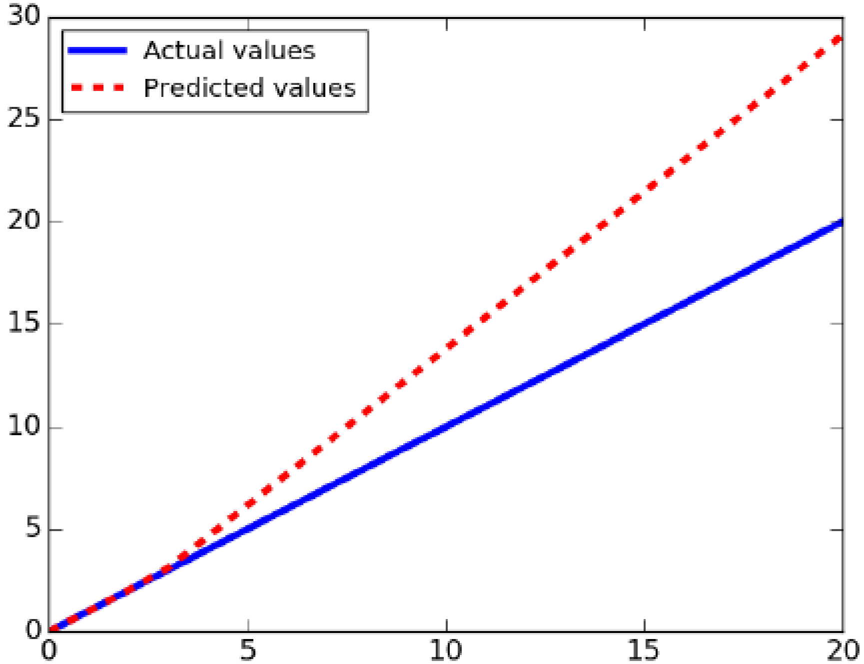
$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = .025x^2 + .955x + .005$$

R-squared = 0.9994

Unbekannte Daten

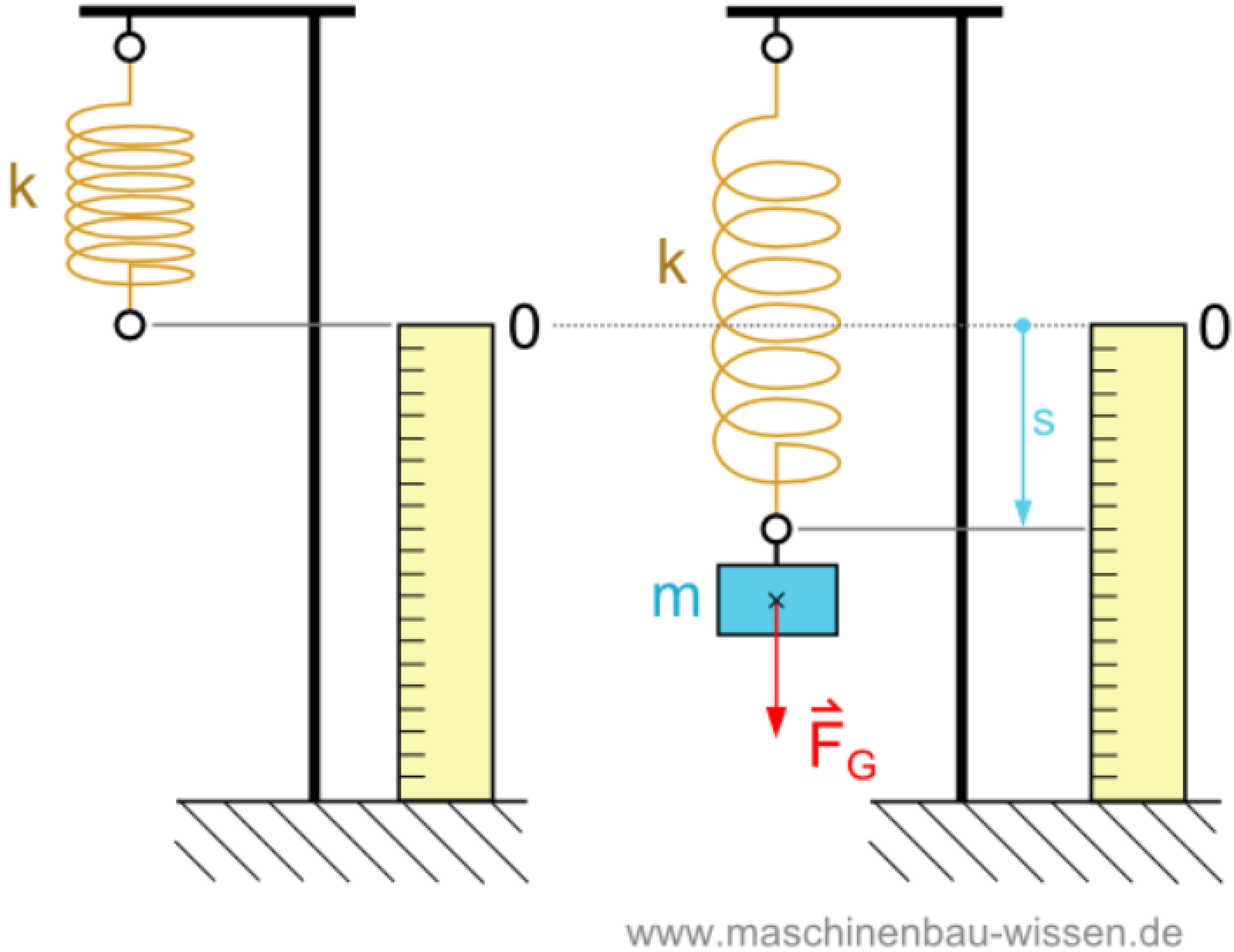
```
xVals = xVals + (20,)
yVals = xVals
estYVals = pylab.polyval(model, xVals)
print('R-squared = ', rSquared(yVals, estYVals))
pylab.figure()
pylab.plot(xVals, estYVals)
```



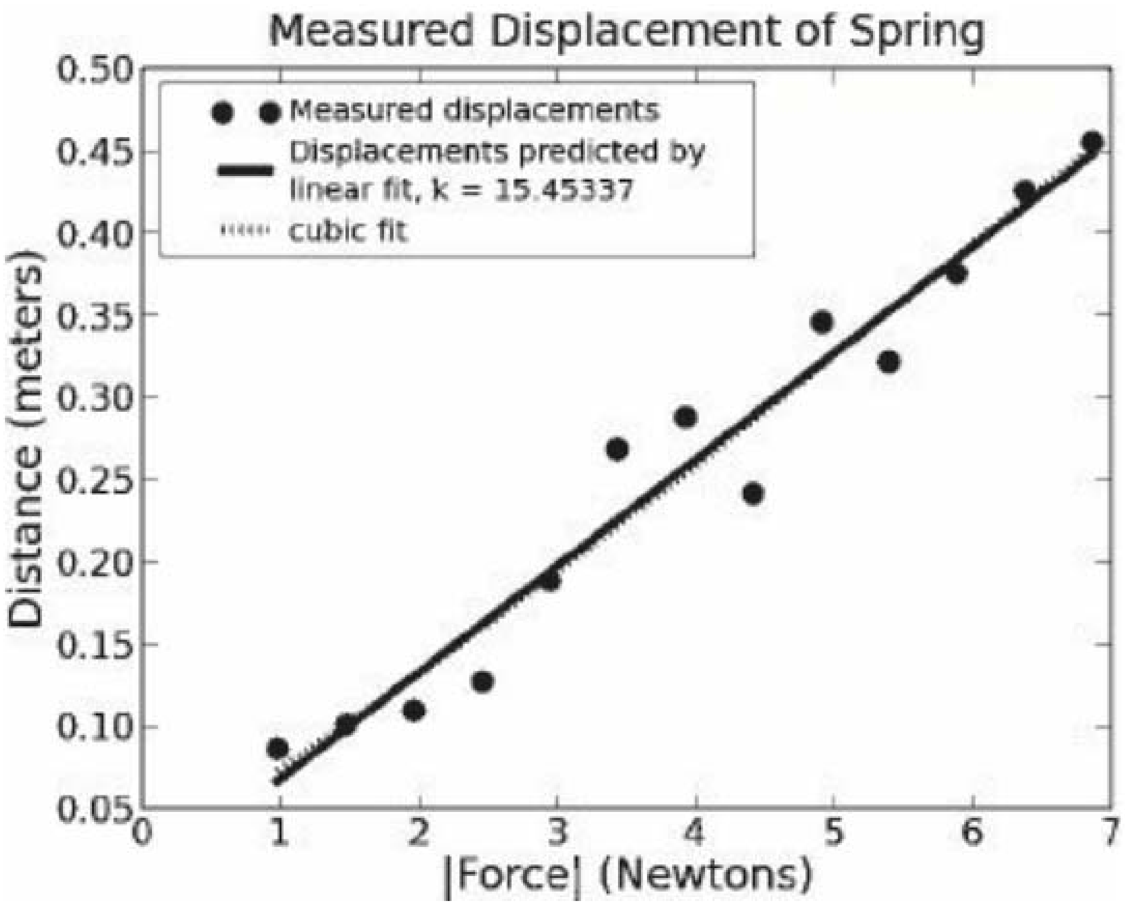
Fehler!

Kreuzvalidierung
„Leave-one-out“

Feder



Unbekannte Daten



Bei kleiner Auslenkung → linear

Leonard Suesskind (Klassische Mechanik)

In classical physics, if you know everything about a system at some instant of time, and you also know the equations that govern how the system changes, then you can predict the future. That's what we mean when we say that the classical laws of physics are deterministic. If we can say the same thing, but with the past and future reversed, then the same equations tell you everything about the past. Such a system is called reversible.

Systeme und Zustandsraum

A collection of objects is called a system.

A system that is either the entire universe or is so isolated from everything else that it behaves as if nothing else exists is a closed system.

In physics, the collection of all states occupied by a system is its space of states, or, more simply, its state-space. The state-space is not ordinary space; it’s a mathematical set whose elements label the possible states of the system.

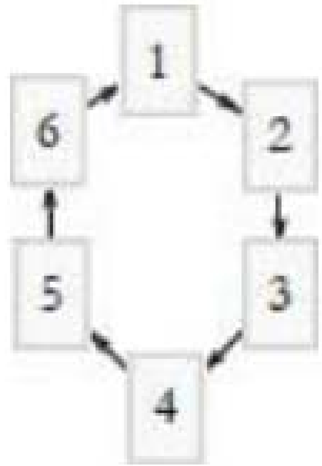
Systeme und Zustandsraum

In classical mechanics we assume that systems evolve smoothly, without any jumps or interruptions. Such behavior is said to be continuous.

A world whose evolution is discrete could be called stroboscopic. A system that changes with time is called a dynamical system.

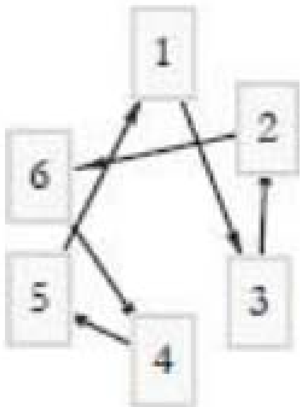
A dynamical system consists of more than a space of states. It also entails a law of motion, or dynamical law. The dynamical law is a rule that tells us the next state given the current state.

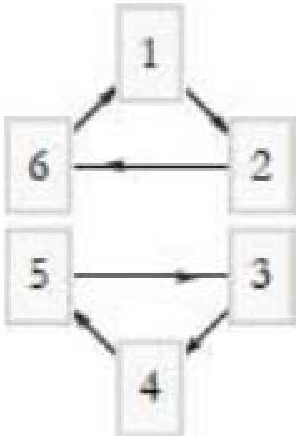
Because in each case the future behavior is completely determined by the initial state, such laws are deterministic. All the basic laws of classical mechanics are deterministic.



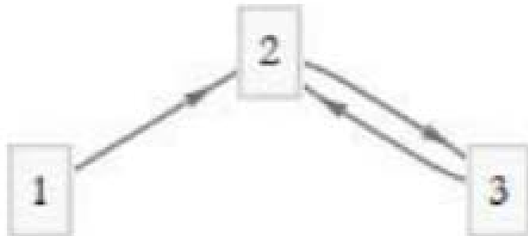
Systeme und Zustandsraum

If every state has a single unique arrow leading into it, and a single arrow leading out of it, then it is a legal deterministic reversible law. Here is a slogan: There must be one arrow to tell you where you're going and one to tell you where you came from.



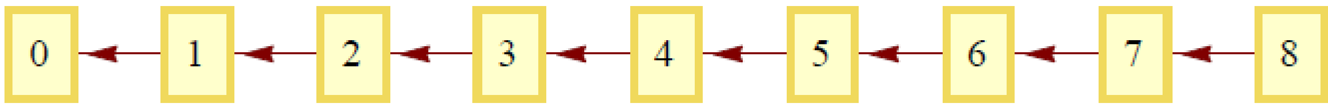


nicht reversibel



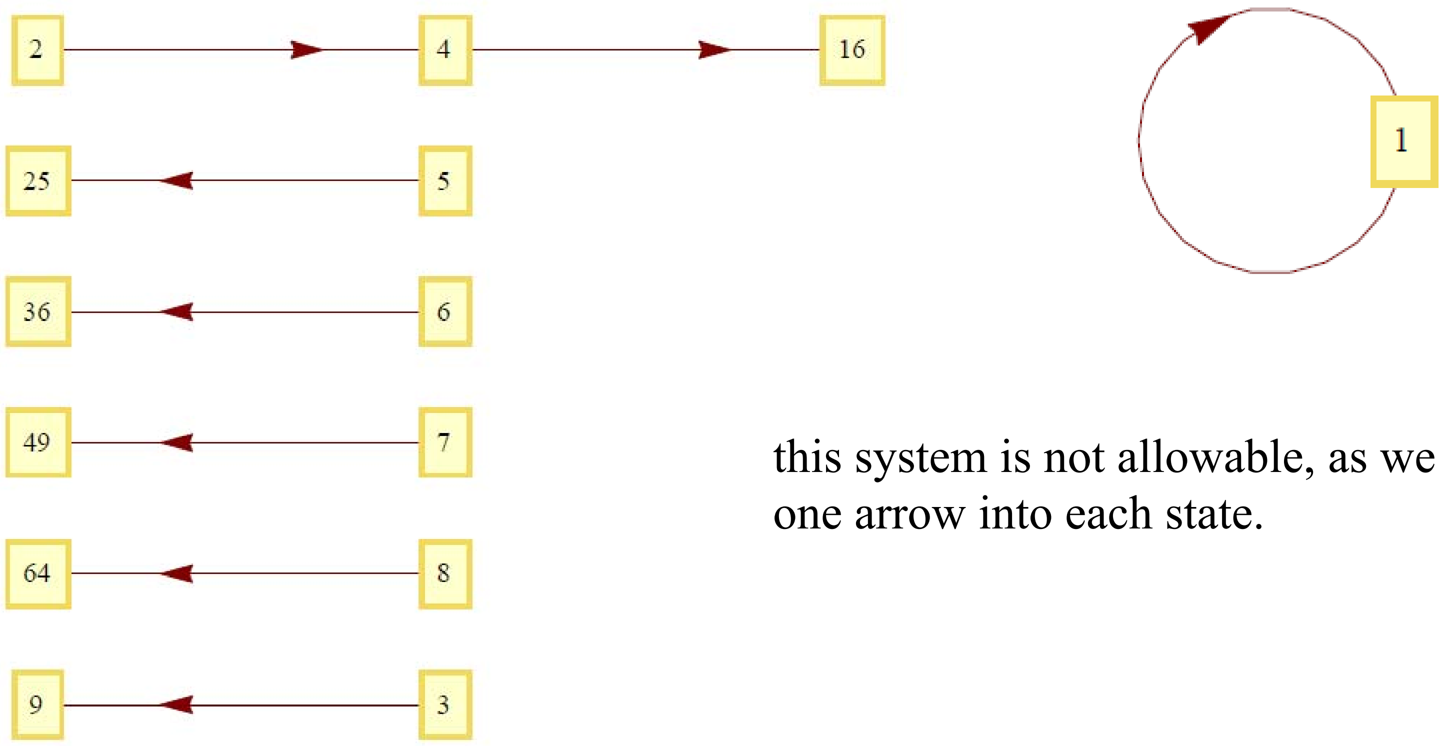
Dynamik (Gesetze)

$$N(n+1) = N(n) - 1\,.$$



Systeme und Zustandsraum

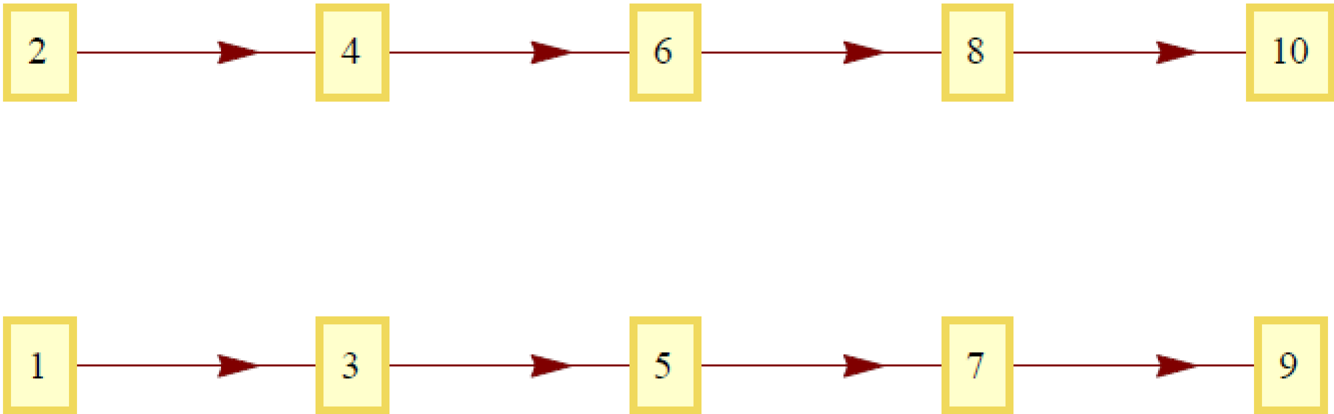
$$N(n+1) = N(n)^2.$$



this system is not allowable, as we do not have one arrow into each state.

Systeme und Zustandsraum

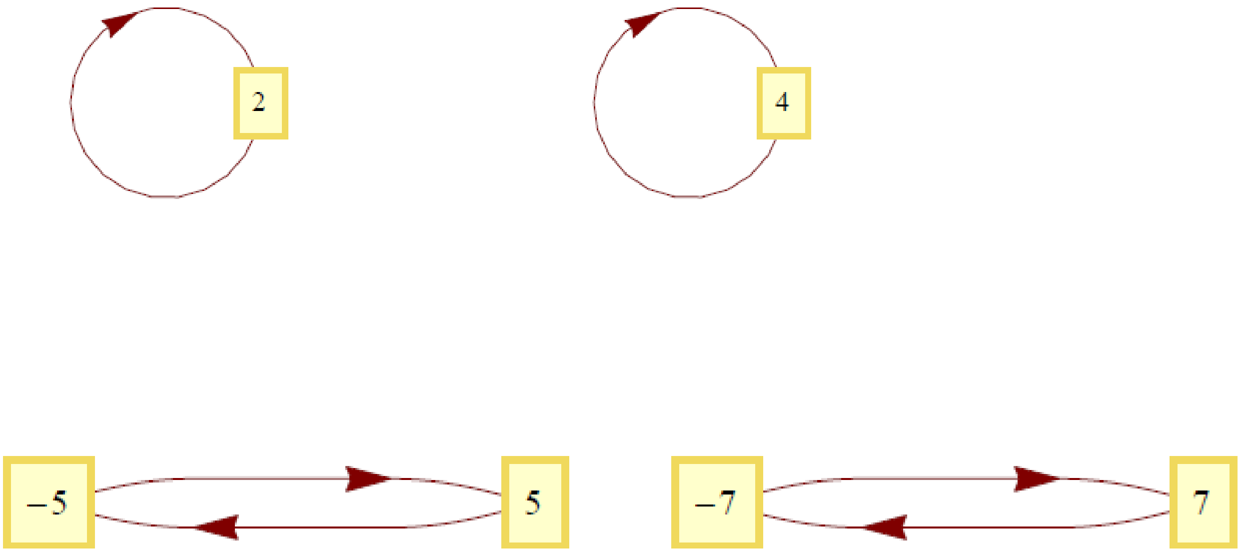
$$N(n+1) = N(n) + 2.$$



For each state there is one arrow in and one arrow out, so it is deterministic. We can also reverse the arrows and it will also be deterministic, thus reversible. This is interesting as it splits the state space into two cycles.

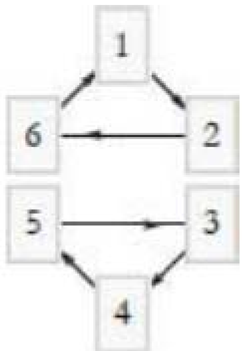
Systeme und Zustandsraum

$$N(n+1) = -1^{N(n)}\, N(n).$$



Erhaltungsgrößen

Whenever a dynamical law divides the state-space into separate cycles, there is a memory of which cycle they started in. Such a memory is called a conservation law; it tells us that something is kept intact for all time.

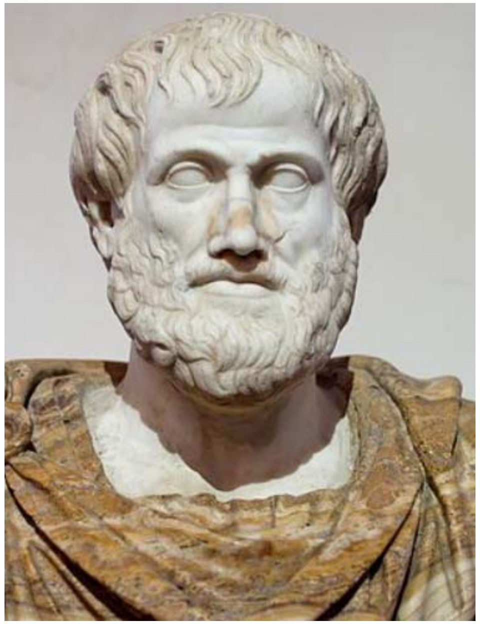


The velocity of any object is proportional to the total applied force.

$$\vec{F} = m\vec{v}.$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \frac{F(t)}{m}.$$

$$F(-t) = -m\frac{dx}{dt}.$$



nicht reversibel

force equals mass times the rate of change of velocity: no force—no change in velocity.

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Superposition

Kräfteaddition

Wenn auf einen Körper zwei oder mehr Einzelkräfte gleichzeitig wirken, ist das Ergebnis das gleiche, wie wenn anstelle der Einzelkräfte nur eine Kraft wirkt, die die Vektorsumme der Einzelkräfte ist. Diese Eigenschaft von Kräften wird als **Superpositionsprinzip** bezeichnet. Die Vektorsumme der Einzelkräfte wird die auf den Körper wirkende Gesamtkraft genannt:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots$$

Dabei sind $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots$ die Einzelkräfte. Allgemein gilt für die Superposition von n Einzelkräften $\boldsymbol{F}_i$ also

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}.$$

Führt ein Körper gleichzeitig zwei oder mehrere Bewegungen aus, so überlagern sich diese Bewegungen ungestört zu einer Gesamtbewegung. Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen addieren sich vektoriell.

Setzen wir eine Bewegung in x-Richtung mit einer Bewegung in y-Richtung zusammen, so erhalten wir eine zweidimensionale Bewegung. Dies ist nach dem Prinzip der ungestörten Superposition möglich. Ungestört deshalb, weil die eine Komponente der Bewegung sich nicht von der anderen beeinflussen lässt. Überlagern wir also eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung mit einer Bewegung in y-Richtung, bei der die Beschleunigung entgegen der Anfangsgeschwindigkeit wirkt, so erhalten wir als Bahnkurve eine Parabel, die sich durch geeignete Anfangsbedingungen an die Flugkurve des Balles anpassen lässt.

Unter **Superposition**, auch **Superpositionsprinzip** versteht man in der Physik eine Überlagerung gleicher physikalischer Größen, wobei sich jene nicht gegenseitig behindern. Dieses Überlagerungsprinzip wird bei linearen Problemen in vielen Bereichen der Physik benutzt und unterscheidet sich nur in der Art der überlagerten Größen. Oft wird die Redeweise „mehrere Größen *superponieren* miteinander" gebraucht.

Wichtige Anwendungsbereiche des Superpositionsprinzips sind elektromagnetische Wellen in der Optik und in der Funktechnik, Kräfte in der klassischen Mechanik und Zustände in der Quantenmechanik.

Integration der Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} \rightarrow m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0 \rightarrow x(t) = a + bt$$

$$\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -g \rightarrow y(t) = c + dt - \frac{1}{2}gt^2$$

Anfangs-und Randbedingungen

$$x(0) = 0 \rightarrow a = 0$$
$$y(0) = 0 \rightarrow c = 0$$
$$\dot{x}(0) = v\cos\phi \rightarrow b = v\cos\phi$$
$$\dot{y}(0) = v\sin\phi \rightarrow d = v\sin\phi\,.$$

$$x(t) = vt\cos\phi$$

$$y(t) = vt\sin\phi - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Reibungskraft

Reibungskraft $\boldsymbol{F}_R$ ein, die der Bewegung entgegen gerichtet

$$F_{\mathrm{R}} = \underbrace{c_{\mathrm{R},0}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{c_{\mathrm{R},1} v}_{\text{Stokes}} + \underbrace{c_{\mathrm{R},2} v^2}_{\text{Newton}} + c_{\mathrm{R},3} v^3 + \mathcal{O}\left(v^4\right) .$$

Dissipation Reibung führt dazu, dass Energie von makroskopische auf mikroskopische Freiheitsgrade übertragen wird. Das ist im Einklang mit dem Gleichverteilungssatz, demzufolge die verfügbare Energie bestrebt ist, sich möglichst gleichmäßig auf alle Freiheitsgrade aufzuteilen. Alle derartigen Phänome werden unter dem Begriff *Dissipation* zusammengefasst.[b]

Schiefer Wurf mit Luftreibung

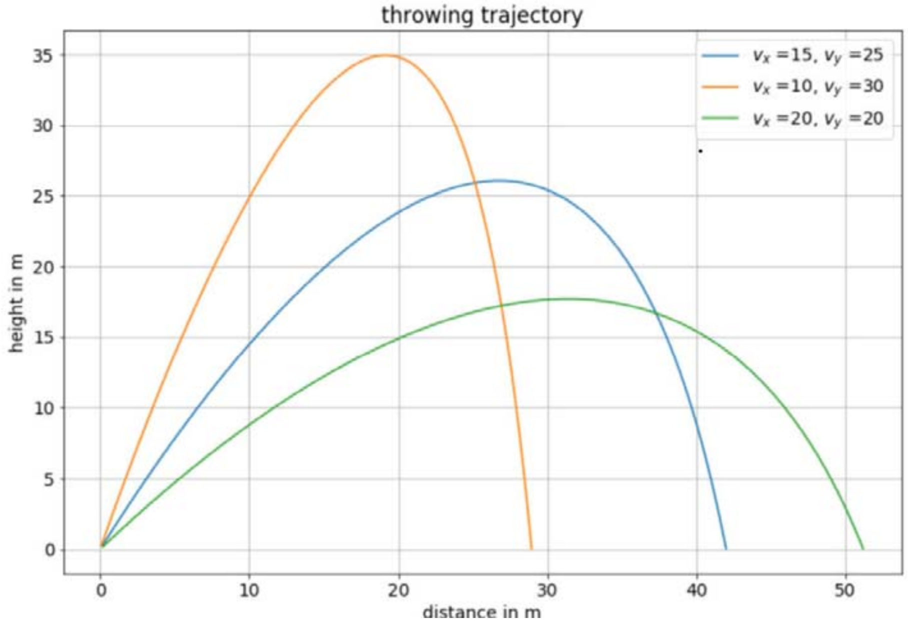
$$\mathbf{F} = -\tfrac{1}{2}\pi R^2 \rho C v^2 \frac{\mathbf{v}}{v} = -\tfrac{1}{2}\pi R^2 \rho C v \mathbf{v}.$$

$$m\ddot{x} = -\tfrac{1}{2}\pi R^2 \rho C v v_x \qquad m\ddot{y} = -mg - \tfrac{1}{2}\pi R^2 \rho C v v_y$$

$$\dot{x} = v_x, \qquad \dot{y} = v_y.$$

$$\dot{v}_x = -\frac{\pi R^2 \rho C}{2m} v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \qquad \dot{v}_y = -g - \frac{\pi R^2 \rho C}{2m} v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$m \to \infty \qquad \dot{v}_x = 0 \;, \; \dot{v}_y = -g$

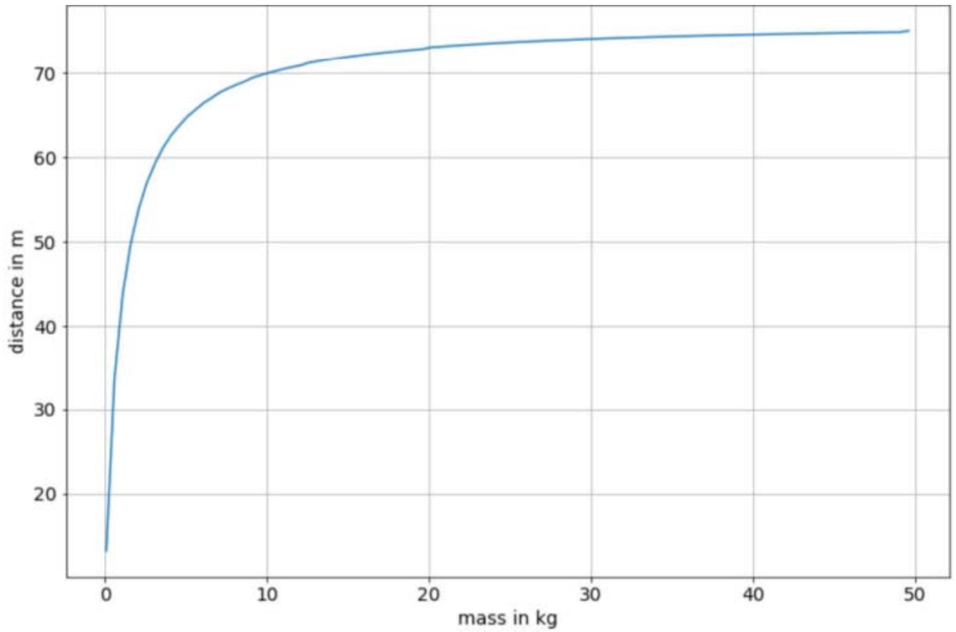


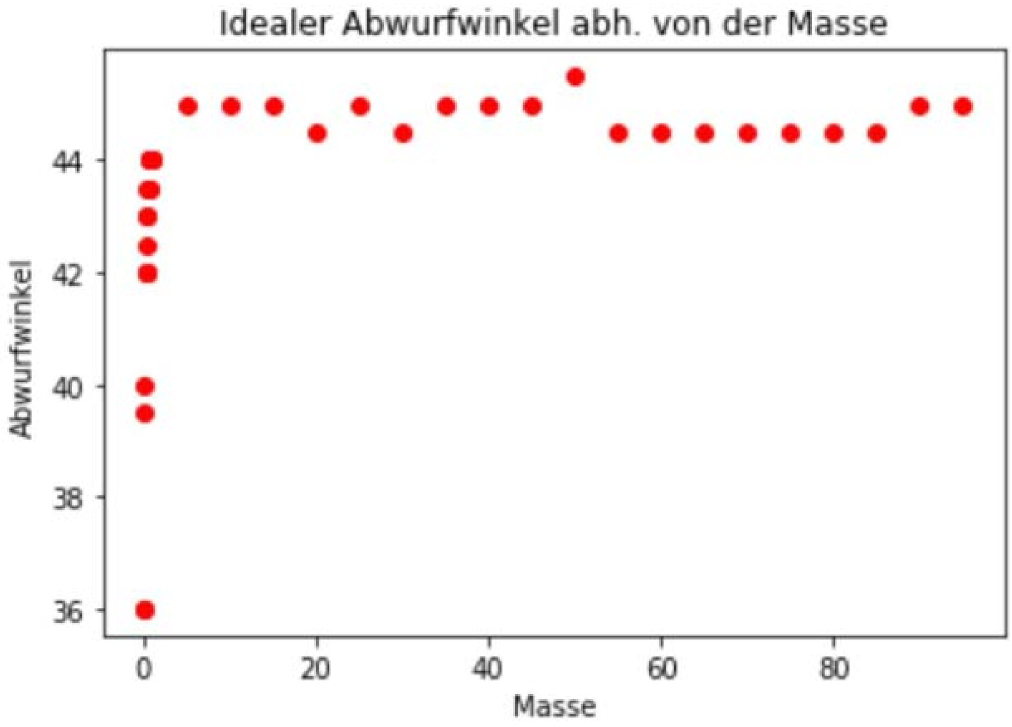
Autoren:

Ekaterina Kasina

Fabian Flach

Jonas Goltz





Modellbildung_Abgabe1_Rene_Zarwel_Matthias_Kastenmüller_Michael_Wimmer

Systeme mit mehreren Teilchen

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i\left(\left\{\vec{r}\right\}\right).$$

The force on the ith particle is a function of the positions of all the particles.

Systeme mit mehreren Teilchen

$$\vec{F}_1\left(\left\{\vec{r}\right\}\right) = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{d t^2}$$

$$\vec{F}_2\left(\left\{\vec{r}\right\}\right) = m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{d t^2}$$

$$\vec{F}_3\left(\left\{\vec{r}\right\}\right) = m_3 \frac{d^2 \vec{r}_3}{d t^2}$$

$$\vdots$$

$$\vec{F}_N\left(\left\{\vec{r}\right\}\right) = m_N \frac{d^2 \vec{r}_N}{d t^2}$$

Systeme mit mehreren Teilchen

$$(F_x)_i(\{x\}) = m_i \frac{d^2 x_i}{d t^2}$$

$$(F_y)_i(\{y\}) = m_i \frac{d^2 y_i}{d t^2}$$

$$(F_z)_i(\{z\}) = m_i \frac{d^2 z_i}{d t^2}.$$

In this set of equations, (Fx)i, (Fy)i, and (Fz)i mean the x, y, and z components of the force on the ith particle, and the symbols {x}, {y}, and {z} represent the sets of all the x coordinates, all the y coordinates, and all the z coordinates of all the particles.

The formal meaning of the state of a system is, “Everything you need to know (with perfect accuracy) to predict its future, given the dynamical law.”

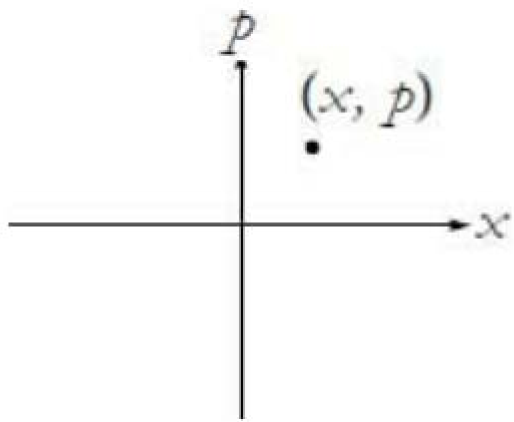
You need to know not only where the particles are but also their velocities. Knowing the velocity tells you where the particle will be at the next instant, and knowing the acceleration tells you what the velocity will be.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}.$$

Phasenraum

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$



$$\dot{p}_i = F_i(\{r_i\})$$

$$\dot{r}_i = \frac{p_i}{m}.$$

Dimension 6N

Systeme mit mehreren Teilchen

"Wenn die Kraft $\vec{F}_{12}$, die auf einen Körper 1 wirkt, ihren Ursprung in einem anderen Körper 2 hat, so wirkt auf diesen die entgegengesetzt gleiche Kraft $-\vec{F}_{12}$".

Systeme mit mehreren Teilchen

Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems von (eventuell miteinander wechselwirkenden) Teilchen bleibt zeitlich konstant.

Man kann dies auch allgemeiner formulieren: Wenn die Vektorsumme aller auf ein System wirkenden äußeren Kräfte Null ist, bleibt der Gesamtimpuls dieses Systems zeitlich konstant. Dies folgt aus dem 3. Newtonschen Axiom *Actio* = *Reactio*, weil demnach auch die Vektorsumme aller „inneren“ Kräfte Null ist.

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i = 0.$$

Energieerhaltung

$$T = \frac{1}{2} m v^2 .$$

$$V(x) = - \int F(x)\, d x .$$

$$\dot{E} = v \left(m a + \frac{d V}{d x} \right) .$$

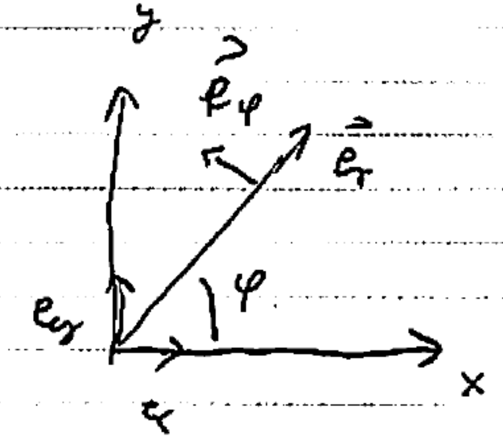
$$E = \frac{1}{2} m v^2 + V(x) .$$

$$\dot{E} = v (m a - F(x)) .$$

Bewegungsgleichungen

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \cos(\varphi) + \vec{e}_y \sin(\varphi)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin(\varphi) + \vec{e}_y \cos(\varphi)$$



$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\cdot\dot{\varphi} \\ \cos(\varphi)\cdot\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)\cdot\dot{\varphi} \\ -\sin(\varphi)\cdot\dot{\varphi} \end{pmatrix} = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Radiale Geschw. Winkelgeschwindigkeit

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\,(-\dot{\varphi}\,\vec{e}_r)$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

$F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)$ Radiakraft

$F_\varphi = m\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)$ Winkelkraft

Beispiele Radialkräfte $\vec{F}_C = \frac{q\,Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r$

Rückstellkraft einer Feder $\vec{F}_F = -D\,\vec{e}_r$

Zentripetalkraft $F = -\frac{mv^2}{r}\,\vec{e}_r$

Gravitationskraft $\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\,\vec{e}_r$

Potentielle Energie $V(r) = -\frac{GMm}{r}$

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{GMm}{r}$$

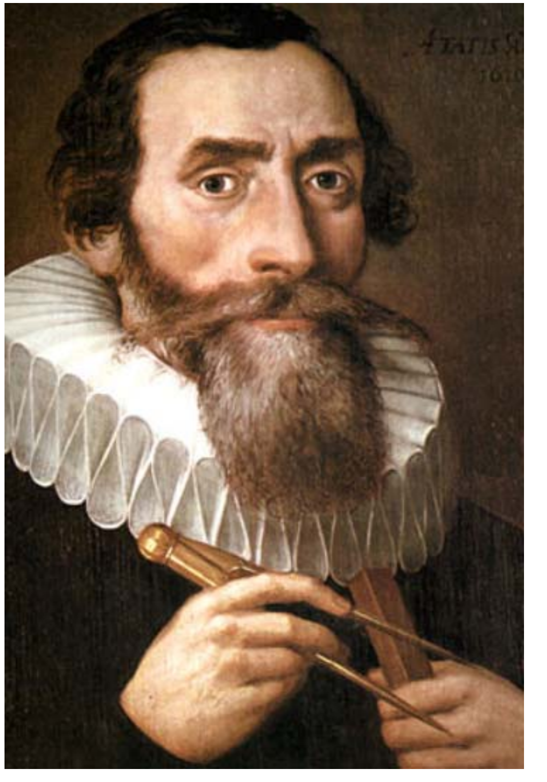
konst $\frac{dE}{dt} = 0$

$$L = mr^2\dot{\varphi}$$

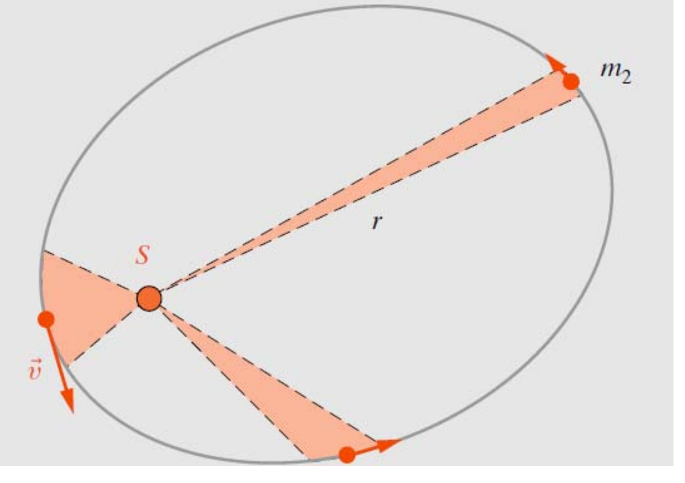
$\frac{dL}{dt} = 0$ $m\,2r\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi}$

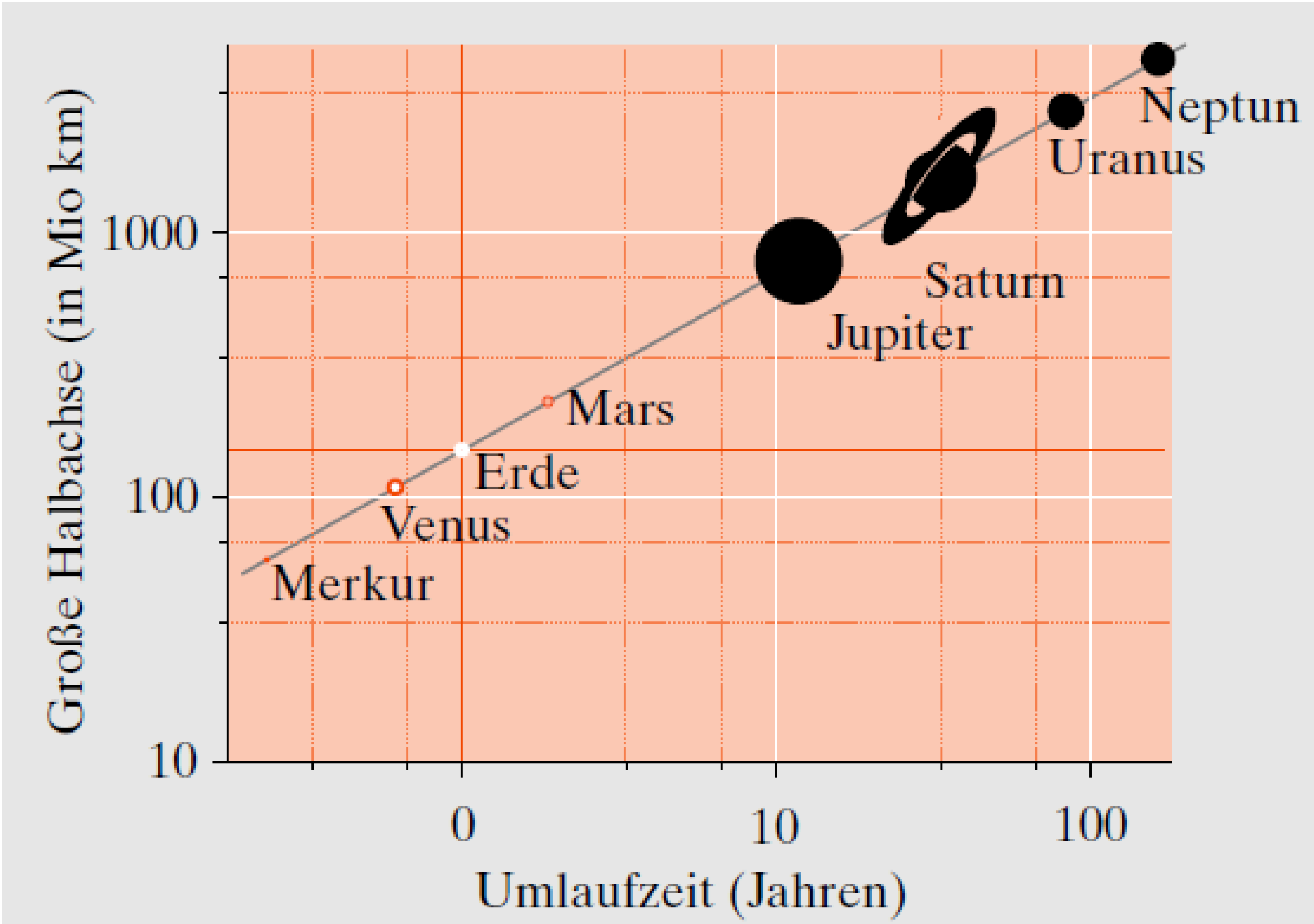
$$mr\left[2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right] = 0$$

Der wichtigste Teil von Johannes Keplers (1571–1630) Lebenswerk bestand darin, aus einem ungeheuren astronomischen Beobachtungsmaterial (völlig mit bloßem Auge von Tycho Brahe gewonnen und entsprechend ungenau) seine drei Gesetze zu kondensieren:

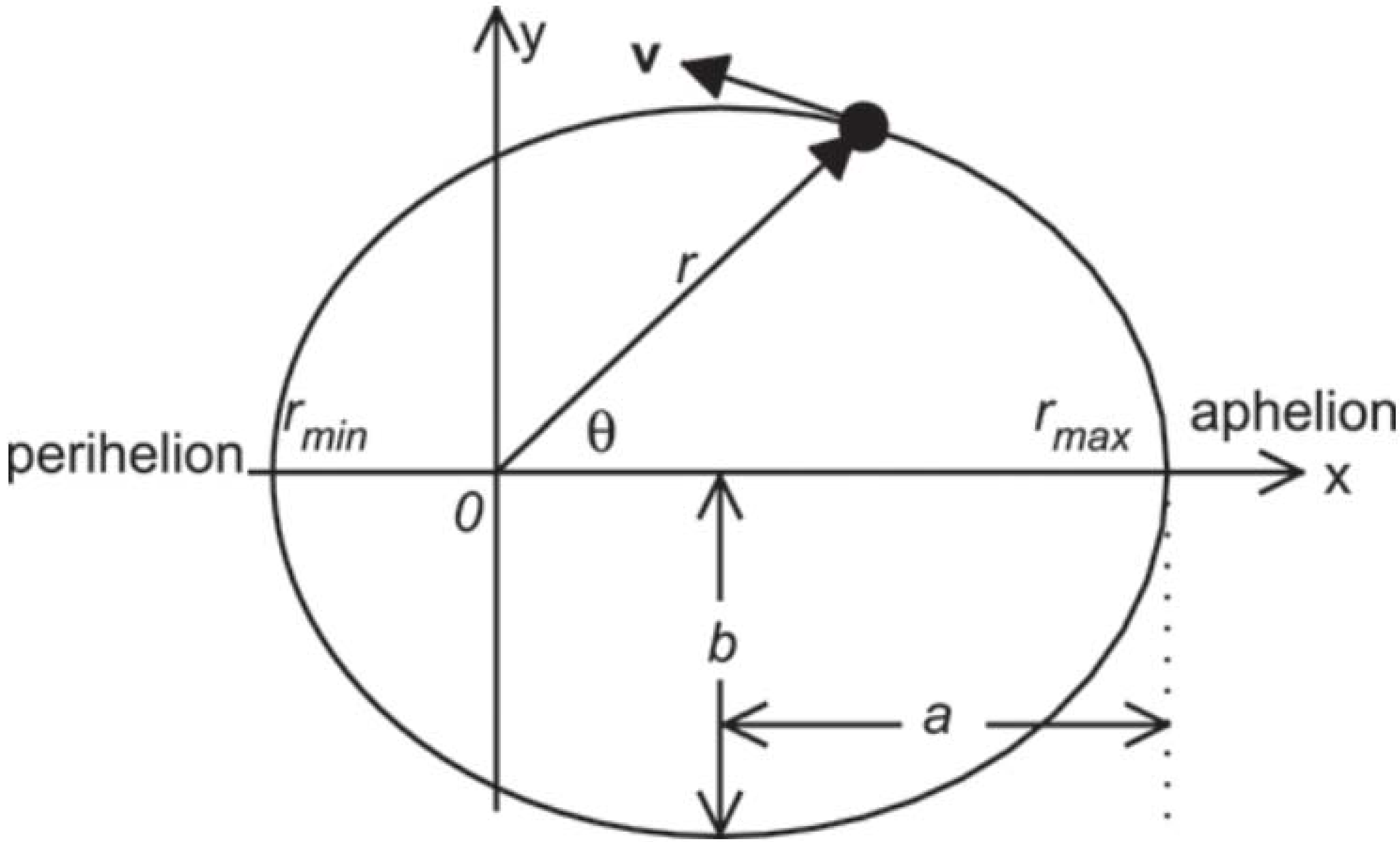


1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der Radiusvektor (der Fahrstrahl Sonne–Planet) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verschiedener Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Halbachsen.





Große Halbachse (in Mio km)
1000
100
10
0
10
100
Umlaufzeit (Jahren)
Merkur
Venus
Erde
Mars
Jupiter
Saturn
Uranus
Neptun



y
v
r
θ
r_{min}
r_{max}
perihelion
aphelion
x
0
b
a

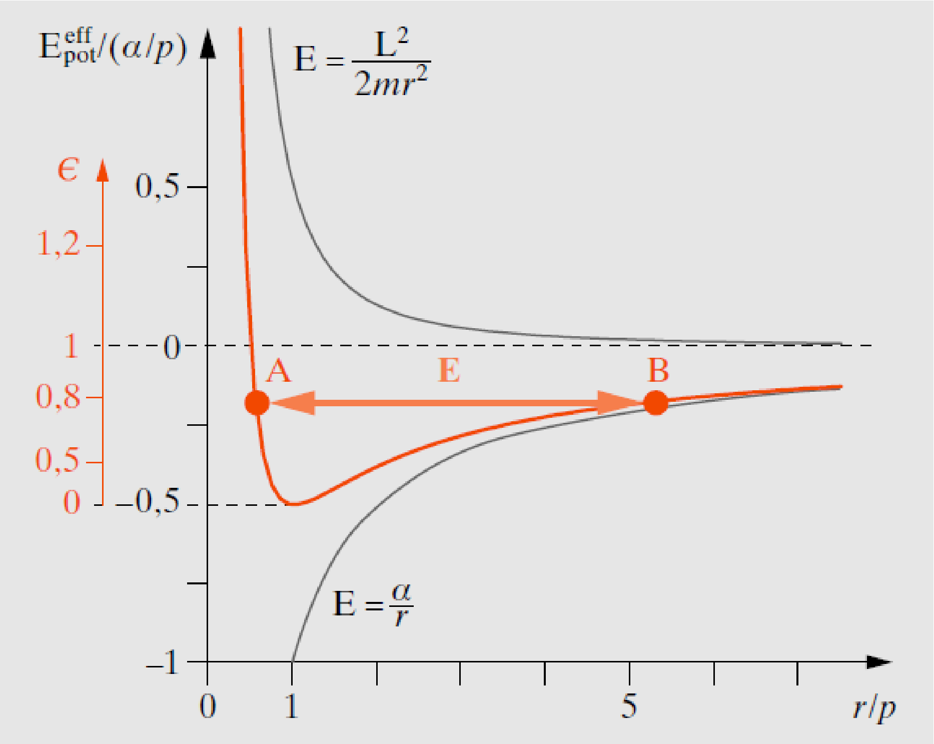
$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{\alpha}{r}$$

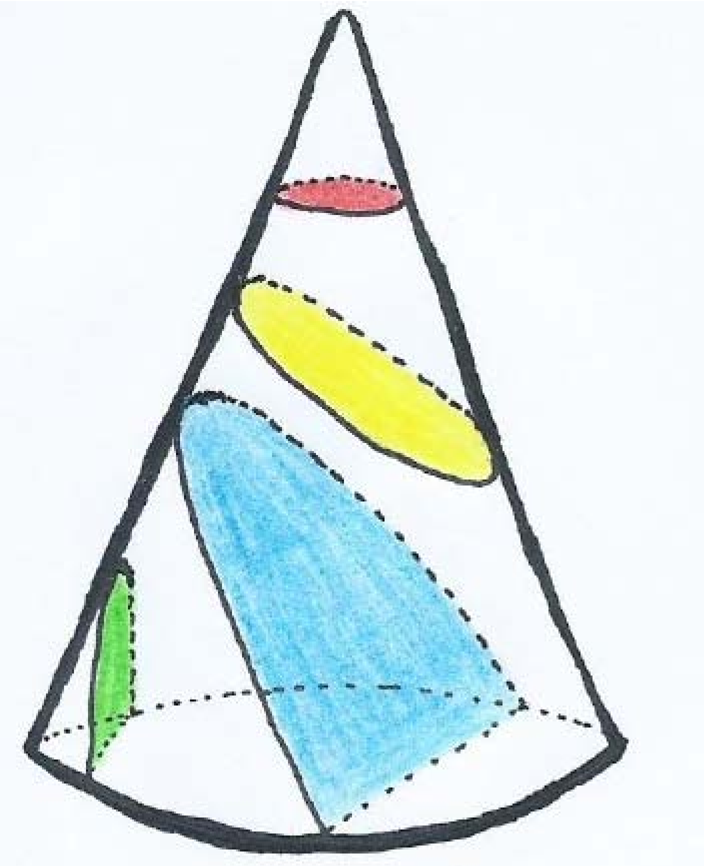
$$\alpha = G \cdot M \cdot m$$

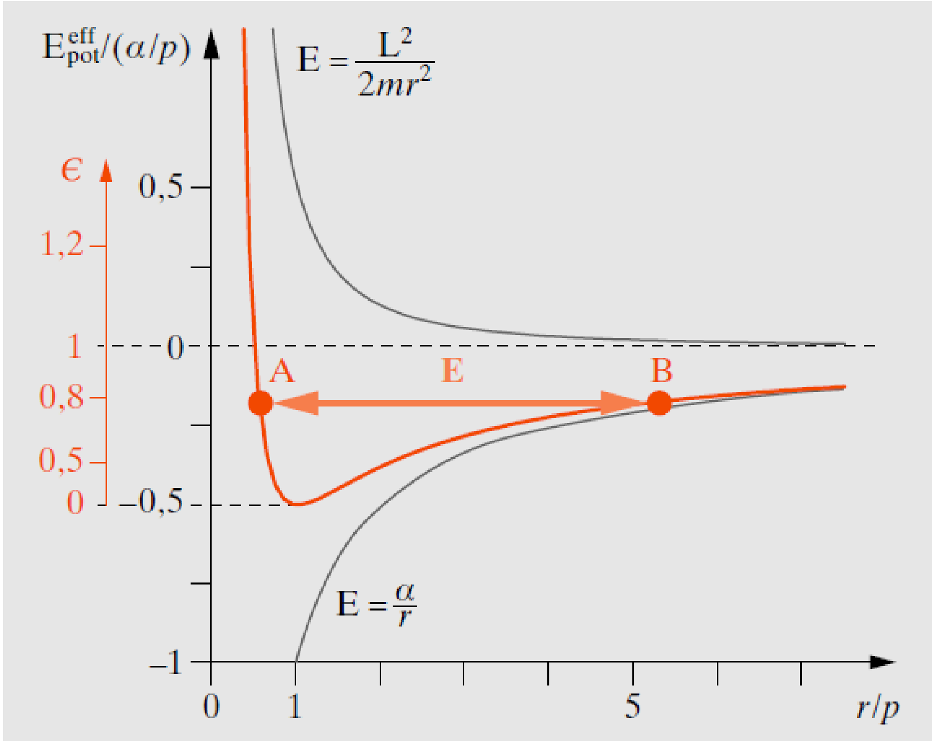
$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2\right) - \frac{\alpha}{r} \,.$$

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + E_{\text{pot}}^{\text{eff}}(r) \,.$$

$$\boxed{r = \frac{L^2/m\alpha}{1 + \epsilon\cos\varphi} = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\varphi}} \,.$$







$$
\begin{array}{lll}
E > 0, & e > 1; & \text{hyperbola (unbound)}, \\
E = 0, & e = 1; & \text{parabola (borderline)}, \\
E < 0, & e < 1; & \text{ellipse (bound, Kepler's first law)}, \\
E = -mk^2/2L^2, & e = 0; & \text{circle (bound)}.
\end{array}
$$