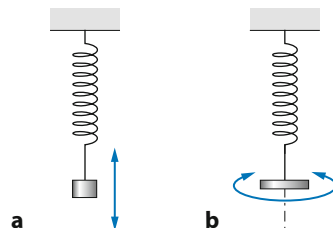


12.1	Die ungedämpfte harmonische Schwingung . . . . .	132
12.2	Gedämpfte Schwingungen . . . . .	133
12.3	Erzwungene Schwingungen . . . . .	135
12.4	Gekoppelte Schwingungen . . . . .	139
12.5	Lösung der Schwingungsgleichung mit komplexen Zahlen . . .	141
12.6	Anharmonische Schwingungen . . . . .	143
12.7	Chaotische Schwingungen . . . . .	146
	Übungsaufgaben . . . . .	150

Aufgrund der elastischen Eigenschaften deformierbarer Stoffe gehören Schwingungen zu deren wichtigsten Bewegungsformen. In Abschn. 3.2 hatten wir bereits die Schwingungen eines Federpendels betrachtet. Wie in Abb. 12.1 dargestellt ist, besitzt eine einfache Feder aber zwei **Schwingungsmoden**: Im Falle der Drehschwingungen (Abb. 12.1 b) „oszilliert“ die Windungszahl und der Federdraht wird verlängert oder verkürzt, im Falle der Längsschwingungen (Abb. 12.1 a) muss aus topologischen Gründen eine Verdrillung des Federdrahtes stattfinden. Im Folgenden werden wir uns weniger mit Fragen dieser Art befassen. Es geht vielmehr ganz allgemein um das Verhalten einer Masse, die durch eine zur Auslenkung proportionale Kraft an eine Ruhelage gebunden ist. Man nennt das einen **harmonischen Oszillator**. Wir beginnen mit dem Fall, in dem keine äußeren Kräfte auf den in Bewegung gesetzten Oszillator einwirken. Dann untersuchen wir den Einfluss von zusätzlichen Kräften, z. B. von Reibungskräften, die ein allmähliches Abklingen der Schwingung bewirken. Besonders wichtig ist der anschließend im dritten Abschnitt behandelte Fall, dass die Schwingung durch äußere Kräfte angefacht und aufrecht erhalten wird. Im vierten Abschnitt behandeln wir das sehr eigentümliche Verhalten von zwei Oszillatoren, die miteinander in Wechselwirkung stehen. Dabei kommen wir auch auf die Frage zurück, ob und wie die beiden in Abb. 12.1 gezeigten **Schwingungsmoden** eines Federpendels miteinander wechselwirken. Im fünften Abschnitt wird eine mathematische Methode beschrieben, die sich auch später im Zusammenhang mit Schwingungsproblemen als nützlich erweisen wird. Die letzten beiden Abschnitte sind Effekten gewidmet, die durch nicht-lineare Kraftgesetze entstehen.

Wir beschränken uns hier auf die Schwingungen von Massenpunkten. Auf die Schwingungen ausgedehnter Körper werden wir in den Bd. IV/1 und IV/2 zurückkommen.

**Abbildung 12.1** Schwingungsmoden eines Federpendels



## 12.1 Die ungedämpfte harmonische Schwingung

Den Fall der ungedämpften harmonischen Schwingung haben wir bereits in Abschn. 3.2 behandelt. Ausgehend von der Newtonschen Bewegungsgleichung  $F = m \cdot a$  erhält man für ein lineares Kraftgesetz  $F = -k \cdot x$  im eindimensionalen Fall die **Schwingungsgleichung**:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (12.1)$$

Als **allgemeine Lösung**, d. h. als Lösung, die an beliebig vorgegebene Anfangsbedingungen  $x(0)$ ,  $v(0)$  angepasst werden kann, hatten wir in (3.27) erhalten:

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (12.2)$$

mit  $\omega = \sqrt{k/m}$ ,  $a = x(0)$  und  $b = v(0)/\omega$ . Eine andere Schreibweise für diese allgemeine Lösung ist:

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi). \quad (12.3)$$

$A$  ist die **Amplitude** oder Schwingungsweite,  $\varphi$  der **Phasenwinkel**, der die Phasenlage der Schwingung zum Zeitpunkt  $t = 0$  festlegt (Abb. 12.2). Den Zusammenhang von  $A$  und  $\varphi$  mit den Größen  $a$  und  $b$  in (12.2) erhalten wir mit:

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi. \quad (12.4)$$

Es ist

$$a = A \cos \varphi, \quad b = A \sin \varphi, \quad (12.5)$$

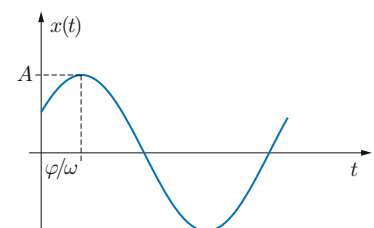
$$\tan \varphi = b/a, \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (12.6)$$

Für die in der Schwingungsbewegung steckende Energie erhalten wir mit  $x(t) = A \cos \omega t$ ,  $v(t) = -A\omega \sin \omega t$ ,  $k = m\omega^2$  im Falle  $\varphi = 0$ :

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) \\ &= \frac{m A^2 \omega^2}{4} (1 - \cos 2\omega t). \end{aligned}$$

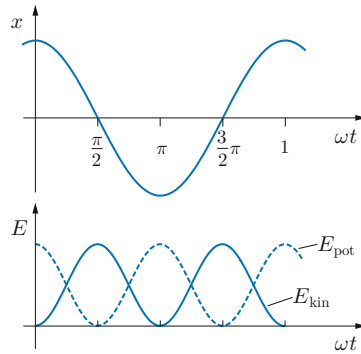
$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \\ &= \frac{m A^2 \omega^2}{4} (1 + \cos 2\omega t). \end{aligned}$$

**Abbildung 12.2** Amplitude und Phasenwinkel



## 12.2 Gedämpfte Schwingungen

**Abbildung 12.3** Energie bei der harmonischen Schwingung



Dabei wurde von (21.59) Gebrauch gemacht. Die Addition ergibt:

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2. \quad (12.7)$$

Die Gesamtenergie ist zeitlich konstant. Es pendelt die Energie dauernd zwischen potentieller und kinetischer Energie hin und her (Abb. 12.3). Dabei sind die zeitlichen Mittelwerte der beiden Energieformen gleich:

$$\bar{E}_{\text{kin}} = \bar{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{2} E_{\text{ges}}. \quad (12.8)$$

Dies kann man unmittelbar aus Abb. 12.3 ablesen. Mathematisch ist der zeitliche Mittelwert einer Funktion  $f(t)$  im Intervall  $t = 0$  bis  $t = T$  definiert wie folgt:

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (12.9)$$

Für  $f(t) = \cos^2 \omega t$  oder  $f(t) = \sin^2 \omega t$  mit  $\omega = 2\pi/T$  ergibt diese Integration  $\overline{f(t)} = \frac{1}{2}$ . Das folgt auch daraus, dass  $\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\sin^2 \omega t}$  sein muss und dass  $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$  ist. Dagegen ist  $\overline{\sin \omega t \cos \omega t} = 0$ , denn es ist  $\sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin(2\omega t)$ . Diese Mittelwerte kommen sehr häufig vor. Es lohnt, sich zu merken

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2}, \quad \overline{\sin \omega t \cos \omega t} = 0, \quad (12.10)$$

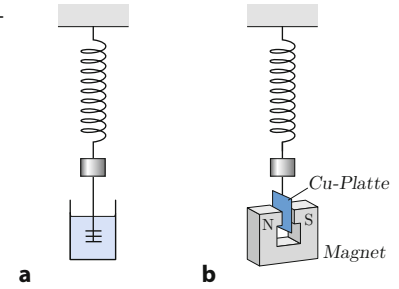
wenn über eine volle Periode der Funktionen gemittelt wird.

## 12.2 Gedämpfte Schwingungen

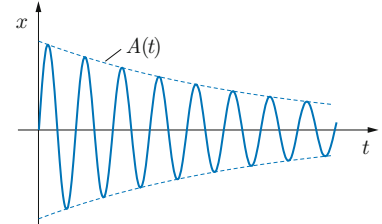
Eine **gedämpfte Schwingung** entsteht, wenn zusätzlich zur rücktreibenden Kraft  $F = -kx$  noch eine Reibungskraft  $F_R$  wirkt. Für diese machen wir den Ansatz

$$F_R = -\beta v. \quad (12.11)$$

**Abbildung 12.4** Dämpfungs-  
vorrichtung. a) Flüssigkeits-,  
b) Wirbelstrombremse



**Abbildung 12.5** Gedämpfte  
Schwingung



Damit können wir sowohl die Luftreibung oder Flüssigkeitsreibung im Fall der laminaren Strömung als auch die elektromagnetische Dämpfung durch Wirbelströme beschreiben (Abb. 12.4 und Bd. III/15.2). In der Praxis sind dies die wichtigsten Dämpfungsmechanismen. Auch bleibt damit die Schwingungsgleichung eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, die sich verhältnismäßig leicht lösen lässt. Sie lautet in diesem Fall:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (12.12)$$

Wir werden die Lösung dieser Gleichung in diesem Abschnitt erraten bzw. gleich hinschreiben. Eine Methode, auf rationelle Weise die Lösungen der Gleichung (12.12) zu berechnen, wird in Abschn. 12.5 behandelt. Es gibt drei Bewegungstypen für den gedämpften Oszillator: den Schwingfall, den Kriechfall und den aperiodischen Grenzfall.

### Schwingfall

Wenn die Schwingung des Oszillators den in Abb. 12.5 dargestellten Verlauf zeigt – eine periodische Schwingung mit kontinuierlich abnehmender Amplitude – versuchen wir, die Lösung durch folgenden Ansatz zu finden:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \varphi). \quad (12.13)$$

Durch Einsetzen in (12.12) stellt man fest, dass das in der Tat eine Lösung der Differentialgleichung ist, mit

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \\ \gamma &= \beta/2m, \\ \omega_0^2 &= k/m, \end{aligned} \quad (12.14)$$

sofern die Bedingung

$$\omega_0^2 > \gamma^2 \quad (12.15)$$

erfüllt ist. Diese Lösung bezeichnet den **Schwingfall**. Er ist durch (12.15) gekennzeichnet. Die Amplitude nimmt exponentiell ab, und die Schwingungsfrequenz ist gegenüber der freien ungedämpften Schwingung verlangsamt. Wenn  $\gamma \ll \omega_0$ , ist dieser Effekt jedoch sehr klein: z. B. findet man für  $\gamma = 0,1 \omega_0$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{100}} \approx 0,995 \omega_0 .$$

Die zeitabhängige Amplitude kann man auch schreiben

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t} = A_0 e^{-t/\tau_A} . \quad (12.16)$$

$\tau_A = 1/\gamma$  nennt man die **Abklingzeit der Amplitude**. In einem Zeitintervall  $\Delta t = \tau_A$  sinkt die Amplitude auf  $1/e \approx 0,37$  des Wertes, den sie anfangs hatte.

## Der Q-Wert

Die Schwingungsenergie ist nach (12.7) und (12.16)

$$E(t) = \frac{m}{2} A^2(t) \omega^2 \propto e^{-2\gamma t} .$$

Die **Abklingzeit der Energie** ist also

$$\tau_E = 1/2 \gamma = \frac{1}{\Gamma} , \quad \text{mit} \quad \Gamma = 2\gamma = \frac{\beta}{m} . \quad (12.17)$$

$\Gamma$  wird meist als die **Dämpfungskonstante** des Oszillators bezeichnet. Im Allgemeinen ist man bestrebt, ein schwingungsfähiges System so zu bauen, dass die Abklingzeit möglichst lang ist. Man definiert daher den **Gütefaktor** oder **Q-Wert** durch

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma} = 2\pi \frac{\tau_E}{T_0} , \quad (12.18)$$

wobei  $T_0$  die Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung ist. Das Verhältnis  $\tau_E/T_0$  gibt bei schwacher Dämpfung an, wie viel Schwingungen der Oszillator macht, bis seine Energie auf  $1/e \approx 0,37$  bzw. seine Amplitude auf 60 % abgenommen hat. In Tab. 12.1 sind typische Q-Werte für einige Oszillatoren aufgeführt.

## Kriechfall

Was passiert, wenn  $\gamma > \omega_0$  ist? Dieser Fall tritt bei sehr starker Dämpfung ein. Man beobachtet, dass das System nach ursprünglicher Auslenkung langsam in die Null-Lage zurückkriecht. Die allgemeine Lösung lautet in diesem Falle

$$x(t) = a e^{-\lambda_1 t} + b e^{-\lambda_2 t} \quad \text{mit} \quad (12.19)$$

$$\lambda_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} .$$

**Tabelle 12.1** Q-Werte

Oszillator	Q-Wert
Federpendel	300
schwingende Saite	1000
Mikrowellen-Resonator <sup>a</sup>	
normal leitend	$10^4$
supraleitend	$10^9$

<sup>a</sup> Leitender Hohlraum, in dem eine elektromagnetische Schwingung hoher Frequenz angeregt werden kann.

## Aperiodischer Grenzfall

Zwischen Schwingfall und Kriechfall muss es einen Grenzfall geben, gekennzeichnet durch

$$\gamma = \omega_0 . \quad (12.20)$$

Dieser Fall ist besonders interessant, weil bei Verwirklichung von (12.20) (d.h. bei **kritischer Dämpfung**) ein schwingungsfähiges System am schnellsten zur Ruhe kommt. Man macht davon z. B. bei elektrischen Zeigerinstrumenten Gebrauch. Die allgemeine Lösung von (12.12) lautet für  $\gamma = \omega_0$ :

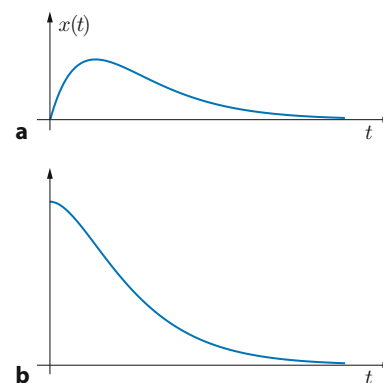
$$x(t) = (a + bt) e^{-\gamma t} . \quad (12.21)$$

Zwei Sonderfälle sind in Abb. 12.6 dargestellt:

$$v(0) = v_0, \quad x(0) = 0 : \quad x(t) = v_0 t e^{-\gamma t} \quad (12.22)$$

$$v(0) = 0, \quad x(0) = x_0 : \quad x(t) = x_0 (1 + \gamma t) e^{-\gamma t} \quad (12.23)$$

(12.23) ist der für elektrische Messinstrumente interessante Fall. Nach der Zeit  $t = T_0 = 2\pi/\omega_0$  ist, wie man nachrechnen kann, bereits 99 % des Endausschlages erreicht!



**Abbildung 12.6** Aperiodischer Grenzfall. Zwei Bewegungsabläufe bei einem kritisch gedämpften Pendel: a) Das ruhende Pendel wird angestoßen, b) das ausgelenkte Pendel wird losgelassen

## 12.3 Erzwungene Schwingungen

Auf den Oszillator wirkt eine periodische Kraft ein, z. B. indem bei einem Federpendel der Aufhängepunkt periodisch auf und ab bewegt wird.<sup>1</sup> Die Koordinate des Aufhängepunkts sei

$$\xi(t) = \xi_0 \cos \omega t .$$

Wie Abb. 12.7 zeigt, wirkt dann auf die Masse  $m$  zusätzlich eine periodische Kraft

$$F_{\text{ext}}(t) = k \xi(t) = F_0 \cos \omega t \quad \text{mit} \quad F_0 = k \xi_0 . \quad (12.24)$$

Die Bewegungsgleichung der Masse  $m$  ist

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} + F_{\text{ext}}(t) . \quad (12.25)$$

Das Federpendel führt eine **erzwungene Schwingung** aus. Die Schwingungsgleichung nimmt folgende Form an:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t , \quad (12.26)$$

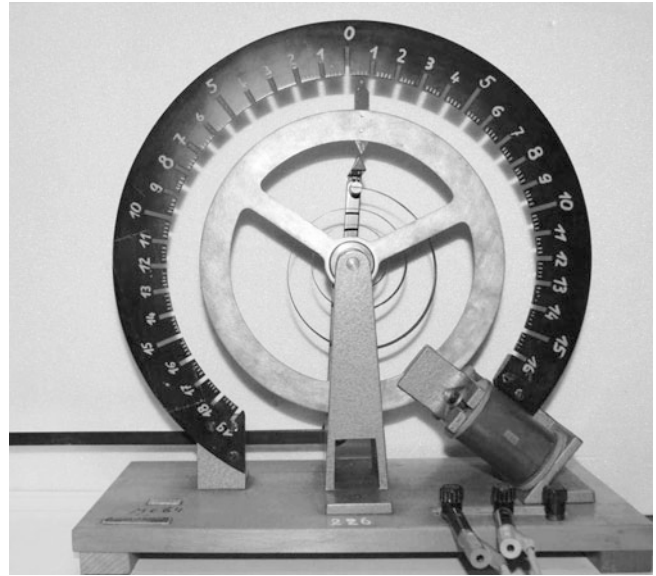
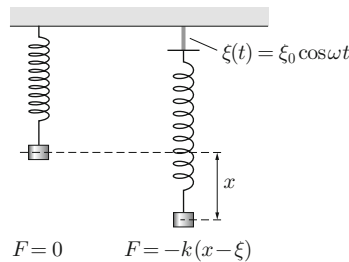
mit  $\Gamma = \beta/m$  und  $\omega_0^2 = k/m$ . Man löst diese Gleichung mit dem Ansatz

$$x(t) = x_e(t) + x_s(t) , \quad (12.27)$$

wobei  $x_e(t)$  die allgemeine Lösung von (12.12) sein soll. Im Schwingfall ( $\omega_0^2 > \gamma^2$ ) ist das

$$x_e(t) = A_e e^{-\gamma t} \cos(\omega_e t - \varphi_e) , \quad \text{mit} \\ \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} , \quad \gamma = \Gamma/2 .$$

**Abbildung 12.7** Zur erzwungenen Schwingung



**Abbildung 12.8** Pohlssches Rad

$x_s(t)$  soll eine Lösung von (12.26) sein. Dann ist nämlich

$$\frac{d^2 x_e}{dt^2} + \Gamma \frac{dx_e}{dt} + \omega_0^2 x_e = 0 \\ \frac{d^2 x_s}{dt^2} + \Gamma \frac{dx_s}{dt} + \omega_0^2 x_s = \frac{F_0}{m} \cos \omega t .$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen zeigt, dass (12.27) eine Lösung der Differentialgleichung (12.26) ist, und zwar die allgemeine Lösung, denn sie enthält zwei Konstanten ( $A_e$  und  $\varphi_e$ ), mit deren Hilfe die Lösung an einen beliebigen Anfangszustand angepasst werden kann.

Wir wollen nun die physikalische Bedeutung von  $x_e$  betrachten. Wie wir in Abschn. 12.2 gesehen haben, nimmt die Amplitude von  $x_e$  exponentiell mit der Abklingzeit  $\tau_A = 1/\gamma$  ab;  $x_e(t)$  beschreibt also den **Einschwingvorgang** des Systems. Nach einer Zeit  $t = 3\tau_A$  bis  $5\tau_A$  ist praktisch nur noch der Term  $x_s$  übrig, der das **stationäre Verhalten** des Systems beschreibt. Nun ist es leicht, die Form von  $x_s(t)$  zu erraten: Nach dem Abklingen des Einschwingens hat sich das Pendel der Frequenz der erregenden Kraft angepasst. Wir setzen also:

$$x_s(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi) . \quad (12.28)$$

$x_0$  und  $\varphi$ , die Amplitude und die Phase der stationären Schwingung, sind keine frei verfügbaren Konstanten; sie sind durch die Eigenschaften des Oszillators und durch Amplitude und Frequenz der Erregung eindeutig festgelegt. Wir berechnen sie, indem wir (12.28) in (12.26)

<sup>1</sup> Im Physikalischen Praktikum wird für diesen Versuch meist ein Drehpendel verwendet, das „Pohlssches Rad“ (Abb. 12.8). In den nun folgenden Formeln ist dann die Masse  $m$  durch das Trägheitsmoment  $\Theta$  und die Koordinate  $x(t)$  durch den Winkel  $\alpha(t)$  zu ersetzen. Aus Gründen, die in Abschn. 12.4 klar werden, ist das Pohlssche Rad zur experimentellen Untersuchung von erzwungenen Schwingungen weitaus geeigneter als das Federpendel in Abb. 12.7.

einsetzen. Das ergibt folgende Gleichung:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0 \cos(\omega t - \varphi) - \Gamma \omega x_0 \sin(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (12.29)$$

Wir setzen  $\omega t = 0$  und  $\omega t = \pi/2$  und erhalten dadurch zwei lineare Gleichungen für die unbekannten Größen  $x_0 \cos \varphi$  und  $x_0 \sin \varphi$ :

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0 \cos \varphi + \Gamma \omega x_0 \sin \varphi = F_0/m \quad (12.30)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)x_0 \sin \varphi - \Gamma \omega x_0 \cos \varphi = 0. \quad (12.31)$$

Wir multiplizieren (12.31) mit  $\Gamma \omega / (\omega_0^2 - \omega^2)$  und ziehen diese Gleichung von (12.30) ab. Das ergibt:

$$x_0 \cos \varphi = \frac{(F_0/m)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}. \quad (12.32)$$

Aus (12.31) folgt dann

$$x_0 \sin \varphi = \frac{\Gamma \omega x_0 \cos \varphi}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{(F_0/m)\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}. \quad (12.33)$$

Mit  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$  und  $\tan \varphi = \sin \varphi / \cos \varphi$  erhalten wir schließlich für die Amplitude und Phase der stationären erzwungenen Schwingung:

$$x_0(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}} = \frac{\omega_0^2 \xi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}}, \quad (12.34)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\Gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (12.35)$$

Die Geschwindigkeit der Masse  $m$  ist

$$v(t) = -x_0 \omega \sin(\omega t - \varphi) = x_0 \omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (12.36)$$

Die Amplitude der Geschwindigkeit als Funktion von  $\omega$  ist

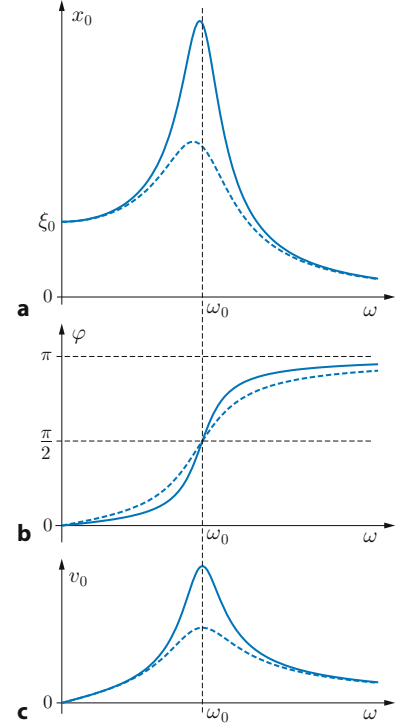
$$v_0(\omega) = \omega x_0(\omega) = \frac{\omega F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}}. \quad (12.37)$$

Zur Diskussion dieser Ergebnisse betrachten wir zunächst die Tabelle 12.2: Im Grenzfall Erregerfrequenz  $\omega \rightarrow 0$  (sehr langsame Auf- und Abbewegung am oberen Ende des Federpendels in Abb. 12.7) folgt der Oszillator einfach

**Tabelle 12.2** Erzwungene Schwingung

$\omega \rightarrow 0$	$x_0 \rightarrow \xi_0$	$\varphi \rightarrow 0$
$\omega = \omega_0$	$x_0 = \frac{\omega_0}{\Gamma} \xi_0$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$\omega \rightarrow \infty$	$x_0 \rightarrow 0$	$\varphi \rightarrow \pi$

**Abbildung 12.9** a) Schwingungsamplitude, b) Phasenwinkel, c) Geschwindigkeitsamplitude als Funktion der Erregerfrequenz



der Erregung. Dagegen ist im Grenzfall sehr hoher Erregerfrequenz der Oszillator viel zu träge, um der Erregung zu folgen. Man beobachtet nur noch ein leichtes Zittern des Oszillators, die Bewegung ist stets gegenphasig zur Erregung. Wenn jedoch die Erregerfrequenz gleich der Eigenfrequenz des Oszillators wird ( $\omega = \omega_0$ ), tritt **Resonanz** ein, der Oszillator schwingt mit großer Amplitude. Der Phasenwinkel beträgt  $\pi/2$ , d.h. die erregende Kraft und die Geschwindigkeit des Pendels sind in Phase. Dann erfolgt wegen  $P = Fv$  (5.8) maximale Leistungsübertragung.

In Abb. 12.9 sind Amplitude, Phasenwinkel und Geschwindigkeitsamplitude als Funktion von  $\omega$  dargestellt. Sowohl die **Resonanzkurve**, als auch die **relative Breite der Resonanzkurve** sind gegeben durch die Dämpfung bzw. durch den **Q-Wert** (12.18) des Resonators, denn es folgt aus (12.34) für  $\omega = \omega_0$ :

$$x_0(\omega_0) = \frac{\omega_0}{\Gamma} \xi_0 = Q \xi_0 \quad (12.38)$$

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_0} \approx \frac{\Gamma}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \quad (12.39)$$



### 12.3 Erzwungene Schwingungen

Zur Berechnung der Breite: Wir setzen in (12.34)  $\omega = \omega_0 \pm \Gamma/2$  ein. Bei schwacher Dämpfung ( $\Gamma \ll \omega_0$ ) ist das Ergebnis  $x_0(\omega_0 \pm \Gamma/2) = x_0(\omega_0)/\sqrt{2}$ . Die in (12.39) angegebene Breite ist also die **Halbwertsbreite der Energieresonanzkurve**, denn die Energie ist proportional zum Quadrat der Amplitude. Die **Energieresonanzkurve** gibt an, wie viel Energie bei der Erregerfrequenz  $\omega$  im Oszillator gespeichert ist. Es ist

$$E(\omega) = \frac{m}{2} \overline{v^2} + \frac{k}{2} \overline{x^2}.$$

Mit  $k = m\omega_0^2$  erhält man nach zeitlicher Mittelung:

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{m}{4} x_0^2 (\omega^2 + \omega_0^2) \\ &= \frac{m}{4} x_0^2 \frac{\omega_0^4 (\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}. \end{aligned} \quad (12.40)$$

Wie man nachrechnen kann, liegen die Maxima der Geschwindigkeits- und der Energieresonanzkurven  $v_0(\omega)$  und  $E(\omega)$  genau bei  $\omega = \omega_0$ , während das Maximum von  $x_0(\omega)$  etwas unterhalb von  $\omega_0$  liegt (siehe Abb. 12.9), nämlich bei  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/2}$ , weil dort der Ausdruck unter der Quadratwurzel im Nenner von (12.34) sein Minimum hat.

#### Dispersive und absorptive Amplitude

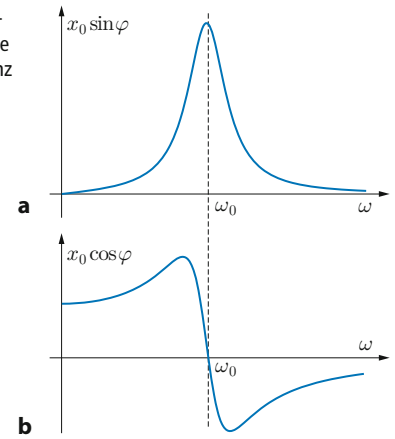
Für manche Anwendungen ist es zweckmäßig, (12.28) in folgender Form zu schreiben:

$$x_s(t) = x_0 \cos \varphi \cos \omega t + x_0 \sin \varphi \sin \omega t. \quad (12.41)$$

Damit haben wir die gegenüber der erregenden Kraft um den Winkel  $\varphi$  phasenverschobene Schwingung dargestellt als Überlagerung von zwei Schwingungen. Die Schwingung mit der Amplitude  $x_0 \cos \varphi$  ist mit der erregenden Kraft gleichphasig (bzw. bei  $\cos \varphi < 0$  gegenphasig). Man nennt dies den **dispersiven Anteil**. Er spielt bei der Berechnung der Dispersion des Lichts in Bd. IV/5 eine maßgebliche Rolle. Die Komponente mit der Amplitude  $x_0 \sin \varphi$  ist gegenüber der erregenden Kraft um  $90^\circ$  phasenverschoben. Man nennt dies den **absorptiven Anteil**. Er ist für die Absorption von Energie durch den Oszillator verantwortlich: Die erregende Kraft gibt im zeitlichen Mittel folgende Leistung an den Oszillator ab:

$$P = \frac{1}{T} \int_{x(0)}^{x(T)} F_{\text{ext}} dx = \frac{1}{T} \int_0^T F_{\text{ext}}(t) \frac{dx}{dt} dt.$$

**Abbildung 12.10** a) Absorptive und b) disperse Amplitude als Funktion der Erregerfrequenz



Man erhält mit (12.24),  $dx_s/dt$  aus (12.41) und (12.10)

$$\begin{aligned} P &= \frac{\omega F_0 x_0}{T} \left[ -\cos \varphi \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt + \sin \varphi \int_0^T \cos^2 \omega t dt \right] \\ &= \frac{\omega F_0}{2} x_0 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (12.42)$$

Die absorptiven und dispersiven Amplituden  $x_0 \sin \varphi$  und  $x_0 \cos \varphi$  hatten wir schon in (12.32) und (12.33) explizit berechnet. In Abb. 12.10 sind sie als Funktion von  $\omega$  aufgetragen. Kurven dieser Art werden uns in der Optik und Atomphysik wieder begegnen.

#### Resonanzkurven in der Atom- und Kernphysik

Resonanzkurven spielen in allen Gebieten der Physik eine große Rolle, und zwar insbesondere sehr schmale Resonanzen. Für diese kann man die Formeln (12.40) und (12.42) vereinfachen mit der Näherung  $\omega \approx \omega_0$ . Dann ist nämlich mit  $\Gamma = 2\gamma$ :

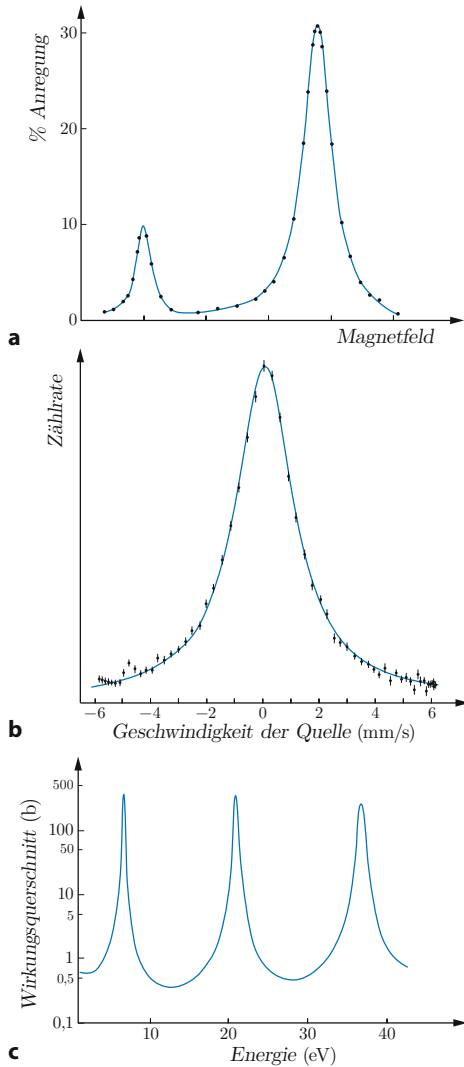
$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2 &= (\omega_0 - \omega)^2(\omega + \omega_0)^2 + (2\gamma\omega)^2 \\ &\approx 4\omega_0^2 [(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2], \end{aligned} \quad (12.43)$$

und man kann die Ausdrücke für Oszillator-Energie und Leistungsaufnahme folgendermaßen schreiben:

$$E(\omega) = E(\omega_0) \frac{\gamma^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}, \quad (12.44)$$

$$P(\omega) = P(\omega_0) \frac{\gamma^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}. \quad (12.45)$$

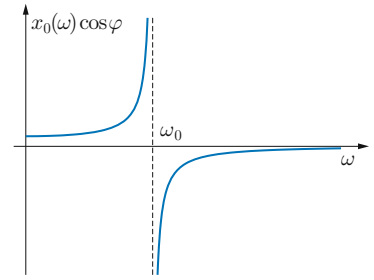
Diese Ausdrücke spielen in der Atom- und Kernphysik eine große Rolle. Die Funktion  $\gamma^2 / [(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2]$  nennt



**Abbildung 12.11** Resonanzkurven in der Atom- und Kernphysik. a) Hochfrequenzabsorption durch metastabile Deuteriumatome, die anschließend Licht emittieren (Lamb und Retherford, 1952). b) Resonanzabsorption von  $^{182}\text{W}$ -Kernen (Kankeleit, 1961). Die Frequenz der absorbierten Strahlung wurde durch eine Bewegung der Quelle verändert. c) Neutronenabsorption in  $^{238}\text{U}$  (nach H. Derrien et al., 2005)

man in der Atomphysik **Lorentz-Kurve**, in der Kernphysik **Breit-Wigner-Resonanzkurve**. Wir betrachten als Beispiel die oberen Kurven in Abb. 12.11, die die Absorption elektromagnetischer Wellen darstellen. Aufgetragen ist die absorbierte Energie als Funktion der Frequenz. In Abb. 12.11 a findet die Absorption in der Elektronenhülle von Atomen statt, wobei bereits vorher angeregte Atome Hochfrequenzstrahlung absorbieren. In diesem Experiment wurde bei konstantem  $\omega$  die Frequenz  $\omega_0$  durch Anlegen eines Magnetfeldes variiert. Abbildung 12.11 b zeigt Resonanzabsorption an Atomkernen. Die Kurvenverläufe entsprechen (12.44). Man kann daraus schließen,

**Abbildung 12.12** Amplitude nach Gl. (12.46)



dass sich Atome und Atomkerne unter dem Einfluss einer periodisch wirkenden elektrischen Kraft wie harmonische Oszillatoren verhalten. Dies ist eine höchst erstaunliche Erfahrungstatsache, mit der wir uns später nochmals beschäftigen werden. Zunächst wollen wir sie einfach zur Kenntnis nehmen. Bild (c) zeigt ein Beispiel für die Absorption von Neutronen an Atomkernen. Auch hier findet man eine Breit-Wigner-Resonanz. Wie das zustande kommt, werden wir erst in Bd. V/4 sehen. Aber schon in Kap. 19 wird sich zeigen, dass dieses Verhalten der Neutronenabsorption technisch von großer Bedeutung ist.

### Resonanz bei verschwindend kleiner Dämpfung

Um den Fall extrem kleiner Dämpfung zu studieren, betrachten wir zunächst Abb. 12.9 b. Für sehr kleine Dämpfung springt die Phase an der Resonanzstelle von 0 auf  $\pi$ . In (12.32) können wir für den Grenzfall  $\Gamma \rightarrow 0$  die Formel für  $x_0(\omega) \cos \varphi$  in einen Ausdruck umwandeln, der an der Resonanzstelle das Vorzeichen wechselt:

$$x_0(\omega) = \frac{\xi_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (12.46)$$

Da  $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$  ist, gibt (12.46) gleichzeitig Amplitude und Phase wieder, so dass wir für die stationäre Lösung der Schwingungsgleichung schreiben können  $x_s(t) = x_0(\omega) \cos \omega t$ . In Abb. 12.12 ist die Amplitude (12.46) als Funktion von  $\omega$  dargestellt.

Offensichtlich strebt  $x_0(\omega)$  für  $\omega \rightarrow \omega_0$  gegen unendlich. Jedoch dauert für  $\gamma \rightarrow 0$  auch der Einschwingvorgang unendlich lange! Wir betrachten als wichtigen Spezialfall die Bewegung eines ungedämpften Oszillators mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = 0, v(0) = 0$ . Die Schwingungsgleichung lautet bei Erregung mit der Resonanzfrequenz:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t. \quad (12.47)$$

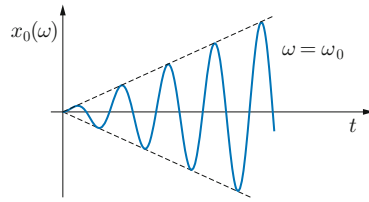
Die Lösung dieser Gleichung für die vorgegebenen Anfangsbedingungen ist

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{F_0}{m \omega_0} t \sin \omega_0 t. \quad (12.48)$$



## 12.4 Gekoppelte Schwingungen

**Abbildung 12.13** Resonanz-Katastrophe



Die Amplitude nimmt linear mit der Zeit zu, und das System treibt der **Resonanz-Katastrophe** entgegen (Abb. 12.13).

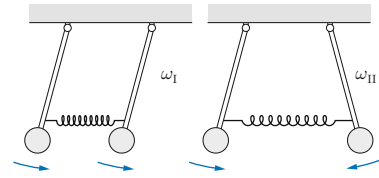
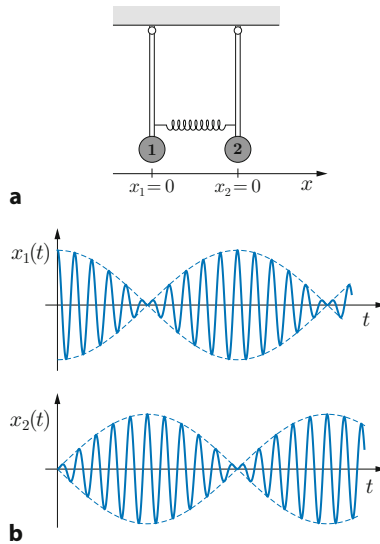
## 12.4 Gekoppelte Schwingungen

Zwei Pendel sind – wie in Abb. 12.14a gezeigt – mit einer Feder aus sehr dünnem Draht (also mit kleiner Federkonstante) verbunden. Setzt man eines der Pendel in Bewegung, beobachtet man die in Abb. 12.14b dargestellte Erscheinung: Die Schwingungsenergie überträgt sich allmählich auf das andere Pendel, bis das erste Pendel zum Stillstand kommt. Dann wiederholt sich das Spiel in umgekehrter Richtung: Die Bewegung zeigt sogenannte **Schwebungen**. Um die Bewegung der beiden Pendel zu berechnen, setzen wir die Schwingungsgleichungen an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 &= \kappa(x_2 - x_1) \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 &= \kappa(x_1 - x_2) \end{aligned} \right\} \quad (12.49)$$

mit  $\omega_0^2 = g/L$  nach (3.35) und  $\kappa = k/m$ , wobei  $k$  die Federkonstante der Verbindungsfeder ist.

**Abbildung 12.14** Koppelpendel. a) Versuchsanordnung, b) Schwebungsphänomene



**Abbildung 12.15** Fundamentalschwingungen beim Koppelpendel

Wir haben ein System von gekoppelten linearen Differentialgleichungen für die beiden Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  vor uns. Man findet die Lösung ähnlich wie bei zwei gewöhnlichen linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten: Durch Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen. Wir bilden die Summe und Differenz von (12.49) und setzen

$$\xi = x_1 + x_2, \quad \eta = x_1 - x_2. \quad (12.50)$$

Dann erhalten wir zwei neue Differentialgleichungen für  $\xi(t)$  und  $\eta(t)$ , die nun aber nicht mehr wie (12.49) verkoppelt sind:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \omega_0^2 \eta = -2\kappa \eta. \quad (12.51)$$

Die zweite Gleichung können wir auch schreiben:

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + (\omega_0^2 + 2\kappa) \eta = 0.$$

Wir haben also zwei einfache Schwingungsgleichungen vom Typ (12.1) vor uns, die die **Fundamentalschwingungen** des Systems beschreiben (Abb. 12.15).

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0 \cos \omega_I t & \omega_I &= \omega_0 \\ \eta(t) &= \eta_0 \cos \omega_{II} t & \omega_{II} &= \sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa}. \end{aligned} \quad (12.52)$$

Regt man die gekoppelten Pendel in einer der Fundamentalschwingungen an, sind keinerlei Schwebungen zu beobachten. Man muss dazu beide Pendel gleichweit nach links (bzw. nach links und rechts) auslenken und dann loslassen. Alle anderen Schwingungsformen können durch Überlagerung der Fundamentalschwingung dargestellt werden, z. B. das in Abb. 12.14 gezeigte Schwebungsphänomen. Die Anfangsbedingungen sind hier

$$\begin{aligned} x_1(0) &= a & x_2(0) &= 0 \\ v_1(0) &= 0 & v_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (12.50) und (12.52):

$$\begin{aligned} \xi(0) &= \eta(0) = a, & \frac{d\xi}{dt}(0) &= \frac{d\eta}{dt}(0) = 0 \\ \xi(t) &= a \cos \omega_I t = x_1(t) + x_2(t) \\ \eta(t) &= a \cos \omega_{II} t = x_1(t) - x_2(t). \end{aligned}$$

Die Auflösung nach  $x_1(t)$  ergibt mit (21.61):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{a}{2} (\cos \omega_I t + \cos \omega_{II} t) \\ &= a \left( \cos \frac{\omega_I - \omega_{II}}{2} t \cos \frac{\omega_I + \omega_{II}}{2} t \right). \end{aligned} \quad (12.53)$$

Für schwache Kopplung gilt  $\omega_I \approx \omega_{II}$ :

$$\frac{\omega_I + \omega_{II}}{2} \approx \omega_0, \quad \omega_I - \omega_{II} = \Delta\omega \ll \omega_0.$$

Wir erhalten den in Abb. 12.14 dargestellten, als Schwebung bezeichneten Bewegungstyp, eine Schwingung mit der Frequenz  $\omega$  und periodisch langsam an- und ab-schwellender Amplitude:

$$x_1(t) = A(t) \cos \omega_0 t \quad \text{mit} \quad A(t) = a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t. \quad (12.54)$$

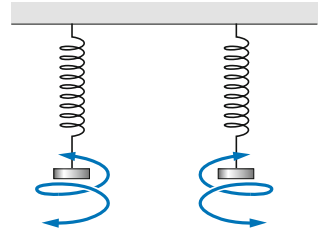
Für  $x_2(t)$  erhält man einen ähnlichen Ausdruck, mit  $A(t) = a \sin \Delta\omega/2 t$ . Das Phänomen der Schwebungen tritt immer dann auf, wenn zwei Schwingungen nahezu gleicher Frequenz und Amplitude überlagert werden. Es ist zumindest allen musikalisch Interessierten wohlbekannt.

Bei den Pendeln (Abb. 12.14) handelt es sich um ein System von zwei Oszillatoren, die durch die Verbindungsfeder künstlich aneinander gekoppelt sind. Die beiden Fundamentalschwingungsmoden<sup>2</sup> sind ohne Weiteres verständlich: Bei der einen behält die Kopplungsfeder stets ihre Länge bei, wird also gar nicht aktiv, daher ist  $\omega_I = \omega_0$ . Bei der zweiten wird die Kopplungsfeder ganz symmetrisch beansprucht und trägt deshalb nur zur Verstärkung der Rückstellkraft bei:  $\omega_{II} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\kappa}$ . Schwebungsphänomene sind also bei den Fundamentalschwingungen gar nicht zu erwarten.

Es ist interessant, dass mehrere Schwingungsmoden und entsprechende Schwebungen auch bei schwingungsfähigen Gebilden einheitlicher Struktur auftreten können. Ein Beispiel ist das gewöhnliche Federpendel. Wie in Abb. 12.1 gezeigt, kann es außer der Längsschwingung auch Drehschwingungen ausführen. Sind die Frequenzen dieser beiden Schwingungsmoden gleich (was man z. B. mittels Stellschrauben durch Veränderung des Trägheitsmoments der angehängten Masse erreichen kann), treten die gleichen Schwebungen auf wie bei den gekoppelten Pendeln in Abb. 12.14: Eine anfänglich reine Längsschwingung geht allmählich in eine reine Drehschwingung über; dann bildet sich wieder eine Längsschwingung aus usw. Die Kopplung der beiden Schwingungsfreiheitsgrade wird hier durch den Federdraht selbst bewirkt: Verdrillt man eine Schraubenfeder mit den Händen, stellt man fest, dass sie sich je nach Drehsinn etwas

**Abbildung 12.16**

Fundamentalschwingungen eines auf gleiche Längs- und Drehschwingungsdauer abgestimmten Federpendels



verlängert oder verkürzt. Die quantitative Behandlung des Problems ist keineswegs einfach. Man kommt zu folgendem Ergebnis: die (schwebungsfreien) Fundamentalschwingungen bestehen in einer bestimmten Kombination von Dreh- und Längsschwingungen, wie in Abb. 12.16 gezeigt. Die Frequenzen  $\omega_I$  und  $\omega_{II}$  sind diesmal gegeben durch

$$\begin{aligned} \omega_I &= \omega_0 \sqrt{1 + \kappa}, \quad \omega_{II} = \omega_0 \sqrt{1 - \kappa} \\ \text{mit} \quad \kappa &= \frac{\mu^2 \sin^2 2\alpha}{4 + 4\mu + \mu^2 \sin^2 2\alpha}. \end{aligned} \quad (12.55)$$

Hierbei ist  $\omega_0$  die Kreisfrequenz der reinen Längs- oder Drehschwingung und  $\alpha$  ist der Anstellwinkel der Schraubenfeder. Der Faktor  $\mu$  ist eine dimensionslose Materialkonstante des Drahtes, die sogenannte **Poissonsche Zahl** (zur genauen Definition siehe Gl. (1.5) in Bd. II/1).

Die Formeln (12.55) sind natürlich überhaupt nicht wichtig. Wichtig ist aber, dass bei einem schwingungsfähigen System mit mehreren Freiheitsgraden Modenkopplungen auftreten, die sehr lästig sein können. Zum Beispiel wäre es absurd, mit dem eben besprochenen Federpendel die Kurven in Abb. 12.9 ausmessen zu wollen. Besonders ausgeprägt sind die Schwebungen, wenn die Schwingungsfreiheitsgrade in Resonanz sind. Sind die Eigenfrequenzen der beiden Freiheitsgrade unterschiedlich, wird bei den Schwebungen nur noch ein Teil der Energie übertragen. Man kann daher den Energieaustausch zwischen den Schwingungsmoden durch konstruktive Maßnahmen unterdrücken. Beim Koppelpendel kann man die Pendel ungleich lang machen, beim Federpendel den Durchmesser des Pendelkörpers geeignet wählen und so die Frequenz der Drehschwingung gegenüber der der Vertikalschwingung nach oben oder unten schieben. Auch der Kopplungsgrad lässt sich konstruktiv beeinflussen. In jedem Falle ist aber für das Ausmessen der Resonanzkurve in Abb. 12.9 das Pohlsche Rad (Abb. 12.8) vorzuziehen, denn es hat nur *einen* Freiheitsgrad.

<sup>2</sup> von modus (lat.) Art und Weise.

## 12.5 Lösung der Schwingungsgleichung mit komplexen Zahlen

Bei der Lösung der Schwingungsgleichung und bei verwandten Problemen ist es praktisch, komplexe Zahlen als mathematisches Hilfsmittel zu verwenden. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass das Differenzieren der Exponentialfunktion besonders einfach ist:

$$\frac{d}{dt} e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t} \quad (12.56)$$

und dass die Exponentialfunktion die Rechenregel  $e^a e^b = e^{a+b}$  befolgt.

Die Anwendung der komplexen Zahlen auf Schwingungsprobleme beruht auf der berühmten Eulerschen Formel<sup>3</sup>:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (12.57)$$

Für die hier erforderlichen Rechenkünste mit komplexen Zahlen kommt man mit dem Minimum aus, das in Anhang 21.8 zusammengestellt ist und das jeder in kürzester Frist erlernen kann. Wir setzen es im Folgenden als bekannt voraus.

### Lösung der Schwingungsgleichung (12.12)

Die Gleichung (12.12) für die gedämpfte Schwingung lautet:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Wir machen nun für  $x(t)$  den Ansatz

$$x(t) = C e^{i\Omega t}. \quad (12.58)$$

Damit erhalten wir durch Einsetzen in (12.12):

$$-\Omega^2 C e^{i\Omega t} + 2i\gamma\Omega C e^{i\Omega t} + \omega_0^2 C e^{i\Omega t} = 0.$$

Der gemeinsame Faktor  $C e^{i\Omega t}$  wird herausgekürzt, und wir erhalten eine quadratische Gleichung für  $\Omega$ :

$$\Omega^2 - 2i\gamma\Omega - \omega_0^2 = 0.$$

Sie hat die Lösungen

$$\Omega_1 = i\gamma + \omega \quad \Omega_2 = i\gamma - \omega, \quad (12.59)$$

wobei wir zur Abkürzung gesetzt haben:

$$\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega. \quad (12.60)$$

Je nachdem, ob  $\omega_0^2$  größer oder kleiner als  $\gamma^2$  ist, ist  $\omega$  reell oder imaginär. Die allgemeine Lösung von (12.12) erhalten wir, indem wir die beiden Formen unseres Ansatzes (12.58) addieren:

$$x(t) = C_1 e^{i\Omega_1 t} + C_2 e^{i\Omega_2 t}. \quad (12.61)$$

$C_1$  und  $C_2$  sind die beiden Konstanten, die die Anpassung an vorgegebene Anfangsbedingungen ermöglichen.

Die Geschwindigkeit  $v(t) = dx/dt$  ist:

$$v(t) = i\Omega_1 C_1 e^{i\Omega_1 t} + i\Omega_2 C_2 e^{i\Omega_2 t}. \quad (12.62)$$

Aus (12.61) und (12.62) folgt für die Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$  und  $v(0) = v_0$  wegen  $e^0 = 1$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1 + C_2 \\ v_0 &= i\Omega_1 C_1 + i\Omega_2 C_2. \end{aligned}$$

Nach  $C_1$  und  $C_2$  aufgelöst erhalten wir:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \left( x_0 - i \frac{\gamma x_0 + v_0}{\omega} \right) \\ C_2 &= \frac{1}{2} \left( x_0 + i \frac{\gamma x_0 + v_0}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (12.63)$$

Damit ist im Prinzip bereits alles geschafft.

### Schwingfall

$\omega_0^2 > \gamma^2$ , also ist  $\omega$  reell. Dann folgt aus (12.63), dass  $C_2 = C_1^*$  ist. Mit (12.61) und (12.59) erhält man dann:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega t} + C_1^* e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} \\ &= \left\{ C_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega t} \right\} + \left\{ C_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega t} \right\}^* \\ &= 2\operatorname{Re} \left\{ C_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega t} \right\} \end{aligned} \quad (12.64)$$

Wir definieren  $C_1$  als komplexe Zahl mit dem Betrag  $A_0/2$  und der Phase  $-\varphi$ :

$$C_1 = \frac{A_0}{2} e^{-i\varphi}.$$

Dann folgt mit (12.57)

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \varphi), \quad (12.65)$$

was mit (12.13) identisch ist. Alternativ hätten wir auch in (12.64) für  $C_1$  den Ausdruck aus (12.63) einsetzen können und hätten erhalten:

$$x(t) = \left( x_0 \cos \omega t + \frac{\gamma x_0 + v_0}{\omega} \sin \omega t \right) e^{-\gamma t}, \quad (12.66)$$

was im Prinzip dasselbe ist (vgl. (12.2) – (12.6)).

<sup>3</sup> Zur Bedeutung dieser Formel und der komplexen Zahlen siehe z. B. Feynman, „Lectures on Physics“, Vol. I, Kap. 22.

### Kriechfall

$\omega_0^2 < \gamma^2$ , also ist  $\omega$  rein imaginär,  $\omega = i\mu$  mit  $\mu = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  (reell). Dann nimmt (12.63) die Form an:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \left( x_0 - \frac{v_0 + \gamma x_0}{\mu} \right) \\ C_2 &= \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\mu} \right) \end{aligned} \right\} \text{ reell.} \quad (12.67)$$

Damit und mit (12.59) erhalten wir aus (12.61)

$$x(t) = C_1 e^{-(\gamma+\mu)t} + C_2 e^{-(\gamma-\mu)t}, \quad (12.68)$$

was mit (12.19) identisch ist.

### Aperiodischer Grenzfall

$\omega_0 = \gamma$ , hier ist  $\omega = 0$ . Wir schreiben zunächst (12.61) mit Hilfe von (12.59) in der Form

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[ C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \right].$$

Indem wir  $C_1$  und  $C_2$  aus (12.63) einsetzen, können wir den Ausdruck in der eckigen Klammer folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} x_0 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - i(\gamma x_0 + v_0) \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2\omega} \\ &= x_0 \cos \omega t + (\gamma x_0 + v_0) \frac{\sin \omega t}{\omega}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir von (12.57) Gebrauch gemacht. Für  $\omega = 0$  ist  $\cos \omega t = 1$  und der erste Term ergibt  $x_0$ . Der zweite führt auf das unbestimmte Verhältnis  $0/0$ . Für kleine Werte von  $\omega t$  gilt aber  $\sin \omega t \approx \omega t$ , so dass wir im Grenzfall  $\omega \rightarrow 0$  erhalten:

$$x(t) = [x_0 + (\gamma x_0 + v_0)t] e^{-\gamma t}. \quad (12.69)$$

Das ist die allgemeine Lösung (12.21) für den aperiodischen Grenzfall,  $a$  und  $b$  ausgedrückt durch  $x_0$  und  $v_0$ .

Mit Befriedigung stellen wir fest, dass trotz des komplexen Ansatzes in allen drei Fällen rein reelle Lösungen herausgekommen sind. Das war auch zu erwarten, da sowohl die Koeffizienten der Differentialgleichung (12.12) als auch die Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = v_0$  als reelle Größen definiert waren.

Wer hier zum ersten Mal mit komplexen Zahlen konfrontiert wird, wird bei der Lektüre dieses Abschnitts Schwierigkeiten haben. Wenn man dann Papier und Bleistift in die Hand nimmt und die verschiedenen Rechnungen mit Hilfe der Formeln in Anhang 21.8 sämtlich nachvollzieht, hat man's geschafft.

### Erzwungene Schwingungen

Besonders praktisch erweisen sich die komplexen Zahlen bei der Behandlung der erzwungenen Schwingungen. Zu diesem Zweck betrachten wir neben der Schwingungsgleichung (12.26)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \Gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

eine zweite Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + \Gamma \frac{dx'}{dt} + \omega_0^2 x' = \frac{F_0}{m} \sin \omega t.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit  $i$  und addieren sie zur ersten. Wir erhalten dann eine Differentialgleichung für die komplexe Variable  $\check{x}(t) = x(t) + ix'(t)$ :

$$\frac{d^2 \check{x}}{dt^2} + \Gamma \frac{d\check{x}}{dt} + \omega_0^2 \check{x} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}. \quad (12.70)$$

Mit dem darüber gesetzten Häkchen werden in diesem Buch generell die auf diese Weise „künstlich“ komplex gemachten Variablen gekennzeichnet. Um die Lösung der ursprünglichen Gleichung (12.26) zu erhalten, werden wir (12.70) lösen und dann den Realteil von  $\check{x}(t)$  bilden. Der Vorteil des Verfahrens besteht darin, dass (12.70) im Handumdrehen zu lösen ist. Wir interessieren uns hier nur für die stationäre Lösung und machen den Ansatz

$$\check{x}_s(t) = \check{x}_0 e^{i\omega t}. \quad (12.71)$$

$\check{x}_0 = |\check{x}_0| e^{i\delta}$  wird die **komplexe Amplitude** der periodischen Funktion  $\check{x}(t)$  genannt. Eingesetzt in (12.70) ergibt das

$$-\omega^2 \check{x}_0 e^{i\omega t} + i\omega \Gamma \check{x}_0 e^{i\omega t} + \omega_0^2 \check{x}_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$\check{x}_0(\omega) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}. \quad (12.72)$$

Es ist bemerkenswert, dass die komplette Information über Amplitude und Phase der erzwungenen Schwingung schon in dieser einfachen Formel enthalten ist. Wir erweitern den rechts stehenden Bruch mit  $(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\Gamma$ :

$$\check{x}_0(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}. \quad (12.73)$$

Hier kann man Real- und Imaginärteil von  $\check{x}_0$  ohne weiteres ablesen. Für den Betrag und die Phase von  $\check{x}_0$  erhalten

## 12.6 Anharmonische Schwingungen

wir

$$\begin{aligned} |\ddot{x}_0| &= \sqrt{(\operatorname{Re} \ddot{x}_0)^2 + (\operatorname{Im} \ddot{x}_0)^2} \\ &= \frac{F_0}{m} \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \\ &= \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}} = x_0 \end{aligned} \quad (12.74)$$

$$\delta = \arctan \frac{\operatorname{Im} \ddot{x}_0}{\operatorname{Re} \ddot{x}_0} = \frac{-\omega \Gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\varphi. \quad (12.75)$$

Schreiben wir nun (12.71) in der Form  $\ddot{x}_0 = x_0 e^{i(\omega t + \delta)} = x_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$  und bilden den Realteil, erhalten wir

$$x_s(t) = \operatorname{Re} \ddot{x}_s(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi). \quad (12.76)$$

Mit den in (12.74) und (12.75) berechneten Werten von  $x_0$  und  $\varphi$  ist das unser altes Ergebnis (12.28) mit (12.34) und (12.35). Man könnte den Realteil von  $\ddot{x}_s(t)$  wie in (21.180) berechnen, mit  $z_1 = \ddot{x}_0$ ,  $z_2 = e^{i\omega t}$ :

$$\begin{aligned} x_s(t) &= \operatorname{Re} \ddot{x}_0 \operatorname{Re} e^{i\omega t} - \operatorname{Im} \ddot{x}_0 \operatorname{Im} e^{i\omega t} \\ &= \frac{(F_0/m)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \cos \omega t \\ &\quad + \frac{(F_0/m)\omega \Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (12.77)$$

Das ist identisch mit (12.41),  $x_s(t) = x_0 \cos \varphi \cos \omega t + x_0 \sin \varphi \sin \omega t$ , wenn man dort (12.32) und (12.33) einsetzt.

## 12.6 Anharmonische Schwingungen

In den vorigen Abschnitten dieses Kapitels wurde stets angenommen, dass die Kräfte in einem schwingenden System linear von der Auslenkung aus der Ruhelage und der Geschwindigkeit abhängen, was in der Praxis aber nie der Fall ist. Als einzige Ausnahme von der Harmonizität hatten wir in Abschn. 3.2 die Zunahme der Schwingungsdauer eines Pendels bei großen Ausschlägen kennengelernt. Dies wollen wir etwas quantifizieren. Die Bewegungsgleichung für das physikalische Pendel ohne Dämpfung schreiben wir in der Form

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\omega_S^2 \sin \alpha. \quad (12.78)$$

Zur Vermeidung einer Verwechslung mit der Phase wird hier der Auslenkwinkel mit  $\alpha$  bezeichnet; für die Eigenfrequenz  $\omega_S$  gilt nach (9.9) und (9.10) mit der Pendelmasse  $m$  und dem Abstand  $d$  zwischen dem Schwerpunkt und

dem Aufhängepunkt:  $\omega_S^2 = mgd/\Theta$ . Bei nicht zu großen Ausschlägen kann man für die Sinusfunktion die Taylor-Entwicklung (21.67) verwenden:

$$\sin \alpha \approx \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 \quad (12.79)$$

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \approx -\omega_S^2 \alpha + \frac{1}{6} \omega_S^2 \alpha^3. \quad (12.80)$$

Wählt man die Phase so, dass das Pendel zur Zeit Null die Amplitude Null hat, ist die Lösung bei kleinen Amplituden die Sinusfunktion  $\alpha_0 \sin \omega t$ . In den kleinen kubischen Term in (12.80) wird näherungsweise diese Lösung eingesetzt:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \approx -\omega_S^2 \alpha + \frac{1}{6} \omega_S^2 \alpha_0^3 \sin^3 \omega t. \quad (12.81)$$

Diese Gleichung lässt sich mit einer Nebenrechnung umformen. Mit Hilfe der Gleichungen (21.56)–(21.58) kann man die Funktion  $\sin 3\omega t$  sukzessive durch Potenzen der  $\sin$ - und  $\cos$ -Funktionen ausdrücken. Das Resultat ist

$$\sin 3\omega t = -4 \sin^3 \omega t + 3 \sin \omega t$$

$$\sin^3 \omega t = \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t.$$

Dann entsteht

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \approx -\omega_S^2 \alpha + \frac{1}{8} \omega_S^2 \alpha_0^3 \sin \omega t - \frac{1}{24} \omega_S^2 \alpha_0^3 \sin 3\omega t. \quad (12.82)$$

Die Schwingung kann nun nicht mehr harmonisch sein, denn diese Gleichung lässt sich nur lösen, wenn man zur Sinus-Funktion einen Korrekturterm mit der 3-fachen Schwingungsfrequenz addiert:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin \omega t + \alpha_3 \sin 3\omega t \quad \text{mit} \quad \alpha_3 \ll \alpha_0. \quad (12.83)$$

Damit (12.82) zu allen Zeiten gilt, müssen die zu  $\sin \omega t$  und  $\sin 3\omega t$  proportionalen Terme jeweils für sich verschwinden. Eine Folgerung ist

$$\begin{aligned} -\omega^2 \alpha_0 &= -\omega_S^2 \alpha_0 + \frac{1}{8} \omega_S^2 \alpha_0^3 \\ \omega^2 &= \omega_S^2 \left( 1 - \frac{1}{8} \alpha_0^2 \right). \end{aligned}$$

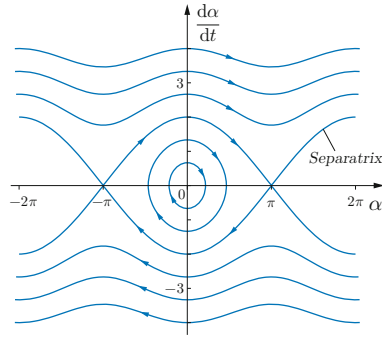
Dies erklärt den anfänglichen parabolischen Anstieg der Schwingungsdauer als Funktion der Amplitude in Abb. 3.14.

Zur Veranschaulichung wird die Entwicklung eines nichtlinearen Systems häufig in einem sogenannten **Phasenraum-Diagramm** dargestellt. Ist die Bewegung eines Körpers als Funktion der Zeit bekannt, trägt man die Ortskoordinate (Ort  $x$  oder Winkel  $\alpha$ ) und die zugehörige Geschwindigkeit ( $v$  bzw.  $d\alpha/dt$ ) in ein zweidimensionales Diagramm ein. Abb. 12.17 zeigt dies für ein reibungsfreies



**Abbildung 12.17**

Phasenraum-Diagramm eines physikalischen Pendels ohne Reibung



physikalisches Pendel, das sich überschlagen kann. Bei kleinen Pendelausschlägen ist die Winkelkoordinate proportional zu  $\sin \omega t$  und die Winkelgeschwindigkeit zu  $\cos \omega t$ . Die Bahn im Phasenraum ist wegen (21.55) eine Ellipse. Mit größer werdender Schwingungsamplitude wird die Ellipse deformiert. Bei einer Bewegung mit Überschlag hat die Winkelgeschwindigkeit immer das gleiche Vorzeichen. Dazwischen gibt es den Fall, bei dem sich das Pendel am labilen Gleichgewichtspunkt in Ruhe befinden würde. Es gibt eine Grenzkurve, die die Gebiete der Schwingungen mit und ohne Überschlag trennt. Diese Kurve wird **Separatrix** genannt. Im Falle des reibungsfreien Pendels folgt die Form der Bahnen im Phasenraumdiagramm aus dem Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2} \Theta \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + mgd(1 - \cos \alpha) = E_{\text{tot}} \quad (12.84)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{2 \frac{E_{\text{tot}} - mgd(1 - \cos \alpha)}{\Theta}}. \quad (12.85)$$

Auf der Separatrix ist  $d\alpha/dt = 0$  bei  $\alpha = \pi$  und es folgt  $E_{\text{tot}} = 2mgd$ . Damit ergibt sich die Proportionalität

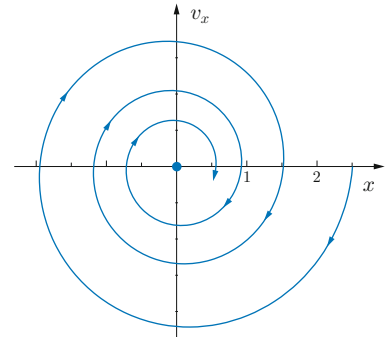
$$\frac{d\alpha}{dt} \sim \sqrt{1 + \cos \alpha} \sim \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Im allgemeinen Fall eines beliebigen nichtlinearen Potentials kann es mehrere Gleichgewichtspunkte im Phasenraum geben, die man **Fixpunkte** nennt. In der Nähe eines solchen Punktes kann man die potentielle Energie näherungsweise durch eine quadratische Funktion beschreiben, z.B.  $V(x) \approx V(x_0) + k(x - x_0)^2/2$  für eine Translationsbewegung. Führt man zusätzlich eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft ein, ergibt sich die Bewegungsgleichung einer gedämpften harmonischen Schwingung und das Phasenraumdiagramm gewinnt man aus den Lösungen (12.61). Die Resultate sind in den Abbildungen 12.18–12.20 gezeigt.

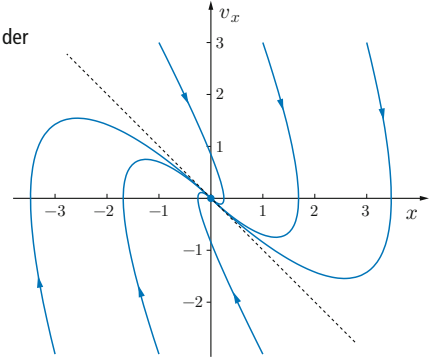
In der Nähe eines stabilen Gleichgewichtspunktes erhält man bei Verwendung von (12.66) im Phasenraum spiralförmige Bahnen, die zum Gleichgewichtspunkt hin

**Abbildung 12.18**

Phasenraum-Diagramm an einem Fokus

**Abbildung 12.19**

Phasenraum-Diagramm in der Umgebung eines Knotens



konvergieren. Dieser wird deshalb als **Fokus** bezeichnet (Abb. 12.18). Liegt bei großer Dämpfung der Kriechfall vor, ist die Lösung der Schwingungsgleichung nach (12.68) die Summe zweier Exponentialfunktionen. Dabei sind wegen  $\mu = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  sowohl die Summe  $\gamma + \mu$  als auch die Differenz  $\gamma - \mu$  positiv. Dies führt auf die Struktur in Abb. 12.19. Unabhängig von den Anfangsbedingungen enden wie im Falle des Fokus alle Bahnen im Fixpunkt. Dieser Fixpunkt-Typ wird **Knoten** genannt.

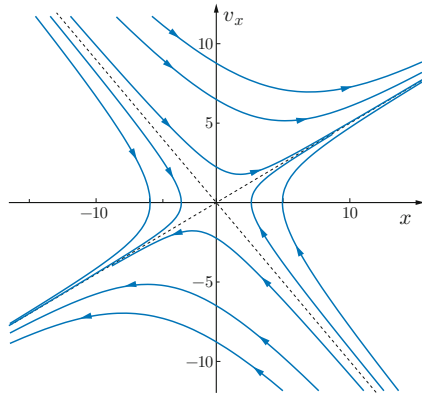
An einem instabilen Gleichgewichtspunkt hat die potentielle Energie ein Maximum. In Gleichung (12.60) hat man dann formal ein negatives  $\omega_0^2$  einzusetzen. Deshalb ist  $\mu > \gamma$  und in der Lösung (12.68) haben die Exponenten in den Exponentialfunktionen unterschiedliche Vorzeichen. Dann erhält man den in Abb. 12.20 gezeigten **Sattel**. Das Diagramm enthält zwei asymptotische Geraden, deren Steigungen durch die beiden Konstanten  $\gamma + \mu$  und  $\gamma - \mu$  gegeben sind. Das lässt sich leicht einsehen, wenn man in der Lösung (12.68) die beiden Grenzübergänge  $t \rightarrow \pm\infty$  durchführt, bei denen jeweils eine Exponentialfunktion gegen Null strebt. Liegen in einem System mehrere Fixpunkte vor, hat sozusagen jeder seinen eigenen „Einzugsbereich“ und es existieren wie im obigen Beispiel des Pendels Separatrix-Linien, die verschiedene Phasenraumbereiche trennen.

Erzwungene Schwingungen werden nach Gleichung (12.27) beschrieben durch eine Summe aus (12.28) und einer beliebigen gedämpften Eigenschwingung des

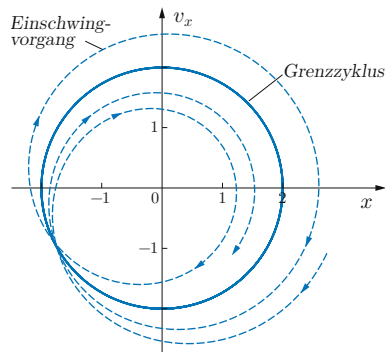


## 12.6 Anharmonische Schwingungen

**Abbildung 12.20**  
Phasenraum-Diagramm an  
einem Sattel



**Abbildung 12.21**  
Phasenraum-Diagramm mit  
einem Grenzyklus



Oszillators. Gleichung (12.28) beschreibt eine Oszillation mit konstanter Amplitude, die im Phasenraumdiagramm wieder eine Ellipse ist. Eine solche geschlossene asymptotische Kurve wird als **Grenzyklus** bezeichnet. Die Eigenschwingungen des Oszillators führen, je nach den Anfangsbedingungen, zu abklingenden Oszillationen um diese Ellipse (Abb. 12.21). An dieser Stelle ist auf eine topologische Besonderheit hinzuweisen: In den Abbildungen 12.17–12.20 kommt es, von Fixpunkten abgesehen, *niemals* vor, dass sich zwei Phasenraumbahnen unter endlichem Winkel kreuzen. Das steht in völligem Gegensatz zu Abb. 12.21, in der Überschneidungen stattfinden. Was ist der Grund dafür? Ohne äußere Kräfte wird die Beschleunigung eindeutig durch die Position und die Geschwindigkeit bestimmt und die Richtung der Phasenraumbahn ist daher eindeutig. Im Falle der erzwungenen Schwingung wird die äußere Kraft bei wiederholtem Passieren des gleichen Phasenraumpunktes im Allgemeinen verschiedene Werte haben. Will man diesen Sachverhalt in das Phasenraumdiagramm aufnehmen, muss man eine dritte Dimension hinzufügen mit der Kraft oder einer entsprechenden Federauslenkung als Variable. In drei Dimensionen fallen die Überschneidungen dann wieder weg. Man sagt: Das physikalische System hat einen weiteren **Freiheitsgrad**.

Ein interessantes nichtlineares Schwingungsphänomen tritt auf, wenn man das Vorzeichen des kubischen Terms

in (12.79) umdreht. Dies lässt sich z. B. realisieren, indem man ein physikalisches Pendel „auf den Kopf“ stellt. Um trotzdem eine stabile Gleichgewichtslage zu erhalten, benötigt man dann ein Rückstellmoment, das die Schwerkraftkomponente  $+mdg \sin \alpha$  überkompensiert. Eine geeignete Versuchsanordnung ist ein Pohlsches Rad (Abb. 12.8), das an der Spitze mit einer Masse beschwert wird, die nicht zu groß sein darf. Eine Dämpfung kann mit einer Wirbelstrombremse erzeugt werden. Die Bewegungsgleichung (12.78) ist um die elastische Kraft, die Reibung und das äußere Drehmoment zu ergänzen:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = +\omega_S^2 \sin \alpha - \omega_F^2 \alpha - \Gamma \frac{d\alpha}{dt} + \ddot{\alpha}_e \sin \omega t. \quad (12.86)$$

Aus Gleichung (9.10) liest man ab:  $\omega_F^2 = k_\varphi / \Theta$ . Der Antrieb des Rades geschieht so, dass das Ende der Spiralfeder in Abb. 9.8 tangential mit konstanter Amplitude hin- und herbewegt wird. Weil das andere Ende der Feder an der Drehachse befestigt ist und fast in Ruhe bleibt, bestimmt diese Amplitude zusammen mit der Federkonstanten und den Hebelverhältnissen den Parameter  $\ddot{\alpha}_e$ , der die Dimension eines Frequenzquadrats hat. Bei nicht zu großer Amplitude kann man (12.86) in Analogie zu (12.82) lösen und erhält mit dem Ansatz  $\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= +\omega_S^2 \left( \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 \right) - \omega_F^2 \alpha - \Gamma \frac{d\alpha}{dt} + \ddot{\alpha}_e \sin \omega t \\ &- \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \alpha_0 = \\ &- \left( \omega_F^2 - \omega_S^2 + \frac{1}{8} \alpha_0^2 \omega_S^2 \right) \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi) \\ &- \Gamma \omega \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi) + \ddot{\alpha}_e \sin \omega t. \end{aligned} \quad (12.87)$$

Diese Gleichung entspricht (12.29) und man kann die Lösung (12.34) übertragen, indem man  $F_0/m$  mit  $\ddot{\alpha}_e$  und  $x_0$  mit  $\alpha_0$  identifiziert. Außerdem wird  $\Gamma \ll \omega_0$  angenommen und mit (12.43) ergibt sich

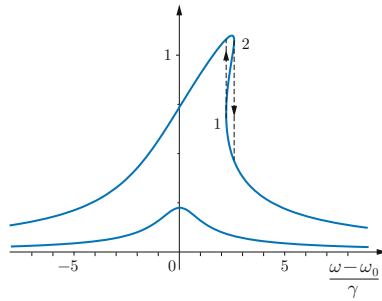
$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\ddot{\alpha}_e}{\sqrt{4\omega_0^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega_0^2}} \\ &= \frac{\ddot{\alpha}_e / (2\omega_0)}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}}. \end{aligned} \quad (12.88)$$

Der Vergleich von (12.87) mit (12.29) zeigt, dass man

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \omega_F^2 - \omega_S^2 + \frac{1}{8} \alpha_0^2 \omega_S^2 = \omega_r^2 + \frac{1}{8} \alpha_0^2 \omega_S^2 \\ \omega_0 &\approx \omega_r + \frac{1}{16} \alpha_0^2 \frac{\omega_S^2}{\omega_r} \quad \text{mit} \quad \omega_r^2 = \omega_F^2 - \omega_S^2 \end{aligned}$$

zu setzen hat. Im Zähler von (12.88) kann man  $\omega_0$  bei nicht zu großer Amplitude durch  $\omega_r$  ersetzen. Dann invertiert

**Abbildung 12.22** Resonanzkurven eines invertierten Pendels für zwei verschiedene Dämpfungen. Die Parameter sind  $\ddot{\alpha}_e / \omega_S^2 = 0,067$ ,  $\gamma \omega_r / \omega_S^2 = 0,03$  bzw.  $0,15$  (siehe Text)



man (12.88) und dividiert durch  $\gamma$ :

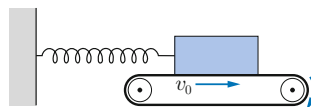
$$\frac{\omega - \omega_r}{\gamma} = \frac{1}{16} \frac{\omega_S^2}{\gamma \omega_r} \alpha_0^2 \pm \sqrt{\frac{\ddot{\alpha}_0^2}{4\omega_r^2 \gamma^2 \alpha_0^2} - 1}. \quad (12.89)$$

Ohne diese Inversion würde sich eine kubische Gleichung für  $\alpha_0^2$  ergeben.

Abbildung 12.22 zeigt zwei mit dieser Formel berechnete Resonanzkurven. Wie man sieht, kippt die Kurve für große Dämpfung oben über. Startet man ein Experiment mit konstantem  $\ddot{\alpha}_e$  bei großem  $\omega$ , beobachtet man zunächst kleine Schwingungsamplituden. Wird die Frequenz auf den Wert  $\omega_1$  abgesenkt, springt die Amplitude schlagartig auf einen viel größeren Wert. Beginnt man bei kleinen Frequenzen und erhöht  $\omega$ , tritt ein Amplitudensprung nach unten erst bei der größeren Frequenz  $\omega_2$  auf: Das System besitzt eine **Hysterese**. Der mittlere Ast der Resonanzkurve ist instabil und wird nie erreicht.

Abb. 12.23 zeigt als weiteres mechanisches Modell für eine nichtlineare Schwingung eine Masse, die mit einer Feder an einer Wand befestigt ist und von einem mit einer kleinen konstanten Geschwindigkeit  $v_0$  laufenden Förderband auf Grund der Haftreibung mitgezogen wird. Hat die Zugkraft der Feder einen gewissen Schwellenwert erreicht, wird die Masse nach rückwärts schwingen, wobei sie durch Gleitreibung abgebremst wird. Erreicht die Masse während dieser Bewegung wieder die Geschwindigkeit  $v_0$ , bleibt sie auf dem Band liegen und der Vorgang beginnt von Neuem. Die Kraft zur Aufrechterhaltung der Bandgeschwindigkeit ist nicht konstant, sie hat aber immer die gleiche Richtung! Weil die Masse zeitweise eine konstante Geschwindigkeit besitzt und wegen der Konstanz der Reibungskraft während der Schwingungsphase ist die Schwingung stark anharmonisch. Die Verwandtschaft dieses Modells mit dem Streichen einer eingespannten Saite mit einem Bogen, dem Anblasen einer Pfeife mit einem Luftstrom oder dem Antrieb einer

**Abbildung 12.23** Modell für erzwungene Schwingungen eines stark nichtlinearen Systems



Pendeluhr durch ein herabsinkendes Gewicht ist unverkennbar.

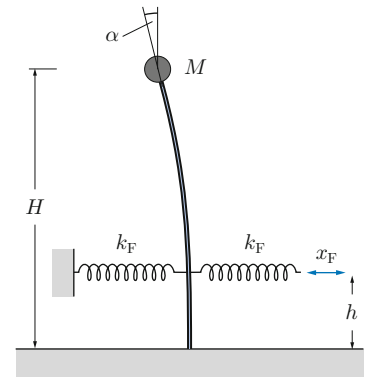
## 12.7 Chaotische Schwingungen

Wir kehren zu dem mit einer Masse beschwerten Pohl'schen Rad zurück. Alternativ kann man auch die Anordnung von Abb. 12.24 studieren, in der eine Blattfeder Schwingungen um die vertikale Richtung ausführen kann. In der Praxis muss der Antrieb fast unten erfolgen ( $h \ll H$ ), damit (12.86) gültig bleibt. Die Blattfeder besteht in Wirklichkeit aus zwei Schichten: einer elastischen zur Erzeugung der Rückstellkraft und einer plastischen zur Erzeugung einer Dämpfung. Werden nun das Rad oder die Feder oben mit einer genügend großen Masse belastet, wird die vertikale Lage des Pendels instabil. Man spricht von **spontaner Symmetriebrechung**. Die potentielle Energie als Funktion der Winkelauslenkung ist z. B.

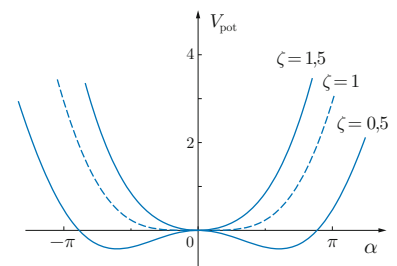
$$\begin{aligned} V(\alpha) &= mgd(\cos \alpha - 1) + \frac{1}{2} k_F \alpha^2 \\ &= mgd \left( \cos \alpha - 1 + \frac{1}{2} \zeta \alpha^2 \right) \end{aligned} \quad (12.90)$$

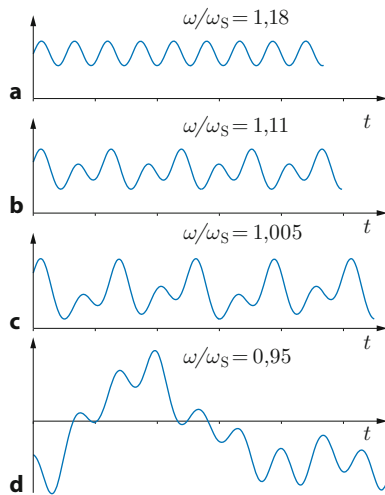
für ein Pohl'sches Rad mit dem Radius  $d$  und der Zusatzmasse  $m$ .  $\zeta$  ist das Verhältnis der Federenergie zur Energie im Schwerfeld, beide gezählt ab der Nullstellung, im Grenzfall  $\alpha \rightarrow 0$ . Man erkennt in Abb. 12.25, dass

**Abbildung 12.24** Prinzip des stabilisierten invertierten Pendels



**Abbildung 12.25** Potentielle Energie des invertierten Pendels als Funktion der Winkelauslenkung mit und ohne Symmetriebrechung

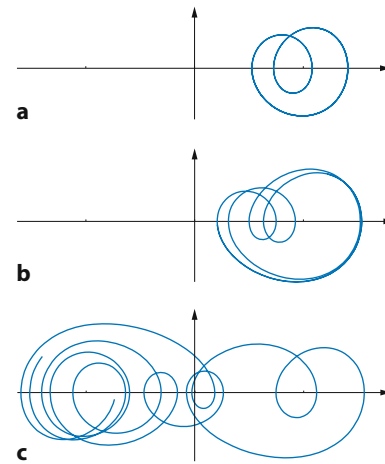




**Abbildung 12.26** Schwingungsamplitude eines invertierten Pendels als Funktion der Zeit: a) bei hoher Frequenz, b) nach der ersten Bifurkation, c) nach der zweiten Bifurkation, d) im Fall der chaotischen Schwingung. Die konstanten Systemparameter (siehe Text) sind  $\omega_F/\omega_S = \sqrt{5/6}$ ,  $\Gamma/\omega_S = 0,2$  und  $\ddot{\alpha}_e/\omega_S^2 = 0,3$

der Umschlag zur vertikalen Instabilität bei  $\zeta = 1$  stattfindet. Danach gibt es auf beiden Seiten relativ zur Mitte neue Gleichgewichtspunkte.

Im Folgenden wird das System mit Symmetriebrechung vorausgesetzt. Man erzeugt mit Hilfe eines „Generators“ mit der Kreisfrequenz  $\omega$  erzwungene Schwingungen. Die Differentialgleichung dafür ist wieder (12.86), nur mit anderen Parametern. Ist  $\omega$  groß gegenüber der Eigenfrequenz  $\omega_0$  des Pendels für Schwingungen um eine der neuen Ruhelagen, sieht es zunächst so aus, als bliebe, abgesehen von den Zahlenwerten, alles beim Alten. Verschiebt man aber bei gleich bleibender Schwingungsamplitude der Antriebsfeder die anregende Kreisfrequenz  $\omega$  zu niedrigeren Werten, geschieht Eigenartiges: Ab einer Grenzfrequenz  $\omega_1$  haben zwei aufeinander folgende Schwingungsmaxima nicht mehr die gleiche Höhe; es wechseln sich zwei Amplitudenmaxima ab. Dadurch erhöht sich die Periodendauer um einen Faktor 2 und die Grundfrequenz des Systems ist nur noch halb so groß, man spricht von **Periodenverdopplung** oder **Bifurkation**. Dies wird in den Abbildungen 12.26 a,b gezeigt. Wird  $\omega$  weiter reduziert, wiederholt sich dieses Phänomen: es gibt vier Amplitudenmaxima und ihre Abfolge wiederholt sich erst nach vier ursprünglichen Periodendauern (Abb. 12.26 c). Die Reihe der Bifurkationen setzt sich unbegrenzt fort; nur ist sie mit mechanischen Apparaten schwer beobachtbar und auch besser funktionierende elektrische Analoga stoßen an messtechnische Grenzen. Zum einen wird der Abstand zwischen benachbarten Werten der Amplitudenmaxima immer kleiner. Noch wichtiger ist die Tatsache, dass der Abstand der Frequenzen, bei denen die Bifur-



**Abbildung 12.27** Phasenraum-Diagramm eines invertierten Pendels bei verschiedenen Anregungsfrequenzen. a) nach der ersten Bifurkation, b) nach der zweiten Bifurkation, c) im Fall der chaotischen Schwingung. Die Parameter sind die gleichen wie in Abb. 12.26

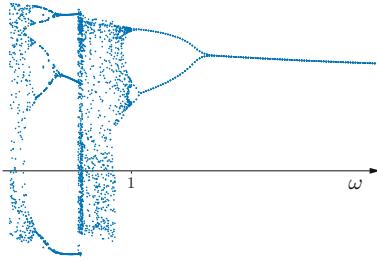
kationen stattfinden, mit wachsender Zahl immer kleiner wird. Es gibt eine Frequenzgrenze, bei der unendlich viele Bifurkationen stattgefunden haben. Dies bedeutet, dass sich die Folge der Amplitudenmaxima nicht mehr periodisch wiederholt, die Schwingung ist **chaotisch** geworden. Abb. 12.26 d zeigt einen Ausschnitt aus dem Schwingungsverlauf bei einer Frequenz im chaotischen Bereich. Abbildung 12.27 zeigt zur Illustration für einige Fälle die zugehörigen Phasenraumdiagramme.

Als Schwingungsmaxima kann man die Amplituden beim Nulldurchgang der Winkelgeschwindigkeit in Richtung von positiven zu negativen Werten definieren (Schnittpunkte mit der Abszissenachse in Abb. 12.21). Dann kann man ein sogenanntes **Bifurkationsdiagramm** konstruieren. Man trägt die gefundenen Maxima als Funktion des variierten Systemparameters (hier der Anregungsfrequenz) auf (Abb. 12.28). Die Entwicklung zum Chaos ist klar erkennbar. Verblüffend ist, dass bei weiterer Reduktion der Anregungsfrequenz das chaotische Verhalten wieder verschwindet und man eine Aufspaltung in 3 und 6 Amplitudenwerte findet, bis wiederum chaotisches Verhalten einsetzt.

Wie lassen sich Bifurkationen im Prinzip verstehen? Man betrachte Abb. 12.21. Eine kleine Abweichung  $\Delta\alpha$  vom Grenzzyklus wird sich nach jedem Bahnmlauf verändern und man erhält eine Kette von Amplituden

$$\Delta\alpha_{n+1} = f(\Delta\alpha_n).$$

Existiert eine stabile Phasenraumbahn ohne Überschneidungen, verschwindet der Unterschied zwischen  $\Delta\alpha_n$  und  $\Delta\alpha_{n+1}$ , man erreicht den Grenzzyklus.



**Abbildung 12.28** Bifurkationsdiagramm: Die bei der erzwungenen Schwingung auftretenden Schwingungsmaxima als Funktion der Anregungsfrequenz

Man nehme an, es sei eine Schwingung mit sehr kleiner Amplitude um  $\alpha \approx 0$  in einem Potential ohne Symmetriebrechung angeregt und die Form des Potentials werde so geändert, dass Symmetriebrechung auftritt. Der Gleichgewichtspunkt verschiebt sich und die Schwingungsamplitude stellt sich auf einen neuen endlichen Wert ein.

Bei chaotischem Verhalten sieht man in Abb. 12.27 c riesige Amplitudenänderungen pro Umlauf, die daher rühren, dass das Pendel in dem gezeigten Ausschnitt wegen „zufälligen“ Energieentzugs bei negativen  $\alpha$  „hängenbleibt“, ein Effekt der Nichtlinearität.

Ein sehr einfaches mathematisches Modell, in dem derartige Situationen auftreten, basiert auf der **logistischen Gleichung**. Sie lautet:

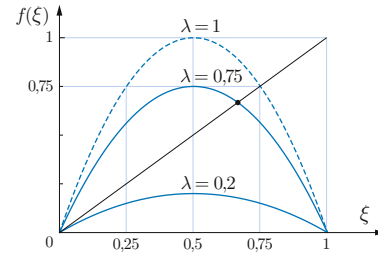
$$\begin{aligned} \zeta_{n+1} &= f(\zeta_n) = 4\lambda \zeta_n (1 - \zeta_n) \\ \text{mit } 0 &\leq \zeta_n \leq 1. \end{aligned} \quad (12.91)$$

Darin ist das  $\zeta$ -Intervall als Analogon zu einem  $\alpha$ -Bereich anzusehen und die Konstante  $\lambda$  entspricht apparativen Parametern wie der Potentialform und der Anregung. Die Funktion  $f(\zeta)$  ist für drei Werte von  $\lambda$  in Abb. 12.29 dargestellt. Ein Fixpunkt liegt vor, wenn  $\zeta_{n+1} = \zeta_n$  ist:

$$\begin{aligned} \zeta_F &= 4\lambda \zeta_F (1 - \zeta_F) \\ \rightarrow \zeta_F &= 1 - \frac{1}{4\lambda} \quad \text{oder} \quad \zeta_F = 0. \end{aligned} \quad (12.92)$$

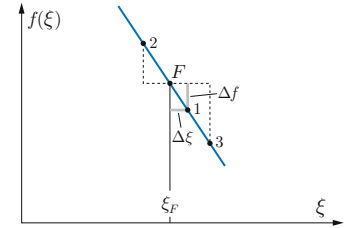
Für  $\lambda < 1/4$  gibt es nur die Lösung  $\zeta_F = 0$ . Überschreitet  $\lambda$  diesen Wert, ist  $\zeta_F > 0$  möglich und wegen  $f(\zeta) > \zeta$  bei kleinen  $\zeta$  wird der Fixpunkt  $\zeta_F = 0$  instabil. Es entsteht bei  $\lambda > 1/4$  eine neue Gleichgewichtslage, wie nach der Symmetriebrechung beim Pendel.

Der maximale Wert der Funktion  $f$  ist  $f(1/2) = \lambda$  und wegen  $\zeta \leq 1$  ist auch  $\lambda \leq 1$ . Nach Gleichung (12.92) kann es keinen Fixpunkt mit  $\zeta_F > 3/4$  geben. Die Frage ist: Ist ein Fixpunkt mit  $\zeta_F = 3/4$  stabil? Hierzu betrachten wir Abb. 12.30, die einen Ausschnitt aus dem rechten Ast der Kurven in Abb. 12.29 für den Wert  $\lambda = 7/8$  zeigt. Wie man sieht, wird eine Abweichung  $\Delta\zeta$  vom Wert  $\zeta_F$

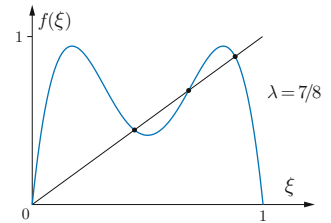


**Abbildung 12.29** Konstruktion der Fixpunkte mit der logistischen Gleichung

**Abbildung 12.30** Zur Stabilität des Fixpunkts der logistischen Gleichung bei großen Abszissenwerten



**Abbildung 12.31** Zur Existenz von Fixpunkten der logistischen Gleichung nach der zweiten Iteration



des Fixpunkts nach der ersten Iteration mit (12.91) vergrößert ( $\Delta f$ , Punkt 1), nach der zweiten (Punkt 2) und dritten (Punkt 3) noch mehr: Der Fixpunkt ist instabil. Damit das nicht vorkommt, darf die Steigung der Kurve in Abb. 12.30 den Wert  $-1$  nicht unterschreiten, woraus folgt:

$$\frac{df}{d\zeta} = 4\lambda - 8\lambda \zeta_F > -1.$$

Mit (12.92) erhält man das Resultat  $\lambda < 3/4$ , d. h. für  $\lambda > 3/4$  existiert kein stabiler Fixpunkt mehr!

Die Situation ändert sich, wenn man zwei Iterationen hintereinander betrachtet:

$$\begin{aligned} f_2(\zeta) &= f(f(\zeta)) = 4\lambda f(\zeta)(1 - f(\zeta)) \\ &= 16\lambda^2 \zeta(1 - \zeta)(1 - 4\lambda \zeta(1 - \zeta)). \end{aligned}$$

Diese Funktion ist für den Parameter  $\lambda = 7/8$  in Abb. 12.31 dargestellt. Wie man sieht, gibt es drei Schnittpunkte mit der Diagonalen. Der mittlere Fixpunkt ist instabil. Die anderen beiden Punkte gehen notwendigerweise durch Iteration mit (12.91) auseinander hervor. Sie entsprechen den beiden Pendelamplituden, die nach der ersten Bifurkation in Abb. 12.26 bzw. 12.27 abwechselnd auftreten. Die Folge der Bifurkationen lässt sich in dem mathematischen Modell beliebig fortsetzen. Wie von

## 12.7 Chaotische Schwingungen

Feigenbaum gezeigt wurde, gibt es ein asymptotisches Verhältnis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}} = 4,699 \dots,$$

das man die **Feigenbaum-Konstante** nennt. Diese Zahl ist universell und gilt für *alle*  $f(\xi)$ , die ein einziges breites Maximum haben! Oberhalb der Grenze  $\lambda_\infty$  gibt es keine periodischen Wiederholungen mehr und der Übergang zum Chaos hat stattgefunden.

Liegen chaotische Schwingungen vor, sind definitive Vorhersagen von Amplitudenwerten über längere Zeiträume nicht mehr möglich: Winzige Verschiebungen der Anfangsbedingungen innerhalb der experimentellen Messgenauigkeit haben große Auswirkungen auf die zeitliche Entwicklung des Systems. Sie führen zu Amplitudenvorhersagen, deren Differenzen exponentiell mit der Zeit zunehmen.

Das Erreichen chaotischer Bewegungen über eine Kette von Bifurkationen ist nicht der einzige Weg zu ihrer Entstehung. Auch besteht in chaotischen Schwingungen durchaus noch eine Ordnung in Gestalt von Korrelationen zwischen den Schwingungsmaxima. Für Details und ein weiteres Studium dieses faszinierenden Gebiets muss auf die Spezialliteratur verwiesen werden.<sup>4</sup>

Chaotische Schwingungen können auch in Systemen ohne äußere Kräfte auftreten. Notwendig sind nur eine große Nichtlinearität und die Existenz eines mindestens dreidimensionalen Phasenraums. Dies lässt sich gut mit dem **chaotischen Pendel** demonstrieren (Abb. 12.32). Es besteht aus zwei gekoppelten physikalischen Pendeln, von denen eines drehbar an einem fest stehenden Stativ aufgehängt ist, während das zweite Pendel um das erste schwingen kann. Das System ist so justiert, dass zwei Schwingungsdauern ähnlich sind: (1) die Schwingungsdauer des Gesamtsystems, wenn beide Pendel in einer Linie relativ zueinander fixiert sind und (2) die Schwingungsdauer des zweiten Pendels, wenn das erste fixiert ist.

Bei kleinen Pendelausschlägen verhält sich das System linear und man beobachtet die oben behandelten Schwebungen: Im Wechsel dreht sich das zweite Pendel mit dem ersten mit oder es führt Schwingungen gegenüber ihm aus. Bei großen Amplituden mit Überschlagen ist



Abbildung 12.32 Chaotisches Pendel

das System nichtlinear. Ohne externen Antrieb besitzt sein Phasenraum drei Dimensionen: Man benötigt zwei Winkel zur Beschreibung der Pendelstellungen. Damit ist die potentielle Energie im Schwerfeld der Erde definiert und unter Annahme der Energieerhaltung auch die Summe der kinetischen Energien der Pendel. Durch die Winkelgeschwindigkeit eines Pendels ist dann auch die Winkelgeschwindigkeit des zweiten festgelegt. Somit sind die notwendigen Bedingungen für das Auftreten chaotischer Schwingungen erfüllt und sie werden auch beobachtet: In wirrer Folge ändern sich die beiden Pendelausschläge und zwischendurch werden bei Überschlagen auch Wechsel der Rotationsrichtung beobachtet, bis die Energie durch Reibung soweit aufgezehrt ist, dass die Nichtlinearität verschwindet und damit auch das Chaos.

Das Fazit dieses Abschnitts ist vielleicht erschreckend und in jedem Fall eine Warnung für alle Lebenslagen: Schon in einfachsten nichtlinearen physikalischen Systemen mit nur drei Phasenraum-Dimensionen können Situationen auftreten, in denen langfristige Vorhersagen über ihr Verhalten nicht möglich sind, obwohl die zugrunde liegenden Bewegungsgleichungen völlig deterministisch sind!

<sup>4</sup> siehe z. B. J. Argyris, G. Faust und M. Haase, „Die Erforschung des Chaos“, Vieweg, Wiesbaden, 1994



## Übungsaufgaben

**12.1. Schwingung unter dem Einfluss mehrerer Kräfte.** Eine metallische Stange der Länge  $L$  mit der Masse  $M$  sei an einem Ende im Schwerfeld der Erde so aufgehängt, dass sie in einer Ebene schwingen kann. Zusätzlich sei sie im Abstand  $h$  vom Aufhängepunkt mit zwei gleichen, horizontal orientierten Federn (Federkonstante  $k$ ) an zwei gegenüberliegenden Wänden befestigt. Die Ruhelage der Stange sei die Vertikale. Wie groß ist die Schwingungsfrequenz bei kleinen Pendelausschlägen?

**12.2. Beschleunigungsmesser.** Für die Messung von Beschleunigungen gibt es Sensoren, die auf der Trägheit basieren. Ein Probekörper der Masse  $m$  befindet sich im Inneren einer Kapsel, an der er mit einer Feder mit der Federkonstanten  $k$  befestigt ist. Wird die Kapsel beschleunigt, führt der Körper eine Bewegung  $x(t)$  gegenüber der Kapsel aus, die mit elektrischen Verfahren (z. B. durch Induktion) gemessen werden kann. Diese Bewegung wird mechanisch mit einer zur Relativgeschwindigkeit proportionalen Kraft  $-\beta dx/dt$  gedämpft.

a) Betrachten Sie die Bewegung des Probekörpers im beschleunigten Koordinatensystem der Kapsel und formulieren Sie die Bewegungsgleichung, wenn die Kapsel einer periodischen Beschleunigung  $a = a_0 \cos \omega t$  ausgesetzt wird. Wie lautet die Lösung  $x(t)$  für die erzwungenen Schwingungen, nachdem die Schwingung mit der Eigenfrequenz des Probekörpers abgeklungen ist?

b) Zeigen Sie: (i) Für alle Frequenzen  $\omega$ , die klein gegenüber der ungedämpften Eigenfrequenz  $\omega_0$  des Probekörpers sind, ist die Amplitude der Schwingung proportional zur Beschleunigung  $a_0$ . (ii) Die Schwingung des Probekörpers ist um eine Zeit  $2\gamma/\omega_0^2$  gegenüber der periodischen Beschleunigung verzögert.

c) Bei welcher Frequenz  $\omega$  wäre die Schwingungsamplitude des Probekörpers maximal, wenn  $\beta$  klein wäre? In der Praxis verwendet man kritische Dämpfung. Wie groß ist dann  $\beta$ ? Gibt es noch ein Maximum der Schwingungsamplitude als Funktion von  $\omega$ ?

d) Frage b) deutet bereits darauf hin, dass der Beschleunigungsmesser nur für Frequenzen  $\omega \ll \omega_0$  funktioniert. Betrachten Sie die Schwingungsamplitude  $x_0$  als Funktion von  $\omega/\omega_0$  bei kritischer Dämpfung. Bei welchem Wert von  $\omega/\omega_0$  weicht das Verhältnis  $x_0/a_0$  von seinem Wert bei  $\omega = 0$  um 5 % ab, d. h. das Messergebnis hat einen Fehler von 5 %?

Zahlenbeispiel:  $m = 1 \text{ g}$ ,  $k = 14 \text{ N/m}$ . Wie groß ist  $\omega_0$ , wie groß ist  $\beta$  für kritische Dämpfung und bei welcher Frequenz tritt der systematische Fehler von 5 % auf? Wie groß ist die Auslenkung des Probekörpers für  $a_0 = 1 \text{ m/s}^2$ ?

**12.3. Vertikalschwingung eines Autos.** Das einfachste Modell für die Behandlung vertikaler Schwingungen ei-

nes Autos besteht darin, die Schwingungen an den vier Rädern näherungsweise als ähnlich zu betrachten und Schwebungen zu ignorieren. Ein PKW der Masse  $M = 1300 \text{ kg}$  (inklusive Insassen) belaste mit Bruchteilen  $f$  von je 20 % die beiden Hinterräder.

a) Wird der Kofferraum zusätzlich mit  $2m = 120 \text{ kg}$  beladen, sinkt das Fahrzeug hinten ab. Welche Federkonstante müssen die Federn an den Hinterrädern haben, damit die Fahrzeugabsenkung auf 3 cm beschränkt bleibt?

b) Welche Eigenfrequenz  $\omega_0$  der vertikalen Fahrzeugschwingungen ergibt sich daraus mit ausgebauten Stoßdämpfern ohne die Zuladung?

c) Die Stoßdämpfer sollen einen Fahrkomfort herstellen, indem sie vertikale Bewegungen dämpfen. Ihr Einfluss werde beschrieben durch eine Kraft  $F_S = -\beta d(z_K - z_A)/dt$ , wobei  $(z_K - z_A)$  die Höhendifferenz zwischen Karosserie und Radachse ist. Ein Fahrzeugrad fahre zur Zeit  $t = 0$  über eine kleine senkrechte Stufe der Höhe  $z_0$  nach oben. Danach führt die Karosserie eine gedämpfte Schwingung aus. Wie lautet die Differentialgleichung dafür?

d) Welches ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung? Welches sind die Anfangsbedingungen bei  $t = 0$  und welche Schwingung ergibt sich für  $t > 0$ ? Um den Stoß zu dämpfen, werde  $\beta$  so gewählt, dass kritische Dämpfung besteht. Wie groß ist  $\beta$ ? Beweisen Sie, dass die Lösung der Schwingungsgleichung beim Grenzübergang zur kritischen Dämpfung in die Gleichung (12.23) übergeht. Berechnen Sie die Fahrzeuganhebung als Funktion der Zeit.

e) In welcher Weise ändert sich das Verhalten des Fahrzeugs, wenn es zusätzlich beladen wird? Gilt bei konstantem  $\beta$  für die vertikale Fahrzeugbewegung nun der Kriechfall oder tritt eine Schwingung auf?

**12.4. Gekoppelte Schwingung.** Drei Teilchen seien auf einer Geraden in gleichem Abstand angeordnet und durch masselose Federn mit der Federkonstanten  $k$  miteinander verbunden (man denke z. B. an ein lineares Molekül). Die beiden äußeren Teilchen haben die Masse  $m_1$ , das mittlere Teilchen die Masse  $m_0$ . Geben Sie die Differentialgleichungen für die Bewegungen der Teilchen an und zeigen Sie, dass sich diese Gleichungen mit der gleichen Schwingungsfrequenz für alle drei Teilchen in den folgenden Fällen lösen lassen:

a) Das mittlere Teilchen ruht, die Amplituden der beiden anderen sind entgegengesetzt gleich.

b) Die Amplituden der beiden äußeren Teilchen sind gleich, der Schwerpunkt des Systems ruht. Diskutieren Sie die Schwingungsfrequenz in den Grenzfällen  $m_0 \gg m_1$  und  $m_0 \ll m_1$ .



c) Warum kann es außer den Fällen a) und b) keine weiteren Fundamentalschwingungen einheitlicher Frequenz geben?

d) Am Anfang werde eine der äußeren Massen um die Strecke  $d_1$  von ihrer ursprünglichen Ruhelage ausgelenkt und habe die Geschwindigkeit null, während die beiden anderen Massen an ihren ursprünglichen Gleichgewichtslagen ruhen. Die Masse  $m_0$  sei um einen Faktor 50 größer als die Masse  $m_1$ . Wo liegt nun der Schwerpunkt des Systems? Nach wie vielen Schwingungen kommt die erste Masse zur Ruhe, nachdem man alle Massen losgelassen hat?

**12.5. Phasenraum des physikalischen Pendels.** Überlegen Sie sich ohne Rechnung nur mit Hilfe der Anschauung, wie sich das Phasenraumdiagramm des physikalischen Pendels in Abb. 12.17 ändert, wenn man korrekterweise die Reibung berücksichtigt. Welchem Typ von Fixpunkt entspricht der instabile Gleichgewichtspunkt bei  $\alpha = \pm\pi, \pm3\pi \dots$ ? Was geschieht mit der Separatrix?