Exercice 3 :

1. La vraisemblance du modèle s'exprime comme suit :

$$L(\theta\colon D) = \prod_{i=1}^{n} f_x(x)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} (\det \Sigma)^{-1/2} \exp(\frac{-1}{2}(x_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(x_i - \mu))$$

$$= (2\pi)^{-nd/2} (\det \Sigma)^{-n/2} \exp\{\tfrac{-1}{2} \textstyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(x_i - \mu)\}$$

où

$D : données\ d'entraînement,\ n = 1000,\ d = 7,\ \mu = (\mu_1, \dots, \mu_7),$

$\Sigma : matrice\ de\ variance - covariance$, avec $\Sigma_{i,j} = cov(u_i, u_j)$

Nos paramètres sont donc $\theta = (\mu, \Sigma)$, 2 paramètres à ajuster.

D'après le réseau bayésien, on a les indépendances suivantes :

IMC ⊥ Phys $\Leftrightarrow\ cov(IMC,\ Phys) = 0$

B ⊥ Phys $\Leftrightarrow\ cov(B,\ Phys) = 0$

(B ⊥ C | IMC), (B ⊥ A | Ap), (C ⊥ H | Phys), (C ⊥ Ap | IMC, Phys)

Cependant, si on compte la taille du vecteur moyenne μ et celui de la matrice Σ, on a $7 + (7\text{x}8)/2 - 2 = 33$ valeurs car la matrice de variance-covariance Σ est symétrique et (IMC ⊥ Phys), (B ⊥ Phys)

Il y a beaucoup de paramètres, pour simplifier l'estimation des paramètres, on doit donc décomposer la vraisemblance pour avoir moins de paramètres en utilisant les dépendances locales et les distributions conditionnelles de chaque nœud.

D'après la décomposition de la vraisemblance globale, section 17.2.2 *MLE for Bayesian Networks* du livre de Koller et Friedman, on peut décomposer la vraisemblance du modèle selon la vraisemblance conditionnelle des nœuds.

$$L(\theta\colon D) = \prod_{i=1}^{d} L_i(\theta_{X_i|Pa(X_i)}\colon D)$$

$$= \prod_{i=1}^{d} \prod_{k=1}^{n} f_{X_i|Pa(X_i)}\big(x_i(k)|Pa_{x_i}(k)\big)$$

$$= \prod_{i=1}^{d} \left(2\pi\ \sigma_{X_i|Pa(X_i)}\right)^{-n/2} \exp\{\frac{-1}{2\ \sigma^2_{X_i|Pa(X_i)}} \sum_{k=1}^{n} \left(x_i(k) - U_{X_i|Pa(X_i)}\right)^2\}$$

Avec :

$$f_{X_i|Pa(X_i)}\big(x_i(k)|Pa_{x_i}(k)\big) = \left(2\pi\ \sigma_{X_i|Pa(X_i)}\right)^{-1/2} \exp\{\frac{-\left(x_i(k) - U_{X_i|Pa(X_i)}\right)^2}{2\ \sigma^2_{X_i|Pa(X_i)}}\}$$

X_i : nœuds du réseau bayésien, ici $i \in \{IMC, Phys, B, C, H, Ap, A\}$, on peut les noter $X_1, \dots, X_7$;

$x_i(k)$: valeur de X_i pour la donnée k ;

$Pa(X_i)$: l'ensemble des parents de X_i ;

$Pa_{x_i}(k)$: les valeurs des parents de X_i pour la donnée k ;

$U_{X_i|Pa(X_i)} = \beta_0^{(i)} + \beta_1^{(i)} u_1 + \cdots + \beta_k^{(i)} u_k$; où u_i sont les variables des parents de X_i ;

$\sigma^2_{X_i|Pa(X_i)} = \ Cov_D(X_i, X_i) - \sum_k \ \sum_l \ \beta_k^{(i)} \beta_l^{(i)} Cov_D(U_k, U_l)$; où U_i sont les parents de X_i ;

$\theta_{X_i|Pa(X_i)} = (\mu_{X_i|Pa(X_i)} \ ; \ \sigma^2_{X_i|Pa(X_i)})$; où $\mu_{X_i|Pa(X_i)} = E(U_{X_i|Pa(X_i)})$

On notera X_{IMC} ou IMC (ainsi que les autres variables) pour alléger la notation.

On a la décomposition suivante, en 7 vraisemblances conditionnelles :

$$L_{IMC}(\theta_{IMC}: D) = \prod_{k=1}^{n} (2\pi \ \sigma_{IMC})^{-1/2} \exp\{\frac{-(x_{IMC}(k) - \mu_{IMC})^2}{2 \ \sigma^2_{IMC}}\}$$

$$= \ (2\pi \ \sigma_{IMC})^{-n/2} \exp\{\frac{-1}{2 \ \sigma^2_{IMC}} \sum_{k=1}^{n} (x_{IMC}(k) - \mu_{IMC})^2\}$$

$$L_{Phys}(\theta_{Phys}: D) = \prod_{k=1}^{n} (2\pi \ \sigma_{Phys})^{-1/2} \exp\{\frac{-(x_{Phys}(k) - \mu_{Phys})^2}{2\sigma^2_{Phys}}\}$$

$$= \ (2\pi \ \sigma_{Phys})^{-n/2} \exp\{\frac{-1}{2 \ \sigma^2_{Phys}} \sum_{k=1}^{n} (x_{Phys}(k) - \mu_{Phys})^2\}$$

$$L_{B|IMC}(\theta_{B|IMC}: D) = \prod_{k=1}^{n} (2\pi \ \sigma_{B|IMC})^{-1/2} \exp\{\frac{-(x_B(k) - U_{B|IMC})^2}{2\sigma^2_{B|IMC}}\}$$

$$= \ (2\pi \ \sigma_{B|IMC})^{-n/2} \exp\{\frac{-1}{2 \ \sigma^2_{B|IMC}} \sum_{k=1}^{n} (x_B(k) - U_{B|IMC})^2\}$$

Avec : $U_{B|IMC} = \ \beta_0^{(B)} + \beta_{IMC}^{(B)} x_{IMC}$ et $\sigma^2_{B|IMC} = Cov_D(X_B, X_B) - \beta_{IMC}^{(B)} \beta_{IMC}^{(B)} Cov_D(X_{IMC}, X_{IMC})$

$$L_{H|Phys}(\theta_{H|Phys}: D) = \prod_{k=1}^{n} (2\pi\ \sigma_{H|Phys})^{-1/2} \exp\{\frac{-(x_H(k)-U_{H|Phys})^2}{2\sigma_{H|Phys}^2}\}$$

$$= (2\pi\ \sigma_{H|Phys})^{-n/2} \exp\{\frac{-1}{2\ \sigma_{H|Phys}^2}\sum_{k=1}^{n}(x_H(k) - U_{H|Phys})^2\}$$

Avec : $U_{H|Phys} = \beta_0^{(H)} + \beta_{Phys}^{(H)} x_{Phys}$ et $\sigma_{H|Phys}^2 = Cov_D(X_H, X_H) - \beta_{Phys}^{(H)}\beta_{Phys}^{(H)} Cov_D(X_{Phys}, X_{Phys})$

$$L_{C|IMC,Phys}(\theta_{C|IMC,Phys}: D) = \prod_{k=1}^{n} (2\pi\ \sigma_{C|IMC,Phys})^{-1/2} \exp\{\frac{-(x_C(k)-U_{C|IMC,Phys})^2}{2\ \sigma_{C|IMC,Phys}^2}\}$$

$$= (2\pi)^{-n/2}(\sigma_{C|IMC,Phys})^{-n/2} \exp\{\frac{-1}{2\ \sigma_{C|IMC,Phys}^2}\sum_{k=1}^{n}(x_C(k) - U_{C|IMC,Phys})^2\}$$

Avec :

$U_{C|IMC,Phys} = \beta_0^{(C)} + \beta_{IMC}^{(C)} x_{IMC} + \beta_{Phys}^{(C)} x_{Phys}$;

$$\sigma_{C|IMC,Phys}^2 = Cov_D(X_C, X_C) - \beta_{IMC}^{(C)}\beta_{IMC}^{(C)} Cov_D(X_{IMC}, X_{IMC}) - 2\ \beta_{IMC}^{(C)}\beta_{Phys}^{(C)} Cov_D(X_{IMC}, X_{Phys}) - \beta_{Phys}^{(C)}\beta_{Phys}^{(C)} Cov_D(X_{Phys}, X_{Phys})$$

$$L_{Ap|H,Phys,B}(\theta_{Ap|H,Phys,B}: D) = \prod_{k=1}^{n} (2\pi\ \sigma_{Ap|H,Phys,B})^{-1/2} \exp\{\frac{-(x_{Ap}(k)-U_{Ap|H,Phys,B})^2}{2\ \sigma_{Ap|H,Phys,B}^2}\}$$

$$= (2\pi\ \sigma_{Ap|H,Phys,B})^{-n/2} \exp\{\frac{-1}{2\ \sigma_{Ap|H,Phys,B}^2}\sum_{k=1}^{n}(x_{Ap}(k) - U_{Ap|H,Phys,B})^2\}$$

Avec :

$U_{Ap|H,Phys,B} = \beta_0^{(Ap)} + \beta_H^{(Ap)} x_H + \beta_{Phys}^{(Ap)} x_{Phys} + \beta_B^{(Ap)} x_B$;

$$\sigma_{Ap|H,Phys,B}^2 = Cov_D(X_{Ap}, X_{Ap}) - \beta_H^{(Ap)}\beta_H^{(Ap)} Cov_D(X_H, X_H) - \beta_{Phys}^{(Ap)}\beta_{Phys}^{(Ap)} Cov_D(X_{Phys}, X_{Phys}) - \beta_B^{(Ap)}\beta_B^{(Ap)} Cov_D(X_B, X_B) - 2\ \beta_H^{(Ap)}\beta_{Phys}^{(Ap)} Cov_D(X_H, X_{Phys}) - 2\ \beta_H^{(Ap)}\beta_B^{(Ap)} Cov_D(X_H, X_B) - 2\ \beta_B^{(Ap)}\beta_{Phys}^{(Ap)} Cov_D(X_B, X_{Phys})$$

$$L_{A|C,Phys,Ap}(\theta_{A|C,Phys,Ap}: D) = \prod_{k=1}^{n} (2\pi\ \sigma_{A|C,Phys,Ap})^{-1/2} \exp\{\frac{-(x_A(k)-U_{A|C,Phys,Ap})^2}{2\ \sigma_{A|C,Phys,Ap}^2}\}$$

$$= (2\pi\ \sigma_{A|C,Phys,Ap})^{-n/2} \exp\{\frac{-1}{2\ \sigma_{A|C,Phys,Ap}^2}\sum_{k=1}^{n}(x_A(k) - U_{A|C,Phys,Ap})^2\}$$

Avec :

$$U_{A|C,Phys,Ap} = \beta_0^{(A)} + \beta_C^{(A)} x_C + \beta_{Phys}^{(A)} x_{Phys} + \beta_{Ap}^{(A)} x_{Ap} \ ;$$

$$\begin{aligned}\sigma^2_{A|C,Phys,Ap} = {} & Cov_D(X_A, X_A) - \beta_C^{(A)}\beta_C^{(A)} Cov_D(X_C, X_C) - \beta_{Phys}^{(A)}\beta_{Phys}^{(A)} Cov_D(X_{Phys}, X_{Phys}) \\ & - \beta_{Ap}^{(A)}\beta_{Ap}^{(A)} Cov_D(X_{Ap}, X_{Ap}) - 2\, \beta_C^{(A)}\beta_{Phys}^{(A)} Cov_D(X_C, X_{Phys}) \\ & - 2\, \beta_C^{(A)}\beta_{Ap}^{(A)} Cov_D(X_C, X_{Ap}) - 2\, \beta_{Ap}^{(A)}\beta_{Phys}^{(A)} Cov_D(X_{Ap}, X_{Phys})\end{aligned}$$

En posant : $Cov_D(X,Y) = E_D(X * Y) - E_D(X) * E_D(Y)$

avec $E_D(X) = \frac{1}{K}\sum_k x(k)$ où K : nombre de données

Chaque vraisemblance conditionnelle compte 2 paramètres à ajuster, donc on se trouve avec 14 paramètres :

$$\theta = (\mu_{IMC} \ ; \ \sigma^2_{IMC} \ ; \ \mu_{Phys} \ ; \ \sigma^2_{Phys} \ ; \ \mu_{B|IMC} \ ; \ \sigma^2_{B|IMC} \ ; \ \mu_{C|IMC,Phys} \ ; \ \sigma^2_{C|IMC,Phys} \ ; \ \mu_{H|Phys} \ ; \ \sigma^2_{H|Phys} \ ;$$

$$\mu_{Ap|H,Phys,B} \ ; \ \sigma^2_{Ap|H,Phys,B} \ ; \ \mu_{A|C,Phys,Ap} \ ; \ \sigma^2_{A|C,Phys,Ap})$$

Cependant, certains paramètres s'expriment en fonction de $\beta_j^{(i)}$ donc après décompte, nous avons 24 paramètres, sachant que la covariance entre deux valeurs peut se calculer en fonction de l'estimation des moyennes entre les valeurs (section 17.2.4 *Gaussian Bayesian Networks*).

$$\theta = (\mu_{IMC}, \sigma^2_{IMC}, \mu_{Phys}, \sigma^2_{Phys}, \beta_0^{(B)}, \beta_{IMC}^{(B)}, \sigma^2_{B|IMC}, \beta_0^{(C)}, \beta_{IMC}^{(C)}, \beta_{Phys}^{(C)}, \sigma^2_{C|IMC,Phys}, \beta_0^{(H)}, \beta_{Phys}^{(H)}, \sigma^2_{H|Phys}, \beta_0^{(Ap)}, \beta_H^{(Ap)}, \beta_{Phys}^{(Ap)}, \beta_B^{(Ap)}, \sigma^2_{Ap|H,Phys,B}, \beta_0^{(A)}, \beta_C^{(A)}, \beta_{Phys}^{(A)}, \beta_{Ap}^{(A)}, \sigma^2_{A|C,Phys,Ap})$$

2. Pour maximiser la vraisemblance, il suffit de minimiser la somme suivante : $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(x_i - \mu)$ (dans la première équation)

Grâce à la décomposition et d'après au résultat de la proposition 17.1 du livre de Koller et Friedman, il suffit de minimiser le log de chaque $L_i(\theta_{X_i|Pa(X_i)} : D)$ énumérées ci-dessus, donc cela revient à minimiser :

$$-\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\, \sigma^2_{X_i|Pa(X_i)}\right) - \frac{1}{2\, \sigma^2_{X_i|Pa(X_i)}} \sum_{k=1}^{n} \left(x_i(k) - \mu_{X_i|Pa(X_i)}\right)^2 \text{ pour } i \in \{IMC, Phys, B, C, H, Ap, A\}$$

Pour trouver les $\beta_j^{(i)}$, on dérive le log de la vraisemblance ci-dessus par rapport aux $\beta_j^{(i)}$, on trouve :

$E_D(X_i) = \frac{1}{K}\sum_k x_i(k) = \beta_0^{(i)} + \beta_1^{(i)} E_D(U_1) + \cdots + \beta_d^{(i)} E_D(U_d)$ où U_j sont les parents de X_i

$$E_D(X_i * U_j) = \beta_0^{(i)} E_D(U_j) + \beta_1^{(i)} E_D(U_1 U_j) + \cdots + \beta_d^{(i)} E_D(U_d U_j)$$

On a donc $d+1$ équations et inconnus, on peut résoudre ce système pour trouver les $\beta_j^{(i)}$.

En particulier, pour IMC et Phys, les deux premiers cas ont déjà été traités en DM partie théorique, l'implémentation est simple, les cas suivants dépendront des valeurs des cas précédents, car nœuds parents. En résolvant les systèmes d'équations différentielles, on distingue plusieurs cas suivants :

Cas $L_{X_i}\left(\theta_{X_i}: D\right)$:

$$\mu_{X_i} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_i(k)$$

$$\sigma_{X_i}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_i(k) - \mu_{X_i})^2$$

Cas $L_{X_i|X_j}\left(\theta_{X_i|X_j}: D\right)$:

$$\mu_{X_i|X_j} = \beta_0^{(i)} + \beta_j^{(i)}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_j(k) = \beta_0^{(i)} + \beta_j^{(i)} E_D\left(X_j\right) = E_D(X_i)$$

$$\sigma_{X_i|X_j}^2 = Cov_D(X_i, X_i) - \beta_j^{(i)^2} Cov_D\left(X_j, X_j\right) = Var_D(X_i) - \frac{Cov_D\left(X_i, X_j\right)^2}{Var_D(X_j)}$$

$$\beta_0^{(i)} = E_D(X_i) - \beta_j^{(i)} E_D\left(X_j\right) = E_D(X_i) - \frac{Cov_D\left(X_i, X_j\right)}{Var_D(X_j)} E_D\left(X_j\right)$$

$$\beta_j^{(i)} = \frac{E_D\left(X_i\, X_j\right) - E_D(X_i) E_D\left(X_j\right)}{E_D\left({X_j}^2\right) - E_D\left(X_j\right)^2} = \frac{Cov_D\left(X_i, X_j\right)}{Var_D(X_j)}$$

Cas $L_{X_i|X_j,X_k}\left(\theta_{X_i|X_j,X_k}: D\right)$:

$$\mu_{X_i|X_j,X_k} = \beta_0^{(i)} + \beta_j^{(i)}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_j(m) + \beta_k^{(i)}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_k(m) = \beta_0^{(i)} + \beta_j^{(i)} E_D\left(X_j\right) + \beta_k^{(i)} E_D(X_k) = E_D(X_i)$$

$$\sigma_{X_i|X_j,X_k}^2 = Cov_D(X_i, X_i) - \beta_j^{(i)2} Cov_D\left(X_j, X_j\right) - 2\,\beta_j^{(i)}\beta_k^{(i)} Cov_D\left(X_j, X_k\right) - \beta_k^{(i)2} Cov_D(X_k, X_k)$$

$$\beta_0^{(i)} = E_D(X_i) - \beta_j^{(i)} E_D\left(X_j\right) - \beta_k^{(i)} E_D(X_k)$$

$$\beta_j^{(i)} = \frac{E_D\left(X_i\, X_j\right) - \beta_0^{(i)} E_D\left(X_j\right) - \beta_k^{(i)} E_D\left(X_j\, X_k\right)}{E_D\left({X_j}^2\right)} = \frac{Cov_D(X_i, X_k)\, Cov_D\left(X_j, X_k\right) - Cov_D\left(X_i, X_j\right) Var_D(X_k)}{Cov_D\left(X_j, X_k\right)^2 - Var_D\left(X_j\right) Var_D(X_k)}$$

$$\beta_k^{(i)} = \frac{E_D(X_i\, X_k) - \beta_0^{(i)} E_D(X_k) - \beta_j^{(i)} E_D\left(X_j\, X_k\right)}{E_D({X_k}^2)} = \frac{Cov_D\left(X_i, X_j\right) Cov_D\left(X_j, X_k\right) - Cov_D(X_i, X_k)\, Var_D\left(X_j\right)}{Cov_D\left(X_j, X_k\right)^2 - Var_D\left(X_j\right) Var_D(X_k)}$$

Cas $L_{X_i|X_j,X_k,X_h}\left(\theta_{X_i|X_j,X_k,X_h}:D\right)$:

$$\mu_{X_i|X_j,X_k,X_h} = \beta_0^{(i)} + \beta_j^{(i)}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_j(m) + \beta_k^{(i)}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_k(m) + \beta_h^{(i)}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} x_h(m)$$
$$= \beta_0^{(i)} + \beta_j^{(i)}E_D(X_j) + \beta_k^{(i)}E_D(X_k) + \beta_h^{(i)}E_D(X_h) = E_D(X_i)$$

$$\sigma^2_{X_i|X_j,X_k,X_h} = Cov_D(X_i,X_i) - {\beta_j^{(i)}}^2 Cov_D(X_j,X_j) - {\beta_k^{(i)}}^2 Cov_D(X_k,X_k) - {\beta_h^{(i)}}^2 Cov_D(X_h,X_h)$$
$$- 2\,\beta_j^{(i)}\beta_k^{(i)}Cov_D(X_j,X_k) - 2\,\beta_j^{(i)}\beta_h^{(i)}Cov_D(X_j,X_h) - 2\,\beta_k^{(i)}\beta_h^{(i)}Cov_D(X_k,X_h)$$

$$\beta_0^{(i)} = E_D(X_i) - \beta_j^{(i)}E_D(X_j) - \beta_k^{(i)}E_D(X_k) - \beta_h^{(i)}E_D(X_h)$$

$$\beta_j^{(i)} = \frac{E_D(X_i\,X_j) - \beta_0^{(i)}E_D(X_j) - \beta_k^{(i)}E_D(X_j\,X_k) - \beta_h^{(i)}E_D(X_j\,X_h)}{E_D({X_j}^2)}$$
$$= \frac{Cov_D(X_i,X_j) - \beta_k^{(i)}\,Cov_D(X_j,X_k) - \beta_h^{(i)}Cov_D(X_j,X_h)}{Var_D(X_j)}$$

$$\beta_k^{(i)} = \frac{E_D(X_i\,X_k) - \beta_0^{(i)}E_D(X_j) - \beta_j^{(i)}E_D(X_k\,X_j) - \beta_h^{(i)}E_D(X_k\,X_h)}{E_D({X_k}^2)}$$
$$= \frac{\beta_k^{(i)}numérateur}{Cov_D(X_j,X_k)^2 - Var_D(X_j)Var_D(X_k)}$$

$$\beta_k^{(i)}numérateur$$
$$= Cov_D(X_i,X_j)\,Cov_D(X_j,X_k) - Cov_D(X_i,X_k)\,Var_D(X_j)$$
$$- \beta_h^{(i)}(Cov_D(X_j,X_k)\,Cov_D(X_j,X_h) - Cov_D(X_k,X_h)\,Var_D(X_j))$$

$$\beta_h^{(i)} = \frac{E_D(X_i\,X_h) - \beta_0^{(i)}E_D(X_j) - \beta_j^{(i)}E_D(X_h\,X_j) - \beta_k^{(i)}E_D(X_h\,X_k)}{E_D({X_h}^2)} = \frac{\beta_h^{(i)}numérateur}{\beta_h^{(i)}dénominateur}$$

$$\beta_h^{(i)}numérateur$$
$$= Cov_D(X_i,X_h)\left(Cov_D(X_j,X_k)^2 - Var_D(X_j)\,Var_D(X_k)\right)$$
$$+ Cov_D(X_i,X_j)\left(Cov_D(X_j,X_h)\,Var_D(X_k) - Cov_D(X_k,X_h)\,Cov_D(X_j,X_h)\right)$$
$$- Cov_D(X_i,X_k)\left(Cov_D(X_j,X_k)\,Cov_D(X_j,X_h) - Cov_D(X_k,X_h)\,Var_D(X_j)\right)$$

$$\beta_h^{(i)}dénominateur$$
$$= Cov_D(X_j,X_h)^2 - Var_D(X_k) + 2\,Cov_D(X_j,X_k)\,Cov_D(X_j,X_h)\,Cov_D(X_k,X_h)$$
$$+ Cov_D(X_k,X_h)^2 - Var_D(X_j) + Var_D(X_h)\left(Cov_D(X_j,X_k)^2 - Var_D(X_j)\,Var_D(X_k)\right)$$

<u>Remarque</u> : lorsqu'on applique le calcul de la **variance** ou la **covariance numérique** sur un échantillon dispersé autour de la moyenne, il faut prendre en considération le biais introduit, on doit donc diviser par n-1 au lieu de n où n est la taille de l'échantillon, comme nous avons beaucoup de valeurs ici le résultat ne sera pas vraiment biaisé.

Voir script R pour l'implémentation.

3. Nous remarquons que nous retrouvons plus ou moins les mêmes valeurs en variances empiriques et conditionnelles au début du graphe, lorsque les nœuds ne sont pas profonds. Plus nous sommes progressons en profondeur dans le graphe, plus la variance conditionnelle devient petite par rapport à la variance empirique (numérique) calculé sur les données. Par exemple, $\sigma^2_{X_A|X_C,X_{Phys},X_{Ap}} = 34.5$ alors que $\sigma^2_{X_A} = 53500$, ceci peut-être dû à une erreur de calcul dans la résolution d'équation engendrant une erreur sur l'expression des paramètres du modèle.