

Procesarea Semnalelor

Notițe Curs 5.

Transformata Fourier - Eșantionare

1 Transformata Fourier continuă directă și inversă

Reamintim definițiile transformatelor Fourier direct și indirecte [1] pentru cazul continuu, respectiv:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2j\pi\omega t} dt, \quad (1)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{2j\pi\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Observați că semnul în argumentul exponentialei nu contează, atâtă vreme cât semnele diferă.

De ce este (2) inversa transformării din (1)? Cum demonstrăm acest lucru? Folosim definiția lui $X(\omega)$ împoi în formula (2):

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{2j\pi\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2j\pi\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-2j\pi\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{2j\pi\omega(t-\tau)} d\omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Pentru a calcula ultima integrală vom folosi:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2j\pi\omega t} d\omega &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A e^{2j\pi\omega t} d\omega \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2j\pi t} [e^{2j\pi At} - e^{-2j\pi At}] \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\sin(A2\pi t)}{\pi t} \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} 2A \frac{\sin(A2\pi t)}{A2\pi t} \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} 2A \text{sinc}(A2\pi t) \\ &= \delta(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Aici am folosit faptul că $\sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$ (și $\cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$) iar funcția sinc definită mai sus este:

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t}, & \text{când } t \neq 0 \\ 1, & \text{când } t = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Am folosit și funcția delta Dirac:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{când } t = 0 \\ 0, & \text{când } t \neq 0 \end{cases} \text{ astfel încât } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (6)$$

Atenție, $\delta(t)$ nu e o funcție ci un prototip de funcție. Figura 1 arată funcția funcția sinc și Figura 2 arată un impuls Dirac ideal.

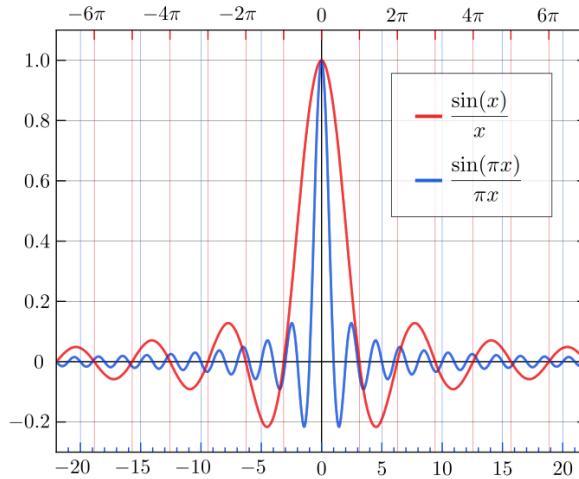


Figura 1: Funcțiile $\text{sinc}(t)$ și $\text{sinc}(\pi t)$. Observați că $\text{sinc}(\pi t)$ este mai concentrat în jurul punctului zero dar are apoi o frecvență mai mare în rest decât $\text{sinc}(t)$. Deci, $\text{sinc}(\pi t)$ este mai “apropiat” de $\delta(t)$ decât $\text{sinc}(t)$. Sursa: wikipedia.

Vezi desenul despre sinc de pe pagina A.

Acum ne întoarcem în (3) cu (4) și obținem:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{2j\pi\omega(t-\tau)} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \\ &= x(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Câteva exemple:

1. dacă $X(\omega) = 1$ atunci $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2j\pi\omega t} d\omega = \delta(t)$, adică: dacă în timp este un impuls atunci se activează tot spectrul, uniform.

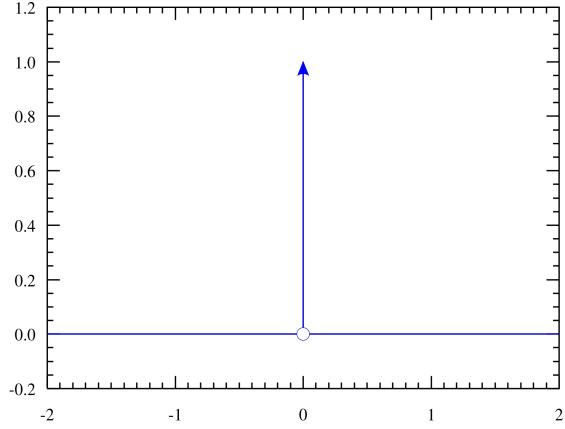


Figura 2: Impus Dirac $\delta(t)$. Observați din Figura 2 $A \text{sinc}(A 2\pi t)$ se apropie ca model de $\delta(t)$ atunci când $A \rightarrow \infty$. Sursa: wikipedia.

2. dacă $x(t) = 1$ atunci $X(0) = 1$ și zero în rest; adică: este doar componenta continuă (de frecvență zero).

Vezi desenele i) și ii) de pe pagina A.

2 Semnale limitate în frecvență

Avem un semnal $x(t)$ care este limitat în frecvență, adică: $X(\omega) = 1$ când $\omega \in [-B/2, B/2]$ și $X(\omega) = 0$ altfel. Atunci:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{2j\pi\omega t} d\omega \\
 &= \int_{-B/2}^{B/2} e^{2j\pi\omega t} d\omega \\
 &= B \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t} \\
 &= B \text{sinc}(\pi B t).
 \end{aligned} \tag{8}$$

La fel și pentru cazul invers când avem un semnal $x(t)$ limitat în timp, adică:

$x(t) = 1$ când $t \in [-T/2, T/2]$ și $x(t) = 0$ altfel. Atunci:

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2j\pi\omega t} dt \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2j\pi\omega t} dt \\
&= T \frac{\sin(\pi T \omega)}{\pi T \omega} \\
&= T \text{sinc}(\pi T \omega),
\end{aligned} \tag{9}$$

Alt exemplu, dacă $x(t) = \cos(2\pi\omega_0 t) = \frac{e^{j2\pi\omega_0 t} + e^{-j2\pi\omega_0 t}}{2}$ atunci avem două impulsuri Dirac în transformata Fourier:

$$X(\omega) = \frac{1}{2} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \delta(\omega + \omega_0). \tag{10}$$

În Figura 3 aveți o descriere a funcțiilor despre care vorbim.

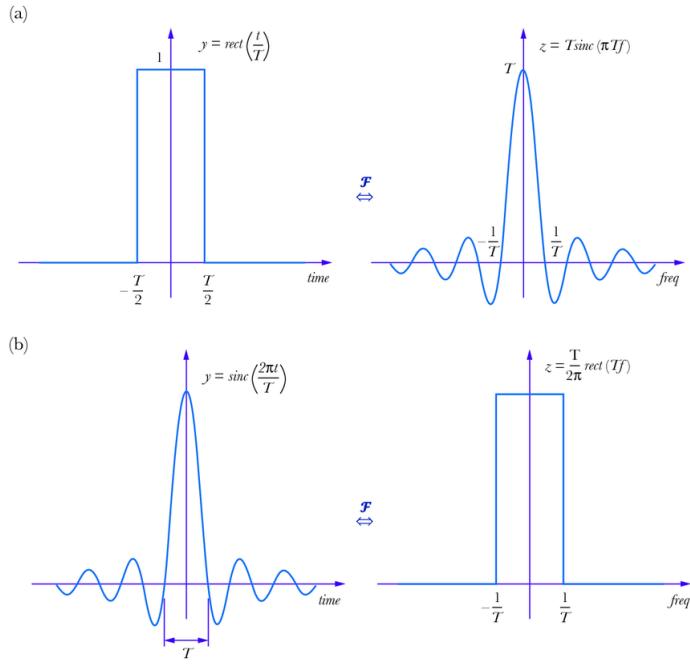


Figura 3: Semnal bloc și sinc în timp și frecvență. Sursa: researchgate.

Vezi desenele iii) și iv) de pe pagina A.

3 Pieptenele Dirac (Dirac comb)

Definim funcția *Dirac comb*, pieptene Dirac:

$$\text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (11)$$

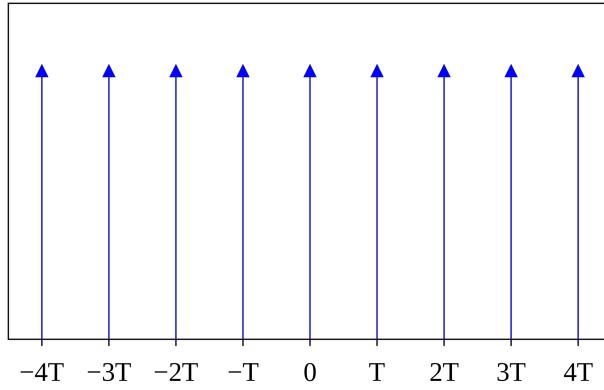


Figura 4: Pieptenele Dirac $\text{III}_T(t)$. Sursa: wikipedia.

Figura 4 desenează funcția $\text{III}_T(t)$ (se citeste *sha*). Funcția $\text{III}_T(t)$ este periodică și poate fi scrisă ca o serie Fourier astfel:

$$\text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2j\pi n \frac{t}{T}}, \quad (12)$$

unde coeficienții c_n se calculează după formula

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \text{III}_T(t) e^{2j\pi n \frac{t}{T}} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{2j\pi n \frac{t}{T}} dt \\ &= \frac{1}{T} e^{2j\pi n \frac{0}{T}} \\ &= \frac{1}{T}. \end{aligned} \quad (13)$$

De aici rezultă că:

$$\text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2j\pi n \frac{t}{T}} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2j\pi n \frac{t}{T}}. \quad (14)$$

Ultima egalitate pare foarte ciudată, practic spune că o sumă de impulsuri Dirac este echivalentă cu o sumă (infinită) de funcții cosinus. În Figura 5 puteți să vă convingeți intuitiv.

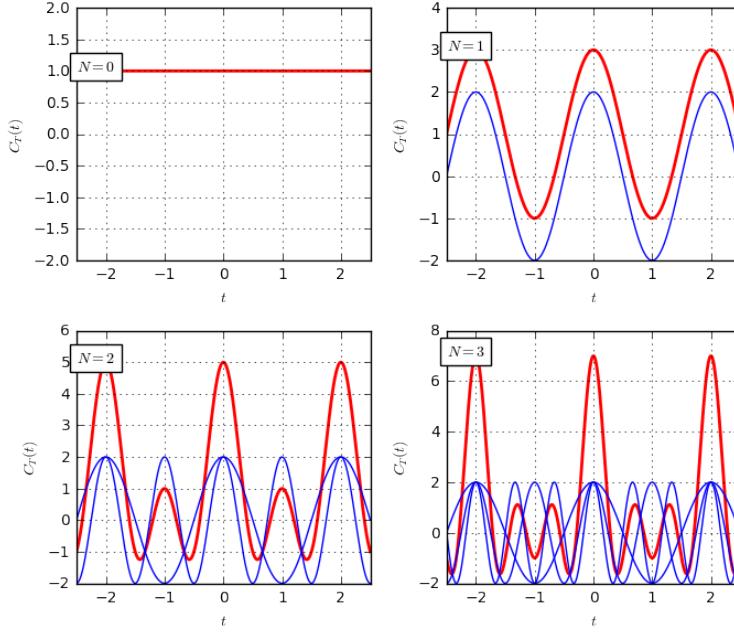


Figura 5: Suma de funcții cosinus care încep să aproximeze pieptenele Dirac $\text{III}_2(t)$. Este formula din (14) pentru $T = 2$ dar nu mergem de la $-\infty$ la ∞ , ci doar de la $-N$ la N . Pe măsură ce $N \rightarrow \infty$ avem suma care converge la $\text{III}_2(t)$. Sursa: DSP Illustrations.

Continuăm luând transformata Fourier a lui (14) și folosim (4) astfel:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\text{III}_T(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{2j\pi n \frac{t}{T}} e^{-2j\pi \omega t} dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2j\pi t(\omega - n \frac{1}{T})} dt \\
&= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n \frac{1}{T}\right) \\
&= \frac{1}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}(\omega).
\end{aligned} \tag{15}$$

Adică, transformata Fourier a unui pieptene Dirac cu spațiere T este un alt pieptene Dirac cu spațiere T^{-1} . În calculul de mai sus am folosit din nou (4). Folosim proprietatea aceasta în secțiunea următoare.

4 Eşantionare

De ce este important pentru noi acest pieptene Dirac? Pentru că atunci când înmulțim o funcție $f(t)$ cu $\Pi_T(t)$ facem de fapt eşantionare. Figura 6 ilustrează acest lucru. Folosim $\Pi_T(t)$ ca să eşantionăm cu frecvența $f_s = \frac{1}{T}$ un semnal.

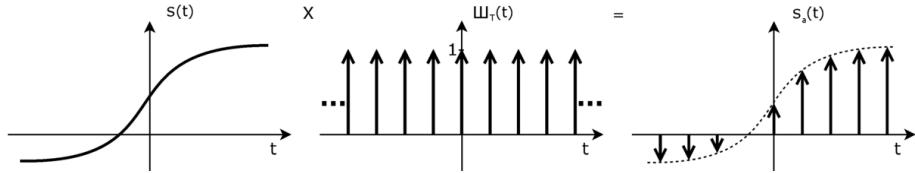


Figura 6: Eşantionarea unui semnal $s(t)$ folosind pieptenele Dirac $\Pi_T(t)$ astfel încât semnalul eşantionat este $s_a(t) = s(t) \times \Pi_T(t)$. Frecvența de eşantionare este $f_s = \frac{1}{T}$. Sursa: wikimedia.

Acum trebuie să înțelegem ce se întâmplă cu semnalele acestea când sunt înmulțite. Am discutat deja la curs faptul că:

1. dacă avem de realizat operația de conoluție în timp (continuu sau discret) atunci e mai bine să transformăm și să facem operația de înmulțire:

$$r(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(t)d\tau, \quad (16)$$

$$r[n] = f[n] * g[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n-k]g[k]. \quad (17)$$

2. conoluție în timp este înmulțire în frecvență și înmulțire în timp este conoluție în frecvență.

Care este legătura cu discuția noastră? În timp facem înmulțirea cu pieptenele Dirac deci în frecvență vom face conoluția tot cu un pieptene Dirac dar de altă perioadă. Figura 7 ilustrează acest lucru.

[Vezi desenele de pe pagina B care arată un exemplu corect de eşantionare similar cu Figura 7.](#)

5 O veste proastă despre $\text{sinc}(t)$

În realitate funcția sinc nu se poate folosi (are suport infinit). Deci în frecvență nu putem să filtrăm perfect. Figura 8 ilustrează acest lucru. Observați că în frecvență apar distorsiuni (*ripples*) în loc de linii drepte și colțuri drepte în reprezentare. Asta înseamnă că semnalul recuperat nu este perfect semnalul de la care am pornit. Rețineți că funcția sinc are două probleme:

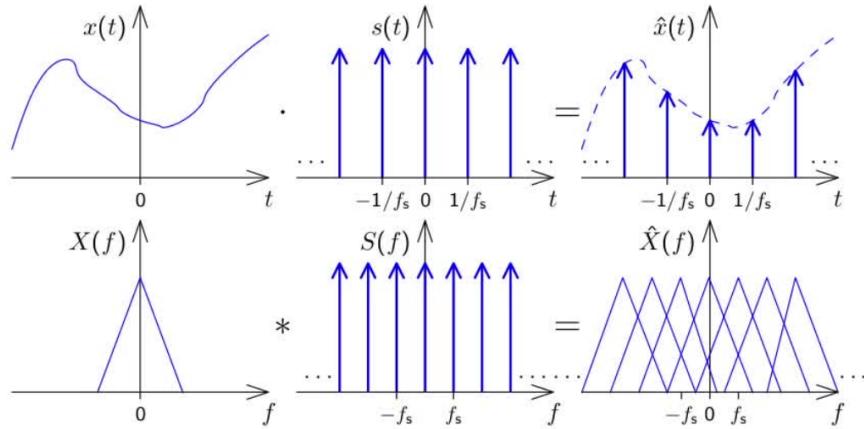


Figura 7: Procesul de eşantionare cu pieptene Dirac în timp (primul rând) și în frecvență (al doilea rând). Dacă $f_s \geq 2B$ atunci spectrele nu se suprapun (am presupus că semnalul $x(t)$ este limitat în banda $[-B, B]$ în sub-figura din stânga jos). Sursa: Cambridge Signal Processing.

- are suport infinit de la $-\infty$ la ∞ (deci putem face doar calcule teoretice cu funcția completă).
- când noi ne aflăm la timpul t_0 funcția sinc în timpul operației de convoluție vrea să facă operații și cu valorile viitoare ale semnalului nostru $x(t)$, adică avem nevoie să știm tot semnalul $x(t)$ până la $+\infty$ și asta nu este mereu posibil (proprietatea se numește cauzalitate).

Apendix 1: intuiție suplimentară de la convoluția polinoamelor

Cum arată convoluția cu un pieptene Dirac în timp discret? Considerăm un polinom $R(x) = 1 + x + 2x^2$ și polinomul pieptene Dirac $\text{III}_a(x) = 1 + x^a + x^{2a} + x^{3a} + \dots$ pentru $a \in \mathbb{N}$. Îi spunem acestui polinom pieptene Dirac pentru că puterile din polinom sunt egal distanțate cu spațierea a . Atunci produsul între cele două polinoame este dat de operația de convoluție:

$$\begin{aligned}
 R(x)\text{III}_a(x) &= (1 + x + 2x^2)(1 + x^a + x^{2a} + x^{3a} + \dots) \\
 &= (1 + x + 2x^2) + (1 + x + 2x^2)x^a + (1 + x + 2x^2)x^{2a} + \dots \\
 &= 1 + x + 2x^2 + x^a + x^{a+1} + 2x^{a+2} + x^{2a} + x^{2a+1} + 2x^{2a+2} + \dots
 \end{aligned} \tag{18}$$

Puteți să observați cum convoluția cu un pieptene Dirac înseamnă că vom copia polinomul $1 + x + 2x^2$ la locațiile $1, x^a, x^{2a}, \dots$ din $\text{III}_a(x)$. Observați de

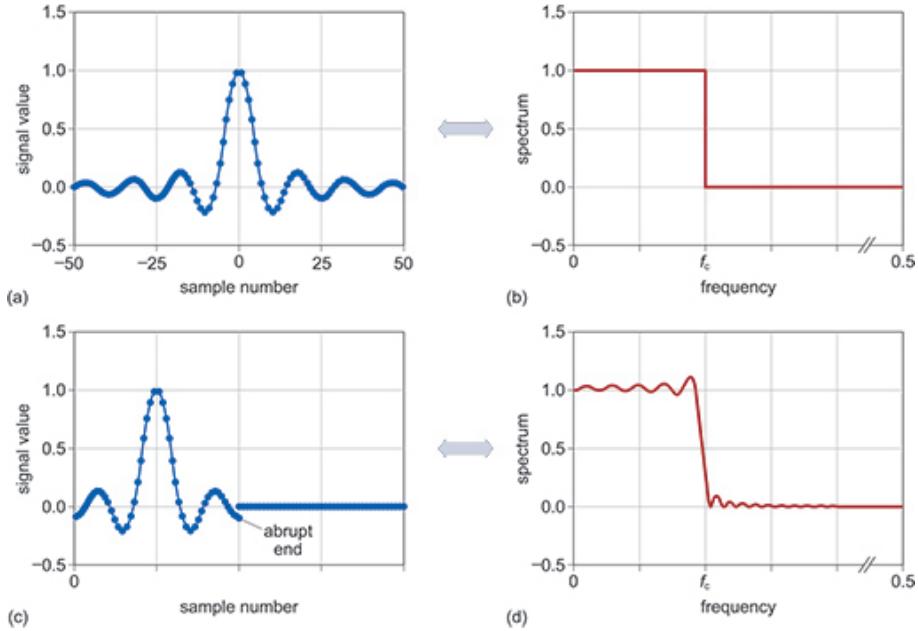


Figura 8: Un sinc complet (infinit) și un sinc trunchiat. Observați distorsunea în frecvență pentru cazul trunchiat. Sursa: Open University.

asemenea că sumele cauzate de fiecare putere din $\text{III}_a(x)$ nu se suprapun când $a > 2$ și astfel ne este ușor să înțelegem cine au fost polinoamele originale care s-au înmulțit. Dacă pentru coeficientul unei puteri x^b am avea o sumă cumulată atunci ar putea fi dificil/imposibil să recuperăm polinoamenele originale care s-au înmulțit.

Putem să transformăm rezultatul în ceva familiar. Considerăm polinomul $Q(x) = x^{-2} + 2x^{-1} + 3 + 2x + x^2$ iar $\text{III}_a(x)$ definim ca mai sus atunci:

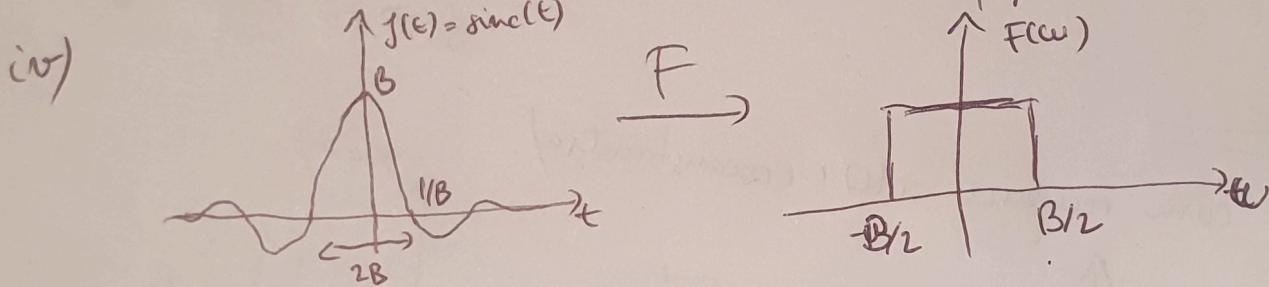
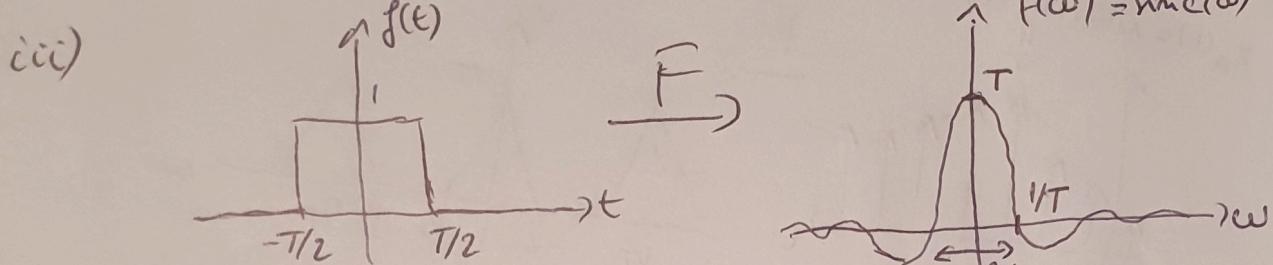
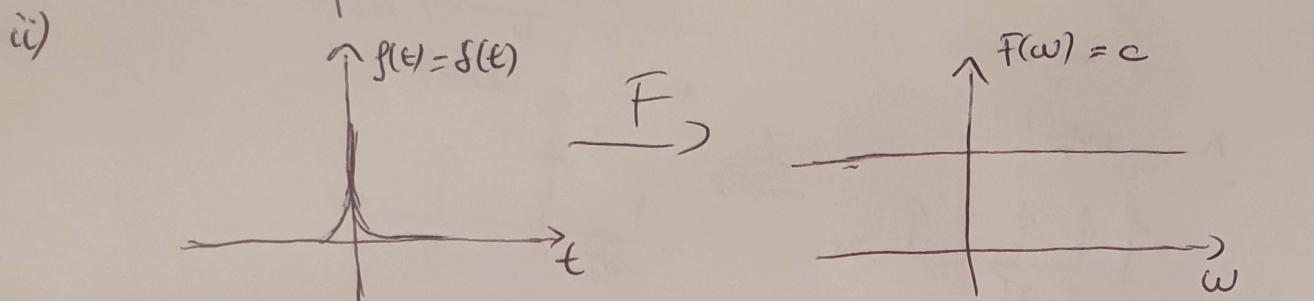
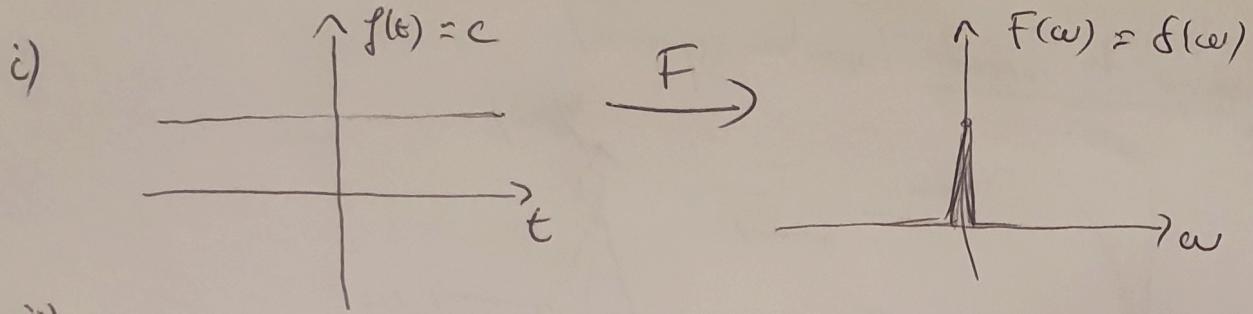
$$\begin{aligned} Q(x)\text{III}_a(x) &= (x^{-2} + 2x^{-1} + 3 + 2x + x^2)(1 + x^a + x^{2a} + x^{3a} + \dots) \\ &= (x^{-2} + 2x^{-1} + 3 + 2x + x^2) + (x^{-2} + 2x^{-1} + 3 + 2x + x^2)x^a + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Observați că $Q(x)$ este un polinom simetric în jurul termenului constant 3 și avem coeficienții descrescători de la 3 la 1 (am desenat coeficienții ca un triunghi, analog cum arată spectrul triunghiular din Figura 7 stânga jos).

Acum, când nu se suprapun sumele din fiecare paranteză (analog cazului în care spectrele din Figura 7 dreapta jos nu se suprapun)? Nu se suprapun când $a > 4$. Dacă puterile polinomului $Q(x)$ ar fi de la $-B$ la B (în loc de la -2 la 2) atunci aceeași condiție este $a > 2B$ (asta e analog cu semnalele care în frecvență au spectrul nenu limitat între $-B$ și B). Asta ar fi echivalentul “frecvenței Nyquist” pentru polinoame ($f_s > 2B$ de la semnale).

Bibliografie

- [1] Brad Osgood. The Fourier transforms and its applications (EE 261), Electrical Engineering course. <http://eeclass.stanford.edu/ee261/>.



$$\text{sinc}(t) = \frac{2A}{\pi} \frac{\sin(2\pi At)}{2\pi At}$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \text{sinc}(t) = \delta(t)$$

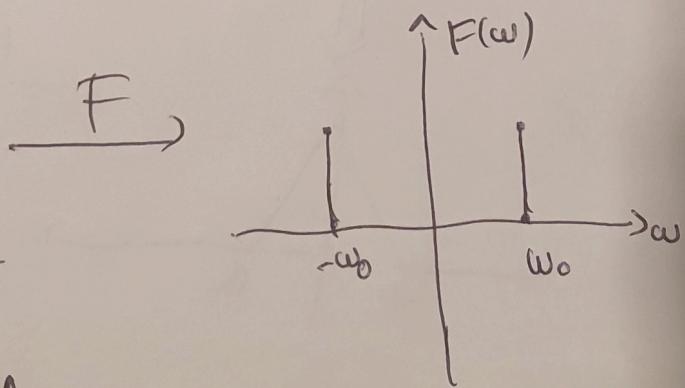
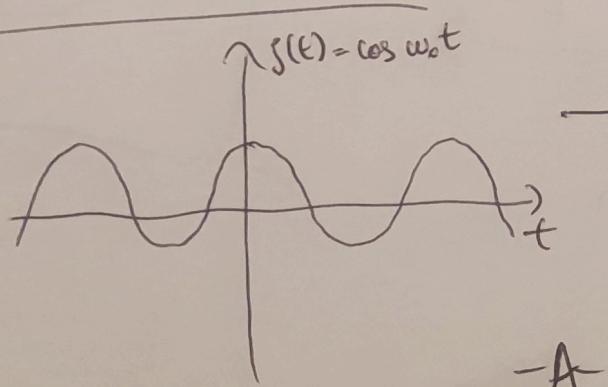
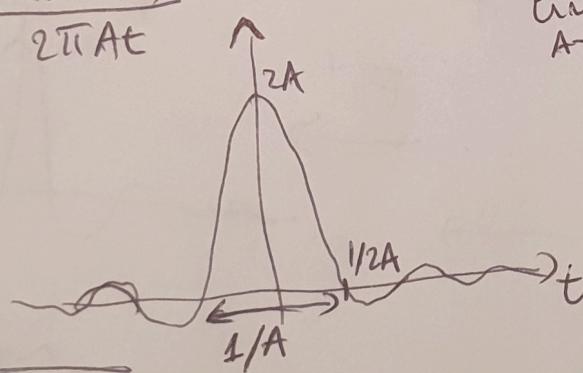
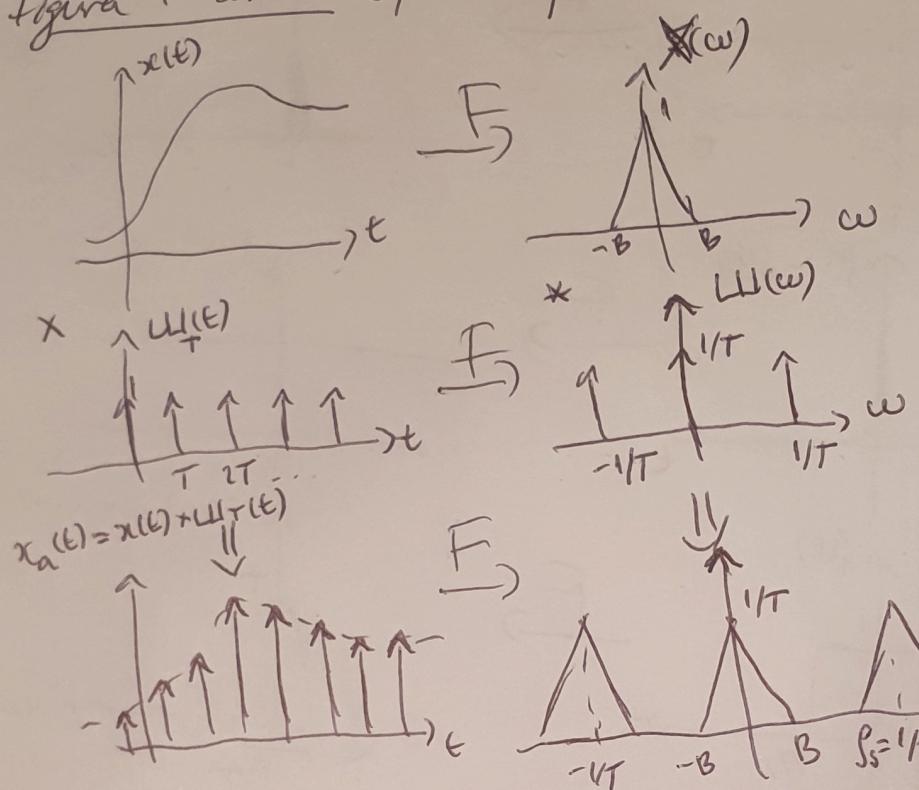
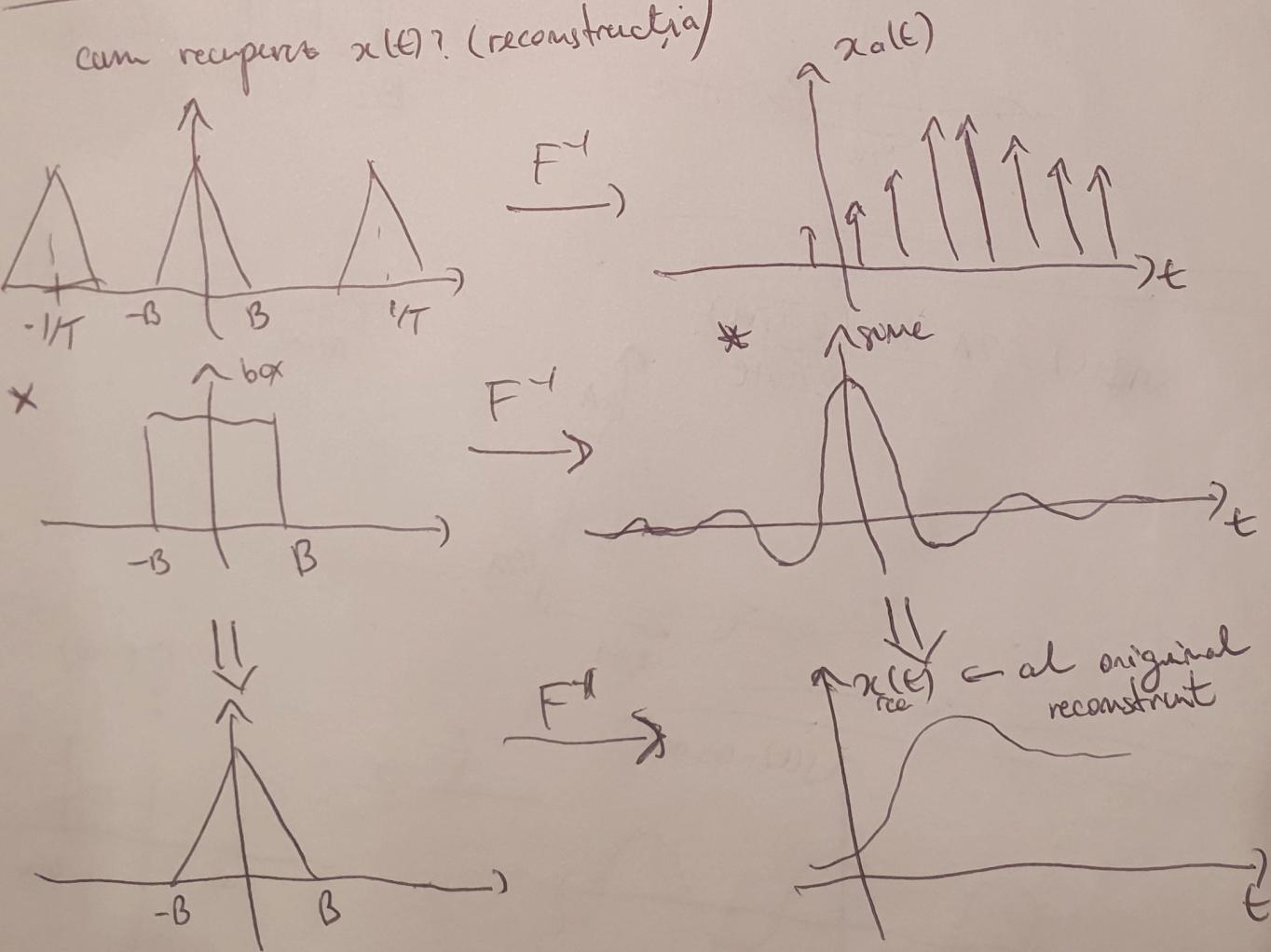


Figura 7 corectă (spectre separate)



$$f_s \geq 2B \text{ Nyquist f.}$$

cum recuperă $x(t)$? (reconstrucția)



-B-