Національний педагогічний університет
імені М. П. Драгоманова

На правах рукопису

Барановський Олександр Миколайович

УДК 511.72

Метрична та ймовірнісна теорія чисел, представлених рядами Остроградського 1-го виду

01.01.01 — математичний аналіз

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Працьовитий Микола Вікторович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2006

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Це не є справжня дисертація. Це лише приклад, який повинен допомогти користувачу підготувати свій файл. Але я зробив його із своєї дисертації. Тому формули, теореми, доведення, імена, книги і статті у списку літератури інколи можуть бути справжніми (хоча можуть здаватися безглуздими, бо вирвані з контексту).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою, що проводяться на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є розробка основ метричної теорії дійсних чисел, представлених рядами Остроградського 1-го виду, та застосування отриманих результатів до дослідження математичних об'єктів зі складною локальною будовою (фрактальних множин, сингулярних та недиференційовних функцій, сингулярно неперервних мір).

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи математичного аналізу, теорії функцій дійсної змінної, теорії міри, метричної теорії чисел, теорії ймовірностей, фрактального аналізу тощо.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

— Доведено, що множина неповних сум ряду Остроградського 1-го виду є ніде не щільною досконалою множиною нульової міри Лебега та нульової розмірності Хаусдорфа–Безиковича.
— Знайдено умови нуль-мірності (додатності міри) певних класів замкнених ніде не щільних множин чисел, заданих умовами на еле-

менти їх розвинення в ряд Остроградського 1-го виду.

— …

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати є безперечним внеском у теорію міри, метричну теорію чисел, теорію функцій дійсної змінної та теорію сингулярних розподілів ймовірностей. Запропоновані в дисертації методи можуть бути корисними при дослідженні математичних об'єктів зі складною локальною будовою, заданих за допомогою інших представлень чисел з нескінченним алфавітом, зокрема рядів Остроградського 2-го виду.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах. Це такі конференції:

— Український математичний конгрес, Київ, 21–23 серпня 2001 р.;

— …

Це такі семінари:

— семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: чл.-кор. НАН України О. І. Степанець);

— …

Публікації. Основні результати роботи викладено у 6 статтях [**?**, **?**], опублікованих у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, та додатково відображено в матеріалах конференцій [**?**].

Зміст роботи. Тут викладають основні результати дисертації. Це, напевно, зручно для потенційного читача, для опонентів. Наявність чи відсутність цього пункту залежить від традицій школи. ВАК не рекомендує і не забороняє такий пункт у вступі дисертації.

Далі йде безглуздий текст. Не читайте його. Тут немає нічого розумного (чи хоча б цікавого), оскільки не передбачалося, що хтось це читатиме. Просто необхідно трохи тексту, щоб сторінку чимось заповнити. Вважайте, що це щось на кшталт *Lorem ipsum*. Крім того, за допомогою цієї сторінки з безглуздим текстом можна порахувати кількість рядків на сторінці та символів у рядку.

Здається, у мене закінчуються запаси безглуздого тексту. Хто б міг подумати, що так складно писати текст лише для заповнення сторінки! Він, крім того, ще й неефективний, оскільки не всі букви можна тут побачити. Але деякі гарні букви і цифри можна роздивитися: а, б, в, . . . , 1, 2, 3, . . . , а ще такі: *а, б, в, ...*

Досить! Далі йде осмислений (я сподіваюся) текст. Він наведений тут зовсім не для того, щоб порушити права Юрія Андруховича чи видавництва «Фоліо». Просто у мене під руками був електронний варіант «Таємниці». Чому Рябчук був абсолютним ґуру для них усіх?

«По-перше, він у всьому був жахливо переконливий, у всьому — як у своїх статтях, так і в розмовах. З ним було безнадійно полемізувати, його слід було тільки слухати. Йому було на той час 29 років, тобто він був ще й фізично старший від решти товариства, а це в тому віці суттєво, ця різниця між 29 і, скажімо, 22. Це не те що 45 і 38 — там уже фактично жодної різниці немає. А між 90 і 83 — й поготів. Так от, він був старший і досвідченіший, з ним можна було про все на світі радитися, бо він на той час уже змінив з десяток різних занять, був тричі одружений і розлучений, жив самотнім даосом у запущеній старій віллі на Майорівці, з таким же запущеним старим садом і не менш запущеними старими сусідами. Він був цілком прозорий від аскетизму (інший тут сказав би, що він *аж світився*), щодня стояв на голові і правильно, згідно з Ученням, дихав, а харчувався виключно пісним рисом без солі. На той час його статті про літературу вже почали публікувати і він потроху ставав авторитетом не тільки в андеґраунді. Ага, м'ятний чай — він пив багато м'ятного чаю. Його двокімнатне помешкання у тій віллі являло собою досить інтенсивну суміш з усяких речей-уламків, але передусім воно було захаращене книгами, газетами і рукописами. Книги починалися від порогу і ніде не закінчувалися. Він тримав їх навіть у холодильнику. Якби не книги, то він і не знав би, на біса йому той холодильник здався. Кажуть, наче там-таки, у холодильнику, він тримав пришпиленим до задньої стінки вирізаний з газети портрет Брежнєва. Це називалося *малим Сибіром.* Ще пару років тому його помешкання стало такою собі міні-комуною, притулком для тодішніх нефорів: Морозов, Лишега, Чемодан, Кактус. Останнього я ніколи в житті не бачив, до сьогодні. Але знаю, що такий був, уявляєш? Здається, саме він намалював на стіні того сквоту нев'їбенно притягальну фреску з усіма згаданими особами — вони сидять, розпатлані й неголені, як апостоли, а на столі в них червоне вино і рибина. Не пам'ятаю, чи мали німби, але припускаю, що цілком могли мати. Це житло стало такою собі рукавичкою. Кожен із них зносив до Рябчукової хати всякий непотріб — в залежності від того, чим на ту хвилину перебивався і що звідки вдавалося потягти. Пам'ятаю табличку ЕКСПОНАТ НА РЕСТАВРАЦІЇ. Ще пам'ятаю ПАЛАТА ДЛЯ НЕДОНОШЕНИХ — з усього випливало, що свого часу котрийсь із гостей цього притулку підзаробляв на життя пологами. Тепер тобі зрозуміло, чому Микола Рябчук був абсолютним ґуру?»

Подяка. Якщо хочете комусь подякувати, пишіть тут.

РОЗДІЛ 1
ПОДАННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ РЯДАМИ ОСТРОГРАДСЬКОГО 1-ГО ВИДУ

Це не є справжній розділ дисертації. Це лише приклад, який повинен допомогти користувачу підготувати свій файл. Але я зробив його з розділу 1 своєї дисертації.

У цьому розділі вивчається розвинення дійсного числа у знакозмінний ряд спеціального вигляду, який називається рядом Остроградського 1-го виду.

Досліджуються тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум заданого ряду Остроградського 1-го виду, а також властивості розподілів ймовірностей на множині неповних сум.

1.1. Означення ряду Остроградського 1-го виду

Означення 1.1. *Рядом Остроградського* 1-*го виду*[1] називається скінченний або нескінченний вираз вигляду

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n} + \cdots , \tag{1.1}$$

де q_n — натуральні числа і $q_{n+1} > q_n$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Числа q_n називаються *елементами ряду Остроградського* 1-*го виду.*

Число елементів може бути як скінченним, так і нескінченним. У першому випадку будемо записувати ряд Остроградського у вигляді

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n}$$

[1]Далі часто будемо називати просто *рядом Остроградського*, оскільки ми не досліджуємо ряди Остроградського 2-го виду.

або скорочено

$$\mathrm{O}^1(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

і називати скінченним рядом Остроградського або n-елементним рядом Остроградського; а в другому випадку будемо записувати ряд Остроградського у вигляді (1.1) або скорочено

$$\mathrm{O}^1(q_1, q_2, \dots, q_n, \dots)$$

і називати нескінченним рядом Остроградського.

1.2. Означення та властивості підхідних чисел

Означення 1.2. *Підхідним числом порядку k* ряду Остроградського 1-го виду називається раціональне число

$$\frac{A_k}{B_k} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{q_1 q_2 \dots q_k} = \mathrm{O}^1(q_1, q_2, \dots, q_k).$$

Зрозуміло, що n-елементний ряд Остроградського має n підхідних чисел, причому підхідне число n-го порядку $\frac{A_n}{B_n}$ збігається зі значенням цього ряду Остроградського.

Теорема 1.1. *Для будь-якого натурального k правильні формули*

$$\begin{cases} A_k = A_{k-1} q_k + (-1)^{k-1}, \\ B_k = B_{k-1} q_k = q_1 q_2 \dots q_k \end{cases} \tag{1.2}$$

(*якщо покласти, що $A_0 = 0$, $B_0 = 1$*).

Доведення. Проведемо доведення методом математичної індукції по k. Для $k = 1$ формули правильні. Справді,

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{q_1} = \frac{A_0 q_1 + (-1)^0}{B_0 q_1}.$$

Припустимо, що формули (1.2) правильні для деякого $k = m$, тобто

$$\begin{cases} A_m = A_{m-1} q_m + (-1)^{m-1}, \\ B_m = B_{m-1} q_m = q_1 q_2 \dots q_m, \end{cases}$$

і доведемо ці формули для $k = m + 1$. Маємо

$$\frac{A_{m+1}}{B_{m+1}} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{q_1 q_2 \ldots q_m} + \frac{(-1)^m}{q_1 q_2 \ldots q_m q_{m+1}} =$$
$$= \frac{A_m}{B_m} + \frac{(-1)^m}{B_m q_{m+1}} = \frac{A_m q_{m+1} + (-1)^m}{B_m q_{m+1}}.$$

Отже, за принципом математичної індукції формули (1.2) правильні для будь-якого натурального k. $\square$

Лема 1.1. *Для будь-якого натурального k правильна рівність*

$$\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} - \frac{A_k}{B_k} = \frac{(-1)^k}{B_k}. \tag{1.3}$$

Лема 1.2. *Для будь-якого натурального $k \geqslant 2$ правильна рівність*

$$\frac{A_{k-2}}{B_{k-2}} - \frac{A_k}{B_k} = \frac{(-1)^{k-1}(q_k - 1)}{B_k}. \tag{1.4}$$

1.3. Розклад числа у знакозмінний ряд за 1-м алгоритмом Остроградського

Почнемо з геометричної ілюстрації алгоритму. Нехай маємо відрізки A та B, $A < B$. Щоб застосувати 1-й алгоритм Остроградського до числа $\frac{A}{B}$, будемо відкладати відрізок A на відрізку B, поки не отримаємо залишок $A_1 < A$ (див. рис. 1.1). Нехай відрізок A вміщується q_1 разів у відрізку B, тоді

$$B = q_1 A + A_1.$$

Далі відкладемо відрізок A_1 не на меншому відрізку A (як у алгоритмі Евкліда), а на тому ж відрізку B до отримання залишку $A_2 < A_1$. Нехай відрізок A_1 вміщується q_2 разів у відрізку B, тоді

$$B = q_2 A_1 + A_2.$$

Відкладаючи відрізок A_2 знову на відрізку B і т. д. до нескінченності або до отримання нульового залишку, будемо мати

$$B = q_3 A_2 + A_3,$$

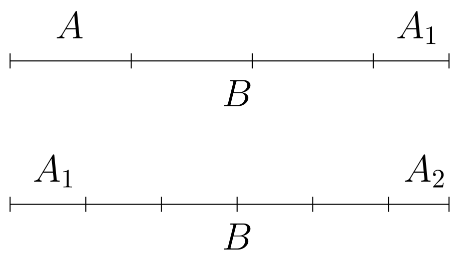
$$B = q_4 A_3 + A_4$$

і т. д. З отриманих рівностей випливає, що має місце розклад

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2 q_3} - \frac{1}{q_1 q_2 q_3 q_4} + \cdots ,$$

і тут, як легко бачити,

$$q_1 < q_2 < q_3 < q_4 < \cdots .$$



$$B = 3A + A_1$$

$$B = 5A_1 + A_2$$

Рис. 1.1. Геометрична ілюстрація 1-го алгоритму Остроградського: тут відрізок A вміщується 3 рази у відрізку B, відрізок A_1 вміщується 5 разів у відрізку B і т. д.

Таким чином, 1-*й алгоритм Остроградського* розкладу дійсного числа $x \in (0, 1)$ у знакозмінний ряд полягає в наступному.

Крок 1. Покласти $\alpha_0 = x$, $i = 1$.

Крок 2. Знайти такі числа q_i та α_i, що

$$1 = q_i \alpha_{i-1} + \alpha_i \quad \text{і} \quad 0 \leqslant \alpha_i < \alpha_{i-1}.$$

Крок 3. Якщо $\alpha_i = 0$, то припинити обчислення. Інакше — збільшити i на 1 та перейти до кроку 2.

Теорема 1.2. *Кожне дійсне число* $x \in (0, 1)$ *можна подати у вигляді ряду Остроградського* 1*-го виду* (1.1)*. Причому, якщо число* x *ірраціональне, то це можна зробити єдиним чином і вираз* (1.1) *має при цьому* *нескінченне число доданків; якщо ж число x раціональне, то його можна подати у вигляді* (1.1) *зі скінченним числом доданків двома різними способами:*

$$x = \mathrm{O}^1(q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n) = \mathrm{O}^1(q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n - 1, q_n).$$

У табл. 1.1 наведені деякі формули для еліпса, гіперболи і параболи.

Таблиця 1.1

Еліпс, гіпербола і парабола. Деякі формули

	Еліпс	Гіпербола	Парабола
Канонічне рівняння	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2px$
Ексцентриситет	$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$	$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$	$\varepsilon = 1$
Фокуси	$(a\varepsilon, 0)$, $(-a\varepsilon, 0)$	$(a\varepsilon, 0)$, $(-a\varepsilon, 0)$	$(\frac{p}{2}, 0)$
Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., 1974. С. 72.			

1.4. Множина неповних сум ряду Остроградського та розподіли ймовірностей на ній

Візьмемо довільну *фіксовану* послідовність $\{q_k\}$ натуральних чисел з умовою $q_{k+1} > q_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і розглянемо їй відповідний ряд Остроградського 1-го виду (1.1) з сумою r. Число r можна записати у вигляді

$$r = d - b, \quad \text{де} \quad d = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_{2i-1}}, \quad b = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_{2i}}. \qquad (1.5)$$

1.4.1. Тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум ряду Остроградського. *Циліндром* рангу m з основою $c_1 c_2 \ldots c_m$ називається множина $\Delta'_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ всіх неповних сум, які мають зображення $\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_m a_{m+1} \ldots a_{m+k} \ldots}$, де $a_{m+j} \in \{0, 1\}$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$. Очевидно, що

$$\Delta'_{c_1 c_2 \ldots c_m a} \subset \Delta'_{c_1 c_2 \ldots c_m}, \quad a \in \{0, 1\}.$$

Означення 1.3 ([?, с. 59]). *Фракталом* називається кожна континуальна обмежена множина простору $\mathbb{R}^1$, яка має тривіальну (рівну 0 або ∞) H_α-міру Хаусдорфа, порядок α якої дорівнює топологічній розмірності.

Ті нуль-множини Лебега простору $\mathbb{R}^1$, розмірність Хаусдорфа–Безиковича яких дорівнює 1, називаються *суперфракталами*, а континуальні множини, що мають нульову розмірність Хаусдорфа–Безиковича, називаються *аномально фрактальними.*

Висновки до розділу 1

У розділі 1 введене поняття ряду Остроградського 1-го виду та його підхідних чисел, запропоновані деякі властивості підхідних чисел. Доведено, що кожне дійсне число $x \in (0, 1)$ можна подати у вигляді ряду Остроградського 1-го виду: ірраціональне — єдиним чином у вигляді нескінченного ряду Остроградського, раціональне — двома різними способами у вигляді скінченного ряду Остроградського. Ці результати не є новими, їх можна знайти, наприклад, у роботах [?, ?, ?, ?, ?] та ін. Вони наведені тут для повноти викладу.

Новими в цьому розділі є результати, що стосуються неповних сум ряду Остроградського. Описані тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум ряду Остроградського. Описано множини чисел, ряди Остроградського яких є простими і густими відповідно. Доведено, що випадкова неповна сума ряду Остроградського має або дискретний розподіл або сингулярний розподіл канторівського типу. Досліджено поведінку на нескінченності модуля характеристичної функції випадкової неповної суми ряду Остроградського.

ВИСНОВКИ

Це не є справжні висновки до дисертації. Це лише приклад, який повинен допомогти користувачу підготувати свій файл. Але я зробив його з висновків до своєї дисертації.

Ряди Остроградського 1-го виду дозволяють розширити можливості формального задання і аналітичного дослідження фрактальних множин, сингулярних мір, недиференційовних функцій та інших об'єктів зі складною локальною будовою.

В дисертаційній роботі отримано такі результати.

— Розроблено основи метричної теорії чисел, представлених рядами Остроградського 1-го виду. Зокрема, досліджено геометрію розвинень чисел в ряди Остроградського 1-го виду, отримано основне метричне відношення та його оцінки, які допомагають у розв'язанні задач про міру Лебега множин чисел з умовами на елементи зображення.

— Знайдено умови нуль-мірності (додатності міри) певних класів замкнених ніде не щільних множин чисел, заданих умовами на елементи їх розвинення в ряд Остроградського 1-го виду.

— Вивчено тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум заданого ряду Остроградського 1-го виду та розподілів ймовірностей на ній.

— Досліджено структуру та властивості випадкової величини з незалежними різницями послідовних елементів її представлення рядом Остроградського 1-го виду.

— Вивчено диференціальні та фрактальні властивості однієї функції, заданої перетворювачем елементів ряду Остроградського 1-го виду її аргумента в двійкові цифри значення функції.

Як виявилося, існують принципові відмінності метричної теорії рядів Остроградського та метричної теорії ланцюгових дробів. Зокрема, існує клас замкнених ніде не щільних множин додатної міри Лебега, описаних в термінах елементів ряду Остроградського. В той же час, аналогічні множини, задані у термінах елементів ланцюгового дробу, мають нульову міру Лебега.

Проведені дослідження лежать в руслі сучасних математичних досліджень об'єктів зі складною локальною поведінкою (будовою), пов'язаних з ланцюговими дробами, рядами Люрота, β-розкладами тощо, інтерес до яких у світі достатньо високий. Отримані результати та запропоновані методи можуть бути корисними при розв'язанні задач метричної теорії чисел, представлених рядами Остроградського 2-го виду або іншими зображеннями з нескінченним алфавітом.