

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

**БАРАНОВСЬКИЙ Олександр Миколайович**

УДК 511.72

**МЕТРИЧНА ТА ЙМОВІРНІСНА ТЕОРІЯ ЧИСЕЛ,  
ПРЕДСТАВЛЕНИХ РЯДАМИ ОСТРОГРАДСЬКОГО  
1-ГО ВИДУ**

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор  
**Працьовитий Микола Вікторович**,  
Національний педагогічний університет імені  
М. П. Драгоманова, завідувач кафедри вищої  
математики; Інститут математики НАН  
України, завідувач відділу фрактального  
аналізу.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор  
**Кошманенко Володимир Дмитрович**,  
Інститут математики НАН України, провідний  
науковий співробітник відділу математичної  
фізики;  
кандидат фізико-математичних наук,  
старший науковий співробітник  
**Назаренко Микола Олексійович**,  
Київський національний університет імені  
Тараса Шевченка, доцент кафедри  
математичного аналізу.

Захист відбудеться «\_\_» \_\_\_\_\_ 2016 р. о \_\_ годині на засі-  
данні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики  
НАН України за адресою: 01601 м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту матема-  
тики НАН України.

Автореферат розісланий «\_\_» \_\_\_\_\_ 2016 р.

Учений секретар  
спеціалізованої вченої ради

Романюк А. С.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Це не є справжній автореферат дисертації. Це лише приклад, який повинен допомогти користувачу підготувати свій файл. Але я зробив його із свого автореферату. Тому формули, теореми, доведення, імена, книги і статті у списку літератури інколи можуть бути справжніми (хоча можуть здаватися безглуздими, бо вирвані з контексту).

Оскільки ця частина автореферату майже повторює вступ до дисертації, то немає сенсу тут наводити якийсь текст, лише назви пунктів.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

**Мета і завдання дослідження.**

*Методи дослідження.*

**Наукова новизна одержаних результатів.**

**Практичне значення одержаних результатів.**

**Особистий внесок здобувача.**

**Апробація результатів дисертації.**

**Публікації.** Щоб згенерувати список літератури за допомогою BibTeX, у тексті необхідно мати посилання [?, ?, ?].

**Структура дисертації.** Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків. Обсяг дисертації 138 сторінок машинописного тексту, список використаних джерел (121 найменування) та список публікацій автора (23 найменування) займають 17 сторінок.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

В розділі 1 вводиться поняття ряду Остроградського 1-го виду, елементів та підхідних чисел ряду Остроградського 1-го виду...

Далі наведена цитата з «Порядку присудження наукових ступенів і присвоєння вченого звання старшого наукового співробітника», затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 07.03.2007

№ 423. Лише для того, щоб чимось заповнити сторінку. За допомогою цієї сторінки можна порахувати кількість рядків на сторінці та символів у рядку.

«11. Дисертація на здобуття наукового ступеня є кваліфікаційною науковою працею, виконаною особисто здобувачем у вигляді спеціально підготовленого рукопису або опублікованої монографії. Підготовлена до захисту дисертація повинна містити висунуті здобувачем науково обґрунтовані теоретичні або експериментальні результати, наукові положення, а також характеризуватися єдністю змісту і свідчити про особистий внесок здобувача в науку.

Дисертація, що має прикладне значення, додатково до основного тексту повинна містити відомості та документи, що підтверджують практичне використання отриманих здобувачем результатів — впровадження у виробництво, достатню дослідно-виробничу перевірку, отримання нових кількісних і якісних показників, суттєві переваги запропонованих технологій, зразків продукції, матеріалів тощо, а дисертація, що має теоретичне значення, — рекомендації щодо використання наукових висновків.

Теми дисертацій пов'язуються, як правило, з напрямками основних науково-дослідних робіт вищих навчальних закладів або наукових установ і затверджуються вченими (науково-технічними) радами для кожного здобувача окремо з одночасним призначенням наукового консультанта в разі підготовки докторської чи наукового керівника в разі підготовки кандидатської дисертації.

Мови у дисертації використовуються згідно із законодавством.

12. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора наук є кваліфікаційною науковою працею, обсяг основного тексту якої становить 11–13, а для суспільних і гуманітарних наук — 15–17 авторських аркушів, оформлених відповідно до державного стандарту.

Докторська дисертація:

повинна містити наукові положення та науково обґрунтовані результати у певній галузі науки, що розв'язують важливу наукову або науково-прикладну проблему і щодо яких здобувач є суб'єктом авторського права;

може бути подана до захисту за однією або двома спеціальностями однієї галузі науки і повинна відповідати за кожною спеціальністю вимогам, зазначеним в абзаці третьому цього пункту.

У разі коли дисертація виконана за двома спеціальностями, а спеціалізована вчена рада, до якої подана дисертація, має право проводити захист дисертацій лише за однією з них, то за відсутності в Україні спеціалізованих вчених рад з правом проведення захисту дисертацій за такими двома спеціальностями з дозволу ВАК може проводитися разовий захист. Порядок формування складу спеціалізованої вченої ради для проведення разового захисту встановлює ВАК.

Наукові положення і результати, які виносилися на захист у кандидатській дисертації здобувача наукового ступеня доктора наук, не можуть повторно виноситися на захист у його докторській дисертації. Ці положення і результати можуть бути наведені лише в оглядовій частині докторської дисертації.

13. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата наук є кваліфікаційною науковою працею, обсяг основного тексту якої становить 4,5–7, а для суспільних і гуманітарних наук — 6,5–9 авторських аркушів, оформлених відповідно до державного стандарту.

Кандидатська дисертація:

повинна містити нові науково обґрунтовані результати проведених здобувачем досліджень, які розв'язують конкретне наукове завдання, що має істотне значення для певної галузі науки;

подається до захисту лише за однією спеціальністю.

14. Основні наукові результати дисертації повинні відображати особистий внесок здобувача в їх досягнення та обов'язково бути опубліковані ним у формі наукових монографій, посібників (для дисертацій з педагогічних наук) чи статей у наукових (зокрема електронних) фахових виданнях України або інших держав. Перелік наукових фахових видань України затверджує ВАК.

До опублікованих праць, які додатково відображають наукові результати дисертації, належать дипломи на відкриття; патенти і авторські свідоцтва на винаходи, державні стандарти, промислові зразки, алгоритми та програми, що пройшли експертизу на новизну; рукописи праць, депонованих в установах державної системи науково-технічної інформації та анотованих у наукових журналах; брошури, препринти; технологічні частини проектів на будівництво, розширення, реконструкцію та технічне переоснащення підприємств; інформаційні карти на нові матеріали, що внесені до державного банку

даних; друковані тези, доповіді та інші матеріали наукових конференцій, конгресів, симпозіумів, семінарів, шкіл тощо.

Повноту викладу матеріалів дисертації в опублікованих працях здобувача визначає спеціалізована вчена рада.

Мінімальну кількість та обсяг публікацій, які розкривають основний зміст дисертацій, визначає ВАК.

Апробація матеріалів дисертації на наукових конференціях, конгресах, симпозіумах, семінарах, школах тощо обов'язкова.

15. Докторська і кандидатська дисертації супроводжуються окремими авторефератами обсягом відповідно 1,3–1,9 і 0,7–0,9 авторського аркуша, які подаються державною мовою. Вимоги до оформлення автореферату встановлює ВАК.

Автореферат дисертації видається друкарським способом з обов'язковим зазначенням вихідних відомостей видання у кількості, визначеній спеціалізованою вченою радою, і надсилається членам спеціалізованої вченої ради та заінтересованим організаціям не пізніше ніж за місяць до захисту дисертації. Список адресатів визначає спеціалізована вчена рада, яка прийняла до захисту дисертацію. Перелік установ та організацій, яким обов'язково надсилається автореферат, визначає ВАК.»

## ВИСНОВКИ

Ряди Остроградського 1-го виду дозволяють розширити можливості формального задання і аналітичного дослідження фрактальних множин, сингулярних мір, недиференційовних функцій та інших об'єктів зі складною локальною будовою. . .

## АНОТАЦІЇ

*Барановський О. М.* Метрична та ймовірнісна теорія чисел, представлених рядами Остроградського 1-го виду. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2007.

Дисертація присвячена дослідженню математичних об'єктів зі складною локальною будовою: фрактальних множин, сингулярних

мір, недиференційовних функцій, заданих у термінах рядів Остроградського 1-го виду. Досліджуються деякі класи замкнених під нещільних множин, заданих умовами на елементи їх розвинення в ряд Остроградського. Встановлено умови нуль-мірності та додатності міри Лебега множин з цих класів. Проводиться порівняння з відповідними твердженнями про міру Лебега множин чисел, заданих умовами на елементи їх розвинення в ланцюговий дріб. Вказано на принципові відмінності метричної теорії рядів Остроградського та метричної теорії ланцюгових дробів. Також вивчено тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум та випадкової неповної суми ряду Остроградського 1-го виду. Для випадкової величини з незалежними різницями елементів ряду Остроградського знайдено критерій дискретності (неперервності) розподілу та умови сингулярності канторівського типу. Вивчено диференціальні та фрактальні властивості функцій, заданої перетворювачем елементів ряду Остроградського в двійкові цифри.

*Ключові слова:* ряд Остроградського 1-го виду, неповна сума ряду, міра Лебега, сингулярна міра канторівського типу, недиференційовна функція, розмірність Хаусдорфа–Безиковича, фрактал, перетворення Фур'є–Стілтєса.

*Барановский А. Н.* Метрическая и вероятностная теория чисел, представленных рядами Остроградского 1-го вида. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2007.

Диссертация посвящена исследованию математических объектов со сложной локальной структурой: фрактальных множеств, сингулярных мер, недифференцируемых функций, которые заданы в терминах рядов Остроградского 1-го вида.

Исследуется множество  $C[\bar{O}^1, \{V_n\}]$ , являющееся с точностью до счетного множества множеством всех иррациональных чисел,  $\bar{O}^1$ -символы (т.е. разности элементов ряда Остроградского) которых удовлетворяют условию  $g_n(x) \in V_n \subseteq \mathbb{N}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Найденны условия на множества  $V_n$ , при которых  $C[\bar{O}^1, \{V_n\}]$  является множеством меры 0 или множеством положительной меры Лебега. Сделано сравнение с соответствующими утверждениями о мере Лебега множеств

чисел, заданных условиями на элементы их разложения в цепную дробь. Указаны принципиальные отличия между метрической теорией рядов Остроградского 1-го вида и метрической теорией цепных дробей. В частности, доказано существование множеств типа  $C[\bar{O}^1, \{V_n\}]$  положительной меры таких, что соответствующие множества, определенные в терминах элементов цепной дроби, имеют нулевую меру.

Сумма  $s = s(\{a_k\})$  ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_1 q_2 \dots q_k}, \quad \text{где } a_k \in \{0, 1\},$$

называется неполной суммой заданного ряда Остроградского 1-го вида. Изучены тополого-метрические и фрактальные свойства множества неполных сумм ряда Остроградского 1-го вида. Также изучена структура, тополого-метрические и фрактальные свойства случайной неполной суммы ряда Остроградского 1-го вида

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \varepsilon_k}{q_1 q_2 \dots q_k},$$

где  $\{\varepsilon_k\}$  — последовательность независимых случайных величин, которые принимают значения 0 и 1 с вероятностями  $p_{0k}$  и  $p_{1k}$  соответственно.

Для случайной величины

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\eta_1 (\eta_1 + \eta_2) \dots (\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_k)},$$

$\bar{O}^1$ -символы  $\eta_k$  которой являются независимыми случайными величинами, принимающими значения 1, 2, ...,  $m$ , ... с вероятностями  $p_{1k}$ ,  $p_{2k}$ , ...,  $p_{mk}$ , ... соответственно, найдено выражение функции распределения и ее производной, описан спектр распределения. Найдены критерий дискретности (непрерывности) распределения и условия сингулярности канторовского типа.

Изучены дифференциальные и фрактальные свойства функции, заданной следующим образом. Пусть иррациональное число  $x$  задано своим рядом Остроградского с элементами  $q_n(x)$ , тогда значение



функции  $y = \rho(x)$  определяется двоичной дробью, цифры которой вычисляются по правилу

$$\alpha_1 = 1 - \delta_{q_1(x)}, \quad \alpha_{n+1} = 1 - \alpha_n \delta_{q_{n+1}(x)},$$

где  $\delta_m$  — индикатор множества чётных чисел. В рациональных точках функция определяется равенством  $\rho(x) = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n 111 \dots$ , где  $\alpha_i$  определяются по тому же правилу. Доказано, что эта функция непрерывна в иррациональных точках, разрывна в рациональных и нигде не дифференцируема. Множество значений функции является самоподобным фрактальным множеством.

*Ключевые слова:* ряд Остроградского 1-го вида, неполная сумма ряда, мера Лебега, сингулярная мера канторовского типа, недифференцируемая функция, размерность Хаусдорфа–Безиковича, фрактал, преобразование Фурье–Стилтьеса.

*Baranovskiy O. M.* Metric and probabilistic theory of numbers defined by the first Ostrogradsky series. — Manuscript.

Candidate's thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 — mathematical analysis. — Institute for Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2007.

The thesis is devoted to the investigation of mathematical objects (fractal sets, singular measures, nondifferentiable functions) with complicated local structure defined in terms of the first Ostrogradsky series. We investigate some classes of closed nowhere dense sets defined by conditions on elements of their expansion in the Ostrogradsky series. We found conditions for these sets to be of zero resp. positive Lebesgue measure. We compare these results with the corresponding ones in terms of continued fractions. We stress the fundamental difference between the metric theory of the Ostrogradsky series and the metric theory of continued fractions. We also study topological, metric and fractal properties of the set of incomplete sums of the Ostrogradsky series and of the random incomplete sum of the Ostrogradsky series. For random variables with independent differences of elements of the Ostrogradsky series we found the criterion for discreteness and conditions for Cantor-type singularity. We study the differential and fractal properties of the function defined by the transducer of elements of the Ostrogradsky series to binary digits.

*Key words:* the first Ostrogradsky series (Pierce expansion), incomplete sum of series, the Lebesgue measure, Cantor-type singular measure, nondifferentiable function, Hausdorff–Besicovitch dimension, fractal, Fourier–Stieltjes transform.

---

Підписано до друку 20.03.2007. Формат 60×84/16. Папір друк. Офсет.  
друк. Фіз. друк. арк. 1,5. Умовн. друк. арк. 1,4.  
Тираж 100 пр. Зам. 89.

---

Інститут математики НАН України,  
01601, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.