1. Fie G = (V,E,w) un graf neorientat ponderat. Este corect următorul algoritm pentru determinarea unui arbore parțial de cost minim al lui G? Justificați

   T = G
   cat timp T conține cicluri
       determina C un ciclu elementar in T
       determina e o muchie de cost maxim in C
       T = T – e

2. Dacă toate muchiile au cost între 1 și |V| cât de rapid poate deveni algoritmul lui Kruskal?

3. Fie G = (V, E, w) un graf conex ponderat și T_{min} un apcm în G.

a) Fie k un număr pozitiv și graful G_1 = (V, E, w_1) unde

$w_1(e) = w(e) + k$

Este T_{min} apcm și în G_1?

b) Fie k un număr pozitiv și graful G_2 = (V, E, w_2) unde

$w_2(e) = w(e) * k$

Este T_{min} apcm și în G_2?

4. Fie G = (V, E, w) un graf orientat ponderat (fără circuite negative), s și t două vârfuri distincte din G și P un s-t drum minim în G.

a) Fie k un număr pozitiv și graful G_1 = (V, E, w_1) unde

$w_1(e) = w(e) + k$

Este P un s-t drum minim și în G_1?

b) Fie k un număr pozitiv și graful G_2 = (V, E, w_2) unde

$w_2(e) = w(e) * k$

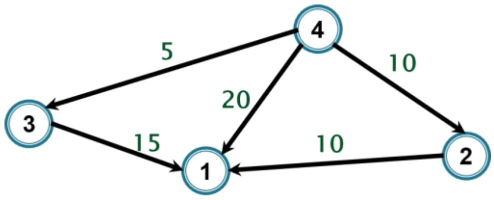
Este P un s-t drum minim și în G_2?

5. Fie G un graf conex ponderat și e o muchie de cost minim.
   a) Arătați că există un arbore parțial de cost minim în G care conține e.
   b) Orice apcm din G conține e? Dar o muchie de cost w(e)? Justificați

6.

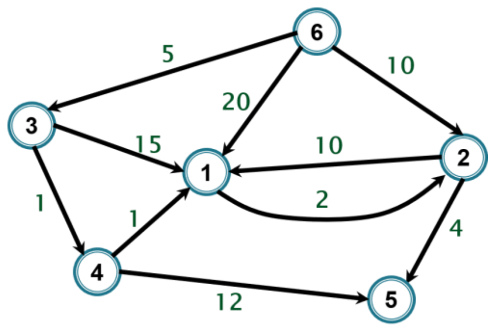
a) Care sunt arborii de distanțe față de vârful s=4 pentru graful următor? Care dintre ei va fi obținut folosind algoritmul lui Dijkstra?

b) Descrieți cum poate fi modificat algoritmul lui Dijkstra modificat astfel încât să detecteze că există mai multe drumuri minime între două vârfuri date s și t (atunci când ponderile sunt pozitive)/ mai mulți arbori de distanțe față de s și să afișeze un mesaj corespunzător.



7. Fie G un graf orientat fără circuite neponderat. Descrieți un algoritm eficient de determinare a unui drum maxim (elementar) în G și justificați corectitudinea acestuia (corectitudinea și complexitatea algoritmilor studiați la curs nu trebuie justificate).

8. Pe graful de mai jos se aplică algoritmul lui Dijkstra pentru vârful sursa 6. Care este vectorul de etichete de distanțe după ce au fost vizitate (extrase, finalizate) 3 vârfuri și relaxate arcele care ies din ele. Justificați.



9. Dați exemplu de un graf cu 8 vârfuri pentru care cardinalul maxim al unui cuplaj egal cu 2.

10. Care este numărul maxim de muchii ale unui graf cu 6 vârfuri? Dar ale unui graf bipartit cu 6 vârfuri? Dar ale unui graf planar cu 6 vârfuri? Justificați.

11. Dați exemplu de graf neorientat cu 5 vârfuri și minim 6 muchii care are un arbore parțial de cost minim care este și arbore de distanțe față de 1. Justificați.

12. Fie G un graf neorientat ponderat cu ponderile muchiilor distincte. Fie T un arbore de cost minim în G. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

a) T nu conține muchia de cost maxim din G

b) T conține muchia de cost minim din G

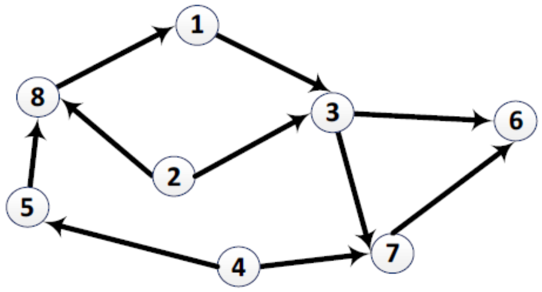
c) T conține primele doua muchii cu cele mai mici costuri din G

d) T este unicul arbore parțial de cost minim din G

13. Fie N=(G,s,t,c) o rețea de transport și f un flux în N. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

   a) Valoarea lui f este mai mică sau egală cu suma capacităților arcelor care ies din s
   b) Valoarea lui f este mai mică sau egală cu suma capacităților arcelor care intră în t
   c) Valoarea lui f este mai mică sau egală cu capacitatea minimă a unei tăieturi (s-t tăieturi) din G
   d) Valoarea lui f este mai mică sau egală cu capacitatea maximă a unei tăieturi (s-t tăieturi) din G

14. Care din următoarele variante reprezintă o sortare topologică pentru următorul graf? Justificați (pot fi mai multe variante corecte).



a) 2, 4, 5, 8, 1, 3, 7, 6
b) 4, 2, 8, 5, 1, 3, 7, 6
c) 2, 3, 8, 1, 4, 5, 7, 6
d) 4, 5, 2, 8, 1, 3, 7, 6

15. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate pentru un graf neorientat conex ponderat cu n>3 vârfuri? Justificați (complexitatea algoritmilor studiați se presupune cunoscută, nu trebuie demonstrată în justificare)

a) Algoritmul lui Kruskal determină corect un arbore parțial de cost minim în G chiar dacă graful are și muchii cu ponderi negative

b) Algoritmul lui Dijkstra determină corect distanțele de la vârful 1 la celelalte vârfuri chiar dacă graful are și muchii cu ponderi negative

c) Algoritmul lui Prim are complexitatea O(m) dacă graful este complet

d) Un arbore parțial de cost minim conține toate muchiile critice din graf