Subiectul 1

Se dă un graf neorientat conex G cu n>3 vârfuri, m muchii, m>n. Să se determine doi arbori parțiali T și T' ai lui G cu proprietățile:

- T este arbore de distante față de vârful 1: $d_T(1,v) = d_G(1,v)$ pentru orice vârf v din G
- În T' există cel puțin un vârf v cu $d_{T'}(1, v) \neq d_G(1, v)$.

Se vor afișa muchiile celor doi arbori parțiali determinați și, în plus, se vor afișa toate vârfurile v pentru care $d_{T'}(1,v) \neq d_G(1,v)$. **Complexitate O(m)**
Informațiile despre graf se citesc din fișierul graf.in cu structura:

- pe prima linie sunt n și m
- pe următoarele m linii sunt câte 2 numere naturale reprezentând extremitățile unei muchii

($d_G(x,y)$ = distanța de la x la y în G)

graf.in	Iesire pe ecran (solutia nu este unica)
5 7 1 2 1 3 2 3 2 4 3 4 3 5 4 5	T: 1 2 1 3 2 4 3 5 T': 1 2 2 4 4 5 3 4 v: 3 5

Subiectul 2

Se citesc informații despre un graf **orientat** ponderat G din fișierul `graf.in`. Fișierul are următoarea structură:

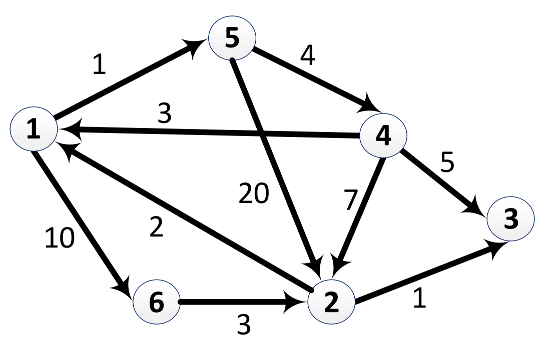
- Pe prima linie sunt două numere reprezentând numărul de vârfuri n ($n>4$) și numărul de arce m ale grafului, **m>n**
- Pe următoarele m linii sunt câte 3 numere întregi **pozitive** reprezentând extremitatea inițială, extremitatea finală și costul unui arc din graf
- Pe penultima linie este un număr natural b
- Pe ultima linie este un număr s reprezentând un nod sursă în graf.

În punctul s se află un călător care are bugetul b.

a) Să se determine un cel mai depărtat nod v din graf la care călătorul poate ajunge din s printr-un drum (elementar) de cost cel mult b, cât să se încadreze în buget (acel vârf pentru care se obține $\max\{d(s,u) \mid d(s,u) \le b,\ u \text{ vârf în } V\}$ și să se afișeze un drum de cost minim de la s la v. Dacă sunt mai multe astfel de noduri se va alege cel cu indicele cel mai mic.

b) Observând că un circuit este format totuși dintr-un drum și un arc, călătorul va mai roagă să determinați în plus dacă poate face un traseu de cost cel mult b care pornește din s și se termina tot în s fără a trece de mai multe ori prin același vârf, altfel spus să determinați dacă există un circuit elementar în G de cost mai mic sau egal cu b care conține s și, în caz afirmativ, să afișați un astfel de circuit. **Complexitate O(mlog(n))**

graf.in	Iesire pe ecran
6 10	a)
1 5 1	v=3
1 6 10	1 5 4 3
2 1 2	b)
4 1 3	1 5 4 1
5 2 20	
5 4 4	
4 2 7	
4 3 5	
2 3 1	
6 2 3	
11	
1	



d(1, 2) = 12
d(1, 3) = 10
d(1, 4) = 5
d(1, 5) = 5
d(1, 6) = 1
d(1, 7) = 10
b = 11 => cele mai mari distanțe mai mici sau egale cu 11 sunt d(1, 3) și d(1, 7)

Subiectul 3

Fişierul graf.in conţine următoarele informaţii despre un graf **bipartit** conex:

- pe prima linie sunt 2 numere naturale n şi m reprezentând numărul de vârfuri şi numărul de muchii
- pe următoarele m linii sunt perechi de numere x y (separate prin spaţiu) reprezentând extremităţile unei muchii

Se consideră graful G dat în fişierul graf.in. Notăm cu k numărul de vârfuri de grad impar din graf.

a) Folosind un algoritm de determinare a unui flux maxim într-o reţea de transport, determinaţi un cuplaj maxim în subgraful indus de mulţimea vârfurilor de grad impar din G.

b) Folosind punctul a) determinaţi dacă exista k/2 muchii care se pot elimina din G astfel încât să se obţină un graf cu următoarele proprietăţi:

- gradul fiecărui vârf din G' este egal cu cel din G sau cu unu mai mic.
- în G' în fiecare componentă conexă există câte un ciclu care conţine toate muchiile din componentă (o singura dată) **Complexitate $O(nm^2)$**

graf.in	Iesire pe ecran (solutia nu este unica)
8 9 1 5 1 6 1 7 2 5 3 5 3 7 3 4 8 7 8 4	1 6 2 5 3 7