

Tema 2

2. Jucător cu A primul jucător, iar cu B al doilea jucător.

A_i - primul jucător câștigă în runda i (se dă cu zarul de $2i-1$ ori și câștigă o dată, B pierde de $i-1$ ori)

B_i - al doilea jucător câștigă în runda i (se dă cu zarul de $2i$ ori și câștigă o dată, A pierde de i ori)

$$P(A_1) = \frac{1}{6}, \quad P(A_1^c) = \frac{5}{6}$$

$$P(B_1) = P(\text{cădea 6} \mid \text{A mîna dat 1}) = P(A_1^c) \cdot P(6) \\ = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

$$P(A, B_i) = P(B, A_i) = 0$$

$$P(A_i) = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{6} = \left[\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^{i-1} \cdot \frac{1}{6}$$

\downarrow \downarrow \searrow
 A dă orice din B dă orice din A dă 1
 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$P(\text{câștig A}) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_m), m \rightarrow \infty \\ = \frac{1}{6} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^0 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^{2m-2} \right] \\ = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{1 - \left[\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^m}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} \\ = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{11} \cdot \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2m}\right]$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(\text{câștig A}) = \frac{6}{11} \cdot [1 - 0] = \frac{6}{11} = 0,54$$

$$P(B_i) = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \left[\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^{i-1} = \frac{5}{36} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^{i-1}$$

$$P(\text{contig B}) = P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_m), m \rightarrow \infty$$

$$= \frac{5}{36} \left[\left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^0 + \left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^1 + \dots + \left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^{m-1} \right]$$

$$= \frac{5}{36} \cdot \frac{1 - \left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^m}{1 - \frac{25}{36}}$$

$$= \frac{5}{36} \cdot \frac{36}{11} \cdot \left[1 - \left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^m \right]$$

$$= \frac{5}{11} \cdot \left[1 - \left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^m \right]$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(\text{contig B}) = \frac{5}{11} \cdot (1 - 0) = \frac{5}{11} = 0,45$$

2. metoda 2

$$P(A \text{ dă } 1) = \frac{1}{6}, \quad P(B \text{ dă } 1) = \frac{1}{6}$$

Notă: $A \text{ dă } 1 = E$
 $B \text{ dă } 6 = F$

$$P(\text{câștigă } A) = P(\text{câștigă } A | E)P(E) + P(\text{câștigă } A | E^c) \cdot P(E^c)$$

$$P(\text{câștigă } A | E) = 1$$

$$P(E) = \frac{1}{6}$$

$$P(E^c) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(\text{câștigă } A | E^c) = P(\text{câștigă } A | F)P(F) + P(\text{câștigă } A | F^c)P(F^c)$$

$$P(\text{câștigă } A | F) = 0$$

$$P(F^c) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \quad P(F) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{câștigă } A | F^c) = P(\text{câștigă } A) \cdot P(F^c) = \frac{5}{6} P(\text{câștigă } A)$$

$$\Rightarrow P(\text{câștigă } A) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \left(0 \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot P(\text{câștigă } A) \right)$$

$$P(\text{câștigă } A) = \frac{1}{6} + \frac{25}{36} P(\text{câștigă } A)$$

$$\frac{11}{36} P(\text{câștigă } A) = \frac{1}{6} \quad | \cdot 6$$

$$\frac{11}{6} P(\text{câștigă } A) = 1 \Rightarrow P(\text{câștigă } A) = \frac{6}{11} = 0,54$$

$$P(\text{câștigă } B) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11} = 0,45$$

3.

A_k - evenimentul prin care la a k-a aruncare se obține 5 sau 7 pt. prima dată

$$5 = 1+4 = 2+3 = 3+2 = 4+1 \Rightarrow 4 \text{ posibilități}$$

$$7 = 1+6 = 2+5 = 3+4 = 4+3 = 5+2 = 6+1 \Rightarrow 6 \text{ posibilități}$$

Când se produce evenimentul A_k , avem 10 posibilități pt zaruri, apărând următoarele probabilități:

$$P(\text{suma } 5) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P(\text{suma } 7) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Cum un zar are 6 fețe, în general avem

$$P(\text{suma } 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(\text{suma } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A_1) = \frac{4}{36} + \frac{6}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(A_1^c) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

$$P(A_m) = \left(\frac{13}{18}\right)^{m-1} \cdot \frac{10}{36} = \left(\frac{13}{18}\right)^{m-1} \cdot \frac{5}{18}$$

↳ de $m-1$ ori nu se obține suma 5 sau 7

$$P(E_m) = \left(\frac{13}{18}\right)^{m-1} \cdot \frac{5}{18} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{13}{18}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} P(\text{suma 5 înainte de 7}) &= P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_m), m \rightarrow \infty \\ &= \frac{1}{9} + \frac{13}{18} \cdot \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{13}{18}\right)^{m-1} = \frac{1}{9} \left(1 + \frac{13}{18} + \dots + \left(\frac{13}{18}\right)^{m-1}\right) \\ &= \frac{1}{9} \cdot 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{13}{18}\right)^m}{1 - \frac{13}{18}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\frac{5}{18}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{18}{5} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$b) 2 = 1 + 1$$

$$P(\text{suma } 2) = \frac{1}{36}$$

A_k - evenimentul prin care la a k -a aruncare se obține suma 2 sau 7 pt prima dată, avem următoarele probabilități:

$$P'(\text{suma } 2) = \frac{1}{7}$$

$$P'(\text{suma } 7) = \frac{6}{7}$$

Deoarece zar are 6 fețe, în general avem

$$P(\text{suma } 2) = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{suma } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A_1) = \frac{1}{36} + \frac{6}{36} = \frac{7}{36}$$

$$P(A_1^c) = 1 - \frac{7}{36} = \frac{29}{36}$$

$$P(A_m) = \left(\frac{29}{36}\right)^{m-1} \cdot \frac{7}{36}$$

$$P(E_m) = \underbrace{\left(\frac{29}{36}\right)^{m-1} \cdot \frac{7}{36}}_{P(A_m)} \cdot \frac{1}{7} = \left(\frac{29}{36}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{36}$$