Tema 5

1. Fie X o v.a. cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-kx} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}, k > 0.$$

   (a) Să se determine constanta α.

   (b) Să se afle funcţia de repartiţie.

2. Dacă X este o v.a. repartizată uniform pe $[a, b]$ şi $[c, d] \subset [a, b]$ este un subinterval, atunci repartiţia lui X condiţionată la $X \in [c, d]$ este $\mathcal{U}[c, d]$.

3. Arătaţi că momentul de ordin $k, k \geq 1$, al unei variabile aleatoare repartizate exponenţial $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ este egal cu

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

4. Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori în $\mathbb{N}$, atunci

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

5. Fie X o variabilă repartizată exponenţial (de parametru α). Arătaţi că are loc următoarea relaţie (proprietatea lipsei de memorie):

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

   De asemenea, dacă X este o v.a. care satisface proprietatea lipsei de memorie, atunci X are o repartiţie exponenţială.