Tema 3

1. Fie X, Y două variabile aleatoare independente, fiecare luând valorile -1 şi 1 cu probabilitate $\frac{1}{2}$, şi fie $Z = XY$. Arătaţi că X, Y şi Z sunt independente două câte două. Sunt toate trei independente?

2. Fie X, Y două variabile aleatoare independente cu aceeaşi distribuţie dată de $\mathbb{P}(X = n) = 2^{-n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Calculati următoarele probabilitaţi: $\mathbb{P}(\min(X, Y) \leq n)$, $\mathbb{P}(Y > X)$ şi $\mathbb{P}(Y = X)$

3. Fie X o variabilă aleatoare cu distribuţia Poisson. Notăm cu $p_n(\lambda) = \mathbb{P}(X = n) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!}$. Arătaţi că $\mathbb{P}(X \leq n) = 1 - \int_0^\lambda p_n(x)dx$.

4. Fie X o variabilă aleatoare cu valori in $\mathbb{N}$, aşa încat $p_n = \mathbb{P}(X = n) > 0$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$

   (a) Arătaţi că pentru $\lambda > 0$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:

      i. X este o variabilă Poisson de parametru λ

      ii. Pentru toţi $n \geq 1$ avem $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$

   (b) Dacă X este o variabilă Poisson de parametru λ, determinaţi

      i. Valoarea k pentru care $\mathbb{P}(X = k)$ este maximă.

      ii. Valoarea lui λ care maximizează $\mathbb{P}(X = k)$, pentru k fixat.

5. Bobby Fischer şi Boris Spassky joacă un meci de şah în care primul jucător care câştigă o partidă câştigă şi meciul. Regula spune că după 10 remize succesive meciul se declară egal. Ştim că o partidă poate fi câştigată de Fischer cu probabilitatea de 0.4, câştigată de Spassky cu probabilitatea de 0.3 şi este remiză cu probabilitatea de 0.3, independent de rezultatele din partidele anterioare.

   (a) Care este probabilitatea ca Fischer să câştige meciul?

   (b) Care este funcţia de masă a duratei meciului (durata se măsoară în număr de partide jucate)?

6. Fie X şi Y două variabile aleatoare independente repartizate Poisson de parametrii λ şi respectiv μ. Determinaţi legea (repartiţia) condiţionată a lui X la $X + Y = n$.

7. Zece bile sunt puse într-un sac după următorul proces. Aruncăm cu banul de zece ori, dacă pica H, atunci punem o bilă neagră, dacă pică T, atunci punem o bilă albă. După ce am umplut sacul, scoatem câte o bilă din sac cu întoarcere. Observăm că cele zece bile extrase sunt albe. Care este probabilitatea ca în sac să fie doar bile albe?

8. În buzunarul tău ai N mondene, unde N este o variabilă aleatoare cu distribuţie Poisson de parametru λ. Aruncăm fiecare monedă o dată, cu probabilitatea p să apară H. Arătaţi că numărul total de H are o distribuţie Poisson de parametru λp.