Broscoțeanu Daria
243

3. N mașini

X număr aleator de mașini pe care îl poate vinde reprezentanța într-un an, număr întreg între 0 și $m \geq N$

toate mașinile au aceeași probabilitate deci X e o variabilă aleatoare uniformă

Pt $k \in \{0, 1, \dots, m\}$

$\Rightarrow P(X = k) = \frac{1}{m+1}$

Pentru un număr X de mașini vândute avem câștigul:

1) $X < N$ $\Rightarrow$ vinde X, rămân $N - X$

$C = aX - b(N-X)$

2) $X = N$ $\Rightarrow$ vinde N

$C = a \cdot N$

3) $X > N$ $\Rightarrow$ nu poate să vândă mai mult de N

$C = a \cdot N$

$$C = \begin{cases} aN, & X \geq N \\ aX - b(N-X), & X < N \end{cases}$$

$$E[C] = \sum_{m=0}^{\infty} x_m p_m$$

$$E[C] = aNP(X \geq N) + \sum_{y=0}^{N} P(X=y)(ay - b(N-y))$$

$$E[C] = aN \cdot \sum_{y=N}^{m} \frac{1}{m+1} + \sum_{y=0}^{N} \frac{ay - b(N-y)}{m+1}$$

$$E[C] = aN \cdot \frac{m+1-N}{m+1} + \sum_{y=0}^{N} \frac{(a+b)y - b \cdot N}{m+1}$$

$$E[c] = aN \cdot \frac{m+1-N}{m+1} + \sum_{y=0}^{N} \frac{(a+b)y}{m+1} - \sum_{y=0}^{N} \frac{bN}{m+1}$$

$$E[c] \overset{2)}{=} aN \cdot \frac{m+1-N}{m+1} + \frac{a+b}{m+1} \cdot \frac{(N-1)N}{2} \overset{2)}{-} \frac{bN}{m+1} \cdot N$$

$$E[c] = \frac{2aN(m+1-N)}{2(m+1)} + \frac{N(N-1)(a+b)}{2(m+1)} - \frac{2bN^2}{2(m+1)}$$

$$E[c] = \frac{2aNm + 2aN - 2aN^2 + N^2a - Na + N^2b - Nb - 2bN^2}{2(m+1)}$$

$$E[c] = \frac{2aNm + 2aN - aN^2 - bN^2 - Na - Nb}{2(m+1)}$$

$$E[c] = \frac{N[2am + 2a - aN - bN - a - b]}{2(m+1)}$$

$$E[c] = \frac{N[2am + a - b - aN - bN]}{2(m+1)}$$

$$E[c] = \frac{N[a(2m+1) - b - N(a+b)]}{2(m+1)}$$ (valoarea medie a câștigului)

Comanda optimă e dată de obținerea valorii maxime în $E[c]$, deci trebuie să găsim valoarea lui N pt care numărătorul e maxim.

Fie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(N) = N[(2m+1)a - b - N(a+b)]$

$f(N) = aN(2m+1) - Nb - N^2(a+b)$

$f'(N) = a(2m+1) - b - 2N(a+b)$

$f'(N) = 0 \Rightarrow \quad a(2m+1) - b = 2N(a+b) \Rightarrow N = \frac{a(2m+1) - b}{2(a+b)}$

$f''(N) = 0 - 0 - 2(a+b) = -2(a+b) < 0 \Rightarrow f$ concavă

$$\left.\begin{aligned} &f'(N) = 0 \Rightarrow N = \frac{a(2m+1)-b}{2(a+b)} \\ &f''(N) = -2(a+b) < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ maxim în } N = \frac{a(2m+1)-b}{2(a+b)}$$

4. $P(X < E[X])$

$E[X] \notin \mathbb{N}$

$E[X] = 2\,Var[X]$

X variabilă aleatoare repartizată binomială

$X \sim Bin(m, p) \Rightarrow E[X] = mp$

$Var[X] = mp(1-p)$

$E[X] = 2\,Var[X]$

$mp = 2mp(1-p)$

$mp = 2mp - 2mp^2$

$0 = mp - 2mp^2$

$0 = mp(1-2p)$

I $m = 0 \Rightarrow E[X] = 0 \cdot p = 0 \in \mathbb{N}$ (fals!)

II $p = 0 \Rightarrow E[X] = 0 \cdot m = 0 \in \mathbb{N}$ (fals!)

III $1 - 2p = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow E[X] = m \cdot \frac{1}{2} = \frac{m}{2} \notin \mathbb{N}$ cu n impar

$P(X < E[X]) = P(X < \frac{m}{2})$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & m \\ C_m^0 p^0 q^n & C_m^1 p^1 q^{n-1} & C_m^2 p^2 q^{n-2} & \dots & C_m^n p^n q^0 \end{pmatrix}$$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & m \\ C_m^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 q^n & C_m^1 \frac{1}{2} \cdot q^{n-1} & C_m^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 q^{n-2} & \dots & C_m^m \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot q^0 \end{pmatrix}$$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & m \\ C_m^0 \left(\frac{1}{2}\right)^n & C_m^1 \left(\frac{1}{2}\right)^n & C_m^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n & \dots & C_m^m \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$P\left(x < \frac{m}{2}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} C_m^k \, p^k \, q^{m-k}}{\sum_{k=0}^{m} C_m^k \, p^k q^{m-k}} = \frac{\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} C_m^k \left(\frac{1}{2}\right)^m}{\sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m} = \frac{\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} C_m^k}{\sum_{k=0}^{m} C_m^k}$$

$$= \frac{C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^{\left[\frac{m}{2}\right]}}{C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^{\left[\frac{m}{2}\right]} + C_m^{\left[\frac{m}{2}\right]+1} + \ldots + C_m^m + C_m^{m-1} + \ldots} \qquad \left(C_m^k = C_m^{m-k}\right)$$

$$= \frac{C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^{\left[\frac{m}{2}\right]}}{2\left(C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Scanned with CamScanner