

Nume și prenume: STANGA IONUT-CATALIN
Grupa: 241

Nota: _____

Examen - Restanță

1 Septembrie 2021

Timpul de rezolvare al problemelor este de 3h. Pentru transmiterea soluțiilor în format PDF¹ în folderul vostru de pe Dropbox aveți 15 minute timp suplimentar. Astfel, pentru dumneavoastră examenul începe la **ora 9 și 1 minute** și se termină la **ora 12 și 16 minute**.



Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

10p

Se consideră variabilele aleatoare independente X și Y având repartițiile:

$$X \sim \begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ 0.33 & 0.62 & 0.05 \end{pmatrix}; \quad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0.16 & 0.4 & 0.44 \end{pmatrix}$$

Să se determine repartițiile variabilelor aleatoare $X + Y$, $X - Y$, $3X^2 + Y^2$ și să se afle $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $Var(X)$, $Var(Y)$, $Var(2X - 4Y + 1)$, $Var(5XY + 3)$, $Cov(X, Y)$ și $\rho(X, Y)$ (coeficientul de corelație).

Exercițiul 2

10p

La o sărbătoare participă 30 de bărbați, 32 de femei și 30 de copii. Pe o masă se află trei urne etichetate cu literele B , F și C ce conțin bile colorate dintre care 15%, 39% și respectiv 83% sunt de culoare neagră. Un prezentator, legat la ochi, alege la întâmplare o persoană din mulțime și îi cere să extragă o bilă din urna corespunzătoare (dacă este bărbat din urna etichetată cu B , dacă este femeie din urna etichetată cu F iar dacă este copil din urna etichetată cu C). Bila extrasă este de culoare neagră. Care este probabilitatea ca bila să fi fost extrasă de un bărbat ? dar de o femeie ? dar de un copil ? Prezentatorul nu este magician și încearcă să prezică genul persoanei alese la întâmplare: ce ar trebui să spună pentru a avea o eroare cât mai mică ?

Exercițiul 3

10p

La alegerile pentru șefia Partidului Național Liberal din 2021 vor participa doi candidați: Florin Cîțu și Ludovic Orban. Să presupunem că numărul alegătorilor care votează poate fi modelat prin intermediul unei variabile aleatoare repartizate $Pois(948)$ și că fiecare alegător votează pentru candidatul Florin Cîțu cu probabilitatea 0.07 iar pentru candidatul Ludovic Orban cu probabilitatea 0.93, independent de ceilalți alegători. Fie V variabila aleatoare care descrie diferența de voturi dintre cei doi candidați, definită ca numărul de voturi pentru Florin Cîțu minus numărul de voturi pentru Ludovic Orban.

¹Pentru a transforma pozele în format PDF puteți folosi, de exemplu, programul CamScanner

- a) Determinați repartiția cuplului dat de variabilele aleatoare care determină numărul de voturi pentru candidatul Florin Cîțu și respectiv Ludovic Orban.
- b) Arătați că variabilele aleatoare care determină numărul de voturi pentru cei doi candidați sunt independente.
- c) Calculați $\mathbb{E}[V]$ și $Var[V]$.

Exercițiul 4

10p

Considerăm funcția f definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4a}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{pentru } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

- a) Să se determine coeficientul a astfel ca f să fie densitate de repartiție.
- b) Să se găsească funcția de repartiție corespunzătoare.
- c) Să se calculeze $\mathbb{P}(0 < X < 1)$ unde X este o variabilă aleatoare cu densitatea f .
- d) Să se calculeze valoarea medie și dispersia lui X .

Exercițiul 5

10p

Fie X o variabilă aleatoare repartizată

$$\mathbb{P}_\theta(X = k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

unde $\theta \in (0, 1)$ un parametru necunoscut și $A \in \mathbb{R}$ este o constantă.

1. Determinați constanta A și calculați $\mathbb{E}[X]$ și $Var(X)$.

Dorim să estimăm pe θ plecând de la un eșantion X_1, X_2, \dots, X_n de talie n din populația dată de repartiția lui X .

2. Determinați estimatorul $\tilde{\theta}$ a lui θ obținut prin metoda momentelor și calculați $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0)$.
3. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă $\hat{\theta}$ a lui θ și verificați dacă acesta este bine definit.