

Nume și prenume: STANGA IONUT-CATALIN  
Grupa: 241

Nota: \_\_\_\_\_

## Examen - Restanță

31 Mai 2021

Timpul de rezolvare al problemelor este de 3h. Pentru transmiterea soluțiilor în format PDF<sup>1</sup> în folderul vostru de pe Dropbox aveți 15 minute timp suplimentar. Astfel, pentru dumneavoastră examenul începe la **ora 8 și 8 minute** și se termină la **ora 11 și 23 minute**.



Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Mult succes !

### Exercițiul 1

10p

Se consideră variabilele aleatoare  $X$  și  $Y$  având repartițiile:

$$X \sim \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 0.13 & 0.87 \end{pmatrix} \text{ și } Y \sim \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \text{ cu } p_1, p_2 \in (0, 1).$$

- Aflați  $p_1$  și  $p_2$  știind că  $\mathbb{P}(X = -7, Y = -5) = 0.0433333$  și  $\mathbb{E}[X|Y = -5] = -4$ .
- Considerând valorile lui  $p_1$  și  $p_2$  aflate anterior, determinați repartițiile variabilelor aleatoare  $X + Y$ ,  $X - Y$ ,  $5X^2 + 7Y^2$  și calculați  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\mathbb{E}[Y]$ ,  $Var(X)$ ,  $Var(Y)$ ,  $Var(8X - 2Y + 5)$  precum și coeficientul de corelație  $\rho(X, Y)$ .

### Exercițiul 2

10p

Numărul de pești dintr-un lac este dat de o variabilă aleatoare repartizată  $Pois(9.46)$ . Fiind îngrijorat că lacul nu are niciun pește, un statistician eliberează un pește în lac. Fie  $Y$  numărul de pești din lac.

- Determinați  $\mathbb{E}[Y^2]$  și  $Var[Y]$ .
- Calculați  $\mathbb{E}\left[\frac{1}{Y}\right]$ .

### Exercițiul 3

10p

La alegerile pentru șefia Partidului Național Liberal din 2021 vor participa doi candidați: Florin Cîțu și Ludovic Orban. Să presupunem că numărul alegătorilor care votează poate fi modelat prin intermediul unei variabile aleatoare repartizate  $Pois(554)$  și că fiecare alegător votează pentru candidatul Florin Cîțu cu probabilitatea 0.01 iar pentru candidatul Ludovic Orban cu probabilitatea 0.99, independent de ceilalți alegători. Fie  $V$  variabila aleatoare care descrie diferența de voturi dintre cei doi candidați, definită ca numărul de voturi pentru Florin Cîțu minus numărul de voturi pentru Ludovic Orban.

<sup>1</sup>Pentru a transforma pozele în format PDF puteți folosi, de exemplu, programul CamScanner

- a) Determinați repartiția cuplului dat de variabilele aleatoare care determină numărul de voturi pentru candidatul Florin Cîțu și respectiv Ludovic Orban.
- b) Arătați că variabilele aleatoare care determină numărul de voturi pentru cei doi candidați sunt independente.
- c) Calculați  $\mathbb{E}[V]$  și  $Var[V]$ .

#### Exercițiul 4

10p

Se dă variabila aleatoare  $X$  care are densitatea de repartiție

$$f(x) = \frac{x}{64} e^{-\frac{x^2}{128}} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

Să se calculeze raportul  $\frac{F^{-1}(0.75) - F^{-1}(0.25)}{\sqrt{Var(X)}}$ , unde  $F$  este funcția de repartiție a lui  $X$ .

#### Exercițiul 5

10p

Fie  $X$  o variabilă aleatoare repartizată

$$\mathbb{P}_\theta(X = k) = A(k+1)\theta^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

unde  $\theta \in (0, 1)$  un parametru necunoscut și  $A \in \mathbb{R}$  este o constantă.

1. Determinați constanta  $A$  și calculați  $\mathbb{E}[X]$  și  $Var(X)$ .

Dorim să estimăm pe  $\theta$  plecând de la un eșantion  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de talie  $n$  din populația dată de repartiția lui  $X$ .

2. Determinați estimatorul  $\tilde{\theta}$  a lui  $\theta$  obținut prin metoda momentelor și calculați  $\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} = 0)$ .
3. Determinați estimatorul de verosimilitate maximă  $\hat{\theta}$  a lui  $\theta$  și verificați dacă acesta este bine definit.