

Tema 7

1. Un tehnician dintr-un laborator de biologie face două măsurători considerate independente și repartizate normal de medie 0 și de varianță 1. Calculați corelația dintre valoarea cea mai mică și cea mai mare a celor două măsurători.
2. Fie X_1, X_2, \dots un șir de variabile aleatoare independente și repartizate uniform pe intervalul $[0, \theta]$, cu $\theta > 0$. Să se arate că șirul de variabile aleatoare $Y_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$ converge în probabilitate la θ .
3. Fie $(X_n)_{n \geq 1}$ un șir de variabile aleatoare pozitive și independente cu $\mathbb{E}[X_n] = c \in (0, 1)$ pentru orice n . Dacă $Y_n = X_1 X_2 \cdots X_n$, arătați că Y_n converge în probabilitate la 0.
4. Fie X o variabilă aleatoare de medie 0 și varianță $\sigma^2 < \infty$. Arătați că pentru orice $a > 0$ are loc inegalitatea

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

5. Un grup de 200 de persoane, din care jumătate sunt bărbați, este divizat în 100 de perechi de câte 2 persoane. Dați o margine superioară pentru probabilitatea ca cel mult 30 dintre acestea să fie perechi mixte (folosiți rezultatul de la exercițiul 4).