Студентка: Евсикова Дарья
Группа: МОиАД
Дата: 7 ноября 2020 г.

Отчет

- Приведем оценки параметра Θ с помощью метода моментов с пробными функциями $g(x) = x^k$, $k \in N$:

  1. для равномерного распределения $\mathbf{U}[0, \Theta] = \Theta \cdot \mathbf{U}[0, 1]$;

  $$\int_0^\Theta x^k \cdot \frac{1}{\Theta}\, dx = \frac{x^{k+1}}{\Theta(k+1)}\Big|_0^\Theta = \frac{\Theta^k}{k+1}$$

  $$\frac{\Theta^k}{k+1} = \frac{\sum x^k}{n}$$

  $$\Theta^* = \left(\overline{X^k} \cdot (k+1)\right)^{1/k}$$

  2. для экспоненциального распределения $Exp(\Theta) = \Theta \cdot Exp(1)$.

  $$\frac{1}{\Theta}\int_0^\infty x^k \cdot e^{-x/\Theta}\, dx = \{\frac{x}{\Theta} = t\} = \Theta^k \int_0^\infty t^{(k+1)-1} \cdot e^{-t}\, dt = \Theta^k \cdot \Gamma(k+1) = \Theta^k \cdot k!$$

  $$\Theta^k \cdot k! = \frac{\sum x^k}{n}$$

  $$\Theta^* = \left(\frac{\overline{X^k}}{k!}\right)^{1/k}$$

- Для определения того, какое k следует выбрать для получения наиболее эффективных оценок, требуется провести численный эксперимент и сравнить значения СКО при разных k.

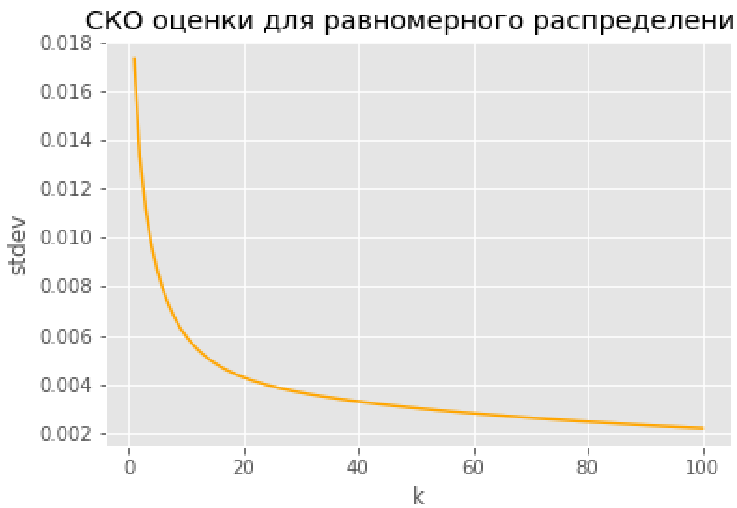
  Эксперимент был проведен следующим образом:

  1. Были сгенирированы $S = 100$ выборок из равномерного - $\mathbf{U}[0, 1]$ (экспоненциального Exp(1)) распределения, каждая из которых состоит из $n = 1000$ точек.
  2. Для каждой из этих выборок была рассчитана оценка для параметра Θ^* (в соответствие с полученными выше формулами) при разных значениях $k = (1, 2, ..., 100)$
  3. Для полученных оценок для каждого k была рассчитана оценка СКО:

  $$stdev_k = \sqrt{\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S}(\Theta_i^* - 1)^2}$$

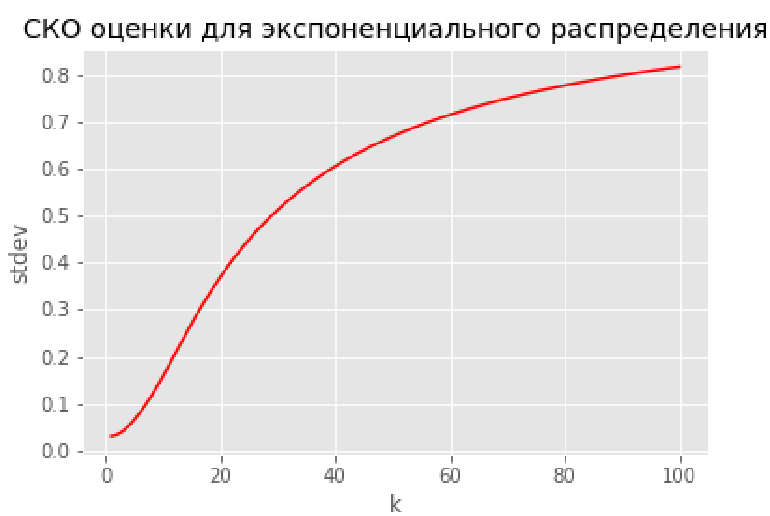
Рассмотрим результаты проведенных экспериментов для равномерного и экспоненциального распределений.

- В результате проведенного эксперимента для параметра Θ равномерного распределения была получена следующая зависимость СКО от k:



Таким образом, для равномерного распределения наиболее эффективные оценки получаются при больших значениях k функции $g(x) = x^k$. С ростом k стандартное отклонение оценки снижается, а значит повышается эффективность оценки.

- Рассмотрим результаты аналогичного эксперимента для параметра Θ экспоненциального распределения:



На полученном графике видна обратная к предыдущему эксперименту ситуация. Для получения наиболее эффективной оценки параметра Θ методом моментов для показательного распределения, в функции $g(x) = x^k$ требуется выбирать наименьшие k. Наблюдается прямая зависимость между ростом k и стандартным отклонением.