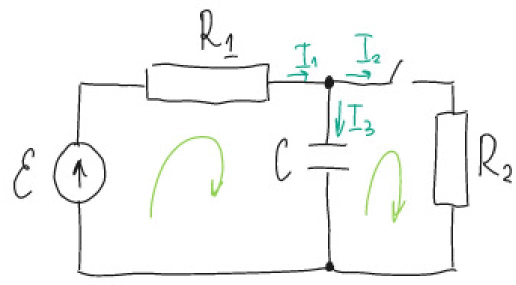
1.1

1.1



$U_c(t)$ - ?

$$\boxed{\begin{aligned} U_c &= \frac{q_c}{C} \\ \frac{dU_c}{dt} &= \frac{I}{C} \end{aligned}}$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$
$$\mathcal{E} = I_1 R_1 + U_c$$
$$0 = I_2 R_2 - U_c$$
$$\Downarrow$$
$$I_2 = \frac{U_c}{R_2}$$

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{I_3}{C} \Rightarrow I_3 = \frac{C\,dU_c}{dt}$$

$$\mathcal{E} = I_2 R_1 + I_3 R_1 + U_c = I_2 R_1 + I_3 R_1 + I_2 R_2$$

$$\mathcal{E} = I_2 (R_1 + R_2) + \frac{C\,dU_c}{dt} R_1$$

$$\mathcal{E} = \frac{U_c}{R_2} (R_1 + R_2) + C \frac{dU_c}{dt} R_1$$

$$\frac{\mathcal{E} R_2}{(R_1 + R_2)} - U_c = \frac{C R_1 R_2}{(R_1 + R_2)} \frac{dU_c}{dt}$$

$$\int \frac{(R_1 + R_2)}{C R_1 R_2} dt = \int \frac{dU_c}{\underbrace{\frac{\mathcal{E} R_2}{(R_1 + R_2)} - U_c}_{z}} \Rightarrow \frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2} t = -\ln\left| \frac{\mathcal{E} R_2}{(R_1 + R_2)} - U_c(t) \right| + C$$

$$dU_c = -dz$$

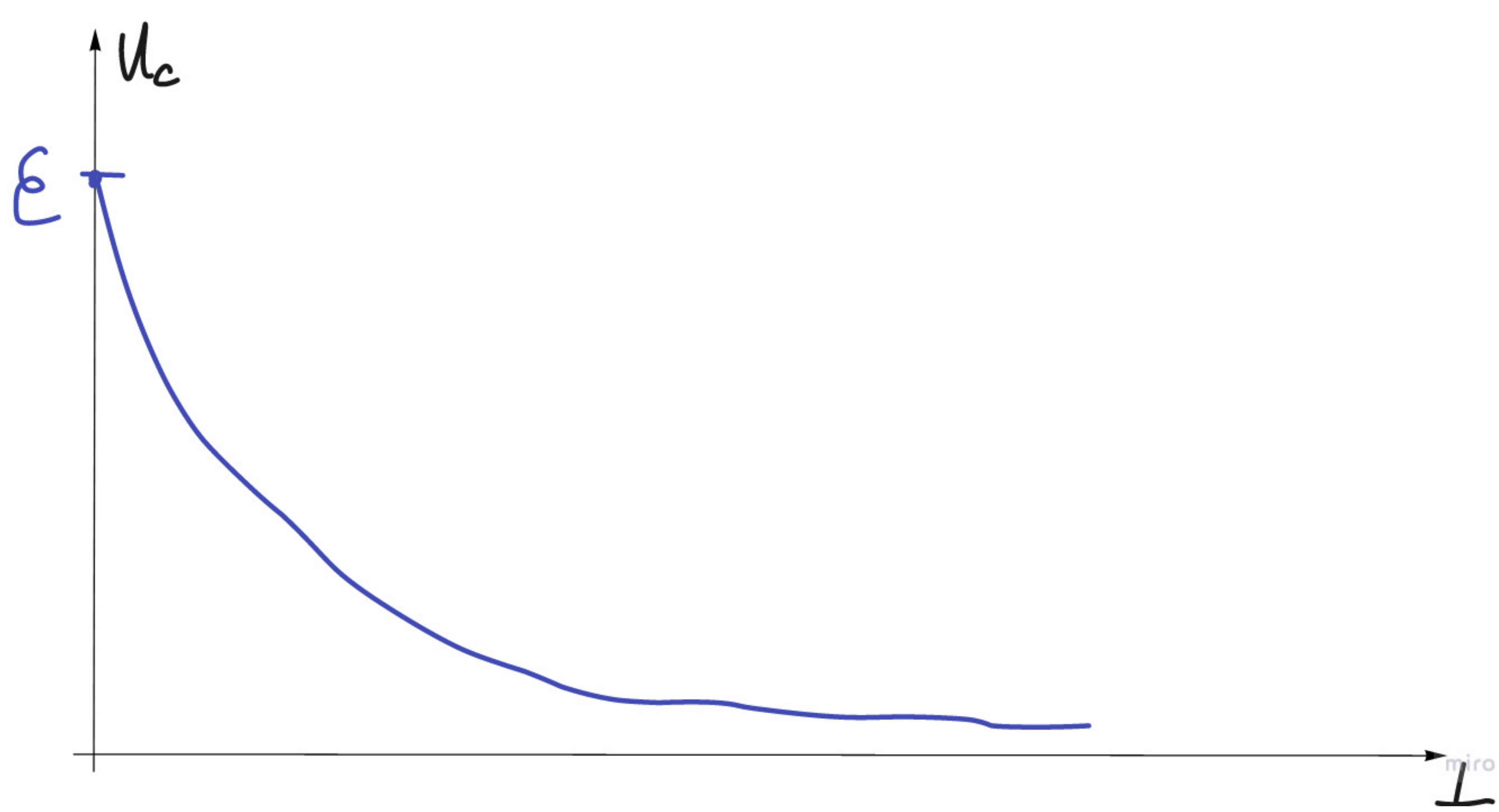
Нач. усл: $t = 0 \quad U_c = \mathcal{E}$: $C = \ln\left| \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2} - \mathcal{E} \right| = \ln\left| \frac{\mathcal{E} R_1}{R_1 + R_2} \right|$

$$\frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2} t = -\ln\left| \frac{\mathcal{E} R_2}{(R_1 + R_2)} - U_c(t) \right| + \ln\left| \frac{-\mathcal{E} R_1}{(R_1 + R_2)} \right| \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t = \ln\left|\frac{\varepsilon R_2 - U_c(t)(R_1+R_2)}{-\varepsilon R_1}\right|$$

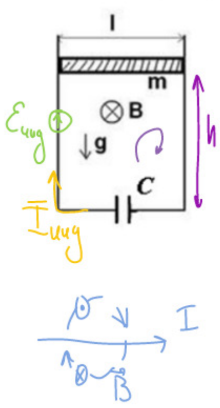
$$\varepsilon R_1 \cdot e^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t} + \varepsilon R_2 = U_c(t)(R_1+R_2)$$

$$U_c(t) = \frac{\varepsilon\left(R_1 \cdot e^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t} + R_2\right)}{R_1+R_2}$$



Mesy_task2

$a - ?$



При скольжении уменьшается площадь огр. контуром $\Rightarrow \Phi$ уменьшается

По закону электромагн. индукции в контуре возникает индукционный ток

По правилу Ленца, инд. ток направлен так, чтобы создаваемое им магнитное поле компенсировало изменение магнитного потока, которым он вызван.

$B_{внеш} \downarrow \Rightarrow \Phi \downarrow \Rightarrow B_{собств} \uparrow\uparrow B_{внеш}$

$$F = m\bar{a}$$

$$I \cdot B \cdot \sin 90^\circ \cdot l = I B \cdot l$$

- $m\bar{g} + [\bar{I} \times \bar{B}] \cdot l = ma$
- $\mathcal{E}_{инд} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ $\quad \Phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{S} = B \cdot \underbrace{h \cdot l}_{пл.\ контура} \Rightarrow \mathcal{E}_{инд} = -\dfrac{B l\, dh}{dt} = -B l \cdot v$
- $\mathcal{E}_{инд} = U_c$, $\quad U_c = \dfrac{q}{C} \Rightarrow q = U_c \cdot C \quad I = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{dU_c}{dt} C$ (1)

$\Downarrow$ +(1)

$$I = \frac{d\mathcal{E}_{инд}}{dt} C = -\frac{d(B \cdot l \cdot v)}{dt} \cdot C = -B \cdot C \cdot l \cdot a$$

$$ma = mg + I B \cdot l = mg - B^2 l^2 \cdot C \cdot a$$

$$a = \frac{mg}{B^2 l^2 \cdot C \cdot a + m}$$

- $\mathcal{E}_{\text{инд.}} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ $\quad \Phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{S} = B \cdot \underbrace{h \cdot l}_{\text{пл. контура}} \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{инд.}} = -\dfrac{B l\, dh}{dt} = B l \cdot v$

- $\mathcal{E}_{\text{инд.}} = U_c$, $\quad U_c = \dfrac{q}{C} \Rightarrow q = U_c \cdot C \quad I = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{dU_c}{dt} C$ (1)

$\Downarrow$ + (1)

$$I = \frac{d\mathcal{E}_{\text{инд.}}}{dt} C = \frac{d(B \cdot l \cdot v)}{dt} \cdot C = B \cdot C \cdot l \cdot a$$

$$ma = mg - IB \cdot l = mg - B^2 l^2 \cdot C \cdot a$$

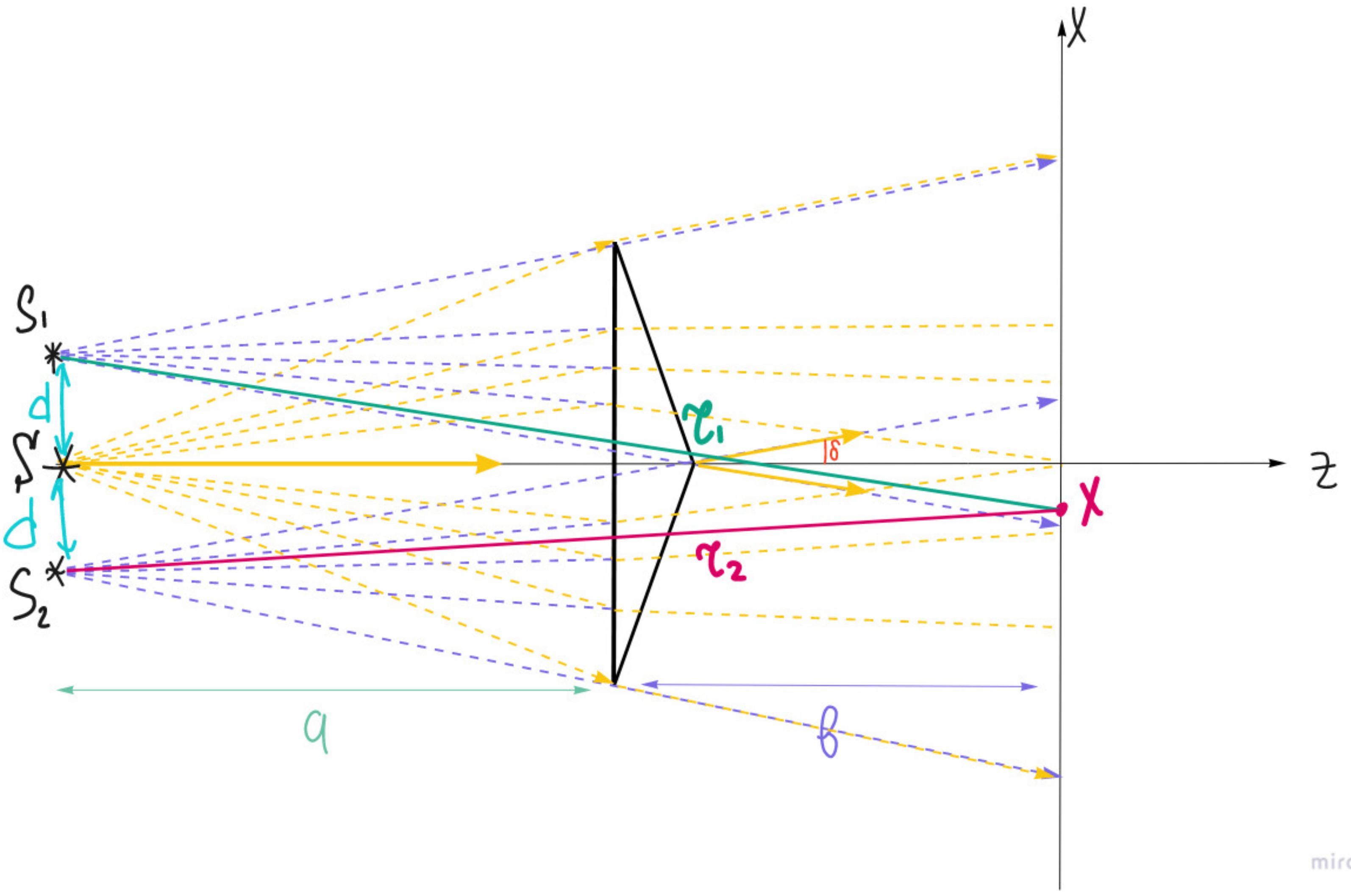
$$ma + B^2 l^2 C \cdot a = mg$$

$$a = \frac{mg}{m + B^2 l^2 C}$$

miro

Оптика задача 1

Волны, преломленные двумя половинками призмы пересекаются и интерферируют, так как они когеренты (потому что у них один источник, соответственно, одна фаза, длина волны). Можно считать, что эти волны образованы двумя мнимыми когерентными источниками света S_1 и S_2:

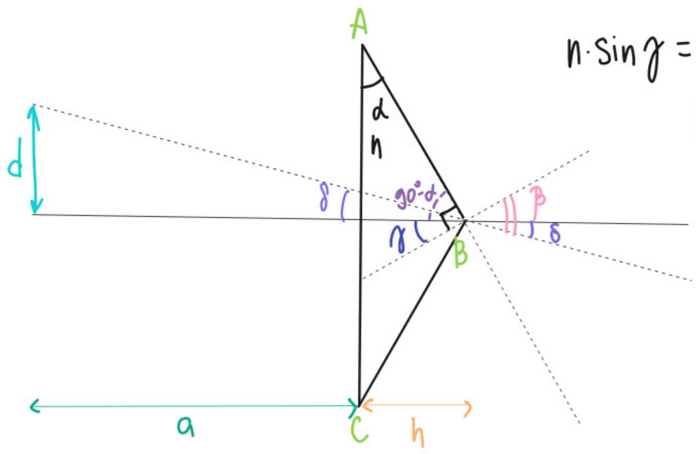


$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 1\cdot r_1+\varphi_0 \\ \varphi_2 &= \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 1\cdot r_2+\varphi_0 \end{aligned}\right\} \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1-r_2)$$

$$d = ?$$

$$r_1=\sqrt{(d+x)^2+(a+b)^2} \qquad r_2=\sqrt{(d-x)^2+(a+b)^2}$$

miro



$n \cdot \sin\gamma = 1 \cdot \sin\beta$

$\sin\varphi \approx \varphi \Rightarrow n \cdot \alpha = \alpha + \delta$

$\delta = (n-1)\alpha$

$(90° - \alpha) + \gamma = 90°$

$\alpha = \gamma$

$\gamma = \beta - \delta = \alpha$

$\beta = \alpha + \delta$

$$\frac{d}{a+h} = tg\,\delta = tg((n-1)\alpha)$$

h очень мало $\qquad tg\varphi \approx \varphi$

$$d = tg((n-1)\alpha)(a+h) = tg((n-1)\alpha) \cdot a = (n-1)\alpha \cdot a$$

$$r_1 - r_2 = \sqrt{(d+x)^2 + (a+b)^2} - \sqrt{(d-x)^2 + (a+b)^2} = (a+b)\left[\sqrt{1 + \left(\frac{d+x}{a+b}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{d-x}{a+b}\right)^2}\right] =$$

$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ для малых x

$$= (a+b)\left[1 + \frac{(d+x)^2}{2(a+b)^2} - 1 - \frac{(d-x)^2}{2(a+b)^2}\right] =$$

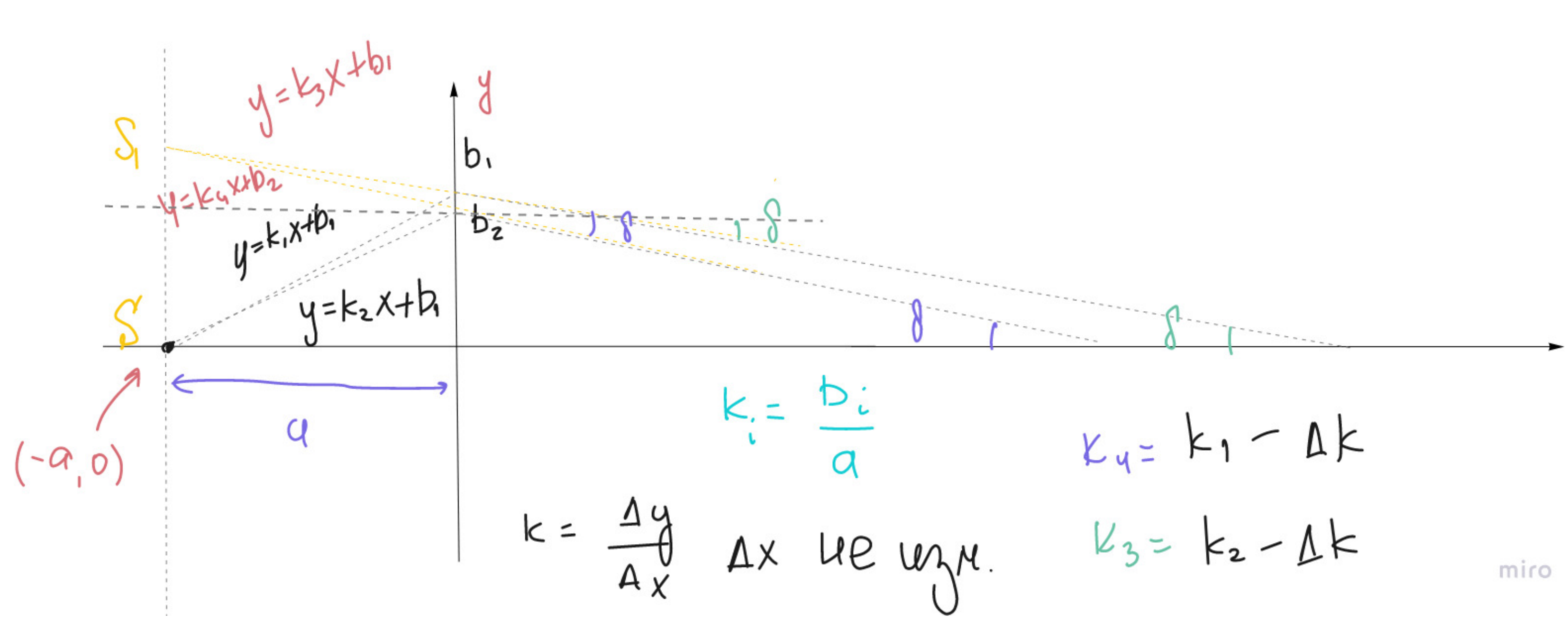
$$= \frac{(d+x)^2 - (d-x)^2}{2(a+b)} = \frac{d^2 + 2dx + x^2 - d^2 + 2dx - x^2}{2(a+b)} = \frac{4dx}{2(a+b)} = \frac{2dx}{a+b}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{2dx}{(a+b)} = \frac{4\,dx \cdot \pi}{\lambda(a+b)} = \frac{4(n-1)\alpha \cdot a \cdot x \cdot \pi}{\lambda(a+b)}$$

Рассмотрим случай синфазных источников, дающих одинаковые интенсивности на экране $I_1 = I_2 = I_0$. В этом случае

$$I(P) = 2I_0\big(1 + \cos(\Delta\varphi(P))\big) = 4I_0\cos^2\left(\frac{\Delta\varphi(P)}{2}\right), \quad V = 1.$$

$$I(x) = 4I_0\cos^2\left[\frac{2(n-1)\cdot\alpha\cdot a\cdot x\cdot\pi}{\lambda(a+b)}\right]$$



$k_i = \frac{b_i}{a}$

$k_4 = k_1 - \Delta k$

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\quad \Delta x$ не изм.

$k_3 = k_2 - \Delta k$

$$\begin{cases} y = k_3 x + k_1 a = (k_1 - \Delta k) x + k_1 a \\ y = k_4 x + k_2 a = (k_2 - \Delta k) x + k_2 a \end{cases}$$

$\Delta k = \operatorname{tg}\delta \approx \delta$ (в параксиальном приближении)

Т. пересеч: $(k_1 - \Delta k) x + k_1 a = (k_2 - \Delta k) x + k_2 a$

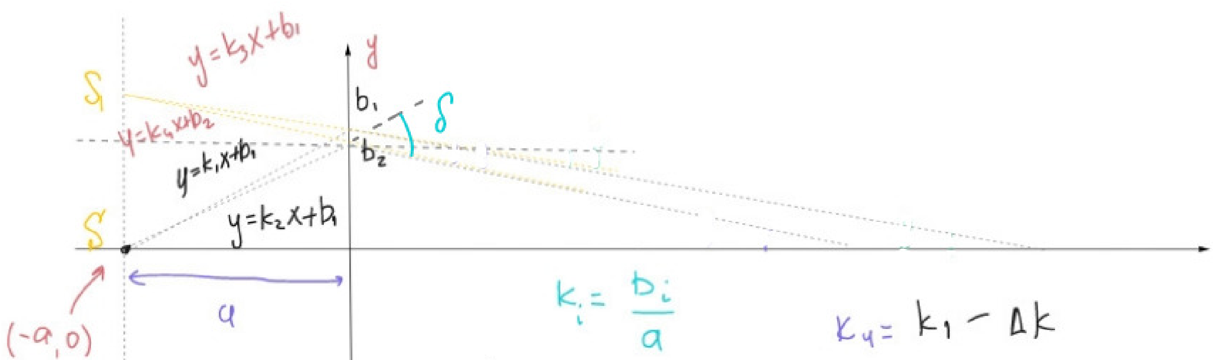
$k_1 x + k_1 a = k_2 x + k_2 a$

$x(k_1 - k_2) = a(k_2 - k_1)$

$x = -a$

$y = \Delta k a - k_1 a + k_1 a$

$y = \Delta k a = \delta a = \alpha(n-1) a$



$k_i = \dfrac{b_i}{a}$

$k_4 = k_1 - \Delta k$

$k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ Δx не изм.

$k_3 = k_2 - \Delta k$

$\Delta k = \operatorname{tg}\delta \approx \delta$ (в параксиальном приближении)

$$\begin{cases} y = k_3 x + k_1 a = (k_1 - \Delta k) x + k_1 a \\ y = k_4 x + k_2 a = (k_2 - \Delta k) x + k_2 a \end{cases}$$

Т. пересеч: $(k_1 - \Delta k) x + k_1 a = (k_2 - \Delta k) x + k_2 a$

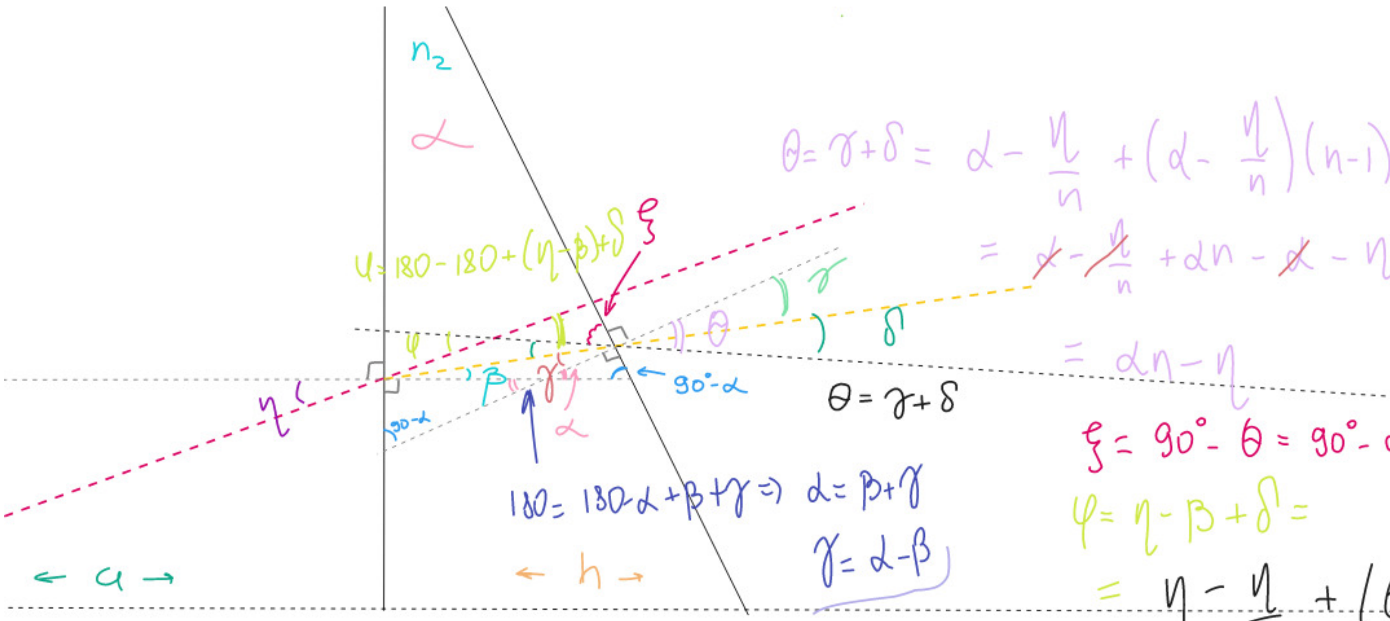
$k_1 x + k_1 a = k_2 x + k_2 a$

$x(k_1 - k_2) = a(k_2 - k_1)$

$x = -a$

$y = \Delta k a - k_1 a + k_1 a$

$y = \Delta k a = \delta a = \alpha(n-1) a$



$$\theta = \gamma + \delta = \alpha - \frac{\eta}{n} + \left(\alpha - \frac{\eta}{n}\right)(n-1)$$

$$= \cancel{\alpha} - \cancel{\frac{\eta}{n}} + \alpha n - \cancel{\alpha} - \eta + \cancel{\frac{\eta}{n}}$$

$$= \alpha n - \eta$$

$$180 = 180 - \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta + \gamma$$

$$\gamma = \alpha - \beta$$

$$\xi = 90° - \theta = 90° - \alpha n - \eta$$

$$\varphi = \eta - \beta + \delta =$$

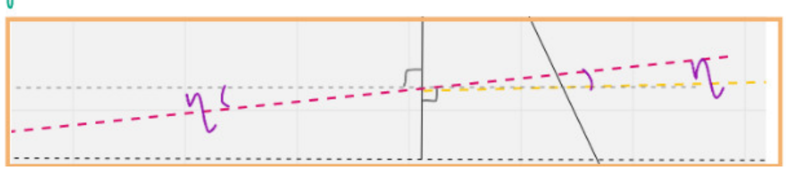
$$= \eta - \frac{\eta}{n} + (\theta - \gamma) =$$

$$= \eta - \frac{\eta}{n} + \alpha n - \eta + \alpha - \frac{\eta}{n} =$$

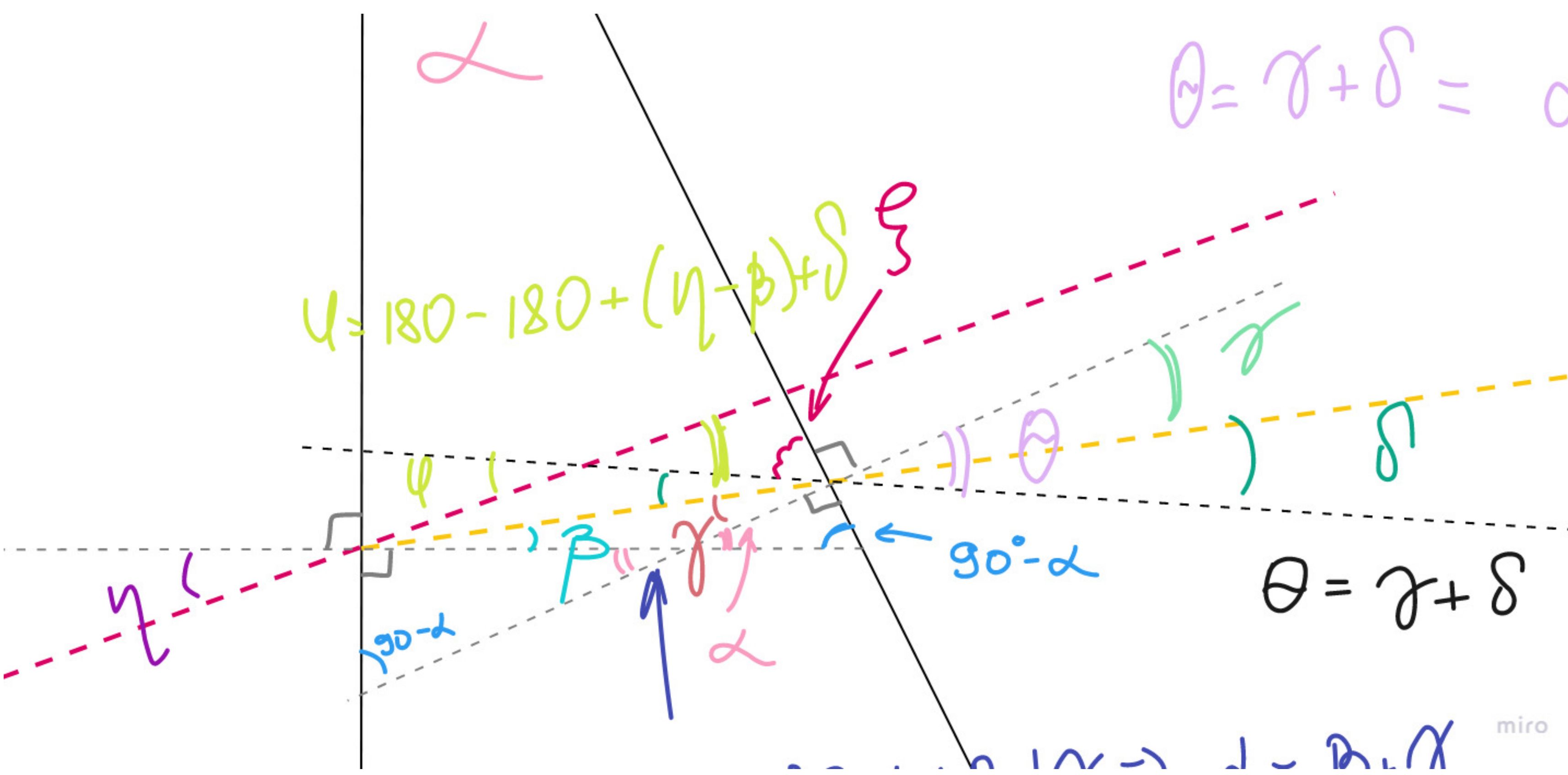
$$= \alpha(n-1)$$

$$\sin\eta = n \sin\beta \Rightarrow \beta = \frac{\eta}{n}$$

$$n \sin\gamma = \sin\theta \Rightarrow \gamma + \delta = n\gamma \Rightarrow \delta = \gamma(n-1)$$



miro



Месы Квантовая Механика

Status	ready
checkbox	✓
class	Physics
due date	@May 26, 2021

Задача 3.1.

В основном состоянии атома водорода электрон (заряд $-e$) имеет волновую функцию $\Psi(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-\frac{r}{a}}$, где a — боровский радиус, r — расстояние от центра атома. Вычислить а) среднее расстояние от центра атома для электрона; б) энергию взаимодействия между ядром и электронным облаком.

В квантовой механике постулируется, что каждой наблюдаемой физ. величине $\mathcal{L}$ сопоставляется лин. оператор $\hat{\mathcal{L}}$

$\hat{x} = x$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}, \quad \psi^* = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}$$

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \langle \psi | \hat{\mathcal{L}} \psi \rangle = \int \psi^* \hat{\mathcal{L}} \psi \, dV ;$$

$$a) \ \langle r \rangle = \langle \psi | \hat{r} \psi \rangle = \int \left(\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}} \right)^2 r \, dV = \left[dV = 4\pi r^2 dr \right] = \int_0^\infty 4 \frac{r^3}{a^3} e^{-2\frac{r}{a}} dr =$$

$$= \frac{4}{a^3} \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{2r}{a}} dr = \lim_{A \to \infty} \left[-\frac{4}{a^3} \cdot \frac{1}{8} a e^{-2r/a} \left(3a^3 + 6a^2 r + 6ar + 4r \right)^3 \Big|_{r=0}^{r=A} \right] =$$

$\lim\limits_{A \to \infty} \dfrac{a^4 A}{e^{\frac{2A}{a}}} = 0$ (т.е. $\forall$ значений в ∞ пределы будут $= 0$)

$$= \frac{4}{a^3} \cdot \frac{1}{8} a \cdot 3a^3 = \frac{12}{8} a = \frac{3}{2} a$$

б)

$$U(\mathbf{r}) = U(r).$$

Рассмотрим движение электрона $(Q = -e)$ в кулоновском поле, создаваемом неподвижным зарядом $Q = +e$. При этом

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Эта модель может быть использована при рассмотрении атома водорода, состоящем из положительно заряженного ядра и электрона. Ядром обычного водорода является протон, который в 1836 раз тяжелее электрона, для тяжелого водорода к протону добавляется еще один или два нейтрона, так что ядро можно считать неподвижным центром силы.

U – пот. энергия взаимодействия ядра с электроном.

Найдем её среднее значение: $\langle U \rangle = \langle \psi | \hat{U} \psi \rangle = -\int \frac{e^{-2\frac{r}{a}}}{\pi a^3} \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 r} dV =$

$$= -\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{2r}{a}}}{\pi a^3} \cancel{4\pi} r^{\cancel{2}} \frac{e^2}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0 \cancel{r}} dr = -\frac{e^2}{\pi a^3 \varepsilon_0} \int_0^\infty r e^{-\frac{2r}{a}} dr =$$

$$= -\frac{e^2}{\pi a^3 \varepsilon_0} \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{a}{4} e^{-\frac{2r}{a}}(a+2r)\Big|_0^A \right] =$$

$$= -\frac{e^2}{\pi a^3 \varepsilon_0}\cdot\frac{a^2}{4} = -\frac{e^2}{4\pi a \varepsilon_0}$$

Задача 3.2.

Состояние частицы описывается волновой функцией: $\Psi(x) = A\exp\left(-\frac{x^2}{a^2}+ikx\right)$.

а) Нормировать волновую функцию.

б) Найти среднее значение координаты и среднее значение импульса.

в) Найти неопределённость координаты и импульса, проверить соотношение неопределённостей для данного состояния.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\psi_n(x,t)|^2 = 1,} \quad P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} dx\,|\psi_n(x,t)|^2. \qquad (49d)$$

Для функции $\psi_n(x, t)$ плотность вероятности *равна* квадрату ее абсолютного значения.

Волновая функция, удовлетворяющая первому условию в (49d), называется *нормированной волновой функцией*, или функцией, *нормированной к единице*. С такой функцией удобно работать, так как квадрат ее абсолютного значения непосредственно дает плотность вероятности.

а) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-\frac{x^2\cdot 4}{2\cdot a^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{a}{2}\right)^2}} dx =$$

$$\boxed{\text{Норм. распр:}\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2\pi}}{\frac{a}{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{a}{2}\right)^2}} dx =$$

$$= A^2 \frac{a}{2}\sqrt{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{a}{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{a}{2}\right)^2}} dx}_{\text{Площадь под графиком } \Phi_{0,\frac{a^2}{4}} = 1} = A^2 \frac{a}{2}\sqrt{2\pi}$$

А хотели, чтобы это равнялось 1. Значит, $A^2 \frac{a}{2}\sqrt{2\pi} = 1$

$$\boxed{A^2 = \frac{2}{a\sqrt{2\pi}}}$$

б) $\langle x \rangle = \langle \Psi | \hat{x} \Psi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\frac{x^2}{a^2} - ikx} \cdot x \cdot A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx} \, dx =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-\frac{2x^2}{a^2}} \cdot x \, dx = A^2 \frac{a}{2}\sqrt{2\pi} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{a}{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{a}{2}\right)^2}} x \cdot dx}_{} = 0$$

По опр это $\mathbb{E}\xi$, где $\xi \in N_{0,\frac{a^2}{4}}$

$[X \in N_{a,\sigma^2} \Rightarrow \mathbb{E}X = a]$

$\langle p_x \rangle = \langle \Psi | \hat{p}_x \Psi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\frac{x^2}{a^2} - ikx} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx} \, dx =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\frac{x^2}{a^2} - ikx} \cdot (-i\hbar) \cdot A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx} \cdot \left[-\frac{2x}{a^2} + ik\right] dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-\frac{2x^2}{a^2}} \left[\frac{2x i\hbar}{a^2} + \hbar k\right] dx = \underbrace{\frac{2A^2 i\hbar}{a^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2x^2}{a^2}} \cdot x \, dx}_{} + A^2 \hbar k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx =$$

Можно привести к $\mathbb{E}\xi$, $\xi \in N_{0,\frac{a^2}{4}}$

т.е. $= 0$

$$= A^2 \hbar k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx =$$

$$= A^2 \hbar k \frac{a}{2} \sqrt{2\pi} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{a}{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{a}{2}\right)^2}} dx}_{=1} = A^2 \hbar k \frac{a}{2} \sqrt{2\pi} = \hbar k$$

$= 1$ по пункту а)

в) $\Delta X = \sqrt{\mathbb{D}X} = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$

— среднее значение оператора величины X в состоянии ψ системы, и

$\Delta_\psi X = \sqrt{\langle X^2 \rangle_\psi - \langle X \rangle_\psi^2}$

$$\circ \langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\frac{x^2}{a^2} - ikx} \cdot x^2 \cdot A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-\frac{2x^2}{a^2}} \cdot x^2 dx$$

$$= A^2 \frac{a}{2}\sqrt{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{a}{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{a}{2}\right)^2}} x^2 dx}_{= \mathbb{E}\xi^2, \ \xi \in N_{0, \frac{a^2}{4}}} = = A^2 \sqrt{2\pi} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

$\mathbb{D}\xi = \frac{a^2}{4} \quad \mathbb{E}\xi = 0 \Rightarrow \mathbb{E}\xi^2 = \frac{a^2}{4}$

$[\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2]$

$$\Delta X = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

miro

$\Delta p_x = \sqrt{\mathbb{D}\, p_x} = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$

$\circ \langle p_x \rangle^2 = \hbar^2 k^2$

$$\langle p_x^2 \rangle = \langle \Psi | \hat{p}_x \cdot \hat{p}_x \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\frac{x^2}{a^2} - ikx} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx} dx =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx} \cdot \left(-\frac{2x}{a^2} + ik\right)\right] = \left(-\frac{2x}{a^2} + ik\right)^2 \cdot A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx} - A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx} \cdot \frac{2}{a^2} =$$

$$= A e^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx} \left(\frac{4x^2}{a^4} - \frac{4xik}{a^2} - k^2 - \frac{2}{a^2}\right)$$

miro

$$= -\hbar^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-\frac{2x^2}{a^2}} \frac{4x^2}{a^4} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-\frac{2x^2}{a^2}} \frac{4xik}{a^2} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\left(k^2 + \frac{2}{a^2}\right) e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx\right] =$$

$$= -\frac{4A^2\hbar^2}{a^4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2x^2}{a^2}} x^2 dx + \frac{A^2 4ik}{a^2} \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2x^2}{a^2}} x\, dx + \hbar^2 A^2 \left(k^2 + \frac{2}{a^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2x^2}{a^2}} dx =$$

$$= -\frac{4 \overbrace{A^2 \hbar^2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2\pi}}^{=1}}{a^4} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{a}{2}\right)^2}}}{\frac{a}{2}\sqrt{2\pi}} dx}_{\mathbb{E}\xi^2, \ \xi \in N_{0, \frac{a^2}{4}} \Rightarrow \mathbb{E}\xi^2 = \frac{a^2}{4}} + \frac{2A^2 ik \hbar^2 \sqrt{2\pi}}{a} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{a}{2}\right)^2}}}{\frac{a}{2}\sqrt{2\pi}} dx}_{\mathbb{E}\xi = 0} + \overbrace{A^2\left(k^2 + \frac{2}{a^2}\right)\hbar^2 \frac{a}{2}\sqrt{2\pi}}^{=1} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{a}{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{a}{2}\right)^2}} dx}_{=1} =$$

miro

$$= -\frac{4\hbar^2}{a^4}\cdot\frac{a^2}{4} + \hbar^2k^2 + \frac{2}{a^2}\hbar^2 = \frac{\hbar^2}{a^2} + \hbar^2k^2$$

$$\Delta p_x = \sqrt{\frac{\hbar^2}{a^2} + \hbar^2k^2 - \hbar^2k^2} = \frac{\hbar}{a}$$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \frac{a}{2}\cdot\frac{\hbar}{a} = \frac{\hbar}{2}$$

miro