hw 8

8.2. Вычислить момент k-го порядка для случайной величины, имеющей:
а) равномерное распределение;
б) гамма-распределение.

$$u_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a, b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$X \in U_{a,b}$

$$\mathbb{E}X = \int_a^b \frac{t}{b-a}\,dt = \frac{t^2}{2}\frac{1}{(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_a^b \frac{t^2}{b-a}\,dt = \frac{t^3}{3}\frac{1}{(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

$$\mathbb{E}X^k = \int_a^b \frac{t^k}{b-a}\,dt = \frac{t^{k+1}}{(k+1)}\frac{1}{(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$$

$$\Gamma_{\alpha,\lambda}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\lambda-1}\alpha^{\lambda}e^{-\alpha t}}{\Gamma(\lambda)} & t > 0 \\ 0\ , & t \le 0 \end{cases}$$

$X \in \Gamma_{\alpha,\lambda}$

$$\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\lambda}\alpha^{\lambda}e^{-\alpha t}}{\Gamma(\lambda)}\,dt \overset{\text{из прошл. дз.}}{=} \frac{\lambda}{\alpha}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\lambda+1}\alpha^{\lambda}e^{-\alpha t}}{\Gamma(\lambda)}\,dt \overset{\text{Тоже}}{=} \frac{\lambda(\lambda+1)}{\alpha^2}$$

$$\mathbb{E}X^3 = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\lambda+2}\alpha^{\lambda}e^{-\alpha t}}{\Gamma(\lambda)}\,dt = \frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} t^{\lambda+2}e^{-\alpha t}\,dt =$$

$$= \left[\alpha t = u\right] = \frac{\alpha^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\lambda+2}}{\alpha^{\lambda+2}}e^{-u}\,du = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\cdot\alpha^3}\cdot\Gamma(\lambda+3) =$$

$dt = \frac{du}{\alpha}$

$t = \frac{u}{\alpha}$

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} t^{\lambda-1}e^{-t}\,dt$$

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$

$$= \frac{\lambda\cdot(\lambda+2)(\lambda+1)\cdot\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda)\ \alpha^3} = \frac{(\lambda+2)!}{(\lambda-1)!}\cdot\frac{1}{\alpha^3}$$

$$\mathbb{E}X^k = \frac{(\lambda+k-1)!}{(\lambda-1)!}\cdot\frac{1}{\alpha^k}$$

8.4. Найти коэффициент корреляции $\rho(X, X+Y)$, где X и Y независимы, одинаково распределены и имеют конечную ненулевую дисперсию.

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X\,\mathbb{D}Y}}$$

$$\rho(X,X+Y) = \frac{Cov(X+Y,X)}{\sqrt{\mathbb{D}X\cdot(\mathbb{D}X+\mathbb{D}Y)}} = \frac{\underbrace{Cov(X,X)}_{=\mathbb{D}X} + \underbrace{Cov(X,Y)}_{\text{незав.}=0}}{\sqrt{(\mathbb{D}X)^2+\mathbb{D}X\,\mathbb{D}Y}} = \frac{\mathbb{D}X}{\sqrt{2(\mathbb{D}X)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

т.к. незав.

$\mathbb{D}Y = \mathbb{D}X$ т.к. они один. распр.

1) X, Y - незав. $Cov(X,Y)=0$

2) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

3) $Cov(aX+bZ, Y) = a\cdot Cov(X,Y) + b\,Cov(Z,Y)$

4) $Cov(X,X) = \mathbb{D}X \geq 0$

8.6. Точка произвольным образом бросается в круг единичного радиуса. Найти коэффициент корреляции между ее декартовыми координатами.

$X^2+Y^2=1 \qquad \rho(X,Y) - ?$

$$f_{X,Y}(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & t\in[-1,1] \\ & s\in[-\sqrt{1-t^2};\sqrt{1-t^2}] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\mathbb{E}X = 0 \quad \mathbb{E}Y = 0 \qquad Cov(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$

$$\mathbb{E}XY = \int_{-1}^{1}dt\int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} t\cdot s\cdot\frac{1}{\pi}\,ds = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-t^2}{2}+\frac{1-t^2}{2}\right)t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(t-t^3)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}t^2\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{\pi}\frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y}{\sqrt{\mathbb{D}X \cdot \mathbb{D}Y}} = 0$$

8.9. Вычислить коэффициент корреляции $\rho(X,Y)$ в условиях задачи 5.10.

5.10. Дискретное совместное распределение случайного вектора (X, Y) задается таблицей:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	0,2	0,1	0,0
1	0,4	0,0	0,3

$$\mathbb{E}X = -1 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}7 = 0{,}4$$

$$\mathbb{E}Y = -1 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}3 = -0{,}3$$

miro

$$\mathbb{E}XY = \sum_{ij} x_i y_j \, P(X = x_i, Y = y_j) = (-1)(-1) \cdot 0{,}2 - 1 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 =$$

$\mathbf{E}X^k = \sum_i y_i^k \mathbf{P}(X = y_i)$

$$= 0{,}2 - 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}1$$

$$\mathbb{E}X^2 = 1 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}7 = \underline{1} \qquad \mathbb{E}Y^2 = 0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}9$$

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$$

$$\mathbb{D}Y = 0{,}9 - 0{,}09 = 0{,}81$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y}{\sqrt{\mathbb{D}X \, \mathbb{D}Y}} = \frac{0{,}1 + 0{,}12}{\sqrt{0{,}84 \cdot 0{,}81}} \approx \frac{0{,}22}{0{,}83} \approx 0{,}265$$

miro