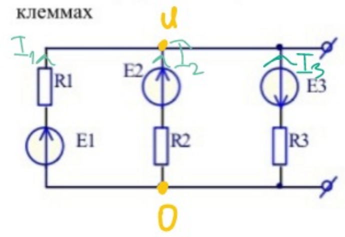
T1 prep

1. E1=10В, E2=15В, E3=8ВБ R1=6Ω, R2=3Ω, R3=2Ω. Определить напряжение на выходных клеммах



По методу узл. потенциалов:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$\frac{U + E_1}{R_1} + \frac{U + E_2}{R_2} + \frac{U - E_3}{R_3} = 0$$

$$U\left(G_1 + G_2 + G_3\right) = E_3G_3 - E_2G_2 - E_1G_1$$

$$U = \frac{E_3G_3 - E_2G_2 - E_1G_1}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{8\cdot\frac{1}{2} - 15\cdot\frac{1}{3} - 10\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}} = -2\frac{2}{3}\text{ В}$$

$$\begin{cases} I_{11}\left(2R + 3R + R\right) - I_{22}R - I_{33}\cdot 3R = 0 \\ I_{22}\left(R + R_н\right) - I_{11}R = E_2 \\ I_{33}\cdot 3R - I_{11}\,3R = E_1 - E_2 \end{cases}$$

System of equations:

$$\begin{cases} 6R\,x_1 + (-R)\,x_2 + (-3R)\,x_3 = 0 \\ -R\,x_1 + (R+R_1)\,x_2 + 0\,x_3 = E_2 \\ -3R\,x_1 + 0\,x_2 + 3R\,x_3 = E_1 - E_2 \end{cases}$$

Answer:

$$x_1 = \frac{E_1R + E_1R_1 - E_2R_1}{2R^2 + 3\cdot(RR_1)}$$

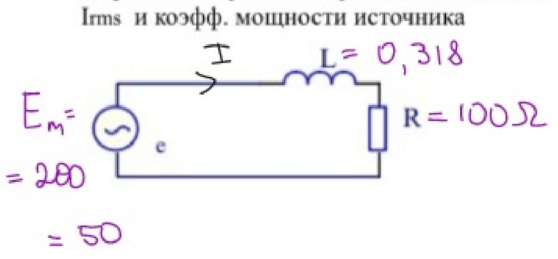
$$x_2 = \frac{E_1 + 2E_2}{2R + 3R_1}$$

$$x_3 = \frac{1.\bar{6}67\cdot(E_1R) - 0.\bar{6}67\cdot(E_2R) + 2\cdot(E_1R_1) - 2\cdot(E_2R_1)}{2R^2 + 3\cdot(RR_1)}$$

$$I_{22} = \frac{E_1 + 2E_2}{2R + 3R_н}$$

$$P = I^2R = \left[\frac{E_1 + 2E_2}{2R + 3R_н}\right]^2 \cdot R_н$$

2. R=100 Ω, L=0,318Гн, f=50Гц, Em=200В.
Определить среднеквадратичный ток цепи Irms и коэфф. мощности источника



$$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$P_н = I_{rms} \cdot U_{rms} \cdot \cos\varphi$$ – акт. мощность

$$S_u = I_{rms} \cdot U_{rms}$$

$$P = I_{rms}^2 \cdot R$$

$\omega = 2\pi \cdot f$ – угловая частота

$$\omega = 314$$

$$\dot{I}(R + j\omega L) = \dot{E}$$

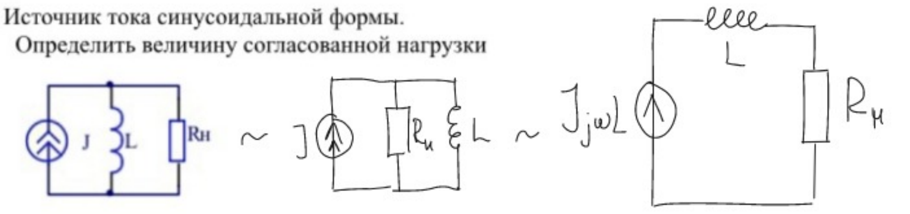
$Z = R + j\omega L$ – компл. число $\Rightarrow Z = \underbrace{\overset{141,3}{\rho} \cdot \overset{0,7}{\cos\varphi}}_{=R=100} + \underbrace{j \cdot \rho \cdot \overset{0,71}{\sin\varphi}}_{j\omega L}$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{100^2 + 314^2 \cdot 0,318^2} \approx 141,3$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} \Rightarrow |\dot{I}| = \frac{|\dot{E}|}{|Z|}$$

$$I_m \cdot 141,3 = E_m = 200 \Rightarrow I_m = \frac{200}{141,3} \approx 1,42 \Rightarrow I_{rms} = \frac{1,41}{\sqrt{2}} \approx 1\ A$$

3. Источник тока синусоидальной формы.
Определить величину согласованной нагрузки



$R_н : P_н = max$

$$P_н = I_{rms}^2 \cdot R_н = \frac{I_m^2}{2} R_н$$

$$Z = (R_н + j\omega L)$$

$$I_{rms} = \frac{J \cdot R_н}{\sqrt{2}\sqrt{R_н^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\dot{I} = J \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} \Rightarrow |\dot{I}| = \frac{J\omega L}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R_н^2}}$$

$$P_н = \frac{J^2 \omega^2 L^2 R_н}{2(\omega^2 L^2 + R_н^2)}$$

$$\frac{dP_н}{dR_н} = \frac{J^2\omega^2 L^2}{2} \cdot \frac{(\omega^2 L^2 - R_н^2)}{(\omega^2 L^2 + R_н^2)^2} = 0 \Rightarrow R_н = \omega L$$

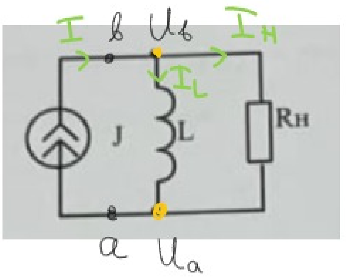
$$\dot I = \dot I_L + \dot I_H = \frac{\dot U_{ba}}{j\omega L + R_н}$$

$$\dot I_L = \frac{U_b - U_a}{j\omega L}, \quad \dot I_H = \frac{U_b - U_a}{R_н}$$

$$\dot I_н = \frac{\dot U_{ba}}{R_н}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot I_н}{\dot I} = \frac{\frac{1}{R_н}}{\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_н}} = \frac{1}{\frac{R_н}{j\omega L} + 1} = \frac{j\omega L}{R_н + j\omega L}$$

$$\dot I = J \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$



$$\dot I_н = \dot I \cdot \frac{j\omega L}{R_н + j\omega L} = \dot I \cdot \frac{\omega^2 L^2 + jR_н \omega L}{R_н^2 + \omega^2 L^2}$$

$$|\dot I| = J$$

$$|\dot I_{н\,rms}| = \frac{J \cdot \sqrt{\omega^4 L^4 + R_н^2 \omega^2 L^2}}{\sqrt{2} \cdot R_н^2 + \omega^2 L^2} = \frac{J \omega L}{\sqrt{2}\sqrt{R_н^2 + \omega^2 L^2}}$$

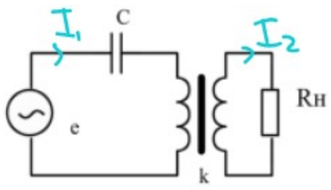
$$P_н = \frac{J^2 \omega^2 L^2 R_н}{2(R_н^2 + \omega^2 L^2)} \qquad P_н' = \frac{J^2 \omega^2 L^2}{2} \cdot \frac{(R_н^2 + \omega^2 L^2) - 2R_н^2}{(R_н^2 + \omega^2 L^2)^2} = 0$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u(x)' \cdot v(x) - v(x)' \cdot u(x)}{v^2(x)}$$

$$R_н = \omega L$$

2.

Определить величину сопротивления нагрузки, при которой мощность передаваемая в нагрузку от источника будет максимальна. Источник синусоидальный. Привести полное решение.



$$\begin{cases} \left(E - \frac{\dot I_1}{j\omega C}\right) \dot I_1 = \dot I_2^2 R_н \\ \dot I_1 = k \dot I_2 \end{cases} \Rightarrow \left(E - \frac{k \dot I_2}{j\omega C}\right) \cdot k \dot I_2 = \dot I_2^2 R_н$$

$$Ek - \frac{k^2 \dot I_2}{j\omega C} = \dot I_2 R_н$$

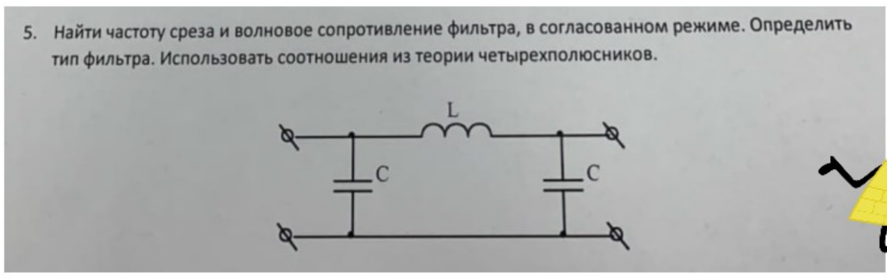
$$\dot I_2 = \frac{Ek}{\frac{k^2}{j\omega C} + R_н} = \frac{Ek\left(R_н + \frac{jk^2}{\omega C}\right)}{R_н^2 + \frac{k^4}{\omega^2 C^2}}$$

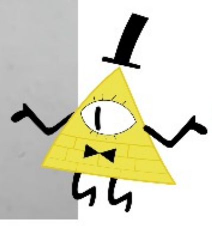
$$|\dot{I}_2| = \frac{Ek\cdot\sqrt{R_н^2 + \frac{k^4}{\omega C}}}{R_н^2 + \frac{k^4}{\omega^2 C^2}}$$

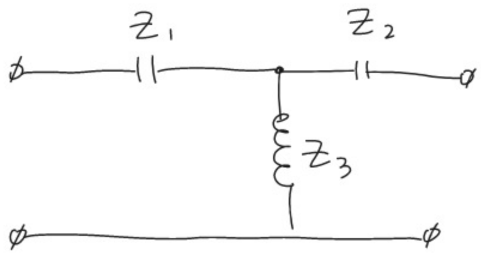
$$P_н = I_{rms}^2 \cdot R_н = \frac{E^2k^2\cdot R_н}{\left(R_н^2 + \frac{k^4}{\omega^2C^2}\right)\cdot 2}$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u(x)'\cdot v(x) - v(x)'\cdot u(x)}{v^2(x)}$$

$$P_н' = \frac{E^2k^2}{2}\,\frac{R_н^2 + \frac{k^4}{\omega^2C^2} - 2R_н^2}{\left(R_н^2 + \frac{k^4}{\omega^2C^2}\right)^2} = 0 \Rightarrow R_н = \frac{k^2}{\omega C}$$


5. Найти частоту среза и волновое сопротивление фильтра, в согласованном режиме. Определить тип фильтра. Использовать соотношения из теории четырехполюсников.





Формулы с семинара:

$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2$

$\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2$

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}$$

$$B = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}$$

$$C = \frac{1}{Z_3}$$

$$D = 1 + \frac{Z_2}{Z_3}$$

$$Z_1 = Z_2 = \frac{X_C X_L}{2X_C + X_L} \qquad Z_3 = \frac{X_C^2}{2X_C + X_L}$$

$$A = 1 + \frac{X_C X_L}{X_C^2} = 1 + \frac{X_L}{X_C}$$

$$B = \frac{2X_C X_L}{X_L + 2X_C} + \frac{X_C^2\cdot X_L^2}{(X_L+2X_C)^2}\cdot\frac{(X_L+2X_C)}{X_C^2} = \frac{2X_C X_L + X_L^2}{X_L + 2X_C} = X_L$$

$$A = D = ch\gamma = \cos\alpha\cdot\cos\beta + j\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$C = \frac{X_L + 2X_C}{X_C^2} \qquad D = 1 + \frac{X_L}{X_C}$$

$A = 1 + j\omega L\cdot j\omega C = 1 - \omega^2 LC$ – действ. число $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \omega^2 LC = \cos\beta$

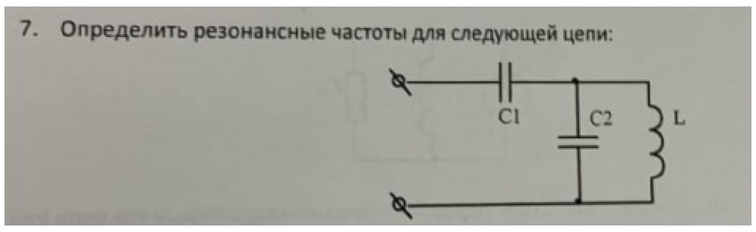
$$-1 \le 1 - \omega^2 LC \le 1$$

$0 \geqslant \omega \geqslant \sqrt{\frac{2}{LC}}$ – частота среза

Волновое сопр: $z_c = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{X_L X_C}{X_L + 2X_C}} = \sqrt{\frac{j\omega L\cdot\left(-\frac{1}{\omega^2 C}\right)}{j\omega L - j\frac{2}{\omega C}}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2-\omega^2 LC}}$

[0, a] - нижних частот
[a, b] - полосовой
[b, +∞) - верхних частот

Фильтр низких частот



$$Z = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{\frac{L}{C_2}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{L}{C_2} \cdot \frac{j\omega C_2}{\omega^2 L C_2 + 1} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{j\omega L}{(\omega^2 L C_2 + 1)}$$

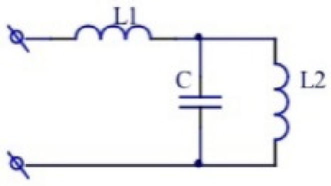
$$= \frac{\omega^2 L C_2 + 1 - \omega^2 L C_1}{j\omega C_1(\omega^2 L C_2 + 1)} = j\,\frac{\omega^2 L C_1 - \omega^2 L C_2 - 1}{\omega C_1(\omega^2 L C_2 + 1)}$$

$$\omega_{рн} = \pm\sqrt{\frac{1}{L(C_1 - C_2)}}$$

$$\omega^3 L C_1 C_2 = -1$$

$$\omega_{рт} = \sqrt[3]{\frac{-1}{L C_1 C_2}} \quad ??$$

5. Определить резонансные частоты.



$$Z = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C} =$$

$$= j\left(\omega L_1 + \frac{\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C}\right)$$

$$\mathrm{Im}\{z\} = 0 \Rightarrow \frac{\omega L_1 - \omega^3 L_1 L_2 C + \omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C} = 0$$

Резонанс напряжений:

$$L_1 - \omega^2 L_1 L_2 C + L_2 = 0$$

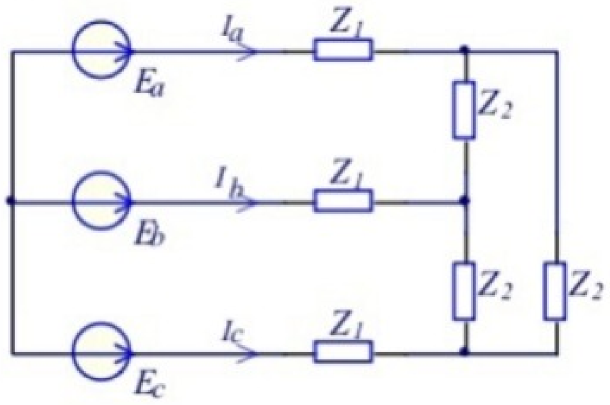
$$\omega_{рн} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$$

Резонанс токов:

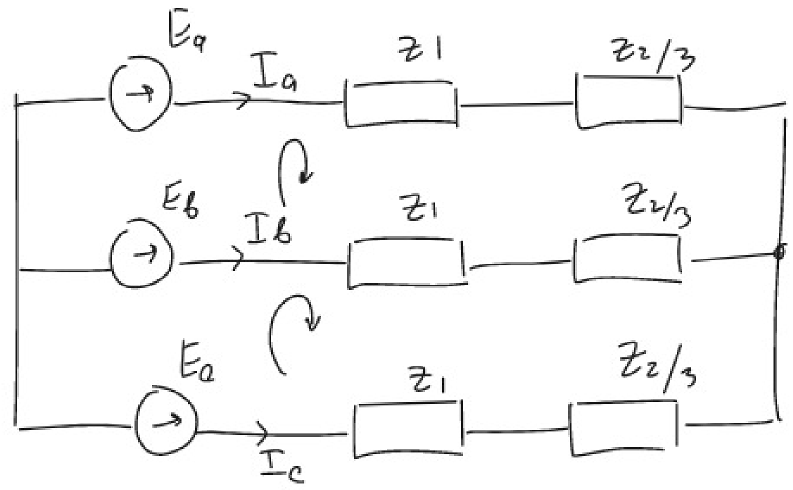
$$1 - \omega^2 L_2 C = 0$$

$$\omega_{рт} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}$$

4. Определить фазные токи в цепи.



$\rightarrow$



$$\begin{cases} \dot I_a\left(z_1+\frac{z_2}{3}\right)-\dot I_b\left(z_1+\frac{z_2}{3}\right)=\dot E_a-\dot E_b \\ \dot I_b\left(z_1+\frac{z_2}{3}\right)-I_c\left(z_1+\frac{z_2}{3}\right)=\dot E_b-\dot E_c \\ \dot I_a+\dot I_b+\dot I_c=0 \\ E_a+E_b+E_c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot I_a=\dfrac{E_a}{z_1+\frac{z_2}{3}} \\ \dot I_b=\dfrac{E_b}{z_1+\frac{z_2}{3}} \\ \dot I_c=\dfrac{E_c}{z_1+\frac{z_2}{3}} \end{cases} (*)$$

(*): $\dot I_a\left(z_1+\frac{z_2}{3}\right)+2\dot I_b\left(z_1+\frac{z_2}{3}\right)-\dot I_c\left(z_1+\frac{z_2}{3}\right)=2E_b-E_a-E_c$

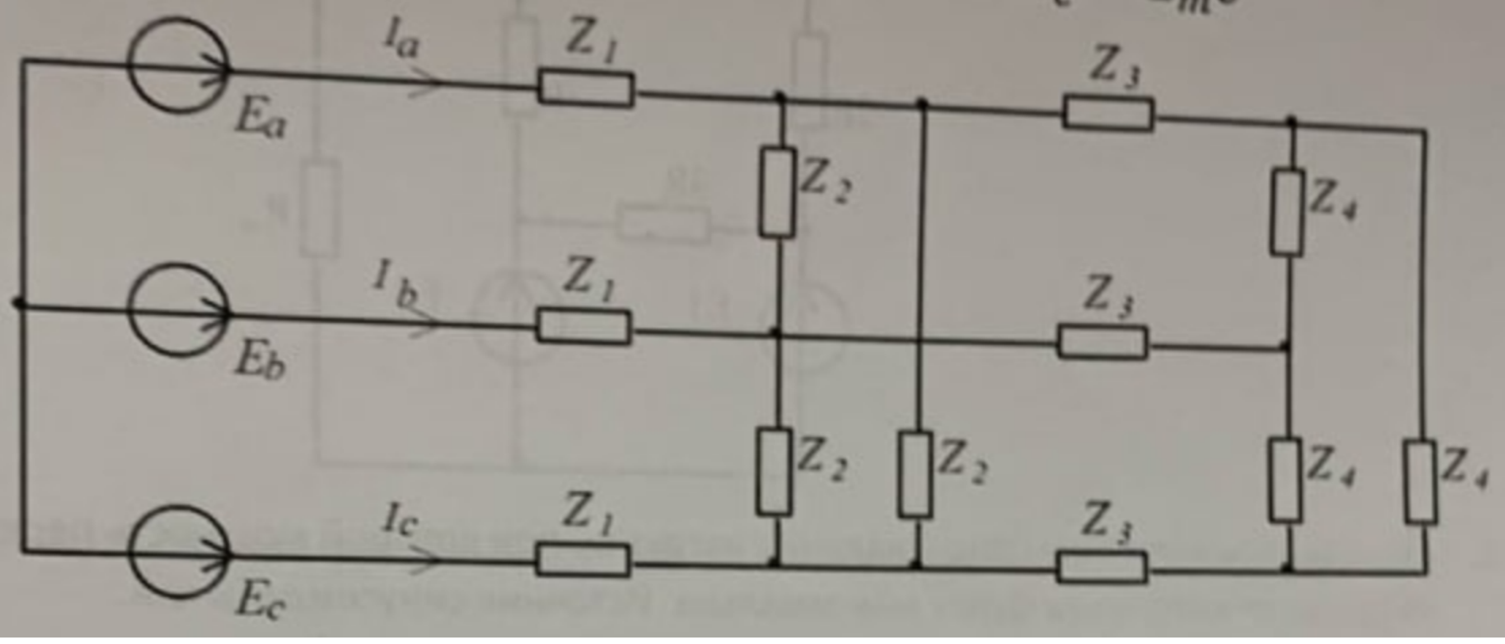
$\left(z_1+\frac{z_2}{3}\right)\left(\dot I_a+2\dot I_b-I_c\right)=-I_b\left(z_1+\frac{z_2}{3}\right)=E_b$

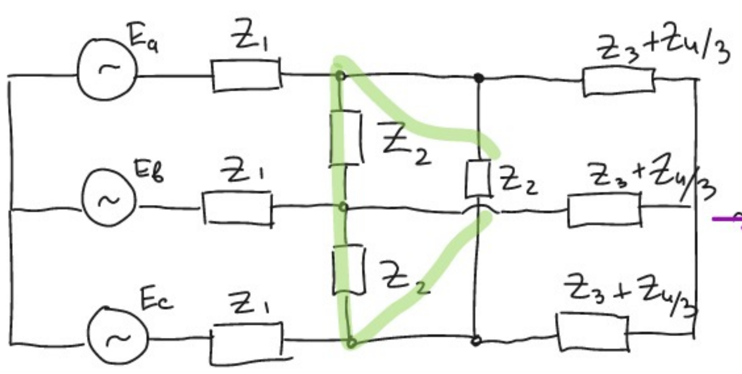
$I_c=-(I_a+I_b)$

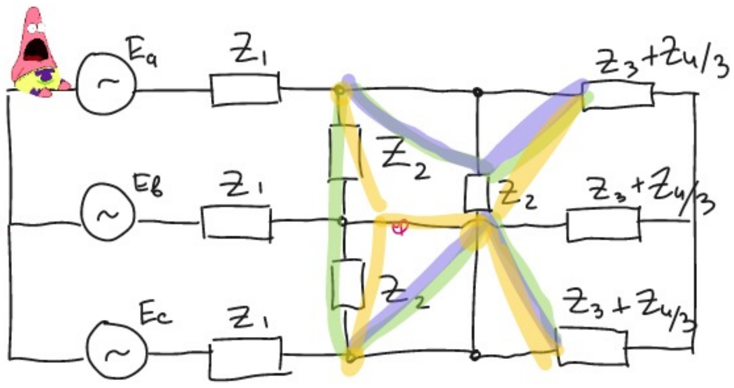
miro

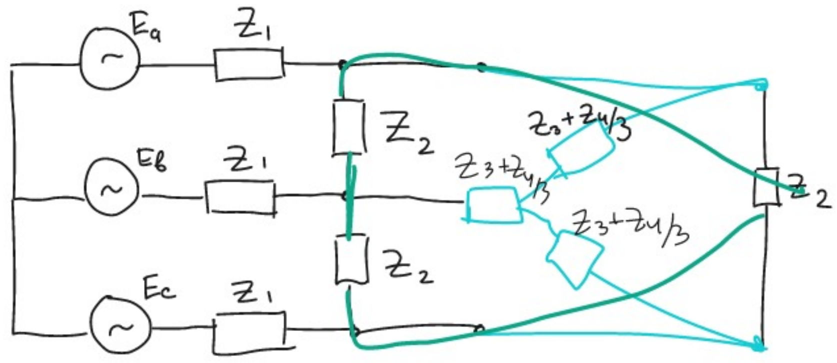
6. Определить токи всех трех фаз, если

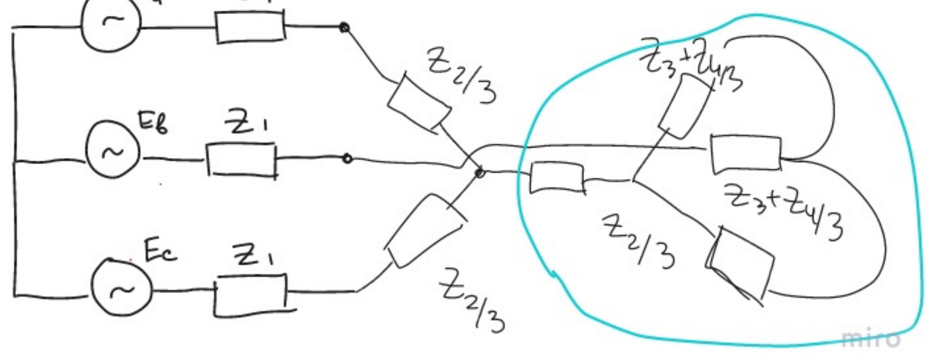
$\dot E_a = E_m$, $\dot E_b = E_m e^{j120°}$, $\dot E_c = E_m e^{j240°}$









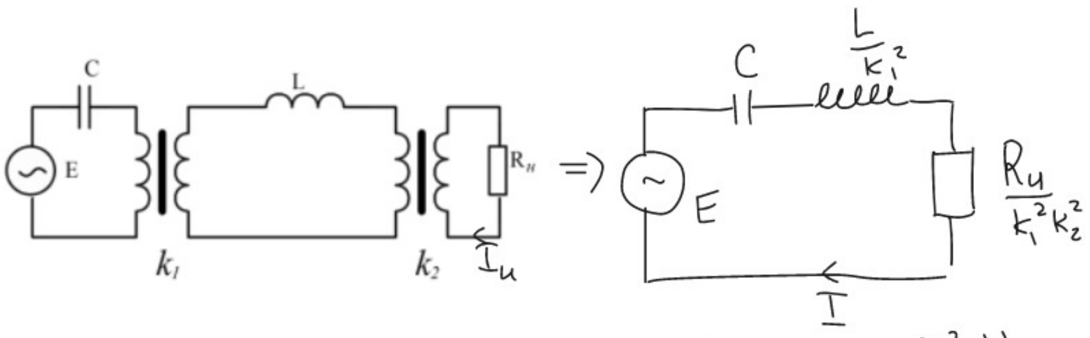


1: $Z_a = Z_1 + Z_2/3$ $\quad \dot{I}_a = \frac{\dot{E}_a}{Z_a} = \frac{\dot{E}_a}{Z_1 + Z_2/3}$

2: $Z_1 + Z_3 + Z_4/3 \parallel Z_3 + \frac{Z_4}{3} + Z_3 + \frac{Z_4}{3} + \frac{Z_2}{3}$

3: $Z_1 + Z_2/3$

Определить частоту при которой коэффициент передачи цепи по напряжению. будет максимальным. Источник синусоидальный. Трансформаторы считать идеальными. $E = 50V$ $C = 100nF, L = 10uH, Rн = 5, k1 = 0.2, k2 = 0.5$. Определить ток нагрузки в этом режиме.



$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{\dot{E} k_1^2 k_2^2}{R_н + j\left(\omega L k_2^2 - \frac{k_1^2 k_2^2}{\omega C}\right)} = \frac{\dot{E} k_1^2 k_1^2 \left(R_н - j\left(\omega L k_2^2 - \frac{k_1^2 k^2}{\omega C}\right)\right)}{R_н^2 + \left(\omega L k_2^2 - \frac{k_1^2 k_2^2}{\omega C}\right)^2}$$

Схемы эквивалентные ⇒ Мощности, выделяющиеся на резисторах равные

$$P = I_{rms}^2 \cdot \frac{R_Н}{k_1^2 k_2^2} = \frac{E^2 k_1^2 k_1^2 \; R_н}{2\left[R_н^2 + \left(\omega L k_2^2 - \frac{k_1^2 k_2^2}{\omega C}\right)^2\right]}$$

$$I_н = \sqrt{\frac{P}{R_н}} = \frac{E k_1 k_1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{R_н^2 + \left(\omega L k_2^2 - \frac{k_1^2 k_2^2}{\omega C}\right)^2}}$$

$$U_н = I_н \cdot R_н = \frac{E k_1 k_2 R_н}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{R_н^2 + \left(\omega L k_2^2 - \frac{k_1^2 k_2^2}{\omega C}\right)^2}}$$

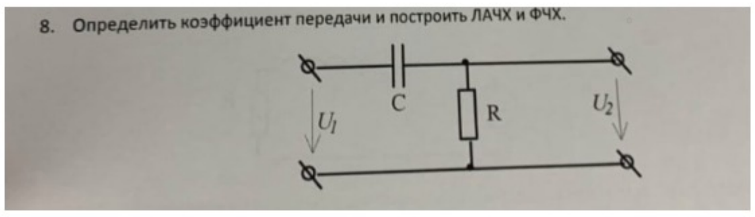
$$k = \frac{U_3}{U_1} = \frac{U_н}{E} = \frac{k_1 k_2 R_н}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{R_н^2 + \left(\omega L k_2^2 - \frac{k_1^2 k_2^2}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\frac{dk}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega = 200000$$

$$I_н \Big|_{\omega = 200000} = 1\,A$$


```
C = 100*10^-9
L = 10*10^-6
Rn = 5
k1 = 0.2
k2 = 0.5
w = 200000
# var('w')
# assume(w, 'real')

I = (k1*k2*E)/(sqrt(Rn**2 + (w*L*k2**2 - (k1^2*k2^2)/(w*C))^2))
print(I)
# solve(diff(k, w) == 0, [w])
```



$$1.\ K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{\frac{1}{i\omega C}+R} = \frac{R^2\omega^2C^2}{1+R^2\omega^2C^2} + i\,\frac{C\omega R}{1+R^2\omega^2C^2}$$

$$= \frac{C\omega R}{\sqrt{1+C^2R^2\omega^2}}\, e^{j\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{C\omega R}\right)}$$

$$A(\omega) = 20\log(|K|) = 20\log\left(\frac{C\omega R}{\sqrt{1+C^2R^2\omega^2}}\right)$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{C\omega R}\right)$$