Формальная арифметика Пеано

Определение 20.1.

Сигнатура $\Sigma_0 = \langle <^2, +^2, *^2, S^1, 0 \rangle$ является **сигнатурой арифметики Пеано**. Введем обозначения:

$T(\Sigma_0)$ - множество термов Σ_0.

$F(\Sigma_0)$ - множество формул Σ_0.

$S(\Sigma_0)$ - множество предложений Σ_0.

$\{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ - множество переменных.

Определение 20.2.

Гёделевской нумерацией термов и формул сигнатуры Σ_0 называется:

1) $\gamma(0) = c(0, 1)$

$\gamma(v_i) = c(1, i)$, v_i - переменная;

2) $\gamma(S(t)) = c(2, \gamma(t))$;

3) $\gamma(t + q) = c(3, c(\gamma(t), \gamma(q)))$;

4) $\gamma(t * q) = c(4, c(\gamma(t), \gamma(q)))$;

5) $\gamma(t = q) = c(5, c(\gamma(t), \gamma(q)))$;

6) $\gamma(t < q) = c(6, c(\gamma(t), \gamma(q)))$;

7) $\gamma(\varphi \,\&\, \psi) = c(7, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$;

8) $\gamma(\varphi \vee \psi) = c(8, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$;

9) $\gamma(\varphi \to \psi) = c(9, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$;

10) $\gamma(\neg\varphi) = c(10, \gamma(\varphi))$;

11) $\gamma(\exists v_i \varphi) = c(11, c(i, \gamma(\varphi)))$;

12) $\gamma(\forall v_i \varphi) = c(12, c(i, \gamma(\varphi)))$.

Предложение 20.3.

Множества

$\gamma(T(\Sigma_0)) = \{\gamma(t) \mid t \in T(\Sigma_0)\}$

$\gamma(F(\Sigma_0)) = \{\gamma(\varphi) \mid \varphi \in F(\Sigma_0)\}$

$\gamma(S(\Sigma_0)) = \{\gamma(\varphi) \mid \varphi \in S(\Sigma_0)\}$

являются **прм**.

Без доказательства.

так как у нас есть уникальные идентификкаторы, но потом ещё нужно провреять

Определение 20.4.

Пусть $X \subseteq T(\Sigma_0) \cup F(\Sigma_0)$. Множество X является **разрешимым**, если $\gamma(X) = \{\gamma(y) \mid y \in X\}$ - **рм**. Множество X является **перечислимым**, если $\gamma(X)$ - **рпм**.

то есть произвольное множество термов и формул разрешимо, если множество его номеров рекурсивно

Теорема 20.5.

Для $\forall n \; \forall a_0 \dots a_n \in \mathbb{N} \; \exists x = p_0^{a_0} \dots p_n^{a_n}$ такие, что $ex(0, x) = a_0, \dots, ex(n, x) = a_n$.

Доказательство: упражнение.

Определение 20.6.

Обозначим $\Pi_{\Sigma_0} = \{\varphi \in F(\Sigma_0) \mid \varphi \; - \;$ т.и.$\}$.

Предложение 20.7.

Π_{Σ_0} перечислимо.

Доказательство:

Определим функцию:

$$f(x,n,y) = \begin{cases} y, \text{ если } ex(n,x) = y \text{ и } \gamma^{-1}(ex(0,x)),\ldots,\gamma^{-1}(ex(n,x)) - \\ \text{последовательность формул из } F(\Sigma_0), \text{ являющаяся док-вом;} \\ \gamma(v_0 = v_0), \text{ иначе.} \end{cases}$$

Лемма 20.8.

f - **орф**.

Без доказательства.

На основе леммы выше мы можем сказать, что $\rho f = \Pi_{\Sigma_0}$.

Данный факт тоже без доказательства.

Предложение 20.7. доказано.

Следствие 20.9.

Множество $\{\varphi \in S(\Sigma_0) \mid \varphi \text{ — т.и.}\}$ перечислимо.

Без доказательства.

Предложение 20.10.

1) Пусть $A \subseteq F(\Sigma_0)$, A - конечно, либо разрешимо. Тогда множество всех следствий $A' = \{\varphi \in F(\Sigma_0) \mid A \rhd \varphi\}$ - перечислимо.

2) Пусть $A \subseteq S(\Sigma_0)$, A - конечно, либо разрешимо. Тогда множество $A'' = \{\varphi \in S(\Sigma_0) \mid A \rhd \varphi\}$ - перечислимо.

Без доказательства.

Теорема 20.11.

Пусть теория $T \subseteq S(\Sigma_0)$, T - полная перечислимая теория. Тогда T разрешима.

Без доказательства.

Определение 20.12. Формальной арифметикой Пеано называется следующая система аксиом A_0:

аксиомы натуральных чисел

1. $\forall v_0 \neg(s(v_0) = 0);$
2. $\forall v_0 \forall v_1\ ((s(v_0) = s(v_1)) \to (v_0 = v_1));$
3. $\forall v_0 (v_0 + 0 = v_0);$
4. $\forall v_0 \forall v_1 \big(v_0 + s(v_1) = s(v_0 + v_1)\big);$
5. $\forall v_0 (v_0 * 0 = 0);$
6. $\forall v_0 \forall v_1 (v_0 * s(v_1) = (v_0 * v_1) + v_0);$
7. $\forall v_0 \neg(v_0 < 0);$
8. $\forall v_0 \forall v_1 ((v_0 < s(v_1)) \to ((v_0 < v_1) \vee (v_0 = v_1)));$
9. $\forall v_0 \forall v_1\ (((v_0 < v_1) \vee (v_0 = v_1)) \to (v_0 < s(v_1)));$
10. $\forall v_0 \forall v_1 \Big(\neg (v_0 = v_1) \to \big((v_0 < v_1) \vee (v_1 < v_0)\big)\Big).$

Определение 20.13.

Введем следующие обозначения:

$\underline{0} = 0$

$\underline{1} = S(\underline{0})$

$\ldots\ldots$

$\underline{n+1} = S(\underline{n}) = \underbrace{S(\ldots S}_{n+1 \text{ раз}}(\underline{0})\ldots)$

Определение 20.14.

Пусть $f : \mathbb{N}^k \to N$. Говорят, что f **представима** в A_0, если существует формула $\varphi(v_0, \ldots, v_k) \in F(\Sigma_0)$ такая, что для $\forall n_0 \ldots n_k \in \mathbb{N}$ выполняется:

1) $f(n_0, \ldots, n_{k-1}) = n_k \Rightarrow A_0 \vdash \varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_k});$

2) $f(n_0, \ldots, n_{k-1}) \neq n_k \Rightarrow A_0 \vdash \neg\varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_k}).$

f(x, y) = x + y

fi(x, y, z) = ∃x∃y∃z(x + y = z)

Теорема 20.11. Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$. Если T – полная, перечислимая теория, то T – разрешима.

Доказательство. Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$ – полная, перечислимая теория. Рассмотрим 2 случая.

1) Пусть T – противоречива. Тогда $T = S(\Sigma_0)$. *по 20.3* Следовательно, $\gamma(T) = \gamma(S(\Sigma_0))$ является примитивно рекурсивным множеством. Значит, теория T разрешима. *по опр.*

Определение 20.4.
Пусть $X \subseteq T(\Sigma_0) \cup F(\Sigma_0)$. Множество X является **разрешимым**, если $\gamma(X) = \{\gamma(y) \mid y \in X\}$ - **рм**. Множество X является **перечислимым**, если $\gamma(X)$ - **рпм**.

то есть произвольное множество термов и формул разрешимо, если множество его номеров рекурсивно

2) Пусть T – непротиворечива. Введем обозначение $M \leftrightharpoons \gamma(T)$. Покажем, что множество M – рекурсивно.

Теория T перечислима, следовательно, множество M – рекурсивно перечислимо. Значит, существует общерекурсивная функция f такая, что $M = \rho f$. Покажем, что тогда

это защтита от случая если дадут предложение не из нашего множества

$$\chi_M(x) = \overline{sg}\left|f\left(\mu y\left[\chi_{\gamma(S(\Sigma_0))}(x) \cdot |f(y) - x| \cdot |f(y) - c(10,x)| = 0\right]\right) - x\right|.$$

10. $\gamma(\neg\varphi) = c(10, \gamma(\varphi))$;

это просто номер обратной

x не лежит во множестве номеров предложений сигнатуры

1) Пусть $x \notin \gamma(S(\Sigma_0))$. Тогда $\chi_M(x) = 0$. Имеем $\overline{sg}\,|f(0) - x| = 0$, так как $x \notin M$. Следовательно, $f(0) \neq x$.

найдется само предложение, соответствующее этому номеру

2) Пусть $x \in \gamma(S(\Sigma_0))$. Тогда найдется предложение $\varphi \in S(\Sigma_0)$ такое, что $x = \gamma(\varphi)$. Рассмотрим два случая:

а) Пусть $\varphi \in T$. Тогда $x = \gamma(\varphi) \in M$. Следовательно, найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $f(n) = x$. *n - номер предложения*

c(10,x) - номер не фи

Так как T непротиворечиво, $\neg\varphi \notin T$. Следовательно, $\gamma(\neg\varphi) = c(10, x) \notin M$. А это означает, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место $f(k) \neq c(10, x)$. Таким образом, существует минимальное k такое, что $f(k) = x$. Следовательно, $\chi_M(x) = 1$.

б) Пусть $\varphi \notin T$. Тогда $x = \gamma(\varphi) \notin M$. Так как T полно, $\neg\varphi \in T$. Следовательно, $\gamma(\neg\varphi) = c(10, x) \in M$. А это означает, что найдется такое число $n \in \mathbb{N}$, что $f(n) = c(10, x)$. Следовательно, для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место $f(k) \neq x$. То есть существует минимальный элемент k такой, что $f(k) = c(10, x)$. Тогда $\chi_M(x) = 0$ и $\overline{sg}\,|f(k) - x| = 0$.

Стало быть, функция $\chi_M(x)$ является частично рекурсивной и, следовательно, общерекурсивной.

Таким образом, мы доказали, что множество M – рекурсивно, значит теория T разрешима. *вкратце - простая идея : если принажлежит фи, то не принадлежит обрвтный к нему*

Теорема 20.11 доказана.

Теорема 20.15. Каждая общерекурсивная функция представима в A_0.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по построению общерекурсивных функций.

> ***Частично-рекурсивные функции (чрф):***
> *а) простейшие функции являются частично-рекурсивными;*
> *б) функция, полученная из частично-рекурсивных функций однократным применением оператора суперпозиции, оператора примитивной рекурсии или оператора минимизации, является частично-рекурсивной;*
> *в) других частично-рекурсивных функций нет.*

1. Простейшие функции:
   a. Функция $O(v_0)$ представима формулой $\varphi(v_0, v_1) \leftrightharpoons (v_1 = 0)$;
   b. Функция $S(v_0)$ представима формулой $\varphi(v_0, v_1) \leftrightharpoons (v_1 = s(v_0))$;
   c. Функция $I_m^n(v_0, \dots, v_{n-1})$ представима формулой $\varphi(v_0, v_1, \dots, v_n) \leftrightharpoons (v_n = v_{m-1})$;

2. Суперпозиция: Рассмотрим функцию

по инд. предположению внутренние функции представимы

$f(v_0, \dots, v_{n-1}) = h(g_1(v_0, \dots, v_{n-1}), \dots, g_k(v_0, \dots, v_{n-1}))$. Пусть формулы $\varphi_1(v_0, \dots, v_n), \dots, \varphi_k(v_0, \dots, v_n)$ и $\psi(v_0, \dots, v_k)$ представляют функции $g_1, \dots, g_k$ и h соответственно. Тогда следующая формула представляет функцию $f(v_0, \dots, v_{n-1})$:

это результаты функций g

$$\xi(v_0, \dots, v_n) \leftrightharpoons \exists v_{N+1} \dots \exists v_{N+k}$$
$$(\varphi_1(v_0, \dots, v_{n-1}, v_{N+1}) \& \dots \& \varphi_k(v_0, \dots, v_{n-1}, v_{N+k}) \;\&\; \psi(v_{N+1}, \dots, v_{N+k}, \underline{v_n})),$$

где $N \leftrightharpoons \max\{l \mid v_l \text{ входит в } \varphi_1 \& \dots \& \varphi_k \& \psi\}$.

"глобальный" результат

3. Примитивная рекурсия: Рассмотрим функцию

> b) ***Оператор примитивной рекурсии***. *Рассмотрим функции*
> $$g(x_1, \dots, x_n) \quad и \quad h(x_1, \dots, x_n, y, z).$$
> *Пусть выполнено*
> $$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n); \\ f(x_1, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)). \end{cases}$$
> *Тогда говорят, что функция f получена из функций g и h применением* ***оператора примитивной рекурсии***.

$$\begin{cases} f(v_0, \dots, v_{n-1}, 0) = g(v_0, \dots, v_{n-1}); \\ f(v_0, \dots, v_{n-1}, v_{n+1}) = h(v_0, \dots, v_{n-1}, v_n, f(v_0, \dots, v_n)). \end{cases}$$

Пусть формулы $\varphi(v_0, \dots, v_n)$ и $\psi(v_0, \dots, v_{n+2})$ представляют функции g и h соответственно. Пусть $N \leftrightharpoons \max\{l \mid v_l \text{ входит в } \varphi \& \psi\}$ и

$$v_{N+1} = p_0^{f(v_0, \dots, v_{n-1}, 0)} \cdot \dots \cdot p_{v_n}^{f(v_0, \dots, v_{n-1}, v_n)}.$$

кодируем результаты всех вызовов функции

Тогда следующая формула представляет функцию $f(v_0, \dots, v_n)$:

> 26) $ex(x, y)$ – показатель степени x-го простого числа в каноническом разложении числа y;

таким образом достаём из показателя функцию

$$\xi(v_0, \dots, v_{n+1}) \leftrightharpoons$$
$$\leftrightharpoons \exists v_{N+1} \left[\varphi(v_0, \dots, v_{n-1}, ex(o, v_{N+1}))\; \& \forall v_{N+2} \left((\underset{\text{текущий}}{v_{N+2}} < v_n) \right.\right.$$
$$\left.\left. \to (\psi(v_0, \dots, v_{n-1}, v_{N+2}, ex(\underline{v_{N+2}}, v_{N+1}), ex(v_{N+2} + 1, v_{N+1}))) \right) \right.$$

пси это h

этому должен быть равен результат

$$\left. \& \; v_{n+1} = ex(v_n, v_{N+1}) \right].$$

4. Минимизация: Рассмотрим функцию

$$f(v_0, \dots, v_{n-1}) = \mu v_n [g(v_0, \dots, v_{n-1}, v_n) = 0].$$

Пусть формула $\varphi(v_0, \dots, v_{n+1})$ представляют функцию g. Тогда следующая формула представляет функцию $f(v_0, \dots, v_{n-1})$:

неопределённость не рассматриваем т.к. теорема для орф

$$\xi(v_0, \dots, v_n) \leftrightharpoons$$
$$\leftrightharpoons \varphi(v_0, \dots, v_n, 0) \& \forall v_{N+1}((v_{N+1} < v_n) \to \neg\varphi(v_0, \dots, v_{n-1}, v_{N+1}, 0)).$$

Теорема 20.15 доказана.

> c) ***Оператор минимизации***. *Рассмотрим функцию $g(x_1, \dots, x_n, y)$. Пусть выполнено:*
> $$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} y, & g(x_1, \dots, x_n, y) = 0, \\ & \forall i < y \;\; g(x_1, \dots, x_n, i) \text{ определена} \\ & \text{и } \forall i < y \;\; g(x_1, \dots, x_n, i) \neq 0; \\ \text{не определена}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$
> *Тогда говорят, что функция f получена из функции g применением* ***оператора минимизации***. *Это обозначается так:*
> $$f(x_1, \dots, x_n) = \mu y[g(x_1, \dots, x_n, y) = 0].$$

Теорема 20.16 (Геделя о неразрешимости). Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$, $A_0 \subseteq T$ и T – непротиворечивая теория. Тогда T – неразрешима.

Это означает, что система аксиом A_0 наследственно неразрешима, то есть, любая содержащая её непротиворечивая теория является неразрешимой.

Определение 20.4.
Пусть $X \subseteq T(\Sigma_0) \cup F(\Sigma_0)$. Множество X является **разрешимым**, если $\gamma(X) = \{\gamma(y) \mid y \in X\}$ - **рм**. Множество X является **перечислимым**, если $\gamma(X)$ - **рпм**.

то есть произвольное множество термов и формул разрешимо, если множество его номеров рекурсивно

Доказательство. Будем доказывать от противного. Допустим, что теория T – разрешима. Тогда множество номеров $M = \gamma(T)$ – рекурсивно. Следовательно, характеристическая функция χ_M является общерекурсивной. Определим функцию

по определению

Определение 19.2.
Множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$ называется **рекурсивным (примитивно рекурсивным)**, если его характеристическая функция

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad \text{является } \textbf{орф (прф)}.$$

берёт формулу x и в ней все вхождения v0 меняет на y и обратно отдаёт номер

$$f(x,y) \leftrightharpoons \begin{cases} \gamma[\gamma^{-1}(x)]_{\underline{y}}^{v_0}, & x \in \gamma(F(\Sigma_0)); \\ 0, & x \notin \gamma(F(\Sigma_0)). \end{cases}$$

Функция $f(x,y)$ всюду определена, и так как множество номеров $\gamma(F(\Sigma_0))$ *по 20.3* примитивно рекурсивно, то и функция $f(x,y)$ будет примитивно рекурсивной.

м - множество номеров наших предложений

Пусть $g(x,y) \leftrightharpoons \chi_M(f(x,y))$. Очевидно, что функция $g(x,y)$ является общерекурсивной. Следовательно, она представима в арифметике Пеано. Пусть формула $\varphi(v_0, v_1, v_2)$ представляет функцию $g(v_0, v_1)$. Положим $n \leftrightharpoons \gamma(\varphi(v_0, v_0, 0))$. Тогда имеем

по теореме 20.15

n - номер формулы которая представляет функцию которая явл. характеристич. ф-ей для f которая преобразовывает одну формулу в другую

а потом, всю эту матрёшку суём обратно в f

$$f(n,y) = \gamma\left([\varphi(v_0, v_0, 0)]_{\underline{y}}^{v_0}\right) = \gamma\left(\varphi\left(\underline{y}, \underline{y}, 0\right)\right).$$

подчёркивание означает константу

Тогда $f(n,n) = \gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0))$. И $g(n,n) = \chi_M(f(n,n))$.

что вообще вернёт характеристическая функция?

Возможны два случая для значения $g(n,n)$.

хотим понять лежит ли эта фигня в M
$\gamma(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0))$

1. Пусть $g(n,n) = \chi_M(f(n,n)) = 1$. Тогда, так как $g(n,n) \neq 0$, имеем $A_0 \vdash \neg\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)$. А так как $A_0 \subseteq T$, имеем $T \vdash \neg\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)$. Следовательно, $\neg\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \in T$. И, в силу того, что T непротиворечиво, получим, что $\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \notin T$. Следовательно, $\gamma\left(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)\right) \notin M$, т.е. $\chi_M(f(n,n)) = \chi_M\left(\gamma\left(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)\right)\right) = 0$. А это противоречит нашему предположению, что $\chi_M(f(n,n)) = 1$.

2\) $f(n_0, \ldots, n_{k-1}) \neq n_k \Rightarrow A_0 \vdash \neg\varphi(\underline{n_0}, \ldots, \underline{n_k})$.

т.к. T - теория

2. Пусть $g(n,n) = \chi_M(f(n,n)) = 0$. Тогда $\chi_M\left(\gamma\left(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)\right)\right) = 0$. Следовательно, $\gamma\left(\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)\right) \notin M$, т. е. $\varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0) \notin T$. Тогда, в силу того, что T – непротиворечиво и $A_0 \subseteq T$, получим $A_0 \nvdash \varphi(\underline{n}, \underline{n}, 0)$. Следовательно, $g(n,n) \neq 0$, и мы опять пришли к противоречию.

ну т.к. M - мн-во номеров T

выводилось бы из A0 выводилось бы из T

а эта штука говорит нам что g(n, n) = 0, и если она НЕ выводится то g(n, n) != 0

теория

Мы пришли к противоречию, предположив, что функция χ_M общерекурсивна. Следовательно, множество номеров M не является рекурсивным, а теория T – неразрешима.

Теорема 20.16 доказана.

Теорема 20.17 (Черча о неразрешимости). Множество $ИП_{\Sigma_0}$ теорем логики предикатов сигнатуры Σ_0 является неразрешимым.

(включаем = в сигнатуру по умолчанию)

Доказательство. Введем обозначения:

T - мн-во т.и. предложений сигма_0

если какое-то преложение выводимо - оно выводимо из Аксиом

$$T \leftrightharpoons \{\varphi \in S(\Sigma_0) \mid \ \vdash \varphi\},\ T_0 \leftrightharpoons \{\varphi \in S(\Sigma_0) \mid A_0 \vdash \varphi\} \text{ и } \psi \leftrightharpoons \&_{\varphi \in A_0} \varphi.$$

Очевидно, что множества предложений T и T_0 являются теориями.

т.к. если они просто выводятся, то и в рамках этой теории выводятся $\dfrac{\vdash \varphi}{\psi \vdash \varphi}$

сигнатура сигма_0 и осн. множество натур. числа

Рассмотрим стандартную модель натуральных чисел $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}; <, +, *, s, 0 \rangle$. Очевидно, что $\mathfrak{N} \models A_0$. Тогда $\mathfrak{N} \models T_0$ и, следовательно, теория T_0 непротиворечива.

$\Rightarrow \forall \varphi \in T_0\ \mathfrak{N} \models \varphi \Rightarrow \nexists \varphi \in T_0 : \mathfrak{N} \not\models \varphi$

т.е $\forall \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ - не т.и $\Rightarrow$ *она не доказуема (по теореме о корректности СИП)*

Теорема 14.19.(о корректности секвенционального исчисления предикатов) Если секвенция доказуема, то она тождественно истинная.

т.е. если бы была т.и. была бы и док

Кроме того, $A_0 \subseteq T_0$.

Следовательно, по теореме Геделя о неразрешимости, получим, что теория T_0 неразрешима. *(а мы хотим получить неразрешимость T)*

С другой стороны, имеем

г) $\dfrac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \vdash \xi}{\Gamma_1, (\varphi \,\&\, \psi), \Gamma_2 \vdash \xi}$

7) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}$

по опр. T0

$$\varphi \in T_0 \Leftrightarrow A_0 \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi \vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash (\psi \to \varphi) \Leftrightarrow (\psi \to \varphi) \in T.$$

по опр. T

Пусть $m \leftrightharpoons \gamma(\psi)$ и $n \leftrightharpoons \gamma(\varphi)$. Тогда $c(9, c(m, n)) = \gamma(\psi \to \varphi)$.

9) $\gamma(\varphi \to \psi) = c(9, c(\gamma(\varphi), \gamma(\psi)))$;

Следовательно, $\chi_{\gamma(T_0)}(n) = \chi_{\gamma(T)}\big(c(9, c(m, n))\big)$.

Будем доказывать от противного. Допустим, что теория T – разрешима. *по опр.* Тогда характеристическая функция $\chi_{\gamma(T)}$ является общерекурсивной. Следовательно, характеристическая функция $\chi_{\gamma(T_0)}$ так же общерекурсивна. А значит, теория T_0 разрешима. Мы пришли к противоречию.

Определение 20.4.
Пусть $X \subseteq T(\Sigma_0) \cup F(\Sigma_0)$. Множество X является **разрешимым**, если $\gamma(X) = \{\gamma(y) \mid y \in X\}$ - **рм**. Множество X является **перечислимым**, если $\gamma(X)$ - **рпм**.

то есть произвольное множество термов и формул разрешимо, если множество его номеров рекурсивно

Определение 19.2.
Множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$ называется **рекурсивным (примитивно рекурсивным)**, если его характеристическая функция

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

является **орф (прф)**.

Теорема 20.19 (Геделя о неполноте). Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$, $A_0 \subseteq T$ и T – перечислимая, непротиворечивая теория, тогда T не полна. То есть, система аксиом A_0 не имеет непротиворечивых перечислимых пополнений.

Теорема 20.11. Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$. Если T – полная, перечислимая теория, то T – разрешима.

Доказательство. Допустим теория T полна. Тогда, по Предложению 20.11, теория T разрешима. А это противоречит Теореме Геделя о неразрешимости. Следовательно, теория T – не полна.

Теорема 20.19 доказана.

Теорема 20.16 (Геделя о неразрешимости). Пусть $T \subseteq S(\Sigma_0)$, $A_0 \subseteq T$ и T – непротиворечивая теория. Тогда T – неразрешима.

неформальный смысл: мы до бесконечности можем добавлять туда новые вещи и дополнять теорию, она никогда не станет полной, будут предложения которые ни сами не верны, ни их отрицания (пример: континуум гипотеза)?

miro