Случайные величины. Функции распределения и их свойства.

Def. Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ наз. случайной величиной.
Т.е. каждому элементарному исходу сопоставляется число $\xi(\omega) \in \mathbb{R}$

Def. Функцией распределения наз. $F_\xi(t) = P(\xi < t)$

Свойства функции распределения:

1) Неубывание: $x_1 < x_2 \Rightarrow F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$

- Следует из монотонности вероятности: $\{\xi < x_1\} \subseteq \{\xi < x_2\} \Rightarrow P(\xi < x_1) \le P(\xi < x_2)$

2) Сущ. пределы: $\lim\limits_{t \to +\infty} F_\xi(t) = 1$ (1) $\quad \lim\limits_{t \to -\infty} F_\xi(t) = 0$ (2)

- Сущ. пределов вытекает из монотонности и ограниченности $F_\xi(t)$ (т.к. это P)

(1) Покажем, что $F_\xi(-n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Рассмотрим $B_n = \{\xi < -n\}$ – вложенная убывающая посл-ть.
$B_{n+1} = \{\xi < -(n+1)\} \subseteq B_n = \{\xi < -n\}$
Пересечение B_n состоит только из тех элементарных исходов, для которых случайная величина $\xi(\omega)$ меньше любого вещественного числа. $\xi(\omega) \in \mathbb{R}$, оно не может быть меньше всех чисел из $\mathbb{R}$.
Следовательно, пересечение B_n пусто и $F_\xi(-n) = P(B_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} P(\varnothing) = 0$

(2) Покажем, что $F_\xi(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ (или, что то же, $1 - F_\xi(n) = P(\xi \ge n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$)

Рассмотрим $B_n = \{\xi \ge n\}$. $\quad \underset{P(\xi \ge n+1)}{\overset{\|}{B_{n+1}}} \subseteq \underset{P(\xi \ge n)}{\overset{\|}{B_n}}$

Пересечение B_n пусто, т.к никакое вещественное число не может быть больше любого вещ. числа.

$1 - F_\xi(n) = P(B_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} P(\bigcap\limits_i^\infty B_i) = P(\varnothing) = 0.$ ▲

3) Непрерывность слева. $F_\xi(t_0 - 0) = F_\xi(t_0)$

∘ Достаточно доказать, что $F_\xi(t_0 - \frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\xi(t_0)$.

$F_\xi(t_0) - F_\xi(t_0 - \frac{1}{n}) = P(\xi < t_0) - P(\xi < t_0 - \frac{1}{n}) = P(t_0 - \frac{1}{n} \leq \xi < t_0)$

$B_n = \{t_0 - \frac{1}{n} \leq \xi < t_0\}$

$B_{n+1} \subseteq B_n$, а пересечение слова пусто, т.к в пределе $t_0 \leq \xi < t_0$

Значит, $P(t_0 - \frac{1}{n} \leq \xi < t_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(\varnothing) = 0$. ▲

miro

! Эти свойства явл. характеристическими.

∘ $P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$

△ $\{\xi < b\} = \{\xi < a\} \cup \{a \leq \xi < b\}$

$P(\xi < b) = P(\xi < a) + P(a \leq \xi < b)$

$F_\xi(b) - F_\xi(a) = P(a \leq \xi < b)$ ▲

miro