Моменты, вопросы их существования. Дисперсия случайной величины, ее свойства, примеры.

Def Моментом m-го порядка случайной величины X наз. $\mathbb{E}X^m$

Теорема о существовании моментов

Пусть $\mathbb{E}|X|^m < \infty$ $(m>0)$, тогда $\forall r \in (0, m)$ $\mathbb{E}|X|^r < \infty$

Доказательство: $|X|^r \leq |X|^m + 1 \Rightarrow \mathbb{E}|X|^r \leq \mathbb{E}|X|^m + 1$ – сущ.

Def
- Дисперсия – $\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$
- $\sqrt{\mathbb{D}X}$ – среднеквадратическое отклонение

Свойства:
1) $\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

Δ $\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}\left[X^2 - \underbrace{2X\mathbb{E}X}_{const} + \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_{const}\right] = \mathbb{E}X^2 - 2(\mathbb{E}X)^2 + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

2) $\mathbb{D}C = 0$
3) $\mathbb{D}cX = c^2\mathbb{D}X$
4) $\mathbb{D}X \geq 0$ т.к под мат. ожиданием квадрат а него св. вам при $X \geq 0$ $\mathbb{E}X \geq 0$
5) Если X и Y независимы, $\mathbb{D}(X \pm Y) = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y$

Δ $\mathbb{D}(X \pm Y) = \mathbb{E}(X \pm Y)^2 - (\mathbb{E}(X \pm Y))^2 = \left[\mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}Y^2 \pm \cancel{2\mathbb{E}XY}\right] -$

$- \left[(\mathbb{E}X)^2 + (\mathbb{E}Y)^2 \pm \underbrace{\cancel{2\mathbb{E}X\mathbb{E}Y}}_{\text{независ } X \text{ и } Y}\right] = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \mathbb{D}X^2 + \mathbb{D}Y^2$

6) $\mathbb{D}(X + C) = \mathbb{D}X$
7) Если $\mathbb{D}X = 0$ то $\exists C : P(X = C) = 1$

Распределение	$\mathbb{D}X$
B_p	$p(1-p)$
$B_{n,p}$	$np(1-p)$
Π_λ	λ
E_α	$\frac{1}{\alpha^2}$
$\Gamma_{\alpha,\lambda}$	$\frac{\lambda}{\alpha^2}$
$U_{[a,b]}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
N_{a,σ^2}	σ^2

Докажем некоторые:

1) $X \in B_p$ $\quad \mathbb{E}X^2 = 1^2 p + 0^2 q = p$

$\mathbb{D}X^2 = p - p^2 = p(1-p)$

2) $X \in B_{n,p}$ $\quad X = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $\xi_i \in B_p$ независ.

$\mathbb{D}X = n\mathbb{D}\xi_1 = np(1-p)$

3) $X \in \Pi_\lambda$

$$\mathbb{E}X(X-1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=2} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2$$

$$\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}X(X+1) + \mathbb{E}X = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mathbb{D}X = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

4) $X \in U_{[a,b]}$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_a^b t^2 \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{t^3}{3}\frac{1}{(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)(b^2 + ba + a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ba + a^2}{3}$$

$$\mathbb{D}X = \frac{b^2 + ba + a^2}{3} - \frac{(a+b)^4}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

miro