Есть ли жизнь после ТОСМа?

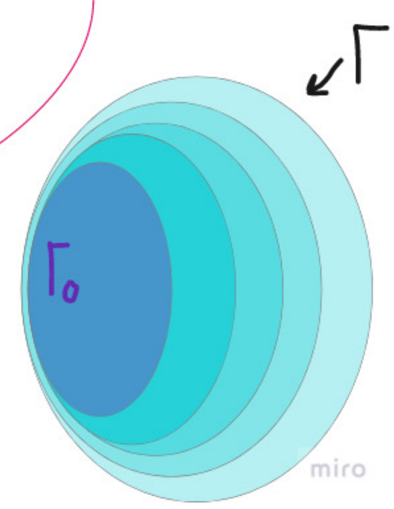
ору

Рассмотрим $\Gamma \subseteq F(\sigma)$ и $FV(\Gamma) = \{x \mid \exists\varphi \in \Gamma : x \in FV(\varphi)\}$. Пусть $FV(\Gamma) \subseteq X$. Тогда говорят, что Γ **истинно на модели $\mathfrak{A}$ при означивании** γ и пишут $\mathfrak{A} \vDash \Gamma[\gamma]$, если $\forall\varphi \in \Gamma : \mathfrak{A} \vDash \varphi[\gamma]$.

Определение 15.34.

Рассмотрим $\Gamma \subseteq F(\sigma)$. Говорят, что Γ **совместно**, если $\exists\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\exists\gamma : FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}|$ такие, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma[\gamma]$.

Множество формул Γ называется **локально совместным**, если каждое его конечное подмножество является совместным, т.е. $\forall\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, где Γ_0 - конечное и совместное.



Теорема 15.36 (Мальцева о компактности). Множество формул совместно тогда и только тогда, когда оно локально совместно.

$\Gamma \subseteq F(\sigma)$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть Γ совместно. Тогда найдутся модель $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ и означивание $\gamma : FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}|$ такие, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma[\gamma]$. Пусть $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ и Γ_0 конечно. Очевидно, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma_0[\gamma]$. Следовательно Γ_0 совместно. В силу произвольности выбора Γ_0 получаем, что Γ локально совместно.

по определению, для Γ_0 все формулы так же будут истины на модели

($\Leftarrow$) Пусть Γ локально совместно. Допустим, что Γ не совместно, тогда по Теореме о существовании модели Γ противоречиво. Следовательно, найдутся такие $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$, что $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ доказуема.

Теорема 15.15.(теорема о существовании модели)

Любое непротиворечивое множество формул имеет модель, т.е. $\forall\Gamma \subseteq F(\sigma)$ таких, что $\Gamma \nvdash$, выполняется:

$$\exists\mathfrak{A} \in K(\sigma) \text{ и } \exists\gamma : FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}| \text{ такие, что } \mathfrak{A} \vDash \Gamma[\gamma].$$

Множество формул $\Gamma_0 = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ конечно и $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. Следовательно Γ_0 совместно (так как Γ – локально совместно). А, значит, найдутся модель $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$ и означивание $\gamma : FV(\Gamma_0) \to |\mathfrak{B}|$ такие, что $\mathfrak{B} \vDash \Gamma_0[\gamma]$, т.е. $\mathfrak{B} \vDash \varphi_1[\gamma], \dots, \mathfrak{B} \vDash \varphi_n[\gamma]$. Следовательно, секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ не является тождественно-истинной, а значит и доказуемой. Таким образом, мы пришли к противоречию. Следовательно, Γ совместно.

по теореме о корректности

3) Секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ называется тождественно истинной, если $\forall\mathfrak{A} \in K(\sigma(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}))$ и $\forall\gamma : FV(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) \to |\mathfrak{A}|$ $\exists i \leqslant n :$ $: \mathfrak{A} \nvDash \varphi_i[\gamma]$.

Теорема 15.36 доказана.

Теорема 15.39.(Мальцева о расширении)

Если множество предложений имеет бесконечную модель, то оно имеет сколь угодно большую модель, т.е. пусть $\Gamma \subseteq S(\sigma)$, $\mathfrak{B} \vDash \Gamma$, $\mathfrak{B}$ - бесконечная. Тогда для $\forall$ кардинала α $\exists\mathfrak{A} \in K(\sigma)$ такая, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$, $\|\mathfrak{A}\| \geqslant \alpha$.

Доказательство:

Пусть $\mathfrak{B} \vDash \Gamma$, $\mathfrak{B}$ - бесконечная, дан кардинал α.

Пусть C - множество новых констант такое, что $C \cap \sigma = \varnothing$, $\|C\| = \alpha$. *вводим множество новых констант равное альфа по мощности*

Рассмотрим $\Gamma' = \{\neg(c = d) \mid c, d \in C, c \neq d\}$. Пусть $\Gamma'' = \Gamma \cup \Gamma'$. Покажем, что Γ'' локально совместно.

Выберем $\Gamma''_0 \subseteq \Gamma''$, Γ''_0 - конечное. Пусть $\Gamma_0 = \Gamma \cap \Gamma''_0$, $\Gamma'_0 = \Gamma' \cap \Gamma''_0$, тогда $\Gamma''_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma'_0$.

константы которые фигурируют в конечном наборе предложений Γ''_0

Пусть $C_0 = C \cap \sigma(\Gamma''_0) = C \cap \sigma(\Gamma'_0) \Rightarrow C_0$ - конечно, т.е. $C_0 = \{c_1, \dots, c_n\}$.

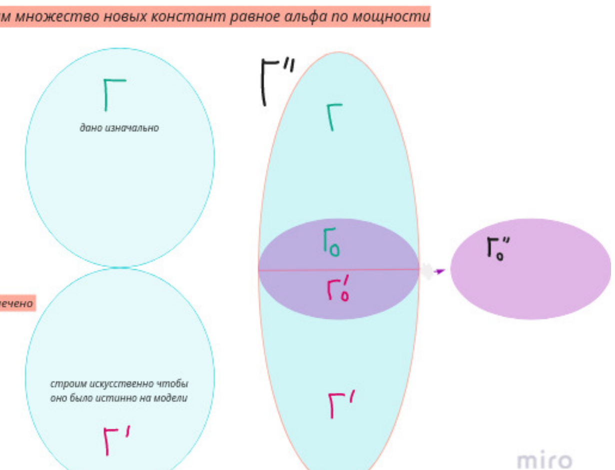
так как в Γ_0 не было констант из C *множество предложений конечно, каждое предложение конечно => мн-во констант конечено*

Расширим сигнатуру $\sigma_0 = \sigma \cup \{c_1, \dots, c_n\} = \sigma \cup C_0$. Рассмотрим $\mathfrak{B}$ и обогатим её до модели $\mathfrak{B}_0$ с сигнатурой σ_0. По условию $\mathfrak{B}$ - бесконечная $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{B}$ такие, что $b_i \neq b_j$, $i \neq j$. *в бесконечном множестве можем найти н различных эл-тов*

тобы все константы были различные

Положим $c_1^{\mathfrak{B}_0} = b_1, \dots, c_n^{\mathfrak{B}_0} = b_n \Rightarrow \forall i \neq j : c_i^{\mathfrak{B}_0} \neq c_j^{\mathfrak{B}_0} \Rightarrow \mathfrak{B}_0 \in K(\sigma_0)$,

по условию *так как Γ не содержит новых констант, они не влияют на истинность предложений Γ*



$\mathfrak{B}_0 \models \Gamma'_0$(упр.), $\mathfrak{B} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{B}_0 \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{B}_0 \models \Gamma_0$, т.к. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \Rightarrow$ произвольное конечное подмножество совместно =>любое конечное подмножество совместно

по теореме о компактности

$\Rightarrow \mathfrak{B}_0 \models \Gamma''_0 = (\Gamma_0 \cup \Gamma'_0) \Rightarrow \Gamma''$ - локально совместно $\Rightarrow \Gamma''$ - совместно

по опр. совместности

$\Rightarrow \exists \mathfrak{A}' \in K(\sigma \cup C)$ такая, что $\mathfrak{A}' \models \Gamma'' \Rightarrow \mathfrak{A}' \models \Gamma$, $\mathfrak{A}' \models \Gamma' \Rightarrow \forall c, d \in C$, если по построению Г'

$c \neq d \Rightarrow c^{\mathfrak{A}'} \neq d^{\mathfrak{A}'}$. Т.к. $C^{\mathfrak{A}'} = \{c^{\mathfrak{A}'} \mid c \in C\} \subseteq |\mathfrak{A}'| \Rightarrow \|C^{\mathfrak{A}'}\| = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\mathfrak{A}'\| \geqslant \alpha$. выкидываем константы из сигнатуры

т.к сужение не повлияло на основное множество

Рассмотрим $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \restriction \sigma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma$, т.к. $\Gamma \subseteq S(\sigma)$, $\|\mathfrak{A}\| \geqslant \alpha$, т.к. $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}'|$.

Теорема доказана.

$\varphi = \neg(c_i = c_j)$. Д-ть: $\mathfrak{B}_0 \models \neg(c_i^{\mathfrak{B}_0} = c_j^{\mathfrak{B}_0}) \Rightarrow \mathfrak{B}_0 \not\models (b_i = b_j)$

Предложение 15.40.(о нестандартной модели натуральных чисел)

Рассмотрим модель $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}; \leqslant, +, *, 0, 1 \rangle$. Тогда $\exists \mathfrak{M}$ такая, что $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ и $\exists c \in |\mathfrak{M}|$ такая, что $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{\text{n раз}} \leqslant c$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

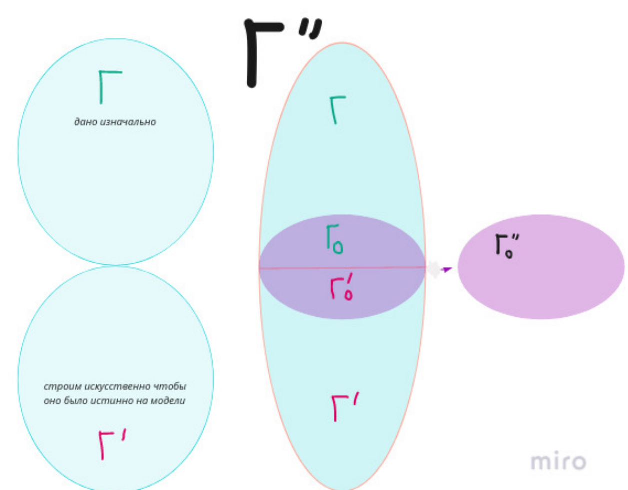
Доказательство:

Воспользуемся теоремой Мальцева о расширении.

Рассмотрим $\Gamma = \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$, $\sigma = \sigma(\mathfrak{N}) = \langle \leqslant, *, +, 0, 1 \rangle$.

Обогатим сигнатуру одним константным символом: $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$. Для $\forall n$ положим $\varphi_n = \{\underbrace{1 + \cdots + 1}_{\text{n раз}} \leqslant c\}$. Очевидно, что $\varphi_n \in S(\sigma')$. фи_н значит что константа с >= н

Рассмотрим $\Gamma' = \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $\Gamma'' = \Gamma \cup \Gamma'$. Покажем, что Γ'' локально совместно. Пусть $\Gamma''_0 \subseteq \Gamma''$, Γ''_0 - конечное, $\Gamma_0 = \Gamma \cap \Gamma''_0$, $\Gamma'_0 = \Gamma' \cap \Gamma''_0$, $\Gamma''_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma'_0$.



Так как Γ'_0 конечно, то $\exists m = \max\{n \mid \varphi_n \in \Gamma'_0\}$. Рассмотрим модель $\mathfrak{N}' \in K(\sigma')$ такую, что $\mathfrak{N}' \restriction \sigma = \mathfrak{N}$, означим константу $c : c^{\mathfrak{N}'} = m \Rightarrow$

то есть для каждого конечного подмножетсва мы можем положить с равное м

$\Rightarrow \mathfrak{N}' \models \Gamma'_0$ (упр.) в таком конечном подмножестве будет конечное число предложений фи, и мы можем задать константу равной макс такому н

С другой стор потому что Г - элемент. теория $\mathfrak{N} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{N} \models \Gamma_0$. Отсюда $\mathfrak{N}' \models \Gamma_0$. Таким

т.к. взяли произвольное конечное подмножество и доказли что оно совместно а по определению локальной совсетсности каждое конечное подмножество должно быть совместно

образом получаем, что $\mathfrak{N}' \models \Gamma''_0 \Rightarrow \Gamma''_0$ совместно $\Rightarrow \Gamma''$ - локально совместно

т.к оно локально совместно

в Г_0 нет фи_н поэтому истинность его никак не изменится

$\Rightarrow \Gamma''$ - совместно $\Rightarrow \exists \mathfrak{M}' \in K(\sigma') : \mathfrak{M}' \models \Gamma''$.

здесь два перехода по теореме о компактности

Возьмем $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \restriction \sigma$, $\mathfrak{M} \in K(\sigma)$. Т.к. $\mathfrak{M}' \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{M} \models \Gamma$, $d = c^{\mathfrak{M}'} \Rightarrow$ значит $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}') = \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$

$\Rightarrow \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$. Тогда $\forall n :$ $\mathfrak{M}' \models (\underbrace{1 + \cdots + 1}_{\text{n раз}} \leqslant c) \Rightarrow \mathfrak{M}' \models (1+\cdots+1 \leqslant c^{\mathfrak{M}'}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathfrak{M}' \models (1+\cdots+1 \leqslant d) \Rightarrow \mathfrak{M} \models (1+\cdots+1 \leqslant d)$, что и требовалось доказать.

Предложение доказано. $d \in |\mathfrak{M}'| = |\mathfrak{M}|$