Проверка гипотез о совпадении средних двух нормальных совокупностей.

Критерий Стьюдента

$\vec{X} \in N_{a_1, \sigma^2} \quad \vec{Y} \in N_{a_2, \sigma^2}$

Если у выборок дисперсии совпали, то можно проверить совпадение мат. ожиданий

$H_0 = \{a_1 = a_2\}$

$H_a = \{a_1 \neq a_2\}$

1) $\frac{n S^2(\vec{X})}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1} \qquad \frac{m S^2(\vec{Y})}{\sigma^2} \in \chi^2_{m-1}$

$$\frac{n S^2(\vec{X}) + m S^2(\vec{Y})}{\sigma^2} \in \chi^2_{n+m-2}$$

2) $\bar{X} \in N_{a_1, \frac{\sigma^2}{n}} \qquad \vec{Y} \in N_{a_2, \frac{\sigma^2}{m}}$

$\bar{X} - \bar{Y} \in N_{a_1 - a_2, \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}}$. Стандартизуем: $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (a_1 - a_2)}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \in N_{0,1}$

3) $$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (a_1 - a_2)}{\sigma \sqrt{\frac{n+m}{n \cdot m}}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2 (n+m-2)}{n S^2(\vec{X}) + m S^2(\vec{Y})}} \in T_{n+m-2}$$

$d_T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) \sqrt{nm} \sqrt{n+m+2}}{\sqrt{n+m} \sqrt{n S^2(\vec{X}) + m S^2(\vec{Y})}} \in T_{n+m-2}$ при верной H_0

$\delta = \begin{cases} 0, & |d_T| < t_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \\ 1, & |d_T| \geqslant t_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \end{cases}$ — Критерий Стьюдента

Состоятельность:

$$d = \frac{\sqrt{nm}}{\sqrt{n+m}} \frac{(\bar{X} - \bar{Y})\sqrt{n+m-2}}{\sqrt{nS^2(X) + mS^2(Y)}} \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}]{} \infty$$

$\sigma_1 = \sigma_2$
по условию

$$(\bar{X} - \bar{Y}) \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}]{P} const$$

$\bar{X} \to EX = a_1$, $\bar{Y} \to EY = a_2$

$$\frac{n\overset{\xrightarrow{P}\sigma_1^2}{S^2(X)} + m\overset{\xrightarrow{P}\sigma_2^2}{S^2(Y)}}{n+m-2} \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}]{P} \frac{\sigma_1^2(n+m)}{n+m-2} \to \underset{const}{\sigma_1^2}$$

$$P_{H_a}(|\overset{\to\infty}{d}| < C) \to 0$$

miro