ДЗ 11

11.9. По выборке $(X_1, \ldots, X_n)$ из биномиального распределения $B_{m,p}$ построить оценку максимального правдоподобия параметра p при известном $m > 0$. Исследовать состоятельность и несмещенность оценки.

11.9. Ф-я правдоподобия: $\Psi_{\vec{X}}(p) = n \cdot p$

$$\overset{\shortparallel}{f_\theta(X_i)} = \begin{cases} P(X_1 = t) & \text{- дискр.} \\ f_{X_1}(t) & \text{- а.н.} \end{cases}$$

ξ	0	1	…	k	…	n
P	$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	…	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	…	p^n

$$\Psi_{\vec{X}}(p) = \prod_{k=1}^{n} C_m^{X_k} p^{X_k} (1-p)^{m-X_k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{m!}{X_k!(m-X_k)!} p^{X_k}(1-p)^{m-X_k} =$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} m - X_k = m \cdot n - \sum_{k=1}^{n} X_k}$$

$$\mathcal{L}(p) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{m!}{X_k!(m-X_k)!}\right) + \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot \ln p + \left(m \cdot n - \sum_{k=1}^{n} X_k\right) \ln(1-p)$$

$$\mathcal{L}'(p) = \frac{\sum X_k}{p} - \frac{n \cdot m - \sum_1 X_k}{1-p} = 0$$

$$\sum_1 X_k - p \cdot \sum_1 X_k = n \cdot m \cdot p - p \sum X_k$$

$$\hat{p} = \frac{\sum X_k}{n \cdot m} = \frac{\overline{X}}{m}$$

Сост: $\hat{p} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n \cdot m} \xrightarrow[n \to \infty]{p} \dfrac{\mathbb{E}X_1}{m} = \dfrac{mp}{m} = p$ ✓

Несм: $\mathbb{E}\left(\dfrac{\overline{X}}{m}\right) = \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{1}{n} \sum_i \mathbb{E}X_i = n \cdot \mathbb{E}X_1 \cdot \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{m} = \dfrac{\mathbb{E}X_1}{m} = p$ ✓

11.1 а) $\psi_{\vec{X}}(\theta) = \prod_{k=1}^{n}$

$$f(x_i,\theta) = \begin{cases} \theta t^{\theta-1}, & t \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\theta > 0$

$$\psi_{\vec{X}}(\theta) = \begin{cases} \theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1}, & x_i \in [0,1]\ \forall i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} \theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1}, & X_{(1)} \geq 0 \text{ и } X_{(n)} \leq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$L(\theta) = n \cdot \ln\theta + (\theta-1)\sum_i \ln x_i$$

$$L'(\theta) = n \cdot \frac{1}{\theta} + \sum_i \ln x_i = 0$$

$$\mathbb{E}\ln X_1 = \int_0^1 \ln t\, \theta t^{\theta-1}\,dt = \theta\left(\frac{t^\theta}{\theta}\ln t\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{t}\,dt\right) = \theta\left(0 - \frac{1}{\theta}\frac{t^\theta}{\theta}\Big|_0^1\right) = -\frac{1}{\theta}^{\theta} - 0 = -\frac{1}{\theta}$$

$$\hat{\theta} = -\frac{1}{\overline{\ln x}} \xrightarrow{\text{ЗБЧ}} -\frac{1}{\mathbb{E}\ln X_1} = -\frac{\theta}{-1} = \theta \quad \text{Сост.}$$

11.1. С помощью метода максимального правдоподобия построить оценку параметра $\theta > 0$, если элементы выборки имеют плотность распределения:
а) $\theta t^{\theta-1}$ при $t \in [0;\ 1]$; б) $2t/\theta^2$ при $t \in [0;\ \theta]$.

б) $$f(x_i,\theta) = \begin{cases} \frac{2t}{\theta^2}, & t \in [0,\theta] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F_{X_i,\theta}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{\theta^2} & t \in [0,\theta] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\psi_{\vec{X}}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta) = \begin{cases} \frac{2^n \prod_{i=1}^{n} x_i}{\theta^{2n}}, & X_{(1)} \geq 0,\ X_{(n)} \leq \theta \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

max при $\prod_{i=1}^{n} x_i = \theta^n \Rightarrow \hat{\theta} = X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta$ — Сост.

$$P(|X_{(n)} - \theta| > \varepsilon) = P(X_{(n)} < \theta - \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon \geq 0 \\ \frac{(\theta-\varepsilon)^2}{\theta^2}, & \varepsilon \in (0,\theta) \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

> 0 — неизвестный па-
я параметра θ лучше в
$\frac{1}{}X_{(n)}$.

среднеквадратичном: $\theta_1^* = 2\overline{X}$, $\theta_2^* = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$.

11.4

$$\underbrace{\mathbb{E}(2\overline{X}) = 2\frac{\sum_i \mathbb{E}X_i}{n} = 2\frac{n\cdot\mathbb{E}X_1}{n} = 2\frac{(\theta+0)}{2} = \theta}_{\text{несмещ.}}$$

Def. $\delta_{\theta_n^*}(\theta) := \mathbb{E}(\theta_n^* - \theta)^2$

θ_n^* не хуже чем θ_n^{**} если $\forall\theta$ $\delta_{\theta_n^*}(\theta) \leq \delta_{\theta_n^{**}}(\theta)$

для несмещ. $\delta_{\theta^*}(\theta) = \mathbb{D}(\theta)$

$$\delta_{\theta_1^*}(\theta) = \mathbb{D}\theta_1^* = \mathbb{D}(2\overline{X}) = \frac{4}{n^2}\mathbb{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{4}{n^2}n\mathbb{D}X_1 = \frac{4n}{n^2}\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$\delta_{\theta_2^*}(\theta) = \mathbb{D}\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\mathbb{D}X_{(n)} = \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{\theta^2}{n^2+2n}$$

$$\underbrace{\mathbb{E}\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right) = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\theta = \theta}$$

$$\frac{\theta^2}{3n} \leq \frac{\theta^2}{n^2+2n} \Rightarrow \frac{n+1}{n}X_{(n)} \text{ не хуже } 2\overline{X}$$

11.5 $\quad \vec{X} \in F(t,\theta)$, $\theta = E_\theta X_1$

$$\mathbb{E}\theta_1^* = \mathbb{E}\overline{X} = \frac{\sum \mathbb{E}X_1}{n} = \frac{n E_\theta X_1}{n} = \theta$$

$$\mathbb{E}\theta^* = \mathbb{E}(C_1X_1+\ldots+C_nX_n) = C_1 \overset{=\theta}{\mathbb{E}X_1} + \ldots + C_n \overset{=\theta}{\mathbb{E}X_n} = \theta(\overset{=1}{C_1+\ldots+C_n}) = \theta$$

$$\delta_{\theta_1^*}(\theta) = \mathbb{D}\overline{X} = \frac{1}{n^2}\sum \mathbb{D}X_1 = \frac{\mathbb{D}X_1}{n}$$

$$\delta_{\theta^*}(\theta) = \mathbb{D}(C_1X_1+\ldots+C_nX_n) = C_1^2\mathbb{D}X_1+\ldots+C_n^2\mathbb{D}X_n = \mathbb{D}X_1(C_1^2+\ldots+C_n^2)$$

$$\frac{\mathbb{D}X_1}{n} \overset{?}{\leq} \mathbb{D}X_1(C_1^2+\ldots+C_n^2)$$

$$\frac{1}{n} \overset{?}{\leq} C_1^2+\ldots+C_n^2$$

$$\bar{x}_{\text{kvadr}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}$$

$$\bar{x}_{\text{kvadr}} \geqslant \bar{x}_{\text{arithm}} \geqslant \bar{x}_{\text{geom}} \geqslant \bar{x}_{\text{harmon}},$$

$C_1+\ldots+C_n=1$

$\Downarrow$

$\sqrt{C_1+\ldots+C_n}=1$

$$\frac{C_1+\ldots+C_n}{n^2} \leq \frac{C_1^2+\ldots+C_n^2}{n}$$

$$\frac{C_1+\ldots+C_n}{n} \leq \sqrt{\frac{C_1^2+\ldots+C_n^2}{n}}$$ — неравенство Коши

среднеквадр $\geq$ средне арифм.

Равенство достигается только при $C_1 = \ldots = C_n$

ервому моменту? Можно ли
методом моментов в случае,
не существует?

10.13 I) $\mathbb{E}X_1 = \int\limits_1^{+\infty} t\,\frac{\theta}{t^{\theta+1}}\,dt = \int\limits_1^{+\infty} \theta\, t^{-\theta}\,dt = \theta\cdot\frac{t^{1-\theta}}{1-\theta}\Big|_1^{+\infty} \overset{\text{при } \theta>1}{=} \frac{\theta}{\theta-1}$

II) $\mathbb{E}X_1 = \overline{X}$

III) $\frac{\theta}{\theta-1} = \overline{X} \Rightarrow \theta = \theta\overline{X} - \overline{X}$

$\theta(1-\overline{X}) = -\overline{X}$

$\theta^* = \frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$

$\mathbb{E}X_1^2 = \int\limits_1^{+\infty} t^2\frac{\theta}{t^{\theta+1}}\,dt = \int\limits_1^{+\infty}\theta\, t^{-\theta+1}\,dt = \theta\cdot\frac{t^{2-\theta}}{(2-\theta)}\Big|_1^{\infty}$ — сущ только для $\theta > 2$

По моментам высшего пор нельзя
мб можно менее

11.11. Построить оценку максимального правдоподобия по выборке из распределения Парето с плотностью

$$f_\theta(t) = \begin{cases} \frac{\theta}{t^{\theta+1}}, & t \geq 1; \\ 0, & t < 1. \end{cases}$$

Доказать состоятельность полученной оценки.

$P(X_1 > 0) = \int\limits_1^{+\infty} f_\theta(t)\,dt = 1$ — все эл-ты > 0

11.11 $\Psi_{\vec{x}}(\theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{\theta}{x_i^{\theta+1}}$

$L(\theta) = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln\theta - (\theta+1)\ln x_i =$

$= n\cdot\ln\theta - \sum\limits_{i=1}^{n}(\theta+1)\ln x_i$

$L'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i = 0$

$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i} = \frac{n}{n\cdot\overline{\ln x}} = \frac{1}{\overline{\ln x}} \xrightarrow{P} \frac{1}{\mathbb{E}\ln X_1} = \theta$ Сост.

$\mathbb{E}\ln X_1 = \int\limits_1^{+\infty}\ln(t)\cdot\frac{\theta}{t^{\theta+1}}\,dt = -\frac{\theta\ln(t)+1}{\theta\cdot t^{\theta}}\Big|_1^{+\infty} = 0 - \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta}$

11.14 $\vec{x} \in U_{[-\theta;\theta]}, \ \theta > 0$

$$f_\theta = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & t \in [-\theta;\theta] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\Psi_{\vec{x}}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2^n\theta^n}, & X_{(1)} \geq -\theta \text{ и } X_{(n)} \leq \theta \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -X_{(1)} \leq \theta \\ X_{(n)} \leq \theta \end{cases}$$

$$\hat{\theta} = \max\{-X_{(1)}, X_{(n)}\} = \max\{|X_1|, \dots |X_n|\}$$

$$F_{\hat{\theta}}(t) = F^n_{|X_1|}(t) = U^n_{0,\theta}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0, & t < \theta \\ 1, & t \geq \theta \end{cases} = I_\theta$$

$$\hat{\theta} \Rightarrow \theta^{=const} \Rightarrow \hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta, \quad E\hat{\theta} = \int_0^\theta t n \frac{t^{n-1}}{\theta^n} = \frac{n}{n+1} \frac{t^{n+1}}{\theta^n}\Big|_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta - \text{смещ.}$$

б) $\hat{\theta} \in [X_{(n)} - 1, X_{(1)}]$

$$\Psi = \begin{cases} 1^n, & X_1, \dots, X_n \in [\theta, \theta+1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} X_{(1)} \geq \theta \\ X_{(n)} \leq \theta + 1 \end{matrix}$$

$$\hat{\theta} = \alpha(\underbrace{X_{(n)}}_{\xrightarrow{P} \theta+1} - 1) + (1-\alpha)\underbrace{X_{(1)}}_{\xrightarrow{P} \theta}, \quad \alpha \in [0,1] \longrightarrow \theta$$

ф-я распр. max

$$P(|X_{(n)} - \theta| > \varepsilon) = P(X_n < \theta - \varepsilon) = P(\max(X_1, \dots, X_n) < \theta - \varepsilon) =$$

$$= P(X_1 < \theta - \varepsilon, \dots, X_n < \theta - \varepsilon) = \prod_{i=1}^n P(X_i < \theta - \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon > \theta + 1 \\ \Big(\underbrace{\frac{(\theta+1) - \varepsilon}{\theta}}_{\in[0,1] \to 0}\Big)^n & \varepsilon \leq \theta + 1 \end{cases} \Rightarrow X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta + 1$$

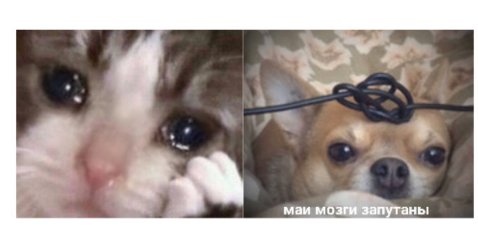
Аналогично, $X_{(1)} \xrightarrow{P} \theta$

$$E\hat{\theta} = \int_\theta^{\theta+1} t(\alpha n t^{n-1} + (1-\alpha)n(1-t)^{n-1})dt = \int_\theta^{\theta+1} \alpha n t^n dt + (1-\alpha)n\int_\theta^{\theta+1} t(1-t)^{n-1} dt =$$

$$= \alpha n \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_\theta^{\theta+1} + (1-\alpha)n \cdot$$

$$\frac{\theta^n(\theta n + n + 1)}{n(n+1)} - \frac{(1-\theta)^n(n\theta+1)}{n(n+1)}$$

$$= \alpha n\left(\frac{(\theta+1)^{n+1}}{n+1} - \frac{\theta^{n+1}}{n+1}\right) - (1-\alpha)\frac{(1-t)^n(nt+1)}{n(n+1)}\Big|_\theta^{\theta+1} =$$



наверное смещенная...