Распределение суммы случайных величин, имеющих пуассоновское распределение. Плотность суммы случайных величин.

Теор. Пусть X и Y - незав и $\left.\begin{matrix} P(X=k)=p_k \\ P(Y=k)=q_k \end{matrix}\right\}$ $k=0,1,2\ldots$

Тогда $\forall k=0,1,2,\ldots$ $r_k = P(X+Y=k) = \sum\limits_{i=0}^{k} p_i q_{k-i}$ $(*)$

Доказательство:

$$P(X+Y=k) = P(\{X=0,\ Y=k\} \cup \{X=1,\ Y=k-1\} \cup \ldots \cup \{X=k,\ Y=0\}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X=i,\ Y=k-i) \underset{\text{незав.}}{=} \sum_{i=0}^{k} P(X=i)\cdot P(Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} p_k q_{k-i} \quad \blacktriangle$$

Последовательность чисел r_k наз. сверткой последовательностей p_k и q_k

Теор. Пусть X_1 и X_2 - независимы, $X_1 \in \Pi_{\lambda_1}$, $X_2 \in \Pi_{\lambda_2}$ тогда $X_1+X_2 \in \Pi_{\lambda_1+\lambda_2}$

$$P(X+Y=k) \overset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{(k-i)}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{k!} \underbrace{\frac{1}{i!(k-i)!}}_{\text{“}C_k^i} \lambda_1^i \cdot \lambda_2^{(k-i)} \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

[Бином Ньютона: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$]

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} C_n^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \cdot (\lambda_1+\lambda_2)^k \in \Pi_{\lambda_1+\lambda_2} \quad \blacktriangle$$

Формула свертки

Пусть X и Y независимые и имеют плотности f_X и f_Y. Тогда

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_Y(t-u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v)\cdot f_X(t-v)\,dv$$

$\forall u \quad v < y-u$

Доказательство: $F_{X+Y}(y) = P(X+Y<y) = P((X,Y) \in \{(u,v) : u+v<y\}) =$

$$= \iint\limits_{u+v<y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_X(u)\int_{-\infty}^{y-u} f_Y(v)\,dv\right]du \Bigg|_{\substack{v=t-u \\ dv=dt}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\left[\int_{-\infty}^{y} f_Y(t-u)\,dt\right]du$$

$v = y-u \Leftrightarrow t = y$

$$F_{X+Y}(y) = \int_{-\infty}^{y} \underbrace{\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\, f_Y(t-u)\,du\right\}}_{f_{X+Y}(y)} dt \qquad \blacktriangle$$