Матрица ковариаций. Многомерное нормальное распределение и его свойства.

Def Случайный вектор — $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

Def Матрицей ковариаций случайного вектора X наз. матрица $C(X)$, у которой на месте с номером (i,j) стоит $C_{i,j} = cov(X_i, X_j)$ $i,j \in [1,n]$

Матрица ковариаций есть аналог дисперсии для случайных векторов. При $n=1$ это и есть дисперсия. В общем случае на диагонали стоят дисперсии $\mathbb{D}X_1, \dots, \mathbb{D}X_n$, и $C(X)$ симметрична отн. главной диагонали

$$C(X) = \begin{bmatrix} \mathbb{D}X_1 & Cov(X_2, X_1) & \dots & Cov(X_n, X_1) \\ Cov(X_1, X_2) & \mathbb{D}X_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Cov(X_1, X_n) & & \dots & \mathbb{D}X_n \end{bmatrix}$$

Теорема Пусть A — матрица из констант (m строк, n столбцов), B — m-вектор из констант. Тогда:

$$C(AX+B) = AC(X)A^T$$

Доказательство: $C(X)$ представима в виде:

$$\mathbb{E}\left[\begin{bmatrix} X_1 - \mathbb{E}X_1 \\ X_2 - \mathbb{E}X_2 \\ \vdots \\ X_n - \mathbb{E}X_n \end{bmatrix} \cdot (X_1 - \mathbb{E}X, X_2 - \mathbb{E}X_2, \dots, X_n - \mathbb{E}X_n)\right] = \mathbb{E}\begin{bmatrix} (X_1 - \mathbb{E}X_1)^2 & (X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_2 - \mathbb{E}X_2) & \dots & (X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_n - \mathbb{E}X_n) \\ (X_2 - \mathbb{E}X_2)(X_1 - \mathbb{E}X_1) & (X_2 - \mathbb{E}X_2)^2 & & (X_2 - \mathbb{E}X_2)(X_n - \mathbb{E}X_n) \\ \vdots & & \ddots & \\ (X_n - \mathbb{E}X_n)(X_1 - \mathbb{E}X_1) & \dots & & (X_n - \mathbb{E}X_n)^2 \end{bmatrix}$$

То есть: $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)^T\right] = C(X)$

Тогда $C(AX+B) = \mathbb{E}\left[\left((AX+B) - \mathbb{E}(AX+B)\right)\left((AX+B) - \mathbb{E}(AX+B)\right)^T\right] =$

$= \mathbb{E}\left[(AX + \cancel{B} - \mathbb{E}AX - \cancel{\overset{B}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}B}}})(AX + \cancel{B} - \mathbb{E}AX - \cancel{\overset{B}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}B}}})^T\right] =$

- Транспонированное произведение матриц равно произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке. $(AB)^T = B^T A^T$

$= \mathbb{E}\left[A(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)^T A^T\right] = A \cdot \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)^T\right] A^T = AC(X)A^T$

Многомерное нормальное распределение

Пусть $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ Y_i – независ. $Y_i \in N_{0,1}$. $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$

- $f_Y(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} t_i^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}t^T t} = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{0,1}(t)$

т.к Y_i – нез то это представляется произведением $f_{Y_i}(t)$

- Пусть A – невырожденная матрица $n \times n$, состоит из констант. $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ $\alpha_i = \text{const}$

- $X = AY + \alpha$ – распределение X будем называть многомерным нормальным.

Теорема Плотность многомерного норм. распр. равна $f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{\det C(X) \cdot (2\pi)^{\frac{n}{2}}}} e^{-\frac{1}{2}(t-\alpha)^T C(X)^{-1}(t-\alpha)}$

где $C(X)^{-1} = (A\underbrace{C(Y)}_{\text{единичная, т.к } Y_i \in N_{0,1}}A^T)^{-1} = (AA^T)^{-1}$

Следствие Для нормального вектора независимость и некоррелированность равносильны

Т.е. Y – норм. вектор. $\text{cov}(Y_i, Y_j) = 0$ $\forall i \neq j$, тогда $Y_1, \dots, Y_n$ – незав.

Доказательство:

$$C(Y) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \qquad (C(Y))^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & \sigma_n^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\det C(Y)} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_n$$

$$f_{Y_1 \dots Y_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{(t_i - a_i)^2}{\sigma_i^2}} = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{a_i, \sigma_i^2}(t_i)$$

$\vec{X}$ — стандартный нормальный вектор, если каждая его компонента распределена стандартно нормально и компоненты независимы.

$\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b}$ — нормальный вектор. A — невырожденная матрица.

$C(\vec{Y}) = C(A\vec{X} + \vec{b}) = AC(\vec{X})A^T = AA^T$.

Если A — ортогональная, то $Y = AX$ это тоже стандартно нормальный вектор.