HW 10

Status	ready
checkbox	☑
class	Prob & Stats
due date	@May 4, 2021

3. По выборке $(X_1, \ldots, X_n)$ из биномиального распреде-
$B_{m,p}$ построить оценки методом моментов:
параметра p по первому и по второму моменту при извест-
> 0;
параметров p и m.
следовать состоятельность построенных оценок.

3. $\vec{X} \in B_{m,p}$

а) 1. $\mathbb{E}X_1 = m \cdot p$

2. $\mathbb{E}X_1 = \overline{X}$

3. $p^* = \dfrac{\overline{X}}{m}$

1) Сост: $\dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n \cdot m} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \dfrac{\mathbb{E}X_1}{m} = p$ ✓

Несм:
2) $\mathbb{E}\left(\dfrac{\overline{X}}{m}\right) = \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{1}{n} \sum_i \mathbb{E}X_i = \dfrac{\mathbb{E}X_1}{m}$ ✗

$g(t) = t$

1. $\mathbb{E}X_1^2 = \mathbb{D}X_1 + (\mathbb{E}X_1)^2 = mp(1-p) + m^2p^2 = mp(1-p+mp)$

2. $mp - mp^2 + m^2p^2 = \overline{X^2} \Rightarrow p^2(m^2-m) + mp - \overline{X^2} = 0$

3. $p_{1,2} = \dfrac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4\overline{X^2}(m^2-m)}}{2(m^2-m)}$, $p_2 < 0$ – посторонний корень

$$p^{**} = \frac{\sqrt{m^2 + 4\overline{X^2}(m^2-m)} - m}{2(m^2-m)}$$

$p = \dfrac{\ldots}{2(m^2-m)}$

ф-я непр для $m > 1$

1) Сост: $p^{**} \xrightarrow{P} \dfrac{\sqrt{m^2 + 4(mp - mp^2 + m^2p^2)(m^2-m)} - m}{2(m^2-m)} = p$

$mp - mp^2 + m^2p^2$

$$2)\ \mathbb{E}p^{**} = \mathbb{E}\left(\frac{\sqrt{m^2 + 4\overline{X^2}(m^2-m)} - m}{2(m^2-m)}\right) \le \frac{\sqrt{m^2 + 4\,\mathbb{E}\overline{X^2}(m^2-m)} - m}{2(m^2-m)} = \frac{\sqrt{(2(m-1)mp + m)^2} - m}{2(m-1)m} \overset{m>1}{=} p \ ✓$$

б) $\begin{cases} \mathbb{E}X_1 = mp \\ \mathbb{E}X_1^2 = mp - mp^2 + m^2p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mp = \overline{X} \\ mp - mp^2 + m^2p^2 = \overline{X^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{\overline{X}}{m} \\ \overline{X} - \dfrac{(\overline{X})^2}{m} + (\overline{X})^2 = \overline{X^2} \end{cases}$ сост. смещ.

$\dfrac{(\overline{X})^2}{m} = \overline{X} + (\overline{X})^2 - \overline{X^2}$

$m^* = \dfrac{(\overline{X})^2}{\overline{X} + (\overline{X})^2 - \overline{X^2}}$

1) Сост: $m^* \xrightarrow{P} \dfrac{(\mathbb{E}X_1)^2}{\mathbb{E}X_1 + (\mathbb{E}X_1)^2 - \mathbb{E}X_1^2}$

$= \dfrac{m^2p^2}{\cancel{mp} + \cancel{mp^2} - \cancel{mp} + mp^2 - \cancel{m^2p^2}} = m$ ✓

Исследовать состоятельность построенных оценок.

10.4. Используя метод моментов, построить бесконечную последовательность различных оценок параметра θ равномерного распределения на отрезке $[0;\ \theta]$. Будут ли полученные оценки состоятельными?

$$X_1 \in U_{a,b}$$

$$\mathbb{E}X_1^k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$$

10.4 $k \geq 1$

I $\quad \mathbb{E}X_1^k = \dfrac{\theta^{k+1}}{\theta(k+1)}$

II $\quad \dfrac{\theta^{k+1}}{\theta(k+1)} = \overline{X^k}$

III $\quad \theta^* = \sqrt[k]{\overline{X^k}\,(k+1)}$

Сост: $\quad \theta^* \xrightarrow{P} \sqrt[k]{\mathbb{E}X_1^k(k+1)} = \sqrt[k]{\dfrac{\theta^{k+1}}{\theta(k+1)}(k+1)} = \theta$ ✓

10.5

a) $p_X(t) = \theta t^{\theta-1}, \; t \in [0,1]$

$$\mathbb{E}X = \int_0^1 t \cdot \theta t^{\theta-1}\,dt = \theta \left.\frac{t^{\theta+1}}{\theta+1}\right|_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}$$

Метод моментов:

I. $\quad \mathbb{E}X_1 = \dfrac{\theta}{\theta+1}$

II $\quad \dfrac{\theta}{\theta+1} = \overline{X}$ $\qquad \theta = \theta\overline{X} + \overline{X}$

III $\quad \theta^* = \dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$

Сост: $\quad \theta^* \xrightarrow{P} \dfrac{\mathbb{E}X_1}{\underbrace{1-\mathbb{E}X_1}} = \dfrac{\theta}{\theta+1} \cdot \dfrac{\theta+1}{1} = \theta$ ✓

$$1 - \frac{\theta}{\theta+1} = \frac{1}{\theta+1}$$

б) $p_X(t) = \dfrac{2t}{\theta^2}, \quad t \in [0, \theta]$

$$\mathbb{E}X = \int_0^\theta \frac{2t^2}{\theta^2}\,dt = \frac{1}{\theta^2}\,\frac{2t^3}{3}\Big|_0^\theta = \frac{2}{3}\theta$$

I. $\mathbb{E}X_1 = \frac{2}{3}\theta$

II $\frac{2}{3}\theta = \overline{X}$

III $\theta^* = \frac{3}{2}\overline{X}$

Сост: $\theta^* \xrightarrow{P} \frac{3}{2}EX_1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\theta = \theta$ ✓

miro

10.8

10.8. По выборке $(X_1, \ldots, X_n)$ методом моментов найти две различные оценки параметра $p \in (0,1)$, если известно, что:
$P\{X_1 = 1\} = p/2$; $P\{X_1 = 2\} = p/2$; $P\{X_1 = 3\} = 1 - p$.
Будут ли полученные оценки несмещенными и состоятельными?

$$\mathbb{E}X_1 = 1\cdot\frac{p}{2} + 2\cdot\frac{p}{2} + 3\cdot(1-p) = \frac{p}{2} + p + 3 - 3p = 3 - \frac{3}{2}p$$

$$\mathbb{E}X_1^2 = \frac{p}{2} + 2p + 9 - 9p = 9 - \frac{13}{2}p$$

1) I $\mathbb{E}X_1 = 3 - \frac{3}{2}p$

II $3 - \frac{3}{2}p = \overline{X}$

III $p^* = \frac{2}{3}(3 - \overline{X}) = 2 - \frac{2}{3}\overline{X}$

Сост: $p^* \xrightarrow{P} 2 - \frac{2}{3}EX_1 = 2 - \frac{2}{3}\left(3 - \frac{3}{2}p\right) = p$ ✓

Несм. $Ep^* = E\left(2 - \frac{2}{3}\overline{X}\right) \underset{\text{лин.}}{=} 2 - \frac{2}{3}\left(3 - \frac{3}{2}p\right) = p$ ✓

miro

2) I $\mathbb{E}X_1^2 = 9 - \frac{13}{2}p$

II $9 - \frac{13}{2}p = \overline{X^2}$

III $p^* = \frac{2}{13}(9 - \overline{X^2})$

Сост: $p^* \xrightarrow{P} \frac{2}{13}(9 - \mathbb{E}X_1^2) = \frac{2}{13}(9 - 9 + \frac{13}{2}p) = p$ V

Несмещ.: $\mathbb{E}p^* = \mathbb{E}\left(\frac{2}{13}(9 - \overline{X^2})\right) \underset{\text{лин.}}{=} \frac{2}{13}(9 - \mathbb{E}X_1^2) = p$ V

0.16. a) I. $\mathbb{E}X_1^2 = \frac{2\theta^3}{6\theta} = \frac{1}{3}\theta^2$

$X_1 \in U_{a,b}$

$\mathbb{E}X_1^k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$

II. $\frac{1}{3}\theta^2 = \overline{X^2}$

III. $\theta^* = \sqrt{3\overline{X^2}}$

Сост: $\theta^* \xrightarrow{P} \sqrt{3 \cdot \mathbb{E}X_1^2} = \sqrt{3 \cdot \frac{\theta^2}{3}} = \theta$

Несмещ: $\mathbb{E}\theta^* = \mathbb{E}\left(\sqrt{3 \cdot \overline{X^2}}\right) \leq \sqrt{3\,\mathbb{E}X_1^2} = \theta$

[h - нелин., $X \notin I_c$] $\Rightarrow$ $\mathbb{E}\theta^* < \theta$ X б) I $\mathbb{E}X_1 = \dfrac{(\theta+1)^2 - \theta^2}{2} = \dfrac{2\theta+1}{2}$

II. $\theta + \frac{1}{2} = \overline{X}$

III. $\theta^* = \overline{X} - \frac{1}{2}$

Сост: $\theta^* \xrightarrow{P} EX_1 - \frac{1}{2} = \theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \theta$ ✓

Несмещ: $E\theta^* = E\left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right) \underset{\text{лин.}}{=} EX_1 - \frac{1}{2} = \theta$ ✓

10.10. $\vec{X} \in \Phi_{a,\sigma^2}$. $\mathbb{E}\overline{X}$? $\mathbb{D}\overline{X}$?

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}EX_1 + \ldots + \frac{1}{n}\mathbb{E}X_n = \frac{1}{n}n \cdot \mathbb{E}X_1 = a$$

$$D\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{D}X_1 + \ldots + \frac{1}{n^2}\mathbb{D}X_n = \frac{1}{n^2}n \cdot \mathbb{D}X_1 = \frac{1}{n}\sigma^2$$

$X \in \Phi_{a,\frac{\sigma^2}{n}}$ – ??