Распределения, связанные с нормальным (хи-квадрат, Стьюдента, Фишера).

Гамма-распределение

Вспомним свойство устойчивости по суммированию:

• Пусть $\xi_1,\dots,\xi_n$ — независ. и $\xi_i \in \Gamma_{\alpha,\lambda_i}$ $\forall i\in[1,n]$ тогда $\xi_1+\dots+\xi_n \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1+\dots+\lambda_n}$

И докажем еще одно свойство $\Gamma_{\alpha,\lambda}$:

• Если $\xi\in N_{0,1}$ то $\xi^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$

Доказательство:

При $y<0$: $F_{\xi^2}(y) = P(\xi^2<y)=0 \Rightarrow f_{\xi^2}(y)=0$

При $y>0$: $F_{\xi^2}(y)=P(\xi^2<y)=P(-\sqrt{y}<\xi<\sqrt{y}) = N_{0,1}(\sqrt{y})-N_{0,1}(-\sqrt{y})$

$$f_{\xi^2}(y) = \frac{dF_{\xi^2}(y)}{dy} = (N_{0,1}(\sqrt{y}))'\cdot(\sqrt{y})' - (N_{0,1}(-\sqrt{y}))'\cdot(-\sqrt{y})' =$$

из симметр плотности $N_{0,1}$

$$\varphi_{0,1}(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} + \varphi_{0,1}(-\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\varphi_{0,1}(\sqrt{y})+\varphi_{0,1}(\sqrt{y})\right)$$

$$= \frac{\varphi_{0,1}(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{y}}\cdot e^{-\frac{y}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{=\sqrt{\pi}}} y^{\frac{1}{2}-1}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot y} \in \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$$

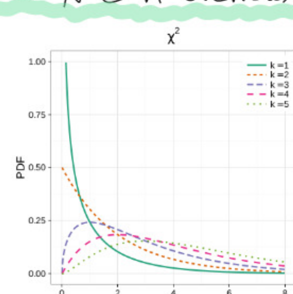
Распределение χ^2 Пирсона

Из предыдущих двух свойств следует, что если $\xi_1,\dots,\xi_n$ независимые и $\xi_i\in N_{0,1}$ $\forall i\in[1,n]$

то $\chi^2 = \xi_1^2+\dots+\xi_n^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}}$. Это называется распределением χ^2 с n степенями свободы

Обозначение: $\chi^2 \in \chi^2_n$

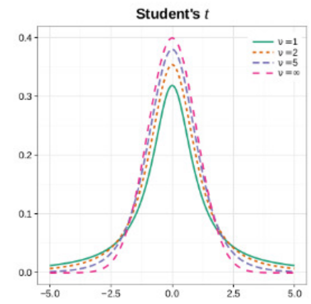
• Свойство: Если $z_1\in\chi^2_n$, $z_2\in\chi^2_m \Rightarrow z_1+z_2\in\chi^2_{n+m}$



Распределение Стьюдента

Def: Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k$ – независимы и $\xi_i \in N_{0,1}$ $\forall i \in [0,n]$

Распределение случайной величины $t_k = \dfrac{\xi_0}{\sqrt{\dfrac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_k^2}{k}}}$ наз распределением Стьюдента с k степенями свободы и обозначается T_k



Свойство: $T_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} N_{0,1}$. Доказательство: • $\dfrac{\chi_n^2}{n} \xrightarrow{p} 1$ т.к по ЗБЧ $\dfrac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n} \to \mathbb{E}\xi_1^2 = 1$ $\left(\xi_1 \in \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}},\ \mathbb{E}\xi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1\right)$

• $t_n = \dfrac{\xi}{\sqrt{\dfrac{\chi_n^2}{n}}} \Rightarrow \xi \in N_{0,1}$

Распределение Фишера

Def: Пусть $\left.\begin{array}{l} Z_1 \in \chi_n^2 \\ Z_2 \in \chi_m \end{array}\right\}$ независимы.

Распределение случайной величины $f_{n,m} = \dfrac{\frac{Z_1}{n}}{\frac{Z_2}{m}} = \dfrac{m}{n}\dfrac{Z_1}{Z_2}$ имеет распределение Фишера с n и m степенями свободы. $(F_{n,m})$

Свойство: $F_{n,m} \underset{n,m\to\infty}{\Rightarrow} I_1$

Очевидно, т.к. $\dfrac{Z_1}{n} = \dfrac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n} \xrightarrow{p} \mathbb{E}\xi_1^2 = 1$ и $\dfrac{Z_2}{m} = \dfrac{\eta_1^2 + \ldots + \eta_m^2}{m} \to \mathbb{E}\eta_1^2 = 1$