



Проверка гипотез о совпадении дисперсий двух нормальных совокупностей.

Критерий Фишера

$$\vec{X} \in N_{\alpha_1, \sigma_1^2} \quad \vec{Y} \in N_{\alpha_2, \sigma_2^2}$$

$$H_0 = \{\sigma_1 = \sigma_2\}$$

$$H_a = \{\sigma_1 \neq \sigma_2\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{n S^2(\vec{X})}{\sigma_1} \in \chi^2_{n-1} \\ \frac{m S^2(\vec{Y})}{\sigma_2} \in \chi^2_{m-1} \end{array} \right\} \frac{\overset{S^2(\vec{X})}{n S^2(\vec{X})}}{\sigma_1 \cdot (n-1)} \cdot \frac{\overset{\frac{1}{S^2(\vec{Y})}}{\sigma_2 \cdot (m-1)}}{m S^2(\vec{Y})} \in F_{n-1, m-1}$$

Теорема Фишера : $d_F = \frac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})} \in F_{n-1, m-1}$ при верной H_0 .

$$\delta = \begin{cases} 0, & f_{\frac{\epsilon}{2}} \leq d_F \leq f_{1-\frac{\epsilon}{2}} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

miro

Сост. кр. Фишера

$$H_0 = \{\sigma_1^2 = \sigma_2^2\}$$

$$H_a = \{\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2\}$$

$$\vec{X} = (x_1, \dots, x_n) \quad \vec{Y} = (y_1, \dots, y_m)$$

$$d_F = \frac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})} \in F_{n-1, m-1}$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & f_{\frac{\epsilon}{2}} \leq \frac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})} \leq f_{1-\frac{\epsilon}{2}} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

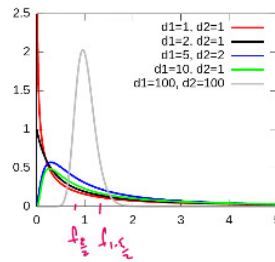
Убедимся, что посыл-ть квантилей $f_\gamma = f_\gamma(n, m)$ распр $F_{n, m}$ \forall уровня $\delta \in (0, 1)$ сходится к 1 при $n, m \rightarrow \infty$:

miro

Пусть $\xi_{n,m} \in F_{n,m}$ по опр. квантиля $P(\xi_{n,m} < f_\delta) = \delta$
 $P(\xi_{n,m} > f_\delta) = 1 - \delta$

Опр. $Y \in F_{n,m}$ если $Y = \frac{\frac{z_1}{m}}{\frac{z_2}{k}} = \frac{k}{m} \cdot \frac{z_1}{z_2}$
 $z_1 \in \chi_m^2$
 $z_2 \in \chi_k^2$

$$Z_1 = \frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2}{m} \xrightarrow{P} E \xi_1^2 = 1$$



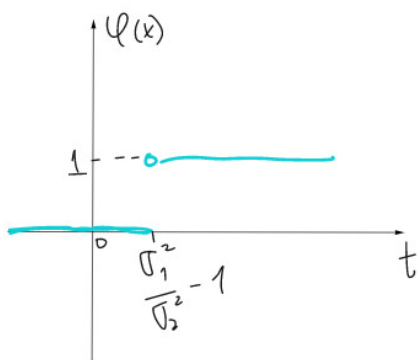
Т.е. $\xi_{n,m} \xrightarrow[n,m \rightarrow \infty]{} 1$

Поэтому, $\left. \begin{aligned} P(\xi < 1 - \epsilon) &\rightarrow 0 \\ P(\xi > 1 + \epsilon) &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - \epsilon < f_\delta < 1 + \epsilon \Rightarrow f_\delta \xrightarrow[n,m]{} 1 (*)$
 при больших n, m

Далее, т.к. верна H_0 , то $\sigma_1 \neq \sigma_2 \Rightarrow \frac{S_o^2(\vec{x})}{S_o^2(\vec{y})} \xrightarrow[n,m \rightarrow \infty]{} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

И по (*) можем сказать, что $\frac{S_o^2(\vec{x})}{S_o^2(\vec{y})} - f_{1-\epsilon} \rightarrow \underbrace{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 1}_{> 0}$

$\psi(x) = P\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 1 < x\right)$ — непрерывна в $x=0$ и ограничена, $P\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 1 < 0\right) = 0$



$$\alpha_2 = P_{H_0}\left(\frac{S_o^2(\vec{x})}{S_o^2(\vec{y})} < f_{1-\epsilon}\right) =$$

$$= P\left(\frac{S_o^2(\vec{x})}{S_o^2(\vec{y})} - f_{1-\epsilon} < 0\right) \xrightarrow{P} P\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 1 < 0\right) = 0$$