ДЗ 6

6.1. Случайная величина X имеет равномерное распределение на $[0;\ \pi]$. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $Y = \sin X$.

(6.1) $F_Y(t) = P(\sin X < t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{2\arcsin t}{\pi}, & t \in [0,1] \\ 1, & t > 1 \end{cases}$

Опр. равн. распр.

$$\boxed{u(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & t \in [0,\pi] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}} \Rightarrow U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{t}{\pi}, & t \in [0,\pi] \\ 1, & t > \pi \end{cases}$$

- При $t \in [0,1] \Rightarrow P(0 \le X \le \arcsin t) + P(\pi - \arcsin t \le X \le \pi)$

$$= U(\arcsin t) - U(0) + U(\pi) - U(\pi - \arcsin t)$$

$$= \frac{\arcsin t}{\pi} - 0 + 1 - \frac{\pi - \arcsin t}{\pi}$$

$$= \frac{2\arcsin t}{\pi}$$

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0, & \text{иначе} \\ 2\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}, & t \in [0,1] \end{cases}$$

miro

63 $\quad f_x(t) = \begin{cases} \theta t^{\theta-1}, & t \in [0,1] \\ 0, & t \notin [0,1] \end{cases} \Rightarrow F_x(t) \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^{\theta}, & t \in [0,1] \\ 1, & t > 1 \end{cases}$

$Y = -\ln X$

$F_y(t) = P(-\ln x < t) = P(\ln x > -t) = P(x > e^{-t})$

$1 - P(x \le e^{-t}) = 1 - F_x(e^{-t}) + P(e^{-t} = x)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0$

$0 \le e^{-t} \le 1$

$e^{-t} \le e^{0}$

$-t \le 0 \quad t \geq 0$

$f_y(t) = \left(1 - F_x(e^{-t})\right)' = \left(1 - e^{-t\theta}\right)' = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \theta e^{-t\theta}, & t \geq 0 \end{cases}$

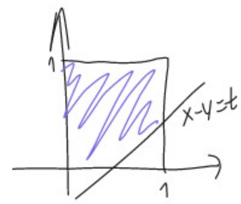
6.4

6.4. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно на [0; 1]. Найти плотность распределения случайной величины $X - Y$.

$$X, Y \in U_{0,1}$$

$$u_X = u_Y = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \Rightarrow U_X = U_Y = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \in [0,1] \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

$$F_{X-Y}(t) = P(X - Y < t) = 1 - \frac{(1-t)^2}{2} =$$



$$= \frac{2 - 1 + 2t - t^2}{2} = \frac{-t^2 + 2t + 1}{2} =$$

$$= -\frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2}$$

$$F_{X-Y}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -\frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2} \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

6.7

несовм $A \cap B = \emptyset$

незав $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

6.13. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно на [0; 1]. Найти плотность распределения случайной величины $\max(X, 2Y)$.

$$P\{X = y_k\} = P\{Y = y_k\} = p_k$$

y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_k
p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_k

x_1	x_2	$\dots$	x_k
p_1	p_2	$\dots$	p_k

$$P(X = Y) = P(X = y_k, Y = y_k) = P(X = y_k) \cdot P(Y = y_k) = \sum_k p_k^2$$

6.7. Случайные величины X и Y независимы и имеют одно и то же дискретное распределение $\mathbf{P}\{X = y_k\} = \mathbf{P}\{Y = y_k\} = p_k$, $k \geq 1$. Найти $\mathbf{P}\{X = Y\}$.

6.8. X и Y независимы, причем $\mathbf{P}\{X = 0\} = \mathbf{P}\{X = 1\} = 1/2$, а $\mathbf{P}\{Y < t\} = t$, $0 < t < 1$. Найти функции распределения случайных величин $X + Y$ и XY.

6.8

$$P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{2}$$

0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$P\{Y<t\} = t, \ t \in (0,1)$$

$$F_{xy}(t) = P(XY<t) = P(XY<t, \ X=0) + P(XY<t, \ X=1) =$$

$$= P(0<t) \cdot P(X=0) + P(Y<t) \cdot P(X=1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{2} + t\frac{1}{2} & t \in (0,1) \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

miro

6.10. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α. Найти распределения случайных величин:

а) $Y_1 = [X]$ (целая часть X);
б) $Y_2 = X - [X]$;
в) $Y_3 = X^2$;
г) $Y_4 = \alpha^{-1} \ln X$;
д) $Y_5 = \sqrt{X}$.

3. *Показательное (экспоненциальное) распределение* E_α. Плотность показательного распределения задается формулой

$$e_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

6.10

а) $P([X]=t) = P(x \in [t, t+1)) = E_\alpha(t+1) - E_\alpha(t)$

в) $Y_3 = X^2 \quad X \in E_\alpha$

$$P(X^2<t) = P(-\sqrt{t} < X < \sqrt{t}) = E_\alpha(\sqrt{t}) - E_\alpha(-\sqrt{t})$$

д) $Y_5 = \sqrt{x}$

$$P(\sqrt{x} < t) = P(x < t^2) = E_\alpha(t^2)$$

miro

6.13

6.13. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно на $[0; 1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\max(X,\ 2Y)$.

$$P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$$

$$X, Y \in U_{0,1} \Rightarrow u_x = u_y = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \Rightarrow U_x = U_y = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \in [0,1] \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

$$F_{\max(x,2y)}(t) = P(\max(x, 2y) < t) =$$

$$= P(x < t,\ 2y < t) = \underbrace{P(x < t)}_{U_x(t)} \cdot P(2y < t)$$

$$P(2y < t) = \underbrace{P\left(y < \frac{t}{2}\right)}_{U_y(t/2)}$$

$$U_y\left(\tfrac{t}{2}\right) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{2}, & 0 \le t \le 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t \cdot \frac{t}{2}, & t \in [0,1] \\ 1 \cdot \frac{t}{2}, & t \in (1,2] \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

$$f_{\max(x,2y)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{иначе} \\ t, & t \in [0,1] \\ \frac{1}{2}, & t \in (1,2] \end{cases}$$

miro