Теорема о свойствах выборочного среднего и выборочной дисперсии для выборок из нормальной совокупности

Теорема о свойствах нормальных выборок

Пусть $\vec{X} \in N_{a,\sigma^2}$, тогда

1) $\dfrac{\overline{X} - a}{\sigma}\sqrt{n} \in N_{0,1}$ 2) $\dfrac{nS^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1}$ 3) $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - a}{\sigma}\right)^2 = \dfrac{nS_1^2}{\sigma^2} \in \chi^2_n$

4) $\overline{X}$ и S – независимые 5) $\sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X} - a}{S_0}\right) \in T_{n-1}$

Доказательство:

1) $\vec{X} \in N_{a,\sigma^2}$ $\quad \overline{X} = \dfrac{\overbrace{X_1 + \ldots + X_n}^{\in N_{n\cdot a,\, n\sigma^2}}}{n} = \underbrace{(\sqrt{n}\sigma)\cdot\dfrac{1}{n}}_{A}\underbrace{\left(\dfrac{\sum X_i - na}{\sqrt{n}\sigma}\right)}_{\in N_{0,1}} + \underbrace{\dfrac{1}{n}\cdot na}_{B} \in N_{a,\frac{\sigma^2}{n}}$

$\overline{X} \in N_{a,\frac{\sigma^2}{n}}$

Следствие 1. *Если* $X \in \Phi_{\alpha,\sigma^2}$, *то* $Y = (X-\alpha)/\sigma \in \Phi_{0,1}$.
Следствие 2. *Если* $Y \in \Phi_{0,1}$, *то* $X = \sigma Y + \alpha \in \Phi_{\alpha,\sigma^2}$.
Следствие 3. *Если* $X \in \Phi_{\alpha,\sigma^2}$, *то* $Y = AX + B \in \Phi_{A\alpha+B,\sigma^2A^2}$.
Доказательство. Утверждения первых двух следствий прямо вытекают из формулы (2). Для доказательства третьего утверждения удобно сначала представить

$$AX + B = \sigma A\left(\frac{X-\alpha}{\sigma}\right) + A\alpha + B,$$

$\left(\dfrac{\overline{X} - a}{\sigma}\right)\sqrt{n} \in N_{0,1}$

2) $nS_1^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$

$\dfrac{nS_1^2}{\sigma^2} = \sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\underbrace{\dfrac{X_i - a}{\sigma}}_{\in N_{0,1} \text{ т.к. } X_i \in N_{a,\sigma^2}}\Big)^2 \in \chi^2_n$

3) $\dfrac{nS^2}{\sigma^2} = \dfrac{n}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - \overline{X} + a - a}{\sigma}\right)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - a}{\sigma} - \dfrac{\overline{X} - a}{\sigma}\right)^2 \circeq$

Обозначим $z_i = \dfrac{X_i - a}{\sigma}$, тогда $\overline{z} = \dfrac{X_1 - a + X_2 - a + \ldots + X_n - a}{n\sigma} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n - na}{n\sigma} = \dfrac{\overbrace{\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}}^{\overline{X}} - a}{\sigma}$

Тогда $\circeq \sum\limits_{i=1}^{n}(z_i - \overline{z})^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(z_i^2 - 2z_i\overline{z} + \overline{z}^2) = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2 - 2n\overline{z}^2 + n\overline{z}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2 - n\overline{z}^2 =$

$$= \sum_{i=1}^{n} z_i - \left(\sqrt{n}\,\overline{z}\right)^2$$

$$\sqrt{n}\,z = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$\left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \dots \frac{1}{\sqrt{n}} \right\| = 1$, этот вектор можно достроить до ортогональной матрицы, в которой он будет первой строкой

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{n}\,\overline{z} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Применим Лемму Фишера:

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = z_1^2 + \dots + z_n^2 - (n\sqrt{z})^2 \in \chi^2_{n-1} \quad (*)$$

4) По Л. Фишера, в $(*)$ $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ не зависит от $(\sqrt{n}\,\overline{z})$ но тогда S и $\overline{z} = \frac{\overline{X} - a}{\sigma}$ не зав.

5) $T_{n-1} = \dfrac{\xi_0}{\sqrt{\frac{z_{n-1}}{n-1}}}$ $\left.\begin{matrix} \xi_0 \in N_{0,1} \\ z_{n-1} \in \chi^2_{n-1} \end{matrix}\right\}$ незав. $\sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X} - a}{S_0}\right) \in T_{n-1}$

$$\left.\begin{matrix} \xi_0 = \left(\dfrac{\overline{X} - a}{\sigma}\right)\sqrt{n} \in N_{0,1} \\ z_{n-1} = \dfrac{nS^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1} \end{matrix}\right\} \eta = \frac{\left(\dfrac{\overline{X} - a}{\sigma}\right)\sqrt{n}}{\sqrt{\dfrac{nS^2}{\sigma^2 (n-1)}}} = \frac{\overline{X} - a}{S_0}\sqrt{n} \in T_{n-1}$$

S_0^2