Распределение суммы случайных величин, имеющих гамма распределение.

Пусть X_1 и X_2 независимы, $X_1 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1}$, $X_2 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_2}$. Тогда $X_1+X_2 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1+\lambda_2}$

Доказательство:

$f_{X_1+X_2}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{\alpha,\lambda_1}(u)\,\gamma_{\alpha,\lambda_2}(t-u)\,du$. Т.к. $\gamma_{\alpha,\lambda}(t)=0$ при $t \le 0$, то $\begin{cases} t>0 \\ t-u>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t>0 \\ t>u \end{cases}$

$$f_{X_1+X_2}(t) = \int\limits_0^t \frac{\alpha^{\lambda_1} u^{\lambda_1-1} e^{-\alpha u}}{\Gamma(\lambda_1)} \cdot \frac{\alpha^{\lambda_2} (t-u)^{\lambda_2-1} e^{-\alpha(t-u)}}{\Gamma(\lambda_2)}\,du = \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\cdot\Gamma(\lambda_2)} \int\limits_0^t u^{\lambda_1-1} \cancel{e^{-\alpha u}} \cdot (t-u)^{\lambda_2-1} e^{-\alpha t} \cdot \cancel{e^{\alpha u}}\,du$$

$$\left[\text{Замена } u = vt\right] = \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} e^{-\alpha t} \int\limits_0^t v^{\lambda_1-1} \cdot t^{\lambda_1-1} \cdot (t-vt)^{\lambda_2-1} \frac{dv}{t} = \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} e^{-\alpha t} \cdot t^{\lambda_1+\lambda_2-1} \underbrace{\int\limits_0^t v^{\lambda_1-1}(1-v)^{\lambda_2-1}\,dv}_{B(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)}}$$

$du = t\,dv$

$dv = \frac{du}{t}$

$$= \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)} e^{-\alpha t} \cdot t^{\lambda_1+\lambda_2-1} \quad \blacktriangle$$