Теорема о независимости функций от независимых случайных величин. Линейные преобразования случайных величин, применения к гауссовским распределениям.

Def Случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимые, если

$$F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{X_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(t_n)$$

Def Абсолютно непрерывные случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы $\iff f_{X_1 \dots X_n}(t_1, \dots, t_n) = f_{X_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(t_n)$

miro

Теорема о независимости функций от независимых случайных величин

Пусть случайные величины X и Y независимы, g и h – ф-ции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$

Тогда, $g(X)$ и $h(Y)$ – независимы

Доказательство:

$\forall B_1 \subset \mathbb{R}, B_2 \subset \mathbb{R}$

$$P(g(X) \in B_1, h(Y) \in B_2) = P(X \in \underbrace{g^{-1}(B_1)}_{\{y : g(y) \in B_1\}}, Y \in h^{-1}(B_2)) = [X \text{ и } Y \text{ – незав.}]$$

$$= P(X \in g^{-1}(B_1)) \cdot P(Y \in h^{-1}(B_2)) = P(g(X) \in B_1) \cdot P(h(Y) \in B_1)$$

miro

Линейные преобразования случайных величин.

- Теорема. Пусть ξ имеет ф-цию распределения $F_\xi(x)$ и плотность $f_\xi(t)$. Тогда для $\eta = a\cdot\xi + b$

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

miro

- Доказательство:

1) $[a>0]$ $F_\eta(x) = P(a\cdot\xi + b < x) = P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) =$

$$t = \frac{u-b}{a} \qquad dt = \frac{du}{a}$$

$$= \int_{-\infty}^{\left(\frac{x-b}{a}\right)} f_\xi(t)dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{t} \underbrace{f_\xi\left(\frac{u-b}{a}\right)}_{f_\eta(t)} du$$

2) $[a<0]$ $F_\eta(x) = P(a\cdot\xi + b < x) = P\left(\xi > \frac{x-b}{a}\right) = \int_{\left(\frac{x-b}{a}\right)}^{+\infty} f_\xi(t)dt =$

$$t = \frac{u-b}{a} \qquad u \to \infty \Rightarrow t \to -\infty$$
$$\frac{du}{a} = dt$$

$$= \frac{1}{a}\int_{t}^{-\infty} f_\xi\left(\frac{u-b}{a}\right)du = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{t} \underbrace{f_\xi\left(\frac{u-b}{a}\right)}_{f_\eta(t)} du$$

miro

Следствия: ∘ $\xi \in N_{a,\sigma^2}$, $\frac{\xi - a}{\sigma} \in N_{0,1}$

Δ $\eta = \xi \cdot \frac{1}{\sigma} - \frac{a}{\sigma}$

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\left|\frac{1}{\sigma}\right|} f_\xi\left(\frac{x - \frac{a}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \sigma \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\sigma\left(x + \frac{a}{\sigma}\right) - a\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \blacktriangle$$

∘ $\xi \in N_{0,1}$, $\sigma\xi + a \in N_{a,\sigma^2}$

$$\Delta \quad f_\eta(x) = \frac{1}{\sigma} f_\xi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad \blacktriangle$$

∘ $\xi \in U_{0,1}$, $a\xi + b \in U_{b,a+b}$ $(a>0)$ • $\frac{x-b}{a} = 0 \Rightarrow x = b$ • $\frac{x-b}{a} = 1 \Rightarrow x - b = a$, $x = a+b$

$$\Delta \quad u_\eta(x) = u_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{x-b}{a}\right)}{1-0}, & \frac{x-b}{a} \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x-b}{a}, & x \in [b, a+b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = u_{b,b+a}(x) \quad \blacktriangle$$

∘ $\xi \in E_\alpha$, то $\alpha\xi \in E_1$

$$\Delta \quad e_\eta(x) = \frac{1}{\alpha} e_\xi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\alpha e^{-\frac{x}{\alpha}\alpha} = e^{-x} \in E_1 \quad \blacktriangle$$