Сходимость по вероятности, ее свойства.

Def. Последовательность случайных величин $X_1, X_2, X_3, \dots$ сходится к X по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Def. Последовательность случайных величин $X_1, X_2, X_3, \dots$ слабо сходится к X $X_n \Rightarrow X$, если для любой точки непрерывности t функции $F_X(t)$, $F_{X_n}(t) \underset{n\to\infty}{\to} F_X(t)$.

Свойства:

1) $X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$

Δ $P(|X_n + Y_n - X - Y| > \varepsilon) \le P(|X_n - X| + |Y_n - Y| > \varepsilon) \le$

$$\le P(\{|X_n - X| > \tfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|Y_n - Y| > \tfrac{\varepsilon}{2}\}) \le \underbrace{P(|X_n - X| > \tfrac{\varepsilon}{2})}_{\to 0} + \underbrace{P(|Y_n - Y| > \tfrac{\varepsilon}{2})}_{\to 0} \to 0. \ \blacktriangle$$

2) $X_n \Rightarrow X$, $g(t)$ - непрерывная $\Rightarrow g(X_n) \Rightarrow g(X)$

3) $X_n \xrightarrow{P} X$, $g(t)$ - непрерывная $\Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$

4) Если $X_n \xrightarrow{P} X$ то $X_n \Rightarrow X$

5) Если $X_n \Rightarrow C$ то $X_n \xrightarrow{P} C$.

Δ Пусть $X_n \Rightarrow C$, т.е. $F_{X_n}(t) \to F_C(t) = \begin{cases} 0, & t \le c \\ 1, & t > c \end{cases} \quad \forall t \ne c$ т.к это точка разрыва

$$P(|X_n - C| < \varepsilon) = P(C - \varepsilon < X_n < \varepsilon + C) = F_{\xi}(c+\varepsilon) - F_{\xi}(c-\varepsilon) \to F_c(c+\varepsilon) - F_c(c-\varepsilon) = 1 + 0 = 1$$

Получили, что $P(|X_n - C| < \varepsilon) \to 1 \Rightarrow P(|X_n - C| \ge \varepsilon) \to 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} C$ $\blacktriangle$

6) Теорема Слуцкого

Если $X_n \xrightarrow{P} C$, $Y_n \Rightarrow Y$, то

1. $X_n + Y_n \Rightarrow C + Y$
2. $X_n \cdot Y_n \Rightarrow C \cdot Y$

miro