Универсально и экзистенциально аксиоматизируемые классы

Определение 22.1.

Пусть $\mathfrak{B} \in K_\sigma,\ A \subseteq |\mathfrak{B}|$. Будем говорить, что множество A **замкнуто относительно операций** модели $\mathfrak{B}$, если:

1) $\forall f^n \in \sigma,\ \forall a_1, \ldots, a_n \in A$: $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n) \in A$;

2) $\forall c \in \sigma,\ c^{\mathfrak{B}} \in A$.

Определение 22.2.

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$. $\mathfrak{A}$ – **подмодель** $\mathfrak{B}$ (обозначается $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), если:

1) $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$;

2) $\forall P^n \in \sigma,\ \forall a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется:

$$\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n);$$

3) $\forall f^n \in \sigma,\ f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n)$;

4) $\forall c \in \sigma,\ c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

Определение 22.3.

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$. $\mathfrak{A}$ - **элементарная подмодель** $\mathfrak{B}$(обозначается $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$), если:

1) $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$;

2) $\forall \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in F(\sigma), \forall a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n).$$

Пример:

Рассмотрим модели

$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}; +, \cdot, \leqslant \rangle$ и $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{Z}; +, \cdot, \leqslant \rangle$.

Является ли $\mathfrak{N}$ подмоделью $\mathfrak{M}$? Да, т.к. абсолютно все сохраняется(т.к. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$).

Является ли $\mathfrak{N}$ элементарной подмоделью $\mathfrak{M}$?

Рассмотрим формулу $\varphi(x, y) = \exists x \forall y \colon x \leqslant y$. В $\mathfrak{N}$ такой x существует, но в $\mathfrak{M}$ такого x нет $\Rightarrow \mathfrak{N}$ не является элементарной подмоделью $\mathfrak{M}$.

Элементарная подмодель сохраняет все свойства оригинальной модели. Получается "некоторая малая копия модели" с теми же свойствами.

Предложение 22.5. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Тогда для любого терма $t \in T(\sigma)$, где $FV(t) = \{x_1, \dots, x_n\}$, и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ имеет место $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$.

Доказательство. Будем доказывать индукцией по построению терма.

1. Пусть $t = x_1$. Тогда $t^{\mathfrak{A}}(a_1) = a_1 = t^{\mathfrak{B}}(a_1)$.
2. Пусть $t = c \in \sigma$. Тогда, по определению подмодели получим $t^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}} = t^{\mathfrak{B}}$.
3. Пусть $t = f(t_1, \dots, t_n)$, где $f \in \sigma, t_1, \dots, t_n \in T(\sigma)$ и $FV(t_1, \dots, t_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда, по Определению значения терма на модели, получим $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_n^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n))$. Далее, по

По индукционному предположению $t_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t_i^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$. *+ по опр. подмодели (для функций)*

$$f^{\mathfrak{A}}\left(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_n^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)\right) = f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_n{}^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)).$$

Таким образом, получаем $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = t^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$.

Предложение 22.5 доказано.

Определение 3.10 (Значение терма на модели). *Пусть дана сигнатура σ, модель $\mathfrak{A} \in \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\sigma})$ и множество переменных $\boldsymbol{X}$. Отображение $\boldsymbol{\gamma} \colon \boldsymbol{X} \to |\mathfrak{A}|$ называется* ***означиванием*** *переменных из множества $\boldsymbol{X}$ на модели $\mathfrak{A}$. Рассмотрим терм $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\sigma})$, пусть его переменные принадлежат множеству $\boldsymbol{X}$: $\boldsymbol{FV}(\boldsymbol{t}) \subseteq \boldsymbol{X}$. Определим* ***значение терма t на модели $\mathfrak{A}$****, которое обозначается $\boldsymbol{t}^{\mathfrak{A}}[\boldsymbol{\gamma}]$.*

1. *Пусть $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{x}$. Тогда $\boldsymbol{t}^{\mathfrak{A}}[\boldsymbol{\gamma}] = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x})$.*
2. *Пусть $\boldsymbol{t} = \mathrm{c}$. Тогда $\boldsymbol{t}^{\mathfrak{A}}[\boldsymbol{\gamma}] = \mathrm{c}^{\mathfrak{A}}$.*
3. *Пусть $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_1, \dots, \boldsymbol{t}_n)$. Тогда $\boldsymbol{t}^{\mathfrak{A}}[\boldsymbol{\gamma}] = \boldsymbol{f}^{\mathfrak{A}}(\boldsymbol{t}_1^{\mathfrak{A}}[\boldsymbol{\gamma}], \dots, \boldsymbol{t}_n^{\mathfrak{A}}[\boldsymbol{\gamma}])$.*

miro

Предложение 22.5.

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Тогда для $\forall \varphi(\overline{x}) \in F(\sigma)$ - бескванторной, $\forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$: *т.е если A - просто подмодель то для любой бескванторной формулы это выполняется*

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Если у нас простая подмодель дана, то для всех бескванторных формул это выполняется, но мы не можем проверить это для кванторных. В элементарных подмоделях и кванторные и бескванторные формулы выполняются.

Доказательство: По индукции формулы:

1) $\varphi = (t_1(\overline{x}) = t_2(\overline{x}))$

Тогда $\mathfrak{A} \vDash \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}(\overline{a}) = t_2^{\mathfrak{A}}(\overline{a}) \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{B}}(\overline{a}) = t_2^{\mathfrak{B}}(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(\overline{a})$;

2) $\varphi = P(\overline{x})$

Тогда $\mathfrak{A} \vDash \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash P(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash P(\overline{a}) \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(\overline{a})$;

3) $\varphi = \varphi_1 \mathbin{\&} \varphi_2$

Тогда $\mathfrak{A} \vDash \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi_1(\overline{a})$ и $\mathfrak{A} \vDash \varphi_2(\overline{a}) \Leftrightarrow$ (по индук-му предположению)

это условие необходимо и достаточно!

а теперь задаём вопрос, если модель является подмоделью, то при каком условии она будет элементарной подмоделью?

Теорема 22.7. (Критерий элементарного вложения) Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)$, имеющей вид $\exists x\, \psi(x, x_1, \dots, x_n)$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется условие *т.е нам не нужно проверять все формулы, а только такого вида*

$$\mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}| \colon \mathfrak{B} \vDash \psi(c, a_1, \dots, a_n).$$

miro

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exists x\, \psi(x, x_1, \dots, x_n)$ и $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$. Тогда, так как $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, то по определению элементарной подмодели, выполнено:

$$\mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Далее, по определению истинности формулы на модели получаем

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \exists x\, \psi(x, a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \vDash \psi(c, a_1, \dots, a_n).$$

И еще раз используя определение элементарной подмодели, получаем

$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{B} \vDash \psi(c, a_1, \dots, a_n)$, поэтому

а тут "склеили" две части

$\mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{B} \vDash \psi(c, a_1, \dots, a_n)$.

($\Leftarrow$) Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exists x\, \psi(x, x_1, \dots, x_n)$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется условие

$$\mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{B} \vDash \psi(c, a_1, \dots, a_n).$$

Покажем, что для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется условие

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

Представим формулу φ в предваренной нормальной форме. Т.е., пусть

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = Q_1 y_1 \dots Q_m y_m \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m),$$

где $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $i \in \{1, \dots, m\}$ и формула $\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ – бескванторная.

Будем доказывать индукцией по количеству кванторов m.

miro

1. Пусть $m = 0$. Тогда формула $\varphi -$ бескванторная. Следовательно верность утверждения следует из Предложения 22.6.

2. Допустим, что для любой формулы, содержащей m кванторов утверждение верно. Докажем, что утверждение будет верно и для формулы, содержащей $m+1$ квантор.

Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exists y \varphi'(y, x_1, \dots, x_n)$, где формула φ' содержит ровно m кванторов. Тогда, по определению истинности формулы на модели, имеем

$$\mathfrak{A} \vDash \exists y \varphi'(y, a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \vDash \varphi'(c, a_1, \dots, a_n).$$

Тогда, по индукционному предположению, и в силу того, что $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$ получим

тут как бы два следовния, сущ на А => сущ. на В и истинность(она в две стороны по инд. предп)

$$\exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \vDash \varphi'(c, a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \exists c \in |\mathfrak{B}|: \mathfrak{B} \vDash \varphi'(c, a_1, \dots, a_n).$$

И, следовательно,

$$\mathfrak{A} \vDash \exists y \varphi'(y, a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash \exists y \varphi'(y, a_1, \dots, a_n).$$

С другой стороны, из условия Теоремы вытекает

$$\mathfrak{B} \vDash \exists y \varphi'(y, a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{B} \vDash \varphi'(c, a_1, \dots, a_n).$$

По индукционному предположению получаем

$$\exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{B} \vDash \varphi'(c, a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \exists c \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \vDash \varphi'(c, a_1, \dots, a_n).$$

И, следовательно,

$$\mathfrak{B} \vDash \exists y \varphi'(y, a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \exists y \varphi'(y, a_1, \dots, a_n).$$

Пусть теперь $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \forall y \varphi'(y, x_1, \dots, x_n)$, где формула φ'содержит ровно m кванторов. Тогда

тождество ЛП (теорема полноты и корректности)

$$\mathfrak{A} \vDash \forall y \varphi'(y, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \neg \exists y \neg \varphi'(y, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow$$

из пред. пункта

$$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \nvDash \exists y \neg \varphi'(y, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \nvDash \exists y \neg \varphi'(y, x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \forall y \varphi'(y, x_1, \dots, x_n).$$

Теорема 22.7 доказана.

miro

Рассмотрим некоторую модель $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и возьмём за $C_A = \{c_a \mid a \in A\}$ - множество констант такое, что $C_A \cap \sigma = \varnothing$ и для $\forall a, b \in A$ выполняется условие $a \neq b \Rightarrow c_a \neq c_b$. Рассмотрим расширенную сигнатуру $\sigma_A = \sigma \cup C_A$. Рассмотрим модель $\mathfrak{A}_A = \mathfrak{A} \downharpoonleft \sigma_A$ (расширили на σ_A, т.е. $\mathfrak{A}_A = \langle A; \sigma_A \rangle$), где $c_a^{\mathfrak{A}_A} = a$.

Определение 22.7.

Пусть $\mathfrak{A} \in K_\sigma$. **Элементарной диаграммой** модели $\mathfrak{A}$ называют множество предложений $D(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \mathfrak{A}_A \vDash \varphi,\ \varphi$ - бескванторная$\}$.

Полной диаграммой модели $\mathfrak{A}$ называют множество предложений $FD(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \mathfrak{A}_A \vDash \varphi\}$.

Пример:

Приведём пример диаграммы. Возьмем, например, модель натуральных чисел $\mathfrak{M} = \langle \mathbb{N}; +, \cdot, \leqslant, 0, 1 \rangle$.

У нас могут быть предложения:

$\varphi_1 = \forall x\ (x \cdot 0 = 0)$ - истинное, $\varphi_2 = \forall x (x + 1 = x)$ - ложное.

Эти два предложения: φ_1 и $\neg\varphi_2$, попадают в теорию $\mathfrak{M}$. Но у нас может быть такая формула $x + y \leqslant 5$. И что с этим сделать? Нам надо определить, при каких означиваниях формулу можно будет добавить в диаграмму. Возьмём модель $\mathfrak{N}_{\mathbb{N}}$, расширенную на натуральный ряд, и если означивать переменные новыми получившимися константами, то мы получим вместо изначальной формулы множество предложений

$\varphi_3' = c_1 + c_2 \leqslant 1$. И подставляем константы далее, т.е. может быть

$\varphi_3'' = c_{10} + c_{50} \leqslant 1$ и $\varphi_3''' = c_{34} + c_{23} \leqslant 1$ и т.д. $C_i^{\mathfrak{A}} = i$? Походу да

Потом же все истинные образовавшиеся предложения мы добавляем в диаграмму. У нас в диаграмме прописывается все, что истинно, т.е. любые означивания формул. С моделью натуральных чисел все очевидно, но если возьмем иную модель, то уже не все так просто будет.

И чтобы задать модель, надо знать полную диаграмму. Полная диаграмма - это при всех означиваниях, что туда попадет, т.е. полная диаграмма полностью описывает модель. Если у нас известна полная диаграмма, то нам известна и вся описываемая модель. Если же известна элементарная диаграмма, то выяснить описываемую модель будет гораздо сложнее.

$\mathfrak{A} = \langle A, \sigma \rangle$ $\sigma = \{P^1\}$ $A = \{a_1, a_2, a_3\}$

$P(x)$ $\forall x P(x)$ $P(x) \& \neg P(y)$

$\exists \gamma : \mathfrak{A} \models P(x)[\gamma]$?

пусть мы знаем что:

$\mathfrak{A} \models P(a_1)$; $\mathfrak{A} \not\models P(a_2)$; $\mathfrak{A} \models P(a_3)$

тогда можем сказать что

$P(x)$ истина на каком-то наборе

$\forall x P(x)$ ложна

$P(x) \& \neg P(y)$ истина на каком-то наборе

расширим сигнатуру

$\sigma' = \{P^1, c_{a_1}, c_{a_2}, c_{a_3}\}$ $c_{a_i}^{\mathfrak{A}} = a_i$

$C_A = \{c_{a_1}, c_{a_2}, c_{a_3}\}$ $\mathfrak{A}_A = \langle A; \sigma \cup C_A \rangle$

$P(c_{a_1})$ $P(c_{a_2})$ $P(c_{a_3}) \in S(\sigma')$

$D(\mathfrak{A}) = \{P(c_{a_1}), \neg P(c_{a_2}), P(c_3)\}$

обогощаем синатуру константами и вмесето формул со свободными переменными вводим предложения, а потом выписываем атомарные предложения с этими новыми константами и получаем информацию о модели

для элементарной добавим сюда ещё с разными комбинациями констант предложения вида:

$P(x) \& \neg P(y)$

атомарная диаграма - истинность атомарных предложений

элементарная диаграма - все бескванторные предложения

а в полной диаграмме уже добавляем все возможные

если всё ещё не понятно:

$Q(x)$ – играть на пианино

$Q(\text{Саша})$ – и

$Q(\text{Паша})$ – л

но чтобы записать это формально мы говорим что

$\text{Саша} = a_i$ а в сигнатуру вводим c_{a_i}

miro

Замечание 22.8.

1) $Th(\mathfrak{A}) \subseteq FD(\mathfrak{A})$; *тут множество расширилось потому что расширилась сигнатура, остались все предложения которые были раньше и добавились с константами*

$Th\,\mathfrak{A} = \{\varphi \in S(\sigma) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$;

$FD(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma_A) \mid \mathfrak{A}_A \models \varphi\}$

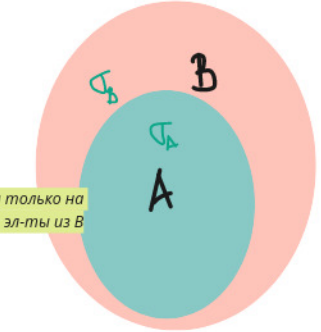
2) $D(\mathfrak{A}) \subseteq FD(\mathfrak{A})$ *очевидно, в элементврную входят только бескв., в полную все*

3) $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$; *если элементарная подмодель то нужно чтобы теории совпадали*

4) $Th(\mathfrak{A}) \cup D(\mathfrak{A}) \subseteq FD(\mathfrak{A})$. *следует из 1) и 2) ??*

в диаграмме бескванторные предложения, они все будут истины и на подмодели

Пусть $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, тогда $A = |\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}| = B$. Обозначим $\mathfrak{B}_A = \mathfrak{B}_B \restriction \sigma_A$.



Предложение 22.10. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$. Тогда

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \iff \mathfrak{B}_A \models D(\mathfrak{A}).$$

когда рассматриваем подмодель то расширяем только на эл-ты A, нам не надо брать эл-ты из B

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Возьмём предложение $\varphi \in D(\mathfrak{A})$. Тогда существует такая бескванторная формула $\psi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)$ и такие элементы $a_1, \dots, a_n \in A$, что $\varphi = \psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$. Следовательно, получим

$$\varphi \in D(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{A}_A \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A}_A \models \psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathfrak{B} \models \psi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B}_A \models \psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \Rightarrow \mathfrak{B}_A \models \varphi.$$

($\Leftarrow$) Пусть $\mathfrak{B}_A \models D(\mathfrak{A})$.

Возьмём бескванторную формулу $\psi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)$. Тогда для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in A$ имеем:

$$\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_A \models \psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \Leftrightarrow \psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \in D(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{B}_A \models \psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi(a_1, \dots, a_n).$$

1. *Если t_1 и t_2 — термы, то $t_1 = t_2$ — формула.*
2. *Если $t_1, \dots, t_s$ — термы и предикатный символ $P^s \in \sigma$, то $P(t_1, \dots, t_s)$ — формула.*
3. *Если φ и ψ — формулы, то $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$, $\exists x \varphi(x)$ и $\forall x \varphi(x)$ — формулы.*
4. *Других формул нет.*

Следовательно, по определению, получаем, что $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. *т.к предикаты это формулы!!*

выполняется для формул - выполняется для предикатов

Предложение 22.11. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ и $A \subseteq B$. Тогда

$$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B} \iff \mathfrak{B}_A \models FD(\mathfrak{A}).$$

($\Rightarrow$) Пусть $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$. Возьмём предложение $\varphi \in FD(\mathfrak{A})$. Существует такая формула $\psi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)$ и такие элементы $a_1, \dots, a_n \in A$, что $\varphi = \psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$ $\in S(\sigma)$. Следовательно, получим

по опр полной диагр.

$$\varphi \in FD(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{A}_A \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A}_A \models \psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathfrak{B} \models \psi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{B}_A \models \psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \Rightarrow \mathfrak{B}_A \models \varphi.$$

Определение 22.3.

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$. $\mathfrak{A}$ - **элементарная подмодель** $\mathfrak{B}$ (обозначается $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$), если:

1) $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$;

2) $\forall \varphi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma), \forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

($\Leftarrow$) Пусть $\mathfrak{B}_A \models FD(\mathfrak{A})$. Возьмём формулу $\psi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)$. Тогда для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in A$ имеем

$$\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A}_A \models \psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \Leftrightarrow \psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \in FD(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{B}_A \models \psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi(a_1, \dots, a_n).$$

Следовательно, по Определению 22.4, получим, что $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$.

Предложение 22.11 доказано.

Определение 22.14. Пусть $\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ – бескванторная формула сигнатуры σ. Тогда формула вида $\exists x_1 \dots \exists x_n \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ называется ***экзистенциальной формулой*** (или $\exists$-формулой), а формула вида $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ называется ***универсальной формулой*** (или $\forall$-формулой).

Определение 22.15. Говорят, что класс K ***замкнут относительно подсистем***, если вместе с каждой своей системой он содержит все ее подсистемы, т.е. если для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ выполняется условие

$$(\mathfrak{A} \in K \text{ и } \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{B} \in K.$$

Определение 22.16. Говорят, что класс K ***замкнут относительно надсистем***, если вместе с каждой своей системой он содержит все ее надсистемы, т.е. если для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ выполняется условие

$$(\mathfrak{A} \in K \text{ и } \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}) \Rightarrow \mathfrak{B} \in K.$$

Определение 22.17. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда **$\exists$-теорией** класса K называется множество предложений

$$Th_\exists(K) = \{\varphi \in Th(K) | \varphi - \exists - \text{формула}\}.$$

Определение 22.18. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда **$\forall$-теорией** класса K называется множество предложений

$$Th_\forall(K) = \{\varphi \in Th(K) | \varphi - \forall - \text{формула}\}.$$

Предложение 22.19. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда

обратное отношение галуа

a. $K \subseteq K(Th_\exists(K))$; $K \subseteq K(Th(K))$, $Th_\exists(K) \subseteq Th(K) \Rightarrow K(Th(K)) \subseteq K(Th_\exists(K))$

b. $K \subseteq K(Th_\forall(K))$.

Доказательство. a) Пусть $\mathfrak{A} \in K$. Выберем предложение $\varphi \in Th_\exists(K)$. Очевидно, что из $\varphi \in Th_\exists(K)$ следует, что $\varphi \in Th(K)$. А это означает, что $K \vDash \varphi$, в частности $\mathfrak{A} \vDash \varphi$. Таким образом, получаем, что $\mathfrak{A} \in K(Th_\exists(K))$.

b) Пусть $\mathfrak{A} \in K$. Выберем предложение $\varphi \in Th_\forall(K)$. Очевидно, что из $\varphi \in Th_\forall(K)$ следует, что $\varphi \in Th(K)$. А это означает, что $K \vDash \varphi$, в частности $\mathfrak{A} \vDash \varphi$. Таким образом, получаем, что $\mathfrak{A} \in K(Th_\forall(K))$.

Предложение 22.19 доказано.

Определение 22.20. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Класс K называется $\exists$-***аксиоматизируемым***, если существует такое множество $\exists$-предложений $\Gamma \subseteq S(\sigma)$, что $K = K(\Gamma)$.

Определение 22.21. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Класс K называется $\forall$-***аксиоматизируемым***, если существует такое множество $\forall$-предложений $\Gamma \subseteq S(\sigma)$, что $K = K(\Gamma)$.

Теорема 22.20. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда

a) Класс $K -$ $\exists$-аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $K = K(Th_\exists(K))$.

b) Класс $K -$ $\forall$-аксиоматизируем тогда и только тогда, когда $K = K(Th_\forall(K))$.

miro

Доказательство.

$K = K(\Gamma)$

$\varphi \in \Gamma \Rightarrow K \models \Gamma \Rightarrow K \models \varphi \Rightarrow \varphi \in Th(K)$

а) ($\Rightarrow$) Пусть класс $K -$ $\exists$-аксиоматизируем, значит существует такое множество $\exists$-предложений $\Gamma \subseteq S(\sigma)$, что $K = K(\Gamma)$. Очевидно, что тогда

потому что гамма - мн-во Е предложений, а раз K=K(Г) гамма содерджится в теории К а тогда, поскольку оно множество Е-предложений оно по опр содержится в Е -теории К

$\Gamma \subseteq Th_\exists(K)$. По Предложению 22.19 выполнено $K \subseteq K(Th_\exists(K))$. Покажем, что $K(Th_\exists(K)) \subseteq K$.

K = K(Г)

$\varphi - \exists$ ф-ла $\Rightarrow \varphi \in Th_\exists(K)$

т.к. Г содержится а Е-теории К

Пусть $\mathfrak{A} \in K(Th_\exists(K))$. Тогда $\mathfrak{A} \models Th_\exists(K)$ и, следовательно, $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Поэтому $\mathfrak{A} \in K(\Gamma) = K$. Мы показали, что $K(Th_\exists(K)) \subseteq K$, значит,

$K = K(Th_\exists(K))$.

($\Leftarrow$) Пусть $K = K(Th_\exists(K))$. Так как множество $\exists$-предложений $Th_\exists(K) \subseteq S(\sigma)$, то класс K $\exists$-аксиоматизируем.

b) ($\Rightarrow$) Пусть класс $K -$ $\forall$-аксиоматизируем, значит существует такое

т.к Г - множество А предложений и любая формула из гамма истина на К значит лежит в теории К а т.к. это А формула то принадлежит А теории

множество $\forall$-предложений $\Gamma \subseteq S(\sigma)$, что $K = K(\Gamma)$. Очевидно, что тогда $\Gamma \subseteq Th_\forall(K)$. По Предложению 22.19 выполнено $K \subseteq K(Th_\forall(K))$. Покажем, что $K(Th_\forall(K)) \subseteq K$.

по опр.

Пусть $\mathfrak{A} \in K(Th_\forall(K))$. Тогда $\mathfrak{A} \models Th_\forall(K)$ и, следовательно, $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Поэтому $\mathfrak{A} \in K(\Gamma) = K$. Мы показали, что $K(Th_\forall(K)) \subseteq K$, значит,

$K = K(Th_\forall(K))$.

miro

($\Leftarrow$) Пусть $K = K(Th_\forall(K))$. Так как множество $\forall$-предложений $Th_\forall(K) \subseteq S(\sigma)$, то класс K $\forall$-аксиоматизируем.

Теорема 22.21. Пусть класс $K \subseteq K_\sigma$ — аксиоматизируем. Тогда

a) Класс K — $\forall$-аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем.

b) Класс K — $\exists$-аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно надсистем.

Доказательство. Так как класс K — аксиоматизируем, то найдется такое множество предложений $\Gamma \in S(\sigma)$, что $K = K(\Gamma)$.

по опр

a) $\Rightarrow$) Пусть класс K — $\forall$-аксиоматизируем. Тогда $\Gamma = Th_\forall(K)$.

хотим доказать что A принадл. K т.е на A истинна Г

Выберем системы $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ такие, что $\mathfrak{B} \in K$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Пусть $\varphi \in \Gamma$. Тогда

потому что это предложение, св. переменных нет

предложение φ имеет вид $\forall x_1 \dots \forall x_n \psi(x_1, \dots, x_n)$, где формула $\psi(x_1, \dots, x_n)$ —

т.к. В принадл. К

бескванторная. Тогда получим, что $\mathfrak{B} \vDash \varphi$, т.е. $\mathfrak{B} \vDash \forall x_1 \dots \forall x_n \psi(x_1, \dots, x_n)$. Следовательно, по определению истинности формулы на модели, получим, что для любых $b_1, \dots, b_n \in |\mathfrak{B}|$ имеем $\mathfrak{B} \vDash \psi(b_1, \dots, b_n)$.А так как $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, то *по опр* и для любых $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ имеем $\mathfrak{B} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n)$. Далее, по Предложению 22.6 *что истинность бескв. формул сохраняется на подмодели* получаем, что для любых $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполнено $\mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n)$. Следовательно, $\mathfrak{A} \vDash \varphi$. Таким образом, мы получили, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$. Значит, $\mathfrak{A} \in K$, т.е. класс K замкнут относительно подсистем.

Предложение 22.6. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Тогда для любой бескванторной формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ имеет место $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

т.к K - аксиоматизируем

($\Leftarrow$) Пусть класс K замкнут относительно подсистем, $K = K(Th(K))$.

по пред. теореме

Рассмотрим $\Gamma \leftrightharpoons Th_\forall(K)$ и покажем, что $K(\Gamma) = K$. По Предложению 22.19 выполнено $K \subseteq K(Th_\forall(K))$, то есть $K \subseteq K(\Gamma)$. Поэтому осталось показать, что $K(\Gamma) \subseteq K$. Рассмотрим произвольную модель $\mathfrak{A} \in K(\Gamma) = K(Th_\forall(K))$.

Предложение 22.19. Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда

a. $K \subseteq K(Th_\exists(K))$;
b. $K \subseteq K(Th_\forall(K))$.

<u>*Случай 1.*</u> Пусть множество предложений $\Gamma \cup D(\mathfrak{A})$ — противоречиво. Тогда существуют такие предложения $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$ и $\psi_1, \dots, \psi_k \in D(\mathfrak{A})$, что секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_k \vdash$ доказуема.

потому что пси - бескванторная и если они все ист. на А то и конъюнкция истина на А

Пусть $\psi = (\psi_1 \& \dots \& \psi_k)$. Очевидно, что $\psi \in D(\mathfrak{A})$. Тогда существуют

исходной сигнатуры сигма

бескванторная формула $\xi(x_1, \dots, x_m)$ и элементы $a_1, \dots, a_m \in |\mathfrak{A}|$ такие, что $\psi = \xi(c_{a_1}, \dots, c_{a_m})$. Тогда имеем:

$$\cfrac{\cfrac{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \xi(c_{a_1}, \dots, c_{a_m}) \vdash}{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \neg\xi(c_{a_1}, \dots, c_{a_m})}}{\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \forall x_1 \dots \forall x_m \neg\xi(x_1, \dots, x_m)}$$

можем навесить квантор поскольку константы это термы (доказывали в ТОСМ)
и эти константы не содержатся в фи к.т фи из исходной сигнатуры

Так как секвенция $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \forall x_1 \dots \forall x_m \neg\xi(x_1, \dots, x_m)$ доказуема, то она

тк.к фи принадлежат Г

тождественно истинна. Поскольку $K \vDash \Gamma$, то $K \vDash \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Следовательно,

по опр. т.и. секвенции если истинно то что было до швабры то будет истинно и то что после

$K \vDash \forall x_1 \dots \forall x_m \neg\xi(x_1, \dots, x_m)$. А это означает, что

$$\forall x_1 \dots \forall x_m \neg\xi(x_1, \dots, x_m) \in Th_\forall(K) = \Gamma.$$

Следовательно,

т.к. по усл

Рассмотрим произвольную модель $\mathfrak{A} \in K(\Gamma) = K(Th_\forall(K))$.

$$\mathfrak{A} \vDash \forall x_1 \dots \forall x_m \neg\xi(x_1, \dots, x_m), \text{ т.е. } \mathfrak{A} \vDash \neg\xi(a_1, \dots, a_m).$$

ну берём кортеж подставляем

Тогда получим, что

$$\mathfrak{A}_A \vDash \neg\xi(c_{a_1}, \dots, c_{a_m}), \text{ т.е. } \neg\psi = \neg\xi(c_{a_1}, \dots, c_{a_m}) \in D(\mathfrak{A}).$$

Таким образом, мы пришли к противоречию с $\psi \in D(\mathfrak{A})$. значит Г и диаграмма А непротивореч

Случай 2. Пусть множество предложений $\Gamma \cup D(\mathfrak{A})$ непротиворечиво. Тогда, по теореме о существовании модели, найдется такая модель $\mathfrak{B}_A$, что модель исходной сигнатуры обогащённая константами из модели А $\mathfrak{B}_A \vDash \Gamma \cup D(\mathfrak{A})$. Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_A \upharpoonright \sigma$. Очевидно, что тогда $\mathfrak{B} \vDash \Gamma$. Следовательно, гамма содержит только предложения исходной сигнатуры поэтому она истинна на В $\mathfrak{B} \in K$. т.к K = K(Г)

так как класс К замкнут относительно подсистем по усл

С другой стороны, так как $\mathfrak{B}_A \vDash D(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Следовательно, $\mathfrak{A} \in K$. Стало быть, $K(Th_\forall(K)) \subseteq K$.

Предложение 22.10. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$. Тогда

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \iff \mathfrak{B}_A \vDash D(\mathfrak{A}).$$

Таким образом, мы показали, что $K = K(Th_\forall(K))$, т.е. класс K является $\forall$- аксиоматизируемым.

b) ($\Rightarrow$) Пусть класс K является $\exists$-аксиоматизируемым. Тогда $K = K(\Gamma)$, где любая формула $\varphi \in \Gamma$ является $\exists$-формулой.

Рассмотрим модели $\mathfrak{A} \in K$ и $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$. Покажем, что $\mathfrak{B} \vDash \Gamma$. что любая формкла из гамма истинна на В

Пусть $\varphi \in \Gamma$ имеет вид $\varphi = \exists x_1 \dots \exists x_n \psi(x_1, \dots, x_n)$. Тогда из того, что $\mathfrak{A} \vDash \exists x_1 \dots \exists x_n \psi(x_1, \dots, x_n)$ следует, что найдутся элементы $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ такие, что $\mathfrak{A} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n)$. А, так как $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, то $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{B}|$ и $\mathfrak{B} \vDash \psi(a_1, \dots, a_n)$. Следовательно, $\mathfrak{B} \vDash \exists x_1 \dots \exists x_n \psi(x_1, \dots, x_n)$, т.е. $\mathfrak{B} \vDash \varphi$. Таким образом, получили, что $\mathfrak{B} \vDash \Gamma$.

Предложение 22.6. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K_\sigma$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Тогда для любой бескванторной формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in F(\sigma)$ и для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ имеет место $\mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

($\Leftarrow$) Без доказательства.