Лемма Фишера.

Лемма Фишера

Пусть случайные величины $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $\forall i \in [1, n]$ $X_i \in N_{0,1}$, $\vec{Y} = A\vec{X}$

A – ортогональная матрица. Тогда $\forall r \in [1, n-1]$

$$Q = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 - Y_1^2 - \dots - Y_r^2 \in \chi^2_{n-r}$$

И Q не зависит от $Y_1, \dots, Y_r$.

Доказательство:

- Покажем, что $\forall i \in [1, n]$ $Y_i \in N_{0,1}$.

  $\vec{Y}$ – нормальный вектор по опр. (т.к. преобразование линейное)

  у $N_{0,1}$ она единичная

  Рассмотрим ковариационную матрицу: $C(\vec{Y}) = C(A\vec{X}) = A\,C(\vec{X})A^T = A \cdot A^T = E$

  по свойству $C(\vec{X})$ т.к A – ортогональная

  т.е $\vec{Y} \in N(0, \vec{E})$

- Так как A – ортогональная, а умножение на орт. матрицу не меняет норму вектора, то

  $$\|\vec{X}\| = \|\vec{Y}\| \Rightarrow \|\vec{X}\|^2 = \|\vec{Y}\|^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$

  т.к все Y_i независимы, то эта сумма не зависит от $Y_1, \dots, Y_r$

  Тогда верно $X_1^2 + \dots + X_n^2 - Y_1^2 - \dots - Y_r^2 = \underbrace{Y_{r+1}^2 + \dots + Y_n^2}_{\text{по опр } \in \chi^2_{n-r}}$