Свойства выборочных моментов.

Def. Выборочный момент порядка k — $\overline{X^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

Свойства:

1) $\mathbb{E}\overline{X^k} = \mathbb{E}X_1^k$ (если момент сущ.)

Δ $\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) = \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}X_1^k + \ldots + \mathbb{E}X_n^k\right) = \frac{n\,\mathbb{E}X_1^k}{n} = \mathbb{E}X_1^k$ $\blacktriangle$

2) $\overline{X^k} \xrightarrow{P} \mathbb{E}X_1^k$ (если момент сущ.)

Δ по ЗБЧ $\frac{X_1^k + \ldots + X_n^k}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}X_1^k$ $\blacktriangle$

3) $\mathbb{D}\overline{X} = \frac{\mathbb{D}X_1}{n}$

Δ $\mathbb{D}\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum \mathbb{D}X_i = \frac{1}{n^2} n\,\mathbb{D}X_1 = \frac{\mathbb{D}X_1}{n}$ $\blacktriangle$

Def. Смещенной выборочной дисперсией наз.

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Def. Несмещенной выборочной дисперсией наз.

$$S_0^2 = \frac{n}{n-1}S^2$$

Свойства:

1) $S^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$

Δ $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\overline{X} + \frac{1}{n}(\overline{X})^2 =$

$= \overline{X^2} - 2(\overline{X})^2 + (\overline{X})^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$ $\blacktriangle$

2) $\mathbb{E}S^2 = \frac{n-1}{n}\mathbb{D}X_1$

Δ $\mathbb{E}S^2 = \mathbb{E}\left(\overline{X^2} - (\overline{X})^2\right) = \mathbb{E}\overline{X^2} - \mathbb{E}(\overline{X})^2 = \mathbb{E}\overline{X^2} - \left(\mathbb{D}\overline{X} + (\mathbb{E}\overline{X})^2\right) =$

$\mathbb{D}\overline{X} = \mathbb{E}(\overline{X})^2 - (\mathbb{E}\overline{X})^2$

$= \mathbb{E}X_1^2 - \frac{\mathbb{D}X_1}{n} - (\mathbb{E}X_1)^2 = \mathbb{D}X_1 - \frac{\mathbb{D}X_1}{n} = \mathbb{D}X_1 \cdot \frac{n-1}{n}$ $\blacktriangle$

3) $\mathbb{E}S_0^2 = \mathbb{D}X_1$

4) $S^2 \xrightarrow{P} \mathbb{D}X_1$

Δ $S^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 \xrightarrow{P} \mathbb{E}X_1^2 - (\mathbb{E}X_1)^2 = \mathbb{D}X_1$ $\blacktriangle$

$g = t - s^2$ – непр. ф-я

5) $S_0^2 \xrightarrow{P} \mathbb{D}X_1$

Δ т.к. $\frac{n}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, то $S_0^2 = \frac{n}{n-1} S^2 \xrightarrow{P} \mathbb{D}X_1$