Приближение Пуассона для биномиального распределения

Теорема Пуассона

Пусть в схеме Бернулли $p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $np \to \lambda > 0$. Тогда

$$P(S_n = k) \to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

или

$$S_n \Rightarrow Y \in \Pi_\lambda$$

Доказательство: $\lambda_n = np_n$, по усл. $\lambda_n \to \lambda > 0$.

Подставим $p_n = \frac{\lambda_n}{n}$ в ф-лу Бернулли: $C_n^k \frac{\lambda_n^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} =$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\frac{\lambda_n^k}{n^k}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}}\cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \blacktriangle$$

$$\frac{n\cdot(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \to 1$$

Одного порядка

$$\frac{\lambda_n}{n} \to 0$$

Замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^x = e^n$$