Рекурсивные и рекурсивно-перечислимые множества

Определение 19.1. Множество называется ***разрешимым***, если существует ответ на вопрос: “Является ли данный объект элементом этого множества?” Этот алгоритм, единый для всех объектов данного множества называется разрешающей процедурой.

Множество называется ***перечислимым***, если существует алгоритм перечисления всех его элементов.

Здесь важно отметить следующее:

1. Перечисляются только элементы этого множества.

2. Любой элемент этого множества обязательно будет перечислен.

Определение 19.1.

Множество называется **разрешимым**, если существует ответ на вопрос: “*Является ли данный объект элементом этого множества?*” Этот алгоритм, единый для всех объектов данного множества, называется **разрешающей процедурой**.

Множество называется **перечислимым**, если существует алгоритм перечисления всех его элементов.

Пример перечисления: $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ девяток встретится в числе } \pi \\ 0, & \text{если } n \text{ девяток не встретится в } \pi \end{cases}$

Класс разрешимых множеств является подмножеством класса перечислимых множеств.

Определение 19.2.

Множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$ называется **рекурсивным (примитивно рекурсивным)**, если его характеристическая функция

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad \text{является } \textbf{орф (прф).}$$

Замечание 19.4.

Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$. Тогда $\chi_A(x)$ - **орф** $\Leftrightarrow$ $\chi_A(x)$ - **чрф**.

Доказательство: упражнение.

$(\Rightarrow)$ ОРФ $\subseteq$ ЧРФ : $\chi_A(x)$ - орф $\Rightarrow$ $\chi_A(x)$ - чрф

$(\Leftarrow)$ χ_A *всюду определена => она орф*

Определение 19.3.

Множество $A \subseteq \mathbb{N}^k$ называется **рекурсивно перечислимым**, если $A = \varnothing$ или существуют **орф**[1] $f_1, \ldots, f_k$ такие, что $A = \{\langle f_1(n), \ldots, f_k(n)\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$.

В частности, если $A \subseteq \mathbb{N}$ и существует **орф**[1] f такая, что $A = \rho f = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ - область значений, то A является рекурсивно перечислимым.

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
	x/y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	y
	0	0	1	3	6	10	15	21				
	1	2	4	7	11	16	22					
	2	5	8	12	17	23						
	3	9	13	18	24							
	4	14	19	25								
	5	20	26									
	6	27										
	7											
	8											
	9											
	x											

Пусть мн-во A - это мн-во вида {(x, y) | x - чётный, а y делится на 3}

f1(n) = хи_2(l(n))*l(n) + $\overline{sg}$(хи_2(l(n)))*2   хи_2(x) = $\overline{sg}$(x%2)
f2(n) = хи_3(r(n))*r(n) + $\overline{sg}$(хи_3(r(n)))*3   хи_3(x) = $\overline{sg}$(x%3)

A = {(f1(n) , f2(n)) | n принадлежит N}

f1(19) = 4
f2(19) = 1

Предложение 19.5.

Пусть множества $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$, $C \subseteq N^l$ - рекурсивны (примитивно рекурсивны). Тогда множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $\overline{A}$, $A \times C$ так же рекурсивны (примитивно рекурсивны).

Доказательство:

Пусть функции χ_A, χ_B и χ_C являются **орф** (**прф**). Тогда следующие функции также будут **орф** (**прф**):

1) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$; *умножение как-бы отражает "и"*
2) $\chi_{A \cup B}(x) = sg(\chi_A(x) + \chi_B(x))$; *чтобы не было двойки оборачиваем в сигнум, + отражает или*
3) $\chi_{\overline{A}}(x) = \overline{sg}\, \chi_A(x)$;
4) $\chi_{A \times C}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_C(y)$. *первая координата в множестве A а вторая координата в C*
5) $\chi_{A \backslash B}(x) = \chi_A(x) \cdot \overline{sg}(\chi_B(x))$. *лежит в A и не лежит в Б* $A \backslash B = A \cap \overline{B}$

Предложение доказано.

Предложение 19.6.

Пусть множества $A, B \subseteq \mathbb{N}^k,\ C \subseteq N^l$ рекурсивно перечислимы. Тогда $A \cup B,\ A \cap B,\ A \times C$ также рекурсивно перечислимы.

Доказательство: упражнение.

Замечание 19.7.

Класс **ПРМ** $\subseteq$ **РМ**.

Доказательство:

Т.к. **ПРФ** $\subseteq$ **ОРФ** $\Rightarrow$ **ПРМ** $\subseteq$ **РМ**.

Замечание доказано.

Предложение 19.8.

Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k,\ B = \{c^k(x_1, \ldots, x_k) \mid \langle x_1, \ldots, x_k \rangle \in A\} \subseteq \mathbb{N}$.

Тогда A - **рм (прм)** $\Leftrightarrow B$ - **рм (прм)**.

Доказательство:

$\boxed{(\Rightarrow)}$ Пусть A - **рм (прм)** $\Rightarrow \chi_A$ - **орф (прф)**. Построим характеристическую функцию для $B:\ \chi_B(y) = \chi_A(c_1^k(y), \ldots, c_k^k(y))$ - **орф (прф).**

$\boxed{(\Leftarrow)}$ Если $\chi_B(y)$ - **орф (прф)**. Построим характеристическую функцию $\chi_A(\langle x_1, \ldots, x_k \rangle) = \chi_B(c^k(x_1, \ldots, x_k))$ - **орф (прф)**.

Предложение доказано.

Предложение 19.9.

РМ $\subseteq$ **РПМ**.

Доказательство:

1) $A = \varnothing \Rightarrow A$ - **рпм**; по определению

2) $A \neq \varnothing \Rightarrow$ при $k = 1$ $\exists a \in \mathbb{N}:$ $a \in A$. A - **рм** $\Rightarrow \chi_A$ - **орф**. Построим функцию $f(n) = n \cdot \chi_A(n) + a \cdot \overline{sg}(\chi_A(n))$ - **орф**. Тогда $A = \rho f$, т.е. f будет перечислять множество $A \Rightarrow A$ - **рпм**.

то есть если текущий эл-т не принадлежит,
то возвращаем какой-то один элемент
иначе просто исходный элемент

Предложение доказано.

Теорема 19.10.(Поста)

Пусть $A \subseteq \mathbb{N}^k$.

Тогда A рекурсивно $\Leftrightarrow$ $A, \overline{A}$ являются **рпм**.

раз мы можем перечислить те, что принадлежат,
и те, что не принадлежат - можем и сказать
принадлежит ли множеству какой то эл-т

Доказательство:

$\boxed{(\Rightarrow)}$ Пусть A - рекурсивно $\Rightarrow$ A, $\overline{A}$ - **рпм**.

из 19.5 пункт 3 про дополнение
и предл. 19.9

$\boxed{(\Leftarrow)}$ Пусть A, $\overline{A}$ - **рпм**.

ρ – область значений

Рассмотрим случай, когда $k = 1$:

- Если $A = \varnothing \Rightarrow A$ - рекурсивно (упр.). хи тождественно = 0
- Если $\overline{A} = \varnothing \Rightarrow A = \mathbb{N} \Rightarrow A$ - рекурсивно (упр.). хи тождественно = 1
- Рассмотрим случай, когда $A \neq \varnothing$, $\overline{A} \neq \varnothing$, т.е. $A \neq \mathbb{N} \Rightarrow \exists$**орф** f, g :

$A = \rho f$ и $\overline{A} = \rho g$. Тогда $\chi_A(x) = \overline{sg}(|f(\mu y[|f(y) - x| \cdot |g(y) - x| = 0]) - x|)$, что является **орф** (упр.).

оператор минимизации аргумент при котором либо f либо g вернёт x
если x принадлежит A то вернет аргумент f иначе аргумент g

Случай $k > 1$: без доказательства.

оператор минимизации - аргумент f если в 1) вернули арумент f то
результатом будет x и мы получим 0

Теорема доказана.

$A = \rho f = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\bar{A} = \rho g = \{g(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

дополнение sg(0) = 1 что нам и нужно

Теорема 19.11.(об эквивалентных определениях рпм)

Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$, тогда будут эквивалентны следующие условия:

1) A - **рпм**;

2) $\exists$**чрф** f такая, что $A = \rho f$;

3) $A = \varnothing$, либо $\exists$**прф** f такая, что $A = \rho f$;

4) $\exists$**прм** $B \subseteq \mathbb{N}^2$ такое, что $A = \{x \mid \exists y : (x, y) \in B\}$, т.е. A - проекция;

5) $\exists$**рм** $B \subseteq \mathbb{N}^2$ такое, что $A = \{x \mid \exists y : (x, y) \in B\}$;

6) $\exists$**чрф** f такая, что $A = \delta f = \{x \mid f(x) \ -$ определена$\}$.

Без доказательства.

область значений
функции Эф

ни для какого икса эта функция не определена

(**1** $\Rightarrow$ **2**) Пусть $A = \emptyset$, тогда $f(x) = \mu y[S(x) = 0]$. Тогда $A = \rho f = \emptyset$.

Если же $A \neq \emptyset$, то, по определению, найдется такая общерекурсивная функция f, что $A = \rho f$. Из того, что f – общерекурсивная функция следует, что f – частично рекурсивная функция. так как A - рпм

(**2** $\Rightarrow$ **3**) Пусть $A = \rho g$, где g – частично рекурсивная функция. Тогда

$g(z) = l(\mu y[\, h(z, y) = \ 0\,])$, где h – примитивно рекурсивная функция.

Пусть $x \leftrightharpoons c(y, z)$ и $t(x) \leftrightharpoons \overline{sg} h(r(x), l(x)) \cdot sg(\prod_{i=0}^{l(x) \dot{-} 1} h(r(x), i)$. Очевидно, что $t(x)$ – примитивно рекурсивная функция.

Если $A \neq \emptyset$, то найдется элемент $a \in A$ такой, что функция

$$f(x) = l\left(l\,(x)\right) \cdot t(x) + \ a \cdot \overline{sg}\,\left(t(x)\right)$$

является примитивно рекурсивной. Докажем, что $A = \rho f$.

а) Пусть $b = f(n)$ покажем, что $b \in A$. Если $t(n) = 0$, то $b = f(n) = a \in A$. Если же $t(n) = 1$, то, при $y \leftrightharpoons l(n)$ и $z = r(n)$, получим, что y – минимальный элемент такой, что $h(z, y) = 0$. Тогда $g(z) = l(y) = l(l(n)) = f(n) \in A$. Таким образом, получили, что $\rho f \subseteq A$.

б) Пусть $b \in A$. Тогда найдется такой элемент $z \in \mathbb{N}$, что $g(z) = b = l(\mu y[h(z, y) = 0])$. Следовательно, найдется такой элемент y, что для любого $p < y$ имеет место $h(z, p) \neq 0$ и $h(z, y) = 0$. Положим $n \leftrightharpoons c(y, z)$. Тогда $t(n) = 1$. Следовательно, $f(n) = l(l(n)) = l(y) = b$. Таким образом, получим, что $A \subseteq \rho f$.

(**3** $\Rightarrow$ **4**) Если $A = \emptyset$, то берём $B = \emptyset$, которое, очевидно, является примитвно рекурсивным. просто говорим, что характ. ф-я - тождеств. равна нулю

Пусть $A = \rho f$, где f – примитивно рекурсивная функция. Положим $B = \{(x, y) | f(y) = x\}$. Очевидно, что характеристическая функция $\chi_B(x, y) = \overline{sg}|f(y) - x|$ является примитивно рекурсивной. Следовательно, множество B примитивно рекурсивно. Тогда получим, что

A = { f(n) | n - натуральное число} - это было по определению
Далее сказали, что то же самое можно записать как { x | ...}

$$A = \rho f = \{x | \exists y: f(y) = x\} = \{x | \exists y: (x, y) \in B\}.$$

(**4** $\Rightarrow$ **5**) Если B – примитивно рекурсивное множество, то, очевидно, B – рекурсивное множество.

характ. фун-я - прф , тогда она и орф

(**5** $\Rightarrow$ **6**) Пусть $A = \{x | \exists y: (x, y) \in B\}$, где B – рекурсивное множество. Тогда характеристическая функция χ_B является общерекурсивной. Тогда функция $f(x, y) = \mu y[\overline{sg}\, \chi_B(x, y) = 0]$ является частично рекурсивной. Не трудно понять, что $A = \delta f$.

(**6** $\Rightarrow$ **2**) Пусть $A = \delta g$, где g – частично рекурсивная функция. Положим $f(x) \leftrightharpoons x + O(g(x))$. Тогда (2)

по равенству (1)

а) Если $x \in A$, то $x \in \delta g$, т. е. функция g – определена. Следовательно, $f(x)$ – определена и $f(x) = x$. А значит, получим, что $x \in \rho f$.

б) Если $x \notin A$, то $x \notin \delta g$, т. е. функция g – не определена. Следовательно, $f(x)$ – не определена. А значит $x \notin \rho f$.

Таким образом, получили что $A = \rho f$.

(**3** $\Rightarrow$ **1**) Пусть $A \neq \emptyset$. Тогда найдется такая примитивно рекурсивная функция f, что $A = \rho f$. Следовательно, f является общерекурсивной функцией. А значит A – рекурсивно перечислимое множество.

A = пустому множеству - это просто по определению будет РПМ

Теорема 19.12 доказана.