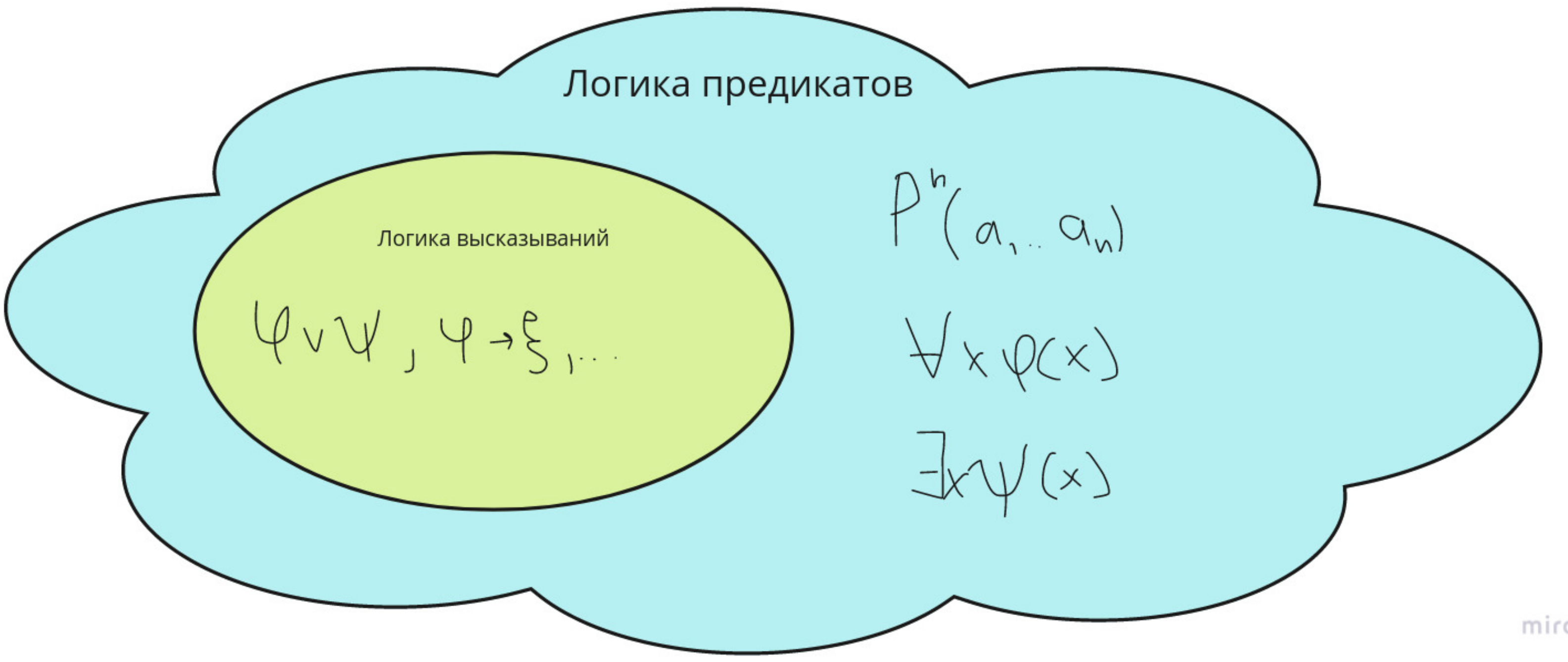
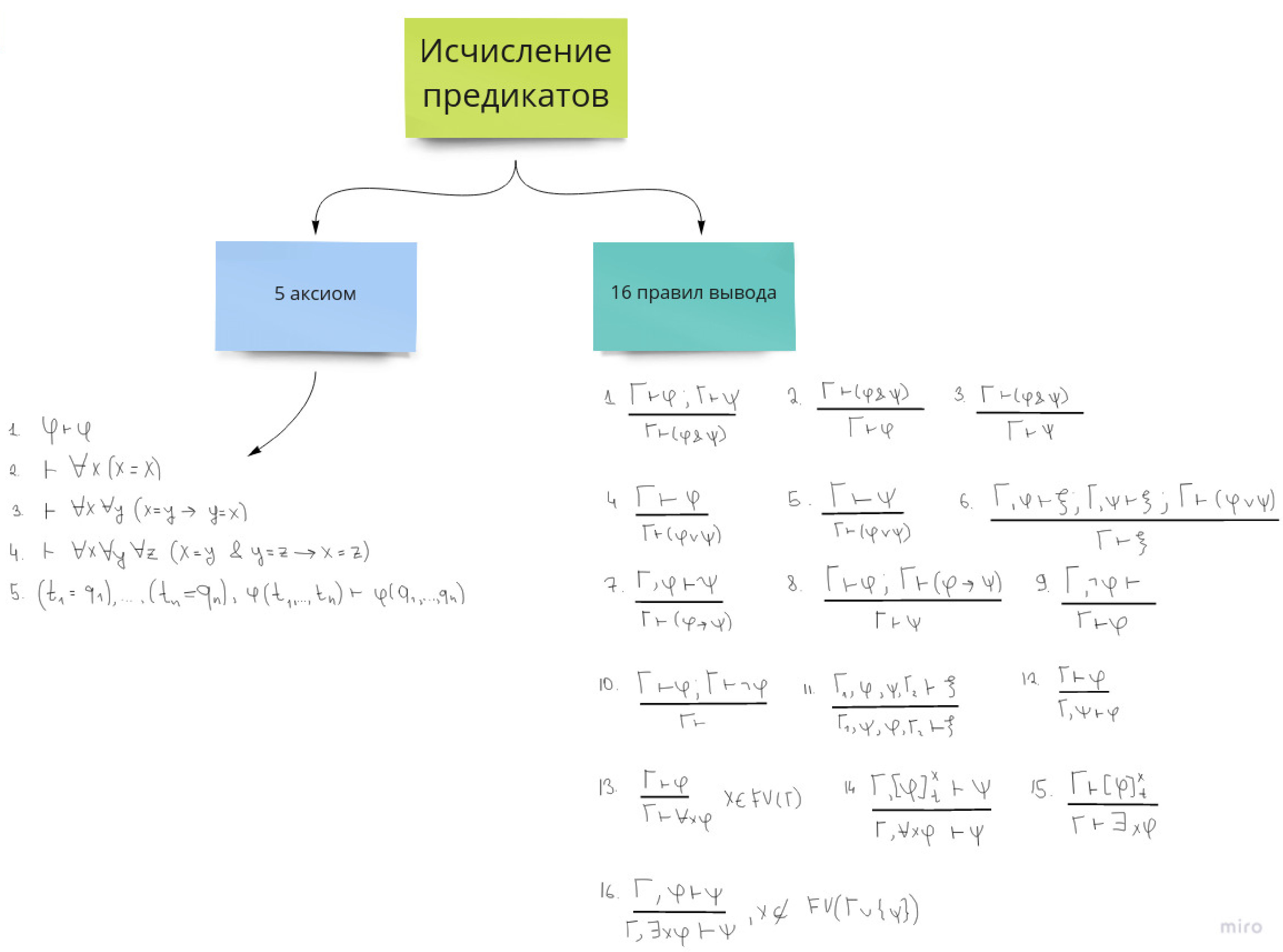
Секвенциальное исчисление предикатов





Предложение 14.11.

а) Если секвенция логики предикатов получена из доказуемой секвенции логики высказываний подстановкой формул логики предикатов вместо пропозициональных переменных, то эта секвенция доказуема в секвенциональном исчислении предикатов.

б) Правила вывода, допустимые (производные) в секвенциональном исчислении высказываний, являются допустимыми (производными) и в секвенциональном исчислении предикатов.

Доказательство.

а) Пусть секвенция логики предикатов S' получена из доказуемой секвенции логики высказываний S подстановкой формул логики предикатов вместо пропозициональных переменных Рассмотрим в секвенциональном исчислении высказываний дерево вывода D, заканчивающееся на секвенцию S. Заменим в дереве вывода D пропозициональные переменные на формулы. Тогда аксиомы секвенционального исчисления высказываний перейдут в аксиомы секвенционального исчисления предикатов, а правила вывода секвенционального исчисления высказываний перейдут переходят в правила вывода секвенционального исчисления предикатов. Таким образом, мы получим в секвенциональном исчислении предикатов дерево вывода D', заканчивающееся на секвенцию S'. Стало быть, секвенция S доказуема в секвенциональном исчислении предикатов.

Пусть $D = \dfrac{D_1, \ldots, D_n}{S}$ дерево вывода, S – секвенция ЛВ

$$S' = [S]^{A_1, \ldots, A_n}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}, \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ – формулы}$$

$$D' = [D]^{S_i}_{S'_i}; \quad D' = \dfrac{D'_1, \ldots, D'_k}{S'} \text{ – дерево вывода в ЛП}$$

Предложение 14.12.

Следующие деревья секвенций высоты 2 являются допустимыми правилами вывода в секвенциональном исчислении предикатов:

$$1)\ \frac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi \,\&\, \xi) \vdash (\psi \,\&\, \xi)} \quad 2)\ \frac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \,\&\, \varphi) \vdash (\xi \,\&\, \psi)} \quad 3)\ \frac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi \vee \xi) \vdash (\psi \vee \xi)}$$

$$4)\ \frac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \vee \varphi) \vdash (\xi \vee \psi)} \quad 5)\ \frac{\varphi \vdash \psi}{(\psi \to \xi) \vdash (\varphi \to \xi)} \quad 6)\ \frac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \to \varphi) \vdash (\xi \to \psi)}$$

$$7)\ \frac{\varphi \vdash \psi}{\neg\psi \vdash \neg\varphi} \quad 8)\ \frac{\Gamma \vdash \forall x\varphi}{\Gamma \vdash \varphi} \quad 9)\ \frac{\varphi \vdash \psi}{\forall x\varphi \vdash \forall x\psi}$$

$$10)\ \frac{\varphi \vdash \psi}{\exists x\varphi \vdash \exists x\psi}$$

Доказательство: упражнение.

1)

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\varphi, \xi \vdash \psi} \qquad \dfrac{\xi \vdash \xi}{\psi, \xi \vdash \xi}\text{(обед. пос.)}}{\dfrac{(\varphi \& \xi) \vdash \psi; \quad (\varphi \& \xi) \vdash \xi}{(\varphi \& \xi) \vdash (\psi \& \xi)}\text{(1)}}$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\xi \vdash \xi}{(\xi \& \varphi) \vdash \xi}; \quad \dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \& \varphi) \vdash \psi}}{\quad}\text{(1)}$$

3)

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\varphi \vdash (\psi \vee \xi)}\text{(4)}; \quad \dfrac{\xi \vdash \xi}{\xi \vdash (\psi \vee \xi)}\text{(4)}; \quad (\varphi \vee \xi) \vdash (\varphi \vee \xi)}{(\varphi \vee \xi) \vdash (\psi \vee \xi)}\text{(6)}$$

5)

сечение

$$\dfrac{\Gamma \vdash \psi, \ \Gamma, \psi \vdash \xi}{\Gamma \vdash \xi}$$

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \psi \quad \dfrac{\psi \vdash \psi; (\psi \to \xi) \vdash (\psi \to \xi)}{(\psi \to \xi), \psi \vdash \xi}\text{(8)}}{(\psi \to \xi), \varphi \vdash \xi}}{(\psi \to \xi) \vdash (\varphi \to \xi)}\text{(7)}$$

6) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\xi\vdash\xi;\ (\xi\to\varphi)\vdash(\xi\to\varphi)}{(\xi\to\varphi),\xi\vdash\varphi}\,(8)\qquad \varphi\vdash\psi}{(\xi\to\varphi),\xi\vdash\psi}\,(\text{сеч})}{(\xi\to\varphi)\vdash(\xi\to\psi)}\,(7)$$

7) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi\vdash\psi}{\neg\psi,\varphi\vdash\psi}\ ;\ \dfrac{\neg\psi\vdash\neg\psi}{\neg\psi,\varphi\vdash\neg\psi}}{\neg\psi,\varphi\vdash}}{\neg\psi\vdash\neg\varphi}$$

8) $$\dfrac{\Gamma\vdash\forall x\varphi;\ \dfrac{\varphi\vdash\varphi}{\Gamma,\forall x\varphi\vdash\varphi}\,(14)}{\Gamma\vdash\varphi}\,(\text{сеч})$$

9) $$\dfrac{\dfrac{\varphi\vdash\psi}{\forall x\varphi\vdash\psi}\,(14)}{\forall x\varphi\vdash\forall x\psi}\,(13)$$

10) $$\dfrac{\dfrac{\varphi\vdash\psi}{\exists x\varphi\vdash[\psi]^x_t}\,(16)}{\exists x\varphi\vdash\exists x\psi}\,(15)$$

14.13 $\varphi\equiv\psi \iff \varphi\vdash\psi$ и $\psi\vdash\varphi$ – док-

Предложение 14.14.

$\equiv$ - отношение эквивалентности.

Доказательство: упражнение.

а) $\varphi\vdash\varphi \Rightarrow \varphi\equiv\varphi$ рефлексивно √

б) $\varphi\equiv\psi \Rightarrow \left.\begin{matrix}\varphi\vdash\psi\\ \psi\vdash\varphi\end{matrix}\right\}$ док. $\Rightarrow \psi\equiv\varphi$ симметрично √

в) $\varphi\equiv\psi,\ \psi\equiv\xi \Rightarrow \left.\begin{matrix}\varphi\vdash\psi\\ \psi\vdash\varphi\\ \psi\vdash\xi\\ \xi\vdash\psi\end{matrix}\right\}$ док-мы $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\varphi\vdash\psi;\ \psi\vdash\xi}{\varphi\vdash\xi}\ ,\ \dfrac{\xi\vdash\psi;\ \psi\vdash\varphi}{\xi\vdash\varphi} \Rightarrow$

$$\dfrac{\varphi\vdash\psi;\ \dfrac{\psi\vdash\xi}{\vdash(\psi\to\xi)}\,(7)}{\varphi\vdash\xi}\,(8)$$

расшифровка

$\Rightarrow \left.\begin{matrix}\varphi\vdash\xi\\ \xi\vdash\varphi\end{matrix}\right\}$ док. $\Rightarrow \varphi\equiv\xi$ транзитивно √

Предложение 14.15.

Пусть $\varphi \equiv \varphi_1$, $\psi \equiv \psi_1$, тогда:

1) $(\varphi \vee \psi) \equiv (\varphi_1 \vee \psi_1)$;

2) $(\varphi \,\&\, \psi) \equiv (\varphi_1 \,\&\, \psi_1)$;

3) $(\varphi \to \psi) \equiv (\varphi_1 \to \psi_1)$;

4) $\neg\varphi \equiv \neg\varphi_1$;

5) $\forall x\varphi \equiv \forall x\varphi_1$;

6) $\exists x\varphi \equiv \exists x\varphi_1$.

Доказательство: упражнение.

$$\varphi \equiv \varphi_1,\ \psi \equiv \psi_1 \Rightarrow \varphi \vdash \varphi_1,\ \varphi_1 \vdash \varphi,\ \psi \vdash \psi_1,\ \psi_1 \vdash \psi$$

1)
$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi_1}{\varphi \vdash (\varphi_1 \vee \psi_1)} \qquad \dfrac{\psi \vdash \psi_1}{\psi \vdash (\varphi_1 \vee \psi_1)}}{\dfrac{(\varphi \vee \psi), \varphi \vdash (\varphi_1 \vee \psi_1);\ (\varphi \vee \psi), \psi \vdash (\varphi_1 \vee \psi_1);\ (\varphi \vee \psi) \vdash (\varphi \vee \psi)}{(\varphi \vee \psi) \vdash (\varphi_1 \vee \psi_1)}\,(6)}$$

в обратную точно так же

2)
$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi_1;\ \psi \vdash \psi_1}{\varphi, \psi \vdash \varphi_1 \& \psi_1}}{(\varphi \& \psi) \vdash (\varphi_1 \& \psi_1)}$$

в обратную точно так же

3) 5) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\psi \to \xi) \vdash (\varphi \to \xi)}$ 6) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \to \varphi) \vdash (\xi \to \psi)}$

$$\dfrac{\varphi_1 \vdash \varphi}{(\varphi \to \psi) \vdash (\varphi_1 \to \psi_1)}\,(5) \qquad \dfrac{\psi \vdash \psi_1}{(\varphi_1 \to \psi_1) \vdash (\varphi \to \psi)}\,(6)$$

крч тут все пункты убиваются однократным применением этих правил, доказанных выше

1) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi \,\&\, \xi) \vdash (\psi \,\&\, \xi)}$ 2) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \,\&\, \varphi) \vdash (\xi \,\&\, \psi)}$ 3) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\varphi \vee \xi) \vdash (\psi \vee \xi)}$

4) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \vee \varphi) \vdash (\xi \vee \psi)}$ 5) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\psi \to \xi) \vdash (\varphi \to \xi)}$ 6) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{(\xi \to \varphi) \vdash (\xi \to \psi)}$

7) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\neg\psi \vdash \neg\varphi}$ 8) $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x\varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$ 9) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\forall x\varphi \vdash \forall x\psi}$

10) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\exists x\varphi \vdash \exists x\psi}$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ – т.и если

для любой модели при любом означивании если на модели истины фи1...фи_н то на ней должна быть истина фи

$\forall \mathfrak{A} \in K(\sigma(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi\})$ и $\forall \gamma : FV(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi\}) \to |\mathfrak{A}|$

если $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\gamma], \ldots, \mathfrak{A} \models \varphi_n[\gamma]$, то $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$

Секвенция $\vdash \varphi$ называется тождественно истинной, если фи истинно на любой модели (сигнатуры этой формулы) при любом означивании

Секвенция $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash$ называется тождественно истинной, если для любой модели при любом означивании хотя бы одна из формул фи ложна на модели(сигнатуры этих формул)

14.18 очевидным образом вытекает из определения 14.17

14.19 аналогична основной теореме из 10 параграфа

лемма 14.20 говорит: а) если свехру истинные секв то и снизу истинная

б) если сверху т.и. то и снизу т.и

далее по индукции, в ветках дерева у нас аксиомы, они т.и. значит снизу под аксиомами тоже т.и. секвенции, так далее до корневой S всё будет т.и.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть секвенция S доказуема. Тогда существует доказательство $S_1, \ldots, S_n = S$.

Будем доказывать индукцией по длине доказательства n.

Базис индукции: $n = 1$. В этом случае секвенция S является аксиомой. Поэтому, по Лемме 14.20 (а), секвенция S является тождественно истинной.

Допустим, что для любого $k < n$ утверждение теоремы является верным. Докажем это утверждение для секвенции S, длина доказательства $S_1, \ldots, S_n$ которой равно n.

Из того, что $S_1, \ldots, S_n = S$ является доказательством, по определению доказательства имеем: для секвенции $S_n = S$ существуют такие доказуемые секвенции $S_{k_1}, \ldots S_{k_l}$ (где $k_1, \ldots, k_l < n$), что дерево $\dfrac{S_{k_1}; \ldots; S_{k_l}}{S}$ является правилом вывода. По индукционному предположению получаем, что секвенции $S_{k_1}, \ldots, S_{k_l}$ являются тождественно истинными, так как длина доказательства каждой из них равна k_i, которое меньше n. Поэтому, применяя

Предложение 14.21.

Пусть $x \notin FV(\xi)$, тогда имеют место следующие эквивалентности:

1) $\forall x \xi \equiv \xi$;

2) $\exists x \xi \equiv \xi$;

3) $\forall x \forall y \varphi \equiv \forall y \forall x \varphi$;

4) $\exists x \exists y \varphi \equiv \exists y \exists x \varphi$;

5) $\neg \exists x \varphi \equiv \forall x \neg \varphi$;

35

6) $\neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$;

7) $(\forall x \varphi \mathbin{\&} \forall x \psi) \equiv \forall x (\varphi \mathbin{\&} \psi)$;

8) $(\exists x \varphi \vee \exists x \psi) \equiv \exists x (\varphi \vee \psi)$;

9) $((\forall x \varphi) \mathbin{\&} \xi) \equiv \forall x (\varphi \mathbin{\&} \xi)$;

10) $((\exists x \varphi) \mathbin{\&} \xi) \equiv \exists x (\varphi \mathbin{\&} \xi)$;

11) $((\forall x \varphi) \vee \xi) \equiv \forall x (\varphi \vee \xi)$;

12) $((\exists x \varphi) \vee \xi) \equiv \exists x (\varphi \vee \xi)$;

13) $\forall x [\varphi]^z_x \equiv \forall y [\varphi]^z_y$, если $\forall x \varphi(x) \equiv \forall y \varphi(y)$ (если не возникает коллизий);

14) $\exists x [\varphi]^z_x \equiv \exists y [\varphi]^z_y$, если $\exists x \varphi(x) \equiv \exists y \varphi(y)$ (если не возникает коллизий).

Доказательство: упражнение.

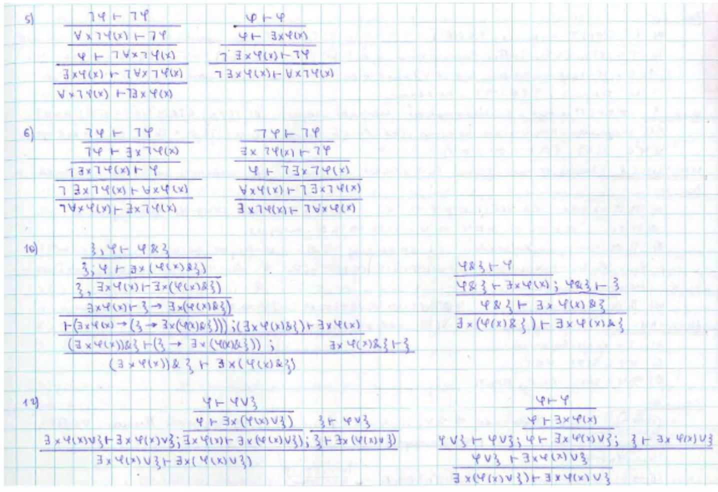
1) $\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\forall x \varphi \vdash \varphi}$ (14) $\qquad \dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \forall x \varphi}$ (13)

2) $\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\exists x \varphi \vdash \varphi}$ (16) $\qquad \dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\varphi \vdash \exists x \varphi}$

3) $\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\forall y \varphi \vdash \forall x \varphi}\text{(доп. п9)}}{\forall x \forall y \varphi \vdash \forall y \forall x \varphi}$ (доп. п9)

9) $\dfrac{\varphi \vdash \psi}{\forall x \varphi \vdash \forall x \psi}$

4) аналогично по 10 допустимому правилу



7) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\forall x\varphi \vdash \varphi}\,(14) \quad ; \quad \dfrac{\psi \vdash \psi}{\forall x\psi \vdash \psi}\,(14)}{\forall x\varphi,\ \forall x\psi \vdash (\varphi \& \psi)}\,(1)}{(\forall x\varphi \& \forall x\psi) \vdash \forall x(\varphi \& \psi)}$$

(объединение посылок + 13)

в обратную аналогично, упражнение))))))))))))))))

8) $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\exists x\varphi \vdash \varphi}\,16}{\exists x\varphi \vdash (\varphi \vee \psi)}\,4 \quad \dfrac{\dfrac{\psi \vdash \psi}{\exists x\psi \vdash \psi}\,16}{\exists x\psi \vdash (\varphi \vee \psi)} \quad ; \quad (\exists x\varphi \vee \exists x\psi) \vdash (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)}{(\exists x\varphi \vee \exists x\psi) \vdash (\varphi \vee \psi)}\,6}{(\exists x\varphi \vee \exists x\psi) \vdash \exists x(\varphi \vee \psi)}\,(15)$$

14.22 предваренная нормальная форма - все кванторы стоят за скобками

$Q_i = \{\exists, \forall\}$, ψ - бескв.

$\varphi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi(x_1, \ldots, x_n)$

Вообще не эквивалентная, а равносильная, не????

Хотя кому это блин надо

Теорема 14.23.

Для всех формул φ существует эквивалентная ей формула $\psi \equiv \varphi$, находящаяся в ПНФ.

Доказательство: Алгоритм приведения формулы к ПНФ:

1) Избавляемся от импликаций;

2) С помощью тождеств 5, 6 из 14.21., а также законов де Моргана и снятия двойного отрицания, вносим отрицание под кванторы.

3) С помощью тождеств 13, 14 переобозначаем переменные так, чтобы:

а) разные кванторы действовали по разным переменным;

б) каждая переменная имела либо только свободное, либо только связанное вхождение.

36

4) С помощью 9-12 выносим кванторы наружу.

В результате получим формулу, эквивалентную изначальной, но находя-

5) $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$;

6) $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$;

9) $((\forall x\varphi) \& \xi) \equiv \forall x(\varphi \& \xi)$;

10) $((\exists x\varphi) \& \xi) \equiv \exists x(\varphi \& \xi)$;

11) $((\forall x\varphi) \vee \xi) \equiv \forall x(\varphi \vee \xi)$;

12) $((\exists x\varphi) \vee \xi) \equiv \exists x(\varphi \vee \xi)$;

13) $\forall x[\varphi]^z_x \equiv \forall y[\varphi]^z_y$, если $\forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y)$ (если не возникает коллизий);

14) $\exists x[\varphi]^z_x \equiv \exists y[\varphi]^z_y$, если $\exists x\varphi(x) \equiv \exists y\varphi(y)$ (если не возникает коллизий).