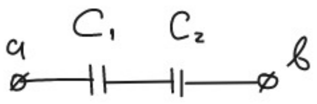
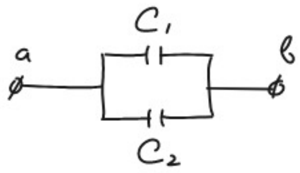
Seminar 3

Конденсатор $-\|-_{C}$ $\quad U_C = \frac{1}{C}\int i_C\,dt$, $i_C = C\cdot\frac{dU_C}{dt}$

Катушка инд. $\overset{L}{-eee-}$ $\quad U_L = L\cdot\frac{di_L}{dt}$, $i_L = \frac{1}{L}\int U_L\,dt$

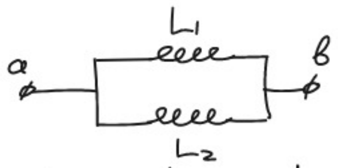


$$\frac{1}{C_{ab}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



$$C_{ab} = C_1 + C_2$$

$$L_{ab} = L_1 + L_2$$

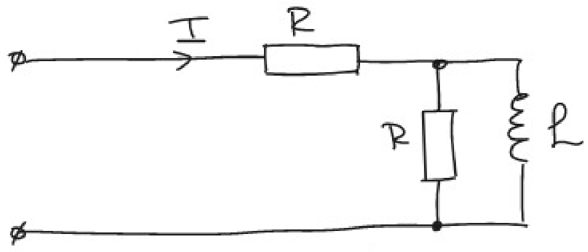


$$\frac{1}{L_{ab}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ – емкостное реактивное сопротивление $\qquad \dot{I} = \frac{1}{jX_C}\dot{U}$

$X_L = \omega L$ - индуктивное реактивное сопротивление $\qquad \dot{U} = jX_L\cdot\dot{I}$, j - мнимая еденица

(3.1)



Импеданс: $Z = R + \frac{j\omega L\cdot R}{j\omega L + R} =$

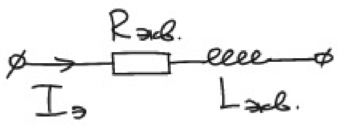
(домножив на сопряженное)

$$= R + \frac{R j\omega L(R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} = R + \frac{R^2 j\omega L}{R^2+\omega^2L^2} + \frac{R^2\omega^2L^2}{R^2+\omega^2L^2} =$$

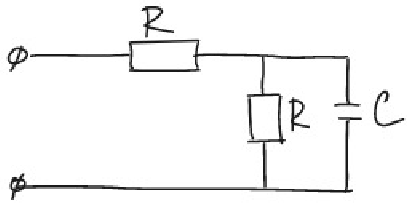
$$= \underbrace{R + \frac{R^2\cdot\omega^2L^2}{R^2+\omega^2L^2}}_{R_{экв.}} + j\omega\underbrace{\frac{R^2L}{R^2+\omega^2L^2}}_{L_{экв.}}$$

$I_э = I$

Получим цепь, эквивалентную исходной:



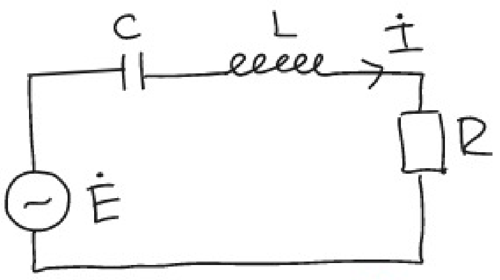
(3.2)



$$Z = R + \frac{R\cdot\left(-\frac{1}{\omega C}j\right)}{R - \frac{j}{\omega C}} = R + \frac{R^2\left(-\frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \frac{1}{\omega^2C^2}} - \frac{R\left(-\frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \frac{1}{\omega^2C^2}} =$$

$$= R + \frac{R\cdot\frac{1}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2C^2}} - \frac{R^2\frac{1}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2C^2}}$$

3.3



$\dot{E} = 10V = E_m e^{j\varphi}$, $\varphi = 0$ для простоты

$X_c = -j \cdot 5\ \Omega$

$X_L = j \cdot 15\ \Omega$

$R = 10\ \Omega$

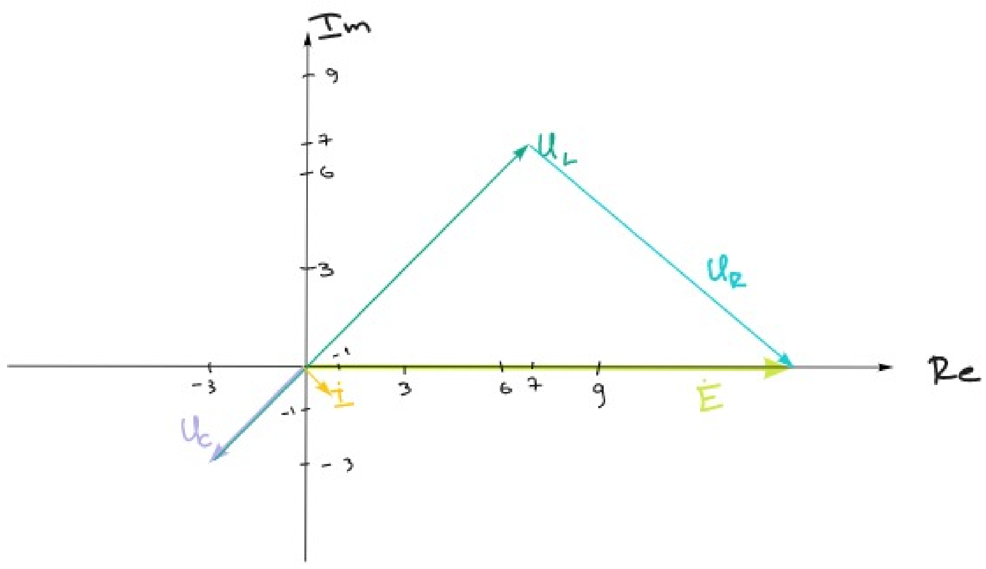
$\dot{I}$ - ?

$a + jb = \sqrt{a^2+b^2} \cdot e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{b}{a}}$

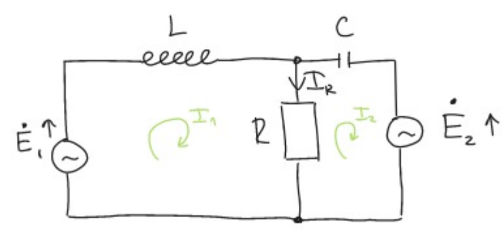
$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{\dot{E}}{R + X_L + X_c} = \frac{\dot{E}}{10+10j} = \frac{\dot{E}}{10 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j \cdot 45^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \cdot 45^\circ}$$

$$\dot{U}_c = \dot{I} \cdot X_c = -\frac{j \cdot 5}{\sqrt{2}} e^{-j \cdot 45^\circ} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j \cdot 135^\circ}$$

$$\dot{U}_L = \frac{15}{\sqrt{2}} e^{j \cdot 45^\circ} \qquad U_R = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ}$$



3.4



$\dot{E}_1 = 1V$ $\quad X_L = j\Omega$ $\quad R = 1\Omega$

$\dot{E}_2 = jV$ $\quad X_c = -j\Omega$ $\quad I_R$ - ?

По методу контурных токов:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 (j\omega L + R) - \dot{I}_2 R = \dot{E}_1 \\ \dot{I}_2 \left(\frac{1}{j\omega C} + R\right) - \dot{I}_1 R = -\dot{E}_2 \end{cases}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 + \dot{I}_2 R}{j\omega L + R} = \frac{1 + \dot{I}_2}{j + 1}$$

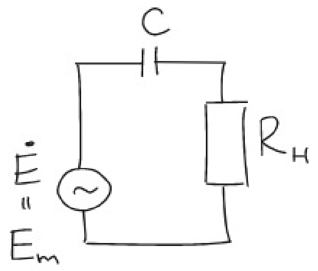
$$\dot{I}_2 = \frac{-\dot{E}_2 + \dot{I}_1 R}{\left(\frac{1}{j\omega C} + R\right)} = \frac{-j + \frac{1 + \dot{I}_2}{j+1}}{1-j} = \frac{\frac{1 - j + 1 + \dot{I}_2}{j+1}}{1-j} = \frac{2 - j + \dot{I}_2}{2}$$

$$2\dot{I}_2 = 2 - j + I_2 \Rightarrow I_2 = 2 - j$$

$$I_1 = \frac{1 + 2 - j}{j+1} = \frac{(3-j)(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{3 - 3j - j - 1}{1 + j - j + 1} = \frac{2-4j}{2} = 1 - 2j$$

$$I_R = I_1 - I_2 = 1 - 2j - 2 + j = -1 - j$$

(3.5)



согл. режим

$R_н : P_н = max - ?$ $\quad P_н = I_{rms}^2 \cdot R_н$ – мощность

$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, rms – root mean square

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z}, \quad Z = X_c + R = \frac{1}{j\omega C} + R = R - \frac{1}{\omega C}\cdot j = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}\, e^{-j\,\mathrm{arctg}\frac{1}{R\omega C}}$$

$\dot{I} = I_m \cdot e^{j\varphi}$

$$\dot{I} = \frac{E_m \cdot e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{1}{R\omega C}}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}; \quad I_{rms} = \frac{E_m}{\sqrt{2}\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

$$P_н = \frac{E_m^2 \cdot R}{2\cdot\left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)}$$

Найдем max: $\frac{dP_н}{dR} = 0$ $\quad P_н' = \frac{E_m^2}{2}\,\frac{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} - 2R^2}{\left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)^2} = 0$

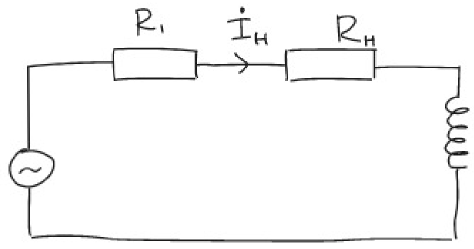
$$R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} - 2R^2 = 0$$

$$R^2 = \frac{1}{\omega^2 C^2}$$

$$R = \frac{1}{\omega C} = |X_c|$$

miro

(3.6)



$R_1 = 10\ \Omega$
$I_{H_{rms}} = 10A$
$P_н = 15$ кВт

$\cos\varphi = 0{,}75$ – коэф. мощности (какую долю в общей мощности составляет активная)

φ - угол между током и нагрузкой

$P_н = I_{rms} \cdot U_{rms} \cdot \cos\varphi$ – активная мощность

$S_н = I_{rms} \cdot U_{rms}$ – полная мощность

$\dot{E}$ - ? $\quad \eta$ - ? (КПД)

$$R_н = \frac{P_н}{I_{rms}^2} = \frac{15\cdot 10^3}{10^2} = 150\,\Omega$$

$$\eta = \frac{R_н}{R_1 + R_н} = \frac{150}{160} = 0{,}9375$$

По пр. Кирхгофа:

$$\dot{I}_н (R_1 + R_н + j\omega L) = \dot{E}$$

$Z_н = R_н + j\omega L$ – комплесное число =>

$Z_н = \underset{150}{\rho} \cdot \underbrace{\cos\varphi}_{0{,}75} + j\cdot \rho \cdot \sin\varphi$; $\quad \cos\varphi = 0{,}75 \Rightarrow \varphi \approx 41{,}4°$

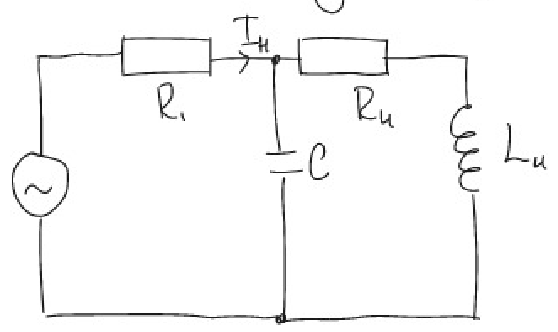
$\Rightarrow \rho = 200$, $\sin\varphi = 0{,}6 \Rightarrow \rho\cdot\sin\varphi = 132$

$$\dot{I}_н (160 + j\cdot 132) = \underset{I_{rms}\cdot\sqrt{2} = 10\sqrt{2}}{I_m} (160 + j132) = 2930\, e^{j39{,}5} = \dot{E}$$

miro

(3.7) Изменить прошлую цепь, чтобы КПД был выше.

Добавим конденсатор с такой емкостью C, чтобы $\cos\varphi = 1$



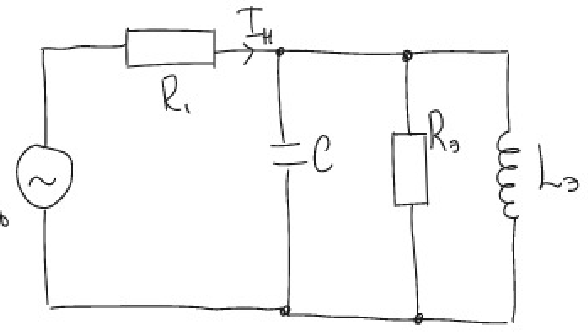
Емкость должна компенсировать индуктивность цепи,

для этого $\frac{1}{\omega L_э} = C_к \omega$

$$Z = R + j(X_L - X_C)$$

$$C_к = \frac{1}{\omega^2 L_э}$$

Выполним экв. преобр. цепи:



$$\frac{1}{Z_н} = \underbrace{\frac{\cos\varphi}{|Z_н|}}_{1/R_э} + j\underbrace{\frac{\sin\varphi}{|Z_н|}}_{1/\omega L_э} \text{ — проводимость}$$

$|Z_н| = 200$ т.к. $Z_н = R_э + j\omega L_э = \rho\cos\varphi + j\rho\cdot\sin\varphi$; $\rho = 200$

$$C_к = \frac{1}{\omega^2 L_э} = \frac{\sin\varphi}{\omega |Z_н|} = \frac{0{,}66}{3.14\cdot 200} = 10{,}5\ \mu F$$

$$\frac{1}{R_э} = \frac{\cos\varphi}{|Z_н|} \Rightarrow R_э = \frac{|Z_н|}{\cos\varphi} = \frac{200}{0{,}75} = 266\ \Omega$$

$$\eta = \frac{266}{10 + 260} = 0{,}963$$