Теорема Гливенко-Кантелли.

Прежде поговорим о свойствах Эмпирической Функции Распределения

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - выборка из распределения $\mathcal{F}$ с функцией распределения F и пусть F_n^* - эмпирическая функция, построенная по этой выборке. Тогда

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad F_n^*(y) \xrightarrow{p} F(y)$$

Доказательство: По определению, $F_n^*(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i < y)$

Случайные величины $I(X_i < y)$ независимы и одинаково распределены.
Чтобы применить ЗБЧ, осталось проверить что их мат. ожидание конечно.

$$\mathbb{E}\, I(X_1 < y) = 1 \cdot P(X_1 < y) + 0 \cdot P(X_1 \geq y) = P(X_1 < y) = F(y) < \infty$$

Тогда, по ЗБЧ: $F_n^*(y) = \dfrac{I(X_1 < y) + \ldots + I(X_n < y)}{n} \xrightarrow{p} \mathbb{E}\, I(X_1 < y) = F(y)$

Следующая теорема говорит о том, что с ростом объема выборки наибольшее из расхождений стремится к нулю.

Теорема Гливенко - Кантелли

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - выборка из распределения $\mathcal{F}$ с функцией распределения F и пусть F_n^* - эмпирическая функция, построенная по этой выборке. Тогда

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} |F_n^*(y) - F(y)| \xrightarrow[n \to \infty]{p} 0$$

Без доказательства.

- $F_n^*(y)$ - несмещенная оценка для $F(y)$

$$\Delta \quad \mathbb{E} F_n^*(y) = \mathbb{E} \frac{\sum_{i=1}^{n} I(X_i < y)}{n} = \frac{n\, \mathbb{E}(I(X_1 < y))}{n} = P(X_1 < y) = F(y)$$