Сравнение оценок. Понятие эффективной оценки.

Def: Функцией среднеквадратического отклонения оценки θ^* наз.

$$\delta_{\theta^*}(\theta) = E(\theta^* - \theta)^2$$

если $\mathbb{D}\theta^* < \infty$

Def: Говорят, что θ^* не хуже, чем θ^{**} (в среднеквадратическом смысле)

если $\forall \theta \quad \delta_{\theta^*}(\theta) \leq \delta_{\theta^{**}}(\theta)$

- Для несмещенных оценок $\delta_{\theta^*}(\theta) = \mathbb{D}\theta^*$

Доказательство: $\mathbb{E}(\theta^* - \theta)^2 = \mathbb{E}(\theta^* - \theta + \mathbb{E}\theta^* - \mathbb{E}\theta^*)^2 = \mathbb{E}((\theta^* - E\theta^*) + (\mathbb{E}\theta^* - \theta))^2 =$

$$= \underbrace{\mathbb{E}(\theta^* - \mathbb{E}\theta)^2}_{\mathbb{D}\theta^*} + \underbrace{2\,\mathbb{E}[(\theta^* - \mathbb{E}\theta^*)(\mathbb{E}\theta^* - \theta)]}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{E}\theta^* - \theta)^2}_{b(\theta)\text{ - смещение}} = \mathbb{D}\theta^* + \underset{0}{\overset{\shortparallel}{b_{\theta^*}(\theta)}} = \mathbb{D}\theta^* \ \blacktriangle$$

т.к. $\mathbb{E}(\theta^* - E\theta^*) = \mathbb{E}\theta^* - \mathbb{E}\theta^* = 0$

т.к. оценка несмещ. и $\mathbb{E}\theta^* = \theta$

Пример: $\vec{X} \in U_{[0,\theta]}$ $\quad \theta^* = 2\overline{X}$, $\quad \hat{\theta} = X_{(n)}$ $\qquad \mathbb{D}X_1 = \frac{b^2 - a^2}{12} = \frac{\theta^2}{12}$

- $\delta_{2\overline{X}}(\theta) = \mathbb{D}(2\overline{X}) \overset{\text{несмещ.}}{=} 4\mathbb{D}\overline{X} = 4\frac{\mathbb{D}X_1}{n} = \frac{4\theta^2}{12n} = \frac{4\theta^2}{3n}$

Надо найти $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}X_{(n)}^2$ для $X_{(n)}$:

$$F_{X_{(n)}}(y) = P(X_{(n)} < y) = P(X_1 < y, X_2 < y, \ldots, X_n < y) = P^n(X < y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{y^n}{\theta^n}, & x \in [0,\theta] \\ 1, & x > \theta \end{cases}$$

$$f_{X_{(n)}}(y) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,\theta] \\ \frac{n y^{n-1}}{\theta^n}, & x \in [0,\theta] \end{cases}$$

$$\mathbb{E}X_{(n)} = \int_0^\theta y \cdot \frac{n \cdot y^{n-1}}{\theta^n}\,dy = \frac{n}{\theta^n}\frac{y^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\theta = \frac{n\theta}{n+1}$$

$$\mathbb{E}X_{(n)}^2 = \int_0^\theta y^2 \frac{n\cdot y^{n-1}}{\theta^n}dy = \frac{n}{\theta^n}\frac{y^{n+2}}{n+2}\Big|_0^\theta = \frac{n\theta^2}{n+2}$$

$$n^2\theta + n\theta - \underbrace{2n^2\theta^2}_{-n^2\theta^2} - \underbrace{4n\theta^2}_{-n\theta^2} + \theta^2 n^2 + 3n\theta^2 + 2\theta^2 = 2\theta^2$$

$$\mathbb{E}(X_{(n)}-\theta)^2 = \mathbb{E}X_{(n)}^2 - 2\theta\,\mathbb{E}X_{(n)} + \theta^2 = \frac{n\theta}{n+2} - \frac{2n\theta^2}{n+1} + \theta^2 = \frac{n\theta(n+1) - 2n\theta^2(n+2) + \theta^2\overbrace{(n+2)(n+1)}^{n^2+3n+2}}{(n+1)(n+2)} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$$

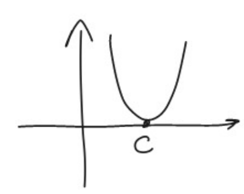
$$\delta_{2\overline{X}}(\theta) = \frac{4\theta^2}{3n} \qquad \delta_{X_{(n)}}(\theta) = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$$

При $n=1,2$ они равны, при $n \geqslant 3$ $X_{(n)}$ лучше, т.к. $\frac{4\theta^2}{3n} > \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$

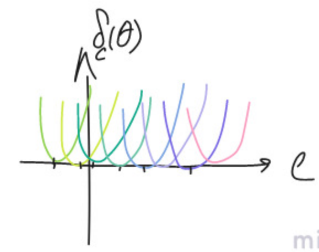
Теорема Пусть $\vec{X} \in F_\theta$. Среди всех оценок с конечной дисперсией наилучшей в среднеквадратическом смысле не существует.

Доказательство: Пусть $\theta^* \equiv C$ $(C \in \mathbb{R})$

$\delta_{\theta^*}(\theta) = \mathbb{E}(C-\theta)^2 = (C-\theta)^2$ − парабола



Всевозможные вырожденные оценки будут пересекаться (т.к. C пробегает всё $\mathbb{R}$)



Чтобы найти наилучшую исходя из геом. смысла, нужно найти огибающую всех этих парабол. Но они покрывают все $\mathbb{R}$, поэтому огибающая одна − $\delta_{\theta^*_{opt}} \equiv 0$

$\delta_{\theta^*_{opt}}(\theta) \equiv 0 \Rightarrow \mathbb{E}(\theta^*_{opt} - \theta) \equiv 0$

$\theta^*_{opt} \equiv \theta$ − вырожденная оценка, в точности угадывает неизвестный параметр.

Def Оценка наз. эффективной, если она наилучшая среди всех несмещенных оценок в среднеквадратическом смысле.