События, операции над ними. Классическое определение вероятности.

Def. Пространство элементарных исходов Ω — множество, включающее в себя все возможные взаимоисключающие исходы данного случайного эксперемента.

Его элементы, ω наз. элементарными исходами

Def. Событиями наз. подмножества множества Ω $(A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \mid \omega_i \in \Omega\})$

Def. Говорят, что произошло событие A если эксперимент завершился одним из элементарных исходов, входящих в A.

Операции над событиями:

1. $A \cup B$ - из двух событий случилось хотя бы одно
2. $A \cap B$ - произошли оба события
3. $A \setminus B$ - произошло A, но не произошло B
4. $\bar{A} = \Omega \setminus A$ - событие A не произошло

Def. Достоверное событие - обязательно происходит в результате эксперимента. Т.е. оно содержит все элементарные исходы - событие Ω

Def. Невозможное событие – не может произойти в результате эксперимента ($\varnothing$)

- $\bar{\Omega} = \varnothing$
- $A \cup \bar{A} = \Omega$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\bar{\varnothing} = \Omega$
- $A \cap \bar{A} = \varnothing$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Def. A и B несовместные, если $A \cap B = \varnothing$

miro

Def. A влечет B ($A \subseteq B$) если всегда, как только происходит A, происходит B.

Def. Каждому элементарному исходу сопоставим число $p_i \in [0, 1]$: $p_1 + \ldots + p_n = 1$

Тогда, вероятность события A: $P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} p_i$

miro

Говорят, что эксперимент описывается классической вероятностной моделью, если его пространство элементарных исходов состоит из конечного числа равновозможных исходов

Def. Вероятность каждого исхода равна $\frac{1}{N}$, если событие $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ то

$$P(A) = p_{i_1} + \ldots + p_{i_k} = k \cdot \frac{1}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$ – классическое определение вероятности

miro

Элементы комбинаторики. Гипергеометрическое распределение.

Def Размещения (A_n^k) — общее кол-во различных наборов при выборе k из n элементов без возвращения и с учетом порядка.

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Def Число сочетаний (C_n^k) — общее кол-во различных наборов при выборе k из n элементов без возвращения и без учета порядка

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Def Общее число наборов при выборе k из n эл-тов с возвращением и с учетом порядка равно n^k

Def Общее число наборов при выборе k из n эл-тов с возвращением без учета порядка — $\hat{C}_n^k$ (шары и перегородки)

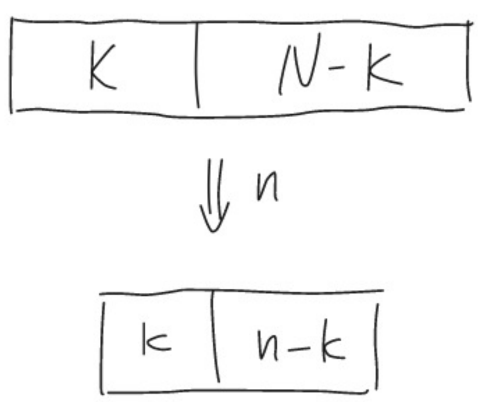
$$\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$ (исходы не равновероятные)

Гипергеометрическое распределение

Пусть у нас есть ящик, в нем K белых и $N-K$ черных шаров. Из ящика мы наугад вытаскиваем n шаров. Тогда, вероятность что вытянули k белых и $n-k$ черных равна

$$\frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

Вероятности данного вида наз. гипергеометрическим распределением



Геометрические вероятности. Задача о встрече.

Def. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$ с конечной мерой (длина, площадь, объем). Эксперимент состоит в том, что мы кидаем наудачу точку в $A \subseteq \Omega$. (вер-ть попадания не зависит от формы и расположения A в Ω.

Тогда

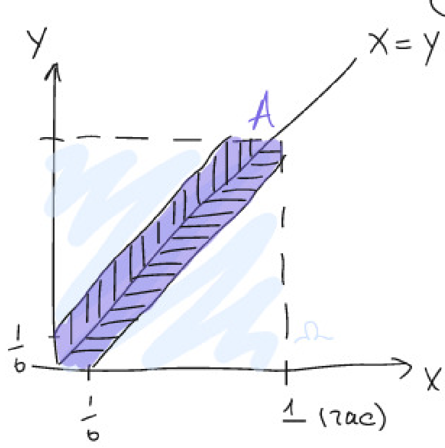
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

miro

Задача о встрече

Пусть 2 человека условились встретится между 16:00 и 17:00. При этом, каждый из них ждет 10 минут, затем уходит. Какова вероятность встречи? (Она такова, какова она есть, и больше никакова)

У нас есть 2 случайные величины – время прихода 1 и 2го человека (X и Y)



$x = y$ – пришли одновременно.

Понятно, что время прихода должно отличаться максимум на 10 минут ($\frac{1}{6}$ часа)

$$A = \{(x, y) : |x - y| \le \tfrac{1}{6}\}$$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}{1} = \frac{11}{36}$$

miro

Понятие о вероятностном пространстве общего вида. Аксиоматическое задание вероятности, основные свойства вероятности.

Def. Вероятностное пространство состоит из тройки $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$

- Ω – мн-во элем. исходов
- $\mathcal{F}$ – множество подмножеств Ω $(|\mathcal{F}| = 2^{\Omega})$
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ – вероятность.

Аксиомы вероятности:

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2) Если $A_1, \dots, A_n, \dots$ – попарно незав. $(\forall i \neq j \;\; A_i \cap A_j = \varnothing)$, то

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Из аксиом вытекают свойства:

1) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

$$A_i = \begin{cases} A, & i = 1 \\ \varnothing, & i > 1 \end{cases}$$

попарно несовместны

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n)$$

$$\mathbb{P}(A \cup \varnothing \cup \dots \cup \varnothing) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\varnothing) + \dots + \mathbb{P}(\varnothing)$$

$$\cancel{\mathbb{P}(A)} = \cancel{\mathbb{P}(A)} + \mathbb{P}(\varnothing) + \dots + \mathbb{P}(\varnothing)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

2) $A_1, \dots, A_n$ – попарно несовм. $\Rightarrow \quad P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$

3) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$$

4) $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$$\Omega = A \cup \bar{A} \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \dots$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$1 - P(\bar{A}) = P(A)$$

5) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$

$$B = A \cup B \setminus A$$
$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geqslant 0}$$

6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$(A \cup B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) + P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

7) Непрерывность вероятности

- Если $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, то $P(\bigcup_i A_i) = \lim_{n\to\infty} \underline{P}(A_n)$

$$\bigcup_i A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots$$

$$P(\bigcup_i A_i) = \underline{P}(A_1) + \underline{P}(A_2 \setminus A_1) + \underline{P}(A_3 \setminus A_2) + \ldots$$

$$\underline{P}(\bigcup_i A_i) = \lim_{n\to\infty} \left[\underline{P}(A_1) + \underline{P}(A_2 \setminus A_1) + \ldots + \underline{P}(A_n \setminus A_{n-1}) \right] = \lim_{n\to\infty} \underline{P}(A_n)$$

- Если $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ то $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$

$$\overline{A}_1 \subset \overline{A}_2 \subset \overline{A}_3 \subset \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\overline{A}_n) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i); \quad \lim_{n\to\infty} \underline{P}(A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} \underline{P}(\overline{A}_n) = 1 - P(\bigcup^{\infty} \overline{A}_i) =$$

$$= 1 - P(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}) = P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$$

miro

Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Def. Вероятностью события A, при условии что произошло событие B наз

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Def. Полная группа событий — $H_1, \dots, H_n$: $H_1 \cup \dots \cup H_n = \Omega$, $H_i \cap H_j = \varnothing \ \forall i \neq j$

H_i - гипотеза. $+ P(H_i) > 0 \ \forall i$

Def. Пусть дана П.Г.С. Тогда $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A|H_i)$

$$\Delta \quad A = A \cap \Omega = A \cap \left(\cup H_i\right) = \bigcup_i (A \cap H_i)$$

$$P(A) = \sum_i P(A\cap H_i) = \sum_i \frac{P(H_i)\, P(A\cap H_i)}{P(H_i)} = \sum_i P(H_i)\, P(A|H_i) \quad \blacktriangle$$

Def. Ф-ла Байеса: $P(H_k|A) = \dfrac{P(H_k)\, P(A|H_k)}{\sum\limits_i P(H_i)\, P(A|H_i)}$

$$\Delta \quad P(H_k|A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_k)\, P(H_k\cap A)}{P(H_k)} \cdot \frac{1}{\sum\limits_i P(H_i)\, P(A|H_i)} =$$

$$= \frac{P(H_k)\, P(A|H_k)}{\sum\limits_i P(H_i)\, P(A|H_i)} \quad \blacktriangle$$

Независимые события. Схема Бернулли.

Def. События наз. независимыми, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- Если A и B – незав. то A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ тоже независимые.

Δ $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A \cap \overline{B})$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B})$ $\blacktriangle$

Def. $A_1, \dots, A_n$ наз. независимыми в совокупности, если $\forall\ k \in [1, n]$ и $\forall\ 0 \le i_1 \le \dots \le i_k \le 1$

$P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$

Def. Серия независимых в совокупности испытаний, исходами которых явл. успех (с вероятностью p) и неудача (с вероятностью $1-p$) наз. схемой Бернулли

S_n – число успехов в сх. Бернулли с n испытаниями

$P(S_n = k) = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$

Случайные величины. Функции распределения и их свойства.

Def Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ наз. случайной величиной.
Т.е. каждому элементарному исходу сопоставляется число $\xi(\omega) \in \mathbb{R}$

Def Функцией распределения наз. $F_\xi(t) = P(\xi < t)$

Свойства функции распределения:

1) Неубывание : $x_1 < x_2 \Rightarrow F_\xi(x_1) \leq F_\xi(x_2)$

∘ Следует из монотонности вероятности : $\{\xi < x_1\} \subseteq \{\xi < x_2\} \Rightarrow P(\xi < x_1) \leq P(\xi < x_2)$

miro

2) Сущ. пределы : $\lim\limits_{t \to +\infty} F_\xi(t) = 1$ (1) $\lim\limits_{t \to -\infty} F_\xi(t) = 0$ (2)

∘ Сущ. пределов вытекает из монотонности и ограниченности $F_\xi(t)$ (т.к. это P)

(1) Покажем, что $F_\xi(-n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Рассмотрим $B_n = \{\xi < -n\}$ – вложенная убывающая посл-ть.

$B_{n+1} = \{\xi < -(n+1)\} \subseteq B_n = \{\xi < -n\}$

Пересечение B_n состоит только из тех элементарных исходов, для которых случайная величина $\xi(\omega)$ меньше любого вещественного числа. $\xi(\omega) \in \mathbb{R}$, оно не может быть меньше всех чисел из $\mathbb{R}$.

Следовательно, пересечение B_n пусто и $F_\xi(-n) = P(B_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} P(\varnothing) = 0$

(2) Покажем, что $F_\xi(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ (или, что то же, $1 - F_\xi(n) = P(\xi \geq n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$)

Рассмотрим $B_n = \{\xi \geq n\}$. $\underset{P(\xi \geq n+1)}{\overset{\shortparallel}{B_{n+1}}} \subseteq \underset{P(\xi \geq n)}{\overset{\shortparallel}{B_n}}$

Пересечение B_n пусто, т.к. никакое вещественное число не может быть больше любого вещ. числа.

$1 - F_\xi(n) = P(B_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} P(\bigcap\limits_i^\infty B_i) = P(\varnothing) = 0$. ▲

miro

3) Непрерывность слева. $F_\xi(t_0-0)=F_\xi(t_0)$

○ Достаточно доказать, что $F_\xi(t_0-\frac{1}{n})\xrightarrow[n\to\infty]{}F_\xi(t_0)$.

$F_\xi(t_0)-F_\xi(t_0-\frac{1}{n})=P(\xi<t_0)-P(\xi<t_0-\frac{1}{n})=P(t_0-\frac{1}{n}\le\xi<t_0)$

$B_n=\{t_0-\frac{1}{n}\le\xi<t_0\}$

$B_{n+1}\subseteq B_n$, а пересечение слова пусто, т.к в пределе $t_0\le\xi<t_0$

Значит, $P(t_0-\frac{1}{n}\le\xi<t_0)\xrightarrow[n\to\infty]{}P(\varnothing)=0$. ▲

! Эти свойства явл. характерестическими.

○ $P(a\le\xi<b)=F_\xi(b)-F_\xi(a)$

△ $\{\xi<b\}=\{\xi<a\}\cup\{a\le\xi<b\}$

$P(\xi<b)=P(\xi<a)+P(a\le\xi<b)$

$F_\xi(b)-F_\xi(a)=P(a\le\xi<b)$ ▲

Типы распределений, примеры.

Def. Случайная величина ξ имеет дискретное распределение если она принимает лишь счетное число значений. (Они называются атомами)

∘ Например, распределение Бернулли. Атомы: $P(X=1)=p$

$P(X=0)=1-p$

Def. Ф-я распределения в этом случае имеет вид

$$F_\xi(t)=P(\xi<t)=\sum_{i:\,a_i<t}P(\xi=a_k)$$

Def. Случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение если $\exists\, f_\xi(t)$ – плотность, такая, что $\forall t$

$$F_\xi(t)=\int_{-\infty}^{t}f_\xi(\eta)\,d\eta$$

Свойства плотности:

1) $\forall t \quad f_\xi(t)>0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f_\xi(t)\,dt=1$

∘ $P(a<\xi<b)=P(a\le\xi<b)=P(a<\xi\le b)=P(a\le\xi\le b)=\int_a^b f_\xi(t)\,dt$

т.к в случае абсолютно непрерывного распределения $P(\xi=c)=0 \quad \forall c=const$

Def. Распределение ξ наз. сингулярным, если ξ непрерывна, но не существует $f_\xi(t)>0$ такой, что $\forall t \; F_\xi(t)=\int_{-\infty}^{t}f_\xi(\eta)\,d\eta$ Напр. распред. на лестнице Кантора

Def. ξ имеет смешанное распределение если $F_\xi(t)=\alpha F_D(t)+\beta F_c(t)$

$\beta=1-\alpha, \quad \alpha\in[0,1]$

Например, $Y=\min(1,X)$, $X\in U_{[0,2]}$

Основные семейства распределений

Дискретные

Вырожденное (I_c)

$P(X=C)=1$

Бернулли

k	1	0
$P(X=k)$	p	$1-p$

Геометрическое

(номер первого успешного испытания в сх. Бернулли)

k	1	…	…
$P(X=k)$	p	$(1-p)p$	$p(1-p)^{k-1}$ …

Биномиальное

(число успехов в n испытаниях сх. Бернулли)

k	0	1		k	
$P(S_n=k)$	$(1-p)^n$	$p(1-p)^{n-1}$	..	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	…

Пуассона

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (\lambda>0)$$

Гипергеометрическое

$$P(X=k)=\frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

miro

Абсолютно непрерывные

Равномерное ($U_{[a,b]}$)

$$u(t)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & t\in[a,b]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases} \qquad U(t)=\begin{cases}0, & t<a\\ \frac{t-a}{b-a}, & t\in[a,b]\\ 1, & t>b\end{cases}$$

Коши (станд.)

$$c(t)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

$$C(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} t$$

Нормальное

$$\varphi_{a,\sigma^2}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Стандартное

$$\varphi_{0,1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Гамма (α,λ)

$$\gamma(t)=\begin{cases}\frac{t^{\lambda-1}\cdot\alpha^\lambda\cdot e^{-\alpha t}}{\Gamma(\lambda)}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$

Показательное

$$e_\alpha=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$

$$E_\alpha=\begin{cases}1-e^{-\alpha t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$

miro

Многомерные распределения и плотности, их основные свойства, примеры.

Def $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$, где X_i – случайная величина, наз. случайным вектором

Def Совместная функция распределения $F_{X_1,\dots,X_n}(t_1,\dots,t_n) = P(X_1 < t_1, \dots, X_n < t_n)$

Свойства функции совместного распределения:

1) Не убывает по каждому аргументу.
2) Непрерывна слева по каждому аргументу
3) $\lim\limits_{t_i \to -\infty} F_{X_1,\dots,X_n}(t_1,\dots,t_n) = 0$
4) $\lim\limits_{t_n \to +\infty} F_{X_1,\dots,X_n}(t_1,\dots,t_n) = F_{X_1,\dots,X_{n-1}}(t_1,\dots,t_{n-1})$

miro

Абсолютно непрерывное

- $F_{X_1,\dots,X_n}(t_1,\dots,t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_n} f_{X_1\dots X_n}(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n$
- $f_{X_1\dots X_n}(y_1,\dots,y_n)$ – совместная плотность распределение

Свойства:

1) $f_{\vec{X}}(\vec{t}) \geq 0$
2) $\int\int_{\mathbb{R}^n} f_{\vec{X}}(\vec{t})\,d\vec{t} = 1$
3) $B \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow P(X \in B) = \int\int_B f_{\vec{X}}(\vec{t})\,d\vec{t}$

Дискретное

- $\forall k \in [1, n]$ X_k имеет дискретное распределение

Пример: $Y = |X-1| + 1$

X:

-2	0	2
0,1	0,3	0,6

Y:

4	2
0,1	0,9

miro

4) $F_{X_1}(t_1) = \int\limits_{-\infty}^{t_2} \dots \int\limits_{-\infty}^{t_n} f_{\vec{X}}(\vec{t})\, dt_2 \dots dt_n$

Пример: Равномерное распределение

$S \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda(S)$ — конечная лебегова мера

Вектор $\vec{X}$ имеет равномерное распределение в S

если плотность $f_{\vec{X}}(\vec{t})$ постоянна в S и равна нулю вне S:

$$f_{\vec{X}}(\vec{t}) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda(S)}, & \vec{t} \in S \\ 0, & \vec{t} \notin S \end{cases}$$

- $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_{\vec{X}}(\vec{t})\, d\vec{t} = \frac{1}{\lambda(S)} \int\limits_S d\vec{t} = \frac{1}{\lambda(S)} \cdot \lambda(S) = \underline{1}$

вне S ноль, откинули

- Совместное распределение:

Y \ X	−2	0	2
2	0	0,3	0,6
4	0,1	0	0

Теорема о независимости функций от независимых случайных величин. Линейные преобразования случайных величин, применения к гауссовским распределениям.

Def Случайные величины $X_1,\dots,X_n$ независимые, если

$$F_{X_1,\dots,X_n}(t_1,\dots,t_n) = F_{X_1}(t_1)\cdot\ldots\cdot F_{X_n}(t_n)$$

Def Абсолютно непрерывные случайные величины $X_1,\dots,X_n$ независимы $\Leftrightarrow$ $f_{X_1\dots X_n}(t_1,\dots,t_n) = f_{X_1}(t_1)\cdot\ldots\cdot f_{X_n}(t_n)$

Теорема о независимости функции от независимых случайных величин

Пусть случайные величины X и Y независимы, g и h – ф-ции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$
Тогда, $g(X)$ и $h(Y)$ – независимы

Доказательство:

$\forall B_1 \subset \mathbb{R},\ B_2 \subset \mathbb{R}$

$$P(g(X)\in B_1,\ h(Y)\in B_2) = P(X\in \overset{\{y:\, g(y)\in B_1\}}{\overset{\parallel}{g^{-1}(B_1)}},\ Y\in h^{-1}(B_2)) = [X \text{ и } Y \text{ – незав.}]$$

$$= P(X\in g^{-1}(B_1))\cdot P(Y\in h^{-1}(B_2)) = P(g(X)\in B_1)\cdot P(h(Y)\in B_1)$$

Линейные преобразования случайных величин.

- Теорема. Пусть ξ имеет ф-цию распределения $F_\xi(x)$ и плотность $f_\xi(t)$. Тогда для $\eta = a\cdot\xi + b$

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

miro

- Доказательство:

1) $[a>0]$ $F_\eta(x) = P(a\cdot\xi + b < x) = P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) =$

$$t = \frac{u-b}{a} \qquad dt = \frac{du}{a}$$

$$= \int_{-\infty}^{\left(\frac{x-b}{a}\right)} f_\xi(t)\,dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{t} \underbrace{f_\xi\left(\frac{u-b}{a}\right)}_{f_\eta(t)} du$$

2) $[a<0]$ $F_\eta(x) = P(a\cdot\xi + b < x) = P\left(\xi > \frac{x-b}{a}\right) = \int_{\left(\frac{x-b}{a}\right)}^{+\infty} f_\xi(t)\,dt =$

$$t = \frac{u-b}{a} \qquad u\to\infty \Rightarrow t\to-\infty$$

$$\frac{du}{a} = dt$$

$$= \frac{1}{a}\int_{t}^{-\infty} f_\xi\left(\frac{u-b}{a}\right)du = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{t} \underbrace{f_\xi\left(\frac{u-b}{a}\right)}_{f_\eta(t)} du$$

miro

Следствия: ∘ $\xi \in N_{a,\sigma^2}$, $\frac{\xi - a}{\sigma} \in N_{0,1}$

Δ $\eta = \xi \cdot \frac{1}{\sigma} - \frac{a}{\sigma}$

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\left|\frac{1}{\sigma}\right|} f_\xi\left(\frac{x - \frac{a}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \sigma \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\sigma\left(x + \frac{a}{\sigma}\right) - a\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \blacktriangle$$

∘ $\xi \in N_{0,1}$, $\sigma\xi + a \in N_{a,\sigma^2}$

$$\Delta \quad f_\eta(x) = \frac{1}{\sigma} f_\xi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad \blacktriangle$$

miro

∘ $\xi \in U_{0,1}$, $a\xi + b \in U_{b,a+b}$ $(a>0)$

• $\frac{x-b}{a} = 0 \Rightarrow x = b$ • $\frac{x-b}{a} = 1 \Rightarrow x - b = a$, $x = a+b$

$$\Delta \quad u_\eta(x) = u_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{x-b}{a}\right)}{1-0}, & \frac{x-b}{a} \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x-b}{a}, & x \in [b, a+b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = u_{b,b+a}(x) \quad \blacktriangle$$

∘ $\xi \in E_\alpha$, то $\alpha\xi \in E_1$

$$\Delta \quad e_\eta(x) = \frac{1}{\alpha} e_\xi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\alpha e^{-\frac{x}{\alpha}\alpha} = e^{-x} \in E_1 \quad \blacktriangle$$

miro

Распределение суммы случайных величин, имеющих пуассоновское распределение. Плотность суммы случайных величин.

Теор. Пусть X и Y - незав и $\left.\begin{array}{l} P(X=k)=p_k \\ P(Y=k)=q_k \end{array}\right\}$ $k=0,1,2\dots$

Тогда $\forall k=0,1,2,\dots$ $\quad r_k = P(X+Y=k) = \sum\limits_{i=0}^{k} p_i q_{k-i}$ $\quad (*)$

Доказательство:

$$P(X+Y=k) = P(\{X=0,\ Y=k\} \cup \{X=1,\ Y=k-1\} \cup \dots \cup \{X=k,\ Y=0\}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X=i,\ Y=k-i) \underset{\text{незав.}}{=} \sum_{i=0}^{k} P(X=i)\cdot P(Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} p_k q_{k-i} \quad \blacktriangle$$

Последовательность чисел r_k наз. сверткой последовательностей p_k и q_k

Теор. Пусть X_1 и X_2 - независимы, $X_1 \in \Pi_{\lambda_1}$, $X_2 \in \Pi_{\lambda_2}$ тогда $X_1+X_2 \in \Pi_{\lambda_1+\lambda_2}$

$$P(X+Y=k) \overset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{(k-i)}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{k!} \frac{1}{i!(k-i)!} \lambda_1^i \cdot \lambda_2^{(k-i)} \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

"C_k^i"

[Бином Ньютона: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$]

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} C_n^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \cdot (\lambda_1+\lambda_2)^k \in \Pi_{\lambda_1+\lambda_2} \quad \blacktriangle$$

Формула свертки

Пусть X и Y независимые и имеют плотности f_X и f_Y. Тогда

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_Y(t-u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(v)\cdot f_X(t-v)\,dv$$

Доказательство: $F_{X+Y}(y) = P(X+Y<y) = P((X,Y)\in \{(u,v) : \overset{\forall u \quad v<y-u}{u+v<y}\}) =$

$$= \iint\limits_{u+v<y} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_X(u)\int_{-\infty}^{y-u} f_Y(v)\,dv\right]du \Bigg|_{\substack{v=t-u\\ dv=dt}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\left[\int_{-\infty}^{y} f_Y(t-u)\,dt\right]du$$

$v=y-u \Leftrightarrow t=y$

$$F_{X+Y}(y) = \int_{-\infty}^{y} \underbrace{\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\, f_Y(t-u)\,du\right\}}_{f_{X+Y}(y)} dt \quad \blacktriangle$$

Распределение суммы случайных величин, имеющих гамма распределение.

Пусть X_1 и X_2 независимы, $X_1 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1}$, $X_2 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_2}$. Тогда $X_1+X_2 \in \Gamma_{\alpha,\lambda_1+\lambda_2}$

Доказательство:

$f_{X_1+X_2}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{\alpha,\lambda_1}(u)\,\gamma_{\alpha,\lambda_2}(t-u)\,du$. Т.к. $\gamma_{\alpha,\lambda}(t)=0$ при $t\le 0$, то $\begin{cases} t>0 \\ t-u>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t>0 \\ t>u \end{cases}$

$$f_{X_1+X_2}(t) = \int\limits_0^t \frac{\alpha^{\lambda_1} u^{\lambda_1-1} e^{-\alpha u}}{\Gamma(\lambda_1)} \cdot \frac{\alpha^{\lambda_2} (t-u)^{\lambda_2-1} e^{-\alpha(t-u)}}{\Gamma(\lambda_2)}\,du = \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\cdot\Gamma(\lambda_2)} \int\limits_0^t u^{\lambda_1-1}\cancel{e^{-\alpha u}}\cdot(t-u)^{\lambda_2-1} e^{-\alpha t}\cdot \cancel{e^{\alpha u}}\,du$$

$$\left[\text{Замена } u=vt\right] = \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} e^{-\alpha t} \int\limits_0^t v^{\lambda_1-1}\cdot t^{\lambda_1-1}\cdot(t-vt)^{\lambda_2-1}\frac{dv}{t} = \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} e^{-\alpha t}\cdot t^{\lambda_1+\lambda_2-1} \underbrace{\int\limits_0^t v^{\lambda_1-1}(1-v)^{\lambda_2-1}\,dv}_{B(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)}}$$

$du = t\,dv$

$dv = \frac{du}{t}$

$$= \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)} e^{-\alpha t}\cdot t^{\lambda_1+\lambda_2-1} \quad \blacktriangle$$

Распределение суммы случайных величин, имеющих нормальное распределение.

Пусть X_1 и X_2 независимы, $X_1 \in N_{a_1,\sigma_1^2}$, $X_2 \in N_{a_2,\sigma_2^2}$. Тогда $X_1+X_2 \in N_{a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

Доказательство: Введем новые случайные величины $Y_1 = \frac{X_1-a_1}{\sigma_1}$ $Y_2 = \frac{X_2-a_2}{\sigma_1}$

$Y_1 \in N_{0,1}$ $\quad Y_2 \in \frac{\sigma_2}{\sigma_2}\frac{X_2-a_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\overbrace{\frac{X_2-a_2}{\sigma_2}}^{\in N_{0,1}} \in N_{0,\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}$

Докажем, что $Y_1+Y_2 \in N_{0,\, 1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}$, тогда $X_1+X_2 = \sigma_1(Y_1+Y_2)+a_1+a_2 \in N_{a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

Обозначим $\Theta = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$. Тогда, по формуле свертки:

$$f_{Y_1+Y_2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\Theta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-u)^2}{2}} du = \frac{1}{2\pi\Theta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{\Theta^2}+t^2-2tu+u^2\right)} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi\Theta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[u^2\frac{(1+\Theta^2)}{\Theta^2} - 2tu + t^2\frac{(1+\Theta)^2}{(1+\Theta)^2}\right]} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi\Theta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[u^2\frac{(1+\Theta^2)}{\Theta^2} - 2u\cdot\sqrt{\frac{1+\Theta^2}{\Theta^2}}\cdot t\cdot\sqrt{\frac{\Theta^2}{1+\Theta^2}} + t^2\frac{\Theta^2}{(1+\Theta)^2} + t^2\frac{1}{(1+\Theta)^2}\right]} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi\Theta} e^{-\frac{t^2}{2(1+\Theta)^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left[\underbrace{u\sqrt{\frac{1+\Theta^2}{\Theta^2}} - t\sqrt{\frac{\Theta^2}{1+\Theta^2}}}_{v}\right]^2} du =$$

$dv = du\cdot\sqrt{\frac{1+\Theta^2}{\Theta^2}}$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\Theta^2}} e^{-\frac{t^2}{2(1+\Theta)^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv}_{\sqrt{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv}_{\text{Стандартное норм. распр. от } -\infty \text{ до } +\infty \,=\, 1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\Theta^2)}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2(1+\Theta)^2}} \quad \blacktriangle$$

Математическое ожидание случайной величины и его свойства, примеры.

Мат. ожидание

Для дискретных

$$\mathbb{E}X = \sum_k y_k\,(X = y_k),$$

если этот ряд абсолютно сходится

Для абсолютно непрерывных

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\,dt,$$

если $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\, f_X(t)\,dt < \infty$

Свойства:

1) $$Eg(X) = \begin{cases} \sum\limits_k' g(y_k)\,(X = y_k) \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, f_X(t)\,dt \end{cases}$$

Доказательство для дискр:

Пусть $g(X)$ принимает значение $c_1, c_2, \ldots$ Тогда,

- $P(g(X) = c_m) = \sum\limits_{k:\, g(y_k) = c_m} P(X = y_k)$
- $\mathbb{E}X = \sum\limits_m' c_m P(g(X) = c_m) = \sum\limits_m' c_m \sum\limits_{k:\, g(y_k) = c_m} P(X = y_k)$

$$= \sum_m' \sum_{k:\, g(y_k) = c_m}' g(y_k) P(X = y_k) = \sum_k' g(y_k) P(X = y_k) \blacktriangle$$

2) $\mathbb{E}C = C$

3) $\mathbb{E}(cX) = c \cdot \mathbb{E}X$

4) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$ (если все мат. ожидания существуют.)

Доказательство: $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x + y$. $\mathbb{E}(X+Y) =$

$$= \sum_{k,n} (x_k + y_n) P(X = x_k, Y = y_n) = \sum_k x_k \sum_n P(X = x_k, Y = y_n) +$$

$$+ \sum_n y_n \sum_k P(X = x_k, Y = y_n) = \left[\text{сумма вероятностей по всем индексам} = 1\right] =$$

$$= \sum_k x_k P(X = x_k) + \sum_n y_n P(Y = y_n) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y \blacktriangle$$

5) Если $X \geqslant 0$ (т.е. $P(X \geqslant 0) = 1$), то $\mathbb{E}X \geqslant 0$

6) Если $X \geqslant Y$, то $\mathbb{E}X \geqslant \mathbb{E}Y$

7) Если X и Y – независимы, то $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

Доказательство: $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \sum\limits_{k,n} (x_k \cdot y_n) P(X = x_k, Y = y_n) \overset{\text{незав.}}{=}$

$$= \sum_k x_k P(X = x_k) \cdot \sum_n y_n P(Y = y_n) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y \blacktriangle$$

Примеры:

Распределение	$\mathbb{E}X$
B_p	p
$B_{n,p}$	np
Π_λ	λ
E_α	$\frac{1}{\alpha}$
$\Gamma_{\alpha,\lambda}$	$\frac{\lambda}{\alpha}$
N_{a,σ^2}	a
$U_{[a,b]}$	$\frac{a+b}{2}$

Докажем некоторые:

1) $X \in B_p$. $\mathbb{E}X = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

2) $X \in B_{n,p}$. $X = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $\xi_i \in B_p$ $\forall i$

$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\xi_i = n \cdot p$

3) $X \in \Pi_\lambda$. $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$

$= \lambda e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$

4) $X \in U_{[a,b]}$. $\mathbb{E}X = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$

Моменты, вопросы их существования. Дисперсия случайной величины, ее свойства, примеры.

Def. Моментом m-го порядка случайной величины X наз. $\mathbb{E}X^m$

Теорема о существовании моментов

Пусть $\mathbb{E}|X|^m < \infty$ $(m>0)$, тогда $\forall r \in (0,m)$ $\mathbb{E}|X|^r < \infty$

Доказательство: $|X|^r \le |X|^m + 1 \Rightarrow \mathbb{E}|X|^r \le \mathbb{E}|X|^m + 1$ — чтд.

Def.
- Дисперсия — $\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2$
- $\sqrt{\mathbb{D}X}$ — среднеквадратическое отклонение

Свойства: 1) $\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

Δ $\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}\left[X^2 - \underset{const}{2}X\underset{const}{\mathbb{E}X} + \underset{const}{(\mathbb{E}X)^2}\right] = \mathbb{E}X^2 - 2(\mathbb{E}X)^2 + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

2) $\mathbb{D}C = 0$

3) $\mathbb{D}cX = c^2\mathbb{D}X$

4) $\mathbb{D}X \geq 0$ т.к. под мат. ожиданием квадрат а по его св-вам при $X \geq 0$ $\mathbb{E}X \geq 0$

5) Если X и Y независимы, $\mathbb{D}(X \pm Y) = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y$

Δ $\mathbb{D}(X \pm Y) = \mathbb{E}(X \pm Y)^2 - (\mathbb{E}(X \pm Y))^2 = [\mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}Y^2 \pm \cancel{2\mathbb{E}XY}] -$

$- [(\mathbb{E}X)^2 + (\mathbb{E}Y)^2 \pm \underset{\text{незав } X \text{ и } Y}{\cancel{2\mathbb{E}X\mathbb{E}Y}}] = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \mathbb{D}X^2 + \mathbb{D}Y^2$

6) $\mathbb{D}(X+C) = \mathbb{D}X$

7) Если $\mathbb{D}X = 0$ то $\exists C : P(X=C) = 1$

Распределение	$\mathbb{D}X$
B_p	$p(1-p)$
$B_{n,p}$	$np(1-p)$
Π_λ	λ
E_α	$\frac{1}{\alpha^2}$
$\Gamma_{\alpha,\lambda}$	$\frac{\lambda}{\alpha^2}$
$U_{[a,b]}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
N_{a,σ^2}	σ^2

Докажем некоторые:

1) $X \in B_p$ $\quad \mathbb{E}X^2 = 1^2 p + 0^2 q = p$

$\mathbb{D}X^2 = p - p^2 = p(1-p)$

2) $X \in B_{n,p}$ $\quad X = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ незав., $\xi_i \in B_p$

$\mathbb{D}X = n \mathbb{D}\xi_1 = np(1-p)$

3) $X \in \Pi_\lambda$

$$\mathbb{E}X(X-1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=2} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2$$

$$\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}X(X+1) + \mathbb{E}X = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mathbb{D}X = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

4) $X \in U_{[a,b]}$

$$\mathbb{E}X^2 = \int_a^b t^2 \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{t^3}{3}\frac{1}{(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)(b^2 + ba + a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ba + a^2}{3}$$

$$\mathbb{D}X = \frac{b^2 + ba + a^2}{3} - \frac{(a+b)^4}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

miro

Коэффициент корреляции и его свойства.

Def Ковариацией случайных величин X и Y наз. число

$$cov(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)]$$

Эту величину используют как индикатор зависимости между двумя случайными величинами.

Свойства:

1) $cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$

$\vartriangle$ $cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY - X\mathbb{E}Y - Y\mathbb{E}X + \mathbb{E}X\mathbb{E}Y] =$

$= \mathbb{E}XY - 2\mathbb{E}X\mathbb{E}Y + \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$ $\blacktriangle$

2) $cov(X,X) = \mathbb{D}X$

3) $cov(X,Y) = cov(Y,X)$

4) $cov(cX,Y) = cov(X,cY) = c \cdot cov(X,Y)$

Def Коэффициентом корреляции $\rho(X,Y)$ случайных величин X и Y, дисперсии которых существуют и отличны от нуля, наз. число

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X\,\mathbb{D}Y}}$$

Свойства:

1) Если X, Y – независимы, то $\rho(X,Y) = 0$

2) $|\rho(X,Y)| \leq 1$

3) $|\rho(X,Y)| = 1 \iff X, Y$ линейно связаны ($P(X = aY + b) = 1$)

Доказательство: 1) X, Y - незав $\Rightarrow cov(X,Y) = 0 \Rightarrow \rho(X,Y) = 0$

2) $\hat{\xi} = \dfrac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}}$ – стандартизация

- $\mathbb{E}\hat{\xi} = \dfrac{\mathbb{E}\xi - \mathbb{E}\xi}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}} = 0$
- $\mathbb{D}\hat{\xi} = \mathbb{E}\hat{\xi}^2 = \mathbb{D}\left[\dfrac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}}\right] = \dfrac{\mathbb{D}(\xi - \mathbb{E}\xi)}{\mathbb{D}\xi} = \dfrac{\mathbb{D}\xi}{\mathbb{D}\xi} = 1$

Тогда $\rho(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\hat{\xi} \cdot \hat{\eta})$

Далее, $(x \pm y)^2 \geqslant 0$ равносильно $-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$-\frac{1}{2}(\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2) \leq \hat{\xi} \cdot \hat{\eta} \leq \frac{1}{2}(\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2)$, возьмем мат ожидание от всех частей

$-1 = -\frac{1}{2}\mathbb{E}(\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2) \leq \rho(\xi, \eta) \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}(\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2) = 1$ (*) ▲

miro

3) ($\Leftarrow$) Если $\eta = a\xi + b$ то

$$\rho(\xi, a\xi + b) = \frac{\mathbb{E}[\xi(a\xi+b)] - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}(a\xi+b)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi} \cdot \sqrt{\mathbb{D}(a\xi+b)}} = \frac{a\mathbb{E}\xi^2 + \mathbb{E}b - a(\mathbb{E}\xi)^2 - \mathbb{E}b}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}\ a \cdot \sqrt{\mathbb{D}\xi}} = \frac{a\mathbb{D}\xi}{|a|\mathbb{D}\xi} = \begin{cases} 1 & a>0 \\ -1 & , a<0 \end{cases}$$

($\Rightarrow$) $|\rho(\xi, \eta)| = 1 \Rightarrow \exists\ a \neq 0$ и b : $P(\eta = a\xi + b) = 1$

- $\rho(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = 1$

Тогда, в (*) $\mathbb{E}(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2) \Rightarrow \mathbb{E}(\hat{\xi} - \hat{\eta})^2 = 0$

По свойствам мат. ожидание из этого следует, что $(\hat{\xi} - \hat{\eta})^2 = 0$

Тогда $\hat{\xi} = \hat{\eta} \Rightarrow \dfrac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}} = \dfrac{\eta - \mathbb{E}\eta}{\sqrt{\mathbb{D}\eta}} \Rightarrow \eta = \xi \cdot \underbrace{\dfrac{\sqrt{\mathbb{D}\eta}}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}}}_{a} \underbrace{- \dfrac{\sqrt{\mathbb{D}\eta}}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}}\mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta}_{b}$ ▲

miro

Матрица ковариаций. Многомерное нормальное распределение и его свойства.

Def Случайный вектор – $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

Def Матрицей ковариаций случайного вектора X наз. матрица $C(X)$, у которой на месте с номером (i,j) стоит $C_{i,j} = \operatorname{cov}(X_i, X_j)$ $i,j \in [1,n]$

Матрица ковариаций есть аналог дисперсии для случайных векторов. При $n=1$ это и есть дисперсия. В общем случае на диагонали стоят дисперсии $\mathbb{D}X_1, \dots, \mathbb{D}X_n$, и $C(X)$ симметрична отн. главной диагонали

$$C(X) = \begin{bmatrix} \mathbb{D}X_1 & \operatorname{Cov}(X_2, X_1) & \dots & \operatorname{Cov}(X_n, X_1) \\ \operatorname{Cov}(X_1, X_2) & \mathbb{D}X_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}(X_1, X_n) & \dots & & \mathbb{D}X_n \end{bmatrix}$$

Теорема Пусть A – матрица из констант (m строк, n столбцов), B – m-вектор из констант. Тогда:

$$C(AX+B) = A\,C(X)\,A^T$$

Доказательство: $C(X)$ представима в виде:

$$\mathbb{E}\left[\begin{bmatrix} X_1 - \mathbb{E}X_1 \\ X_2 - \mathbb{E}X_2 \\ \vdots \\ X_n - \mathbb{E}X_n \end{bmatrix} \cdot (X_1 - \mathbb{E}X_1, X_2 - \mathbb{E}X_2, \dots, X_n - \mathbb{E}X_n)\right] = \mathbb{E}\begin{bmatrix} (X_1 - \mathbb{E}X_1)^2 & (X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_2 - \mathbb{E}X_2) & \dots & (X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_n - \mathbb{E}X_n) \\ (X_2 - \mathbb{E}X_2)(X_1 - \mathbb{E}X_1) & (X_2 - \mathbb{E}X_2)^2 & & (X_2 - \mathbb{E}X_2)(X_n - \mathbb{E}X_n) \\ \vdots & & \ddots & \\ (X_n - \mathbb{E}X_n)(X_1 - \mathbb{E}X_1) & \dots & & (X_n - \mathbb{E}X_n)^2 \end{bmatrix}$$

То есть: $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)^T\right] = C(X)$

Тогда $C(AX+B) = \mathbb{E}\left[\left((AX+B) - \mathbb{E}(AX+B)\right)\left((AX+B) - \mathbb{E}(AX+B)\right)^T\right] =$

$= \mathbb{E}\left[(AX + \cancel{B} - \mathbb{E}AX - \cancel{\underset{B}{\mathbb{E}B}})(AX + \cancel{B} - \mathbb{E}AX - \cancel{\underset{B}{\mathbb{E}B}})^T\right] =$

- Транспонированное произведение матриц равно произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке. $(AB)^T = B^T A^T$

$= \mathbb{E}\left[A(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)^T A^T\right] = A \cdot \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)^T\right] A^T = A\,C(X)\,A^T$

Многомерное нормальное распределение

Пусть $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ Y_i – независ. $Y_i \in N_{0,1}$. $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$

- $f_Y(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n t_i^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}t^T t} = \prod_{i=1}^n \varphi_{0,1}(t)$

т.к Y_i – нез то это представляется произведением $f_{Y_i}(t)$

- Пусть A – невырожденная матрица $n*n$, состоит из констант. $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ $\alpha_i = const$
- $X = AY + \alpha$ – распределение X будем называть многомерным нормальным.

Теорема Плотность многомерного норм. распр. равна $f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{\det C(X) \cdot (2\pi)^{\frac{n}{2}}}} e^{-\frac{1}{2}(t-\alpha)^T C(X)^{-1}(t-\alpha)}$

где $C(X)^{-1} = (AC(Y)A^T)^{-1} = (AA^T)^{-1}$

единичная, т.к $Y_i \in N_{0,1}$

Следствие Для нормального вектора независимость и некоррелированность равносильны

Т.е. Y – норм. вектор. $cov(Y_i, Y_j) = 0$ $\forall i \neq j$, тогда $Y_1, \dots, Y_n$ – незав.

Доказательство:

$$C(Y) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \qquad (C(Y))^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & & \sigma_n^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\det C(Y)} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_n$$

$$f_{Y_1 \dots Y_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{(t_i - a_i)^2}{\sigma_i^2}} = \prod_{i=1}^n \varphi_{a_i, \sigma_i^2}(t_i)$$

$\vec{X}$ — стандартный нормальный вектор, если каждая его компонента распределена стандартно нормально и компоненты независимы.

$\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b}$ — нормальный вектор. A — невырожденная матрица.

$C(\vec{Y}) = C(A\vec{X} + \vec{b}) = AC(\vec{X})A^T = AA^T$.

Если A — ортогональная, то $Y = AX$ это тоже стандартно нормальный вектор.

Сходимость по вероятности, ее свойства.

Def. Последовательность случайных величин $X_1, X_2, X_3, \dots$ сходится к X по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Def. Последовательность случайных величин $X_1, X_2, X_3, \dots$ слабо сходится к X $X_n \Rightarrow X$, если для любой точки непрерывности t функции $F_X(t)$, $F_{X_n}(t) \underset{n\to\infty}{\to} F_X(t)$.

Свойства:

1) $X_n \xrightarrow{P} X$, $Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$

Δ $P(|X_n + Y_n - X - Y| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| + |Y_n - Y| > \varepsilon) \leq$

$\leq P(\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\}) \leq \underbrace{P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2})}_{\to 0} + \underbrace{P(|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2})}_{\to 0} \to 0.$ $\blacktriangle$

2) $X_n \Rightarrow X$, $g(t)$ - непрерывная $\Rightarrow g(X_n) \Rightarrow g(X)$

3) $X_n \xrightarrow{P} X$, $g(t)$ - непрерывная $\Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$

4) Если $X_n \xrightarrow{P} X$ то $X_n \Rightarrow X$

5) Если $X_n \Rightarrow C$ то $X_n \xrightarrow{P} C$.

Δ Пусть $X_n \Rightarrow C$, т.е. $F_{X_n}(t) \to F_C(t) = \begin{cases} 0, & t \leq C \\ 1, & t > C \end{cases} \quad \forall t \neq C$ т.к это точка разрыва

$P(|X_n - C| < \varepsilon) = P(C - \varepsilon < X_n < \varepsilon + C) = F_\xi(C+\varepsilon) - F_\xi(C-\varepsilon) \to F_C(C+\varepsilon) - F_C(C-\varepsilon) = 1 + 0 = 1$

Получили, что $P(|X_n - C| < \varepsilon) \to 1 \Rightarrow P(|X_n - C| \geq \varepsilon) \to 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} C$ $\blacktriangle$

6) Теорема Слуцкого

Если $X_n \xrightarrow{P} C$, $Y_n \Rightarrow Y$, то

① $X_n + Y_n \Rightarrow C + Y$

② $X_n \cdot Y_n \Rightarrow C \cdot Y$

Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Бернулли.

Неравенство Маркова

Если $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ то $\forall x > 0$ $\quad P(|\xi| \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi|}{x}$

Доказательство: Вспомним, что индикатор события A это $I(A) = \begin{cases} 1, & A \text{ произошло} \\ 0, & A \text{ не произошло} \end{cases}$

По опр. $I(A) \in B_p$, где $p = P(A)$, $\mathbb{E}I = p$. А также, знаем что $I(A) + I(\bar{A}) = 1$

$$|\xi| = |\xi| \cdot 1 = |\xi| \left[\underbrace{I(|\xi| < x)}_{\geq 0} + I(|\xi| \geq x) \right] \geq |\xi| \cdot I(|\xi| \geq x) \geq x\, I(|\xi| \geq x)$$

$|\xi| \geq x\, I(|\xi| \geq x)$ возьмем $\mathbb{E}$ от обеих частей

$$\mathbb{E}|\xi| \geq \mathbb{E}(x \cdot I(|\xi| \geq x)) = x \cdot P(|\xi| \geq x)$$

$$\frac{\mathbb{E}|\xi|}{x} \geq P(|\xi| \geq x) \quad \blacktriangle$$

Следствие: обобщённое неравенство Чебышёва

Пусть функция g неубывает и неотрицательна на $\mathbb{R}$. Если $\mathbb{E}g(\xi) < \infty$, то $\forall x \in \mathbb{R}$

$$P(\xi \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}g(\xi)}{g(x)}$$

Доказательство: Поскольку g не убывает $P(\xi \geq x) \leq P(g(\xi) \geq g(x))$

Т.к. $g(x) \geq 0$, применим неравенство Маркова $P(g(\xi) \geq g(x)) \leq \frac{\mathbb{E}g(\xi)}{g(x)}$

Неравенство Чебышева

Если $\mathbb{D}\xi$ существует, то $\forall x>0$ $\quad P(|\xi-\mathbb{E}\xi|\geqslant x)\leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{x^2}$ (*)

Доказательство: Для $x>0$ $\quad |\xi-\mathbb{E}\xi|\geqslant x$ равносильно $(\xi-\mathbb{E}\xi)^2\geqslant x^2$

поэтому $P(|\xi-\mathbb{E}\xi|\geqslant x)=P((\xi-\mathbb{E}\xi)^2\geqslant x^2)\leqslant \frac{\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^2}{x^2}=\frac{\mathbb{D}\xi}{x^2}$ ▲

Закон Больших Чисел (в форме Чебышёва)

$\forall\, \xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots$ – н.о.р.с.в. (независимые одинаково распределенные случ. величины) таких, что $\mathbb{D}\xi_1<\infty$ (*)

$$\frac{\xi_1+\dots+\xi_n}{n}\xrightarrow{P}\mathbb{E}\xi_1$$

Доказательство:

$$S_n=\xi_1+\dots+\xi_n\ ,\quad \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{\mathbb{E}\xi_1+\dots+\mathbb{E}\xi_n}{n}=\frac{n\,\mathbb{E}\xi_1}{n}=\mathbb{E}\xi_1$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ $\quad P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\geqslant\varepsilon\right)\overset{(*)}{\leqslant}\frac{\mathbb{D}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\mathbb{D}S_n}{n^2\varepsilon^2}=$

$$\overset{\text{нез.}}{=}\frac{\mathbb{D}\xi_1+\dots+\mathbb{D}\xi_n}{n^2\varepsilon^2}=\frac{n\,\mathbb{D}\xi_1}{n^2\varepsilon^2}=\frac{\mathbb{D}\xi_1}{n\varepsilon^2}\xrightarrow[n\to\infty]{(*)}0$$

Теорема Бернулли

Пусть S_n – число успехов в n испытаниях сх. Бернулли

p - вероятность успеха. Тогда $\quad \frac{S_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{P}p$

Доказательство: очевидное следствие прошлой теоремы

Центральная предельная теорема: формулировка, обсуждение, примеры применения. Теорема Муавра-Лапласа

Центральная предельная теорема

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – н.о.р.с.в. такие, что $0 < \mathbb{D}\xi_1 < \infty$. Тогда

$$\frac{S_n - n \cdot \mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n \mathbb{D}\xi}} \Rightarrow N_{0,1}$$

(к S_n применили стандартизацию, т.к $\mathbb{E}S_n = n \cdot \mathbb{E}\xi_1$, $\mathbb{D}S_n = n\mathbb{D}\xi_1$)

Интервальная формулировка

$\xi_1, \xi_2, \dots$ – н.о.р.с.в с конечной ненулевой дисперсией. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y$

$$P\left(x \le \frac{S_n - n\mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_1}} \le y\right) \xrightarrow[n\to\infty]{P} N_{0,1}(y) - N_{0,1}(x)$$

Эта форма используется в решении задач:

Пусть нужно найти вероятность $P(C \le S_n \le D)$. Приведем к нужному виду:

$$P(C \le S_n \le D) = P\left(\frac{C - \mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_1}} \le \frac{S_n - \mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_1}} \le \frac{D - \mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_1}}\right) \approx N_{0,1}(B) - N_{0,1}(A)$$

$$A = \frac{C - \mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_1}} \qquad B = \frac{D - \mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_1}}$$

Неравенство Берри-Эссена

Пусть в условиях Ц.П.Т ещё $\mathbb{E}|\xi_1|^3 < \infty$, тогда

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n - n\mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_1}} < y\right) - N_{0,1}(y) \right| \le \frac{C \cdot \mathbb{E}|X_1 - \mathbb{E}X_1|^3}{\sqrt{n}\,(\mathbb{D}X_1)^{3/2}}, \quad C \sim 0{,}4784$$

Теорема Муавра-Лапласса.

Пусть событие A может произойти в любом из n независимых испытаний с одной и той же вероятностью p и пусть $\nu_n(A)$ — число осуществлений события A в n испытаниях. Тогда

$$\frac{\nu_n(A) - np}{\sqrt{np(1-p)}} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} N_{0,1}$$

Доказательство: частный случай Ц.П.Т для B_p

miro

Приближение Пуассона для биномиального распределения

Теорема Пуассона

Пусть в схеме Бернулли $p \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $np \to \lambda > 0$. Тогда

$$P(S_n = k) \to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

или

$$S_n \Rightarrow Y \in \Pi_\lambda$$

miro

Доказательство: $\lambda_n = np_n$, по усл. $\lambda_n \to \lambda > 0$.

Подставим $p_n = \frac{\lambda_n}{n}$ в ф-лу Бернулли: $C_n^k \frac{\lambda_n^k}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} =$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \frac{\lambda_n^k}{n^k} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \blacktriangle$$

$\frac{n\cdot(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \to 1$

Одного порядка

$\frac{\lambda_n}{n} \to 0$

Замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^x = e^n$$

miro