# Критерий Колмогорова

**Def** Статистическим критерием наз $\delta(\vec{X}) = \begin{cases} 0, & \vec{X} \notin \mathbb{R}^n \setminus K \\ 1, & \vec{X} \in K \end{cases}$, $K$ – критическая область критерия

- $\delta(\vec{X}) = 0$ – принимаем $H_0$, отвергаем $H_a$
- $\delta(\vec{X}) = 1$ – принимаем $H_a$, отвергаем $H_0$

| | Верна $H_0$ | Верна $H_a$ |
|---|---|---|
| $\delta = 0$ | хорошо | ошибка 2го рода |
| $\delta = 1$ | ошибка 1го рода | хорошо |

**Def** $\alpha_1(\delta) = P_{H_0}(\delta = 1)$ – вероятность ошибки 1го рода
размер критерия

$\alpha_2(\delta) = P_{H_a}(\delta = 0)$ – вер-ть ошибки 2го рода

$\beta(\delta) = 1 - \alpha_2(\delta)$ – мощность критерия

**Def** Критерий $\delta$ состоятелен если $\beta(\delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Есть так называемые критерии согласия. В общем виде они выглядят так:

$\vec{X} \in F \qquad H_0 = \{F = F_0\}$

$\qquad\qquad H_a = \{F \neq F_0\}$

Нужно придумать функцию, которая бы представляла собой меру близости эмпирической и предполагаемой функций распределения.

Назовем её $d(F_0, F_n^*)$. Она должна удовлетворять условиям:

к1) при верной $H_0$ $\quad d(F_0, F_n^*) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} \eta \in G$ (полностью известное абсолютно непр. распределение)

к2) при верной $H_a$ $\quad |d(F_0, F_n^*)| \xrightarrow[n\to\infty]{P} \infty$

Тогда, критерием согласия называют $\delta = \begin{cases} 0, & d(F_0, F_n^*) < C \\ 1, & d(F_0, F_n^*) \geq C \end{cases}$, где $G(C) = 1 - \varepsilon$

т.е. $C$ – квантиль уровня $1-\varepsilon$ распр. $G$

## Теорема Колмогорова

Пусть $X \in F$, $F$ - непрер. $\forall t > 0$ $\quad d_k = \sqrt{n}\, \sup_t |F_n^*(t) - F_0(t)| \Rightarrow \eta \in K$ (при верной $H_0$)

$$\delta = \begin{cases} 0, & \sqrt{n}\, \sup |F_n^*(t) - F_0(t)| < C \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \begin{matrix} H_0 = \{F = F_0\} \\ H_a = \{F \neq F_0\} \end{matrix}$$

Этот критерий состоятелен:

По Т. Гливенко-Кантелли

$$\alpha_2(\delta) = P_{H_a}(d_k < C) = P_{H_a}\big(\sqrt{n}\, \sup_t |\underbrace{F_n^*(t)}_{\to F(t)} - F_0(t)| < C\big) = [\text{верна } H_a \Rightarrow F_0(t) \neq F(t)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \tilde{t} \quad |F(\tilde{t}) - F_0(\tilde{t})| > 0 \Rightarrow \quad \sup_t |F(t) - F_0(t)| \geq |F(\tilde{t}) - F_0(\tilde{t})| = \sup > 0 \text{, тогда}$$

$$P_{H_a}\Big(\underbrace{\sqrt{n}\, \underbrace{\sup|-\text{"}-|}_{>0}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty} < C\Big) \to 0$$



**Def** Реально достигнутый уровень значимости - $\varepsilon^* = P_{H_0}\big(d(F_n^*, F_0) \geq \tilde{d}\big)$

$\eta \in G$

числовое значение которое мы сравнивали с $C$.

Эта вероятность имеет следующий смысл: Это вероятность, взяв выборку из распределения $F_0$, получить по ней большее отклонение, чем по проверяемой выборке.
Большие значения $\varepsilon^*$ свидетельствуют в пользу $H_0$,
Малые, напротив, в пользу $H_a$. Почему?

Если, например $\varepsilon^* = 0{,}2$, то в среднем 20 % контрольных выборок (у которых $F = F_0$) будут иметь большее отклонение чем проверяемая. Отсюда можно сделать вывод что тестируемая выборка ведет себя не хуже чем 20% "правильных" выборок

- $\varepsilon^* \leq 0{,}05 \Rightarrow H_a$
- $\varepsilon^* \geq 0{,}1 \Rightarrow H_0$