Распределения, связанные с нормальным (хи-квадрат, Стьюдента, Фишера).

Гамма-распределение

Вспомним свойство устойчивости по суммированию:

- Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – независ. и $\xi_i \in \Gamma_{\alpha, \lambda_i}$ $\forall i \in [1, n]$ тогда $\xi_1 + \dots + \xi_n \in \Gamma_{\alpha, \lambda_1 + \dots + \lambda_n}$

И докажем еще одно свойство $\Gamma_{\alpha, \lambda}$:

- Если $\xi \in N_{0,1}$ то $\xi^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$

Доказательство:

При $y < 0$: $F_{\xi^2}(y) = P(\xi^2 < y) = 0 \Rightarrow f_{\xi^2}(y) = 0$

При $y > 0$: $F_{\xi^2}(y) = P(\xi^2 < y) = P(-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}) = N_{0,1}(\sqrt{y}) - N_{0,1}(-\sqrt{y})$

$$f_{\xi^2}(y) = \frac{dF_{\xi^2}(y)}{dy} = (N_{0,1}(\sqrt{y}))' \cdot (\sqrt{y})' - (N_{0,1}(-\sqrt{y}))' \cdot (-\sqrt{y})' =$$

из симметр плотности $N_{0,1}$

$$\varphi_{0,1}(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \varphi_{0,1}(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(\varphi_{0,1}(\sqrt{y}) + \varphi_{0,1}(\sqrt{y}) \right)$$

$$= \frac{\varphi_{0,1}(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{y}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\underset{\sqrt{\pi}}{\underset{\parallel}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}}} y^{\frac{1}{2} - 1} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot y} \in \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

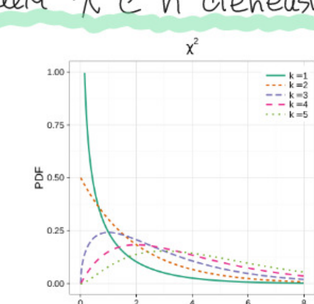
Распределение χ^2 Пирсона

Из предыдущих двух свойств следует, что если $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимые и $\xi_i \in N_{0,1}$ $\forall i \in [1, n]$

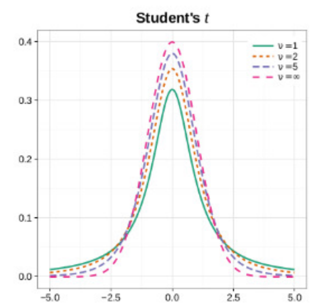
то $\chi^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \in \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{n}{2}}$. Это называется распределением χ^2 с n степенями свободы

Обозначение: $\chi^2 \in \chi^2_n$

- Свойство: Если $Z_1 \in \chi^2_n$, $Z_2 \in \chi^2_m$ $\Rightarrow Z_1 + Z_2 \in \chi^2_{n+m}$



Распределение Стьюдента



Def. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k$ – независимы и $\xi_i \in N_{0,1}$ $\forall i \in [0,n]$

Распределение случайной величины $t_k = \dfrac{\xi_0}{\sqrt{\dfrac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_k}{k}}}$ наз

распределением Стьюдента с k степенями свободы и обозначается T_k

Свойство: $T_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} N_{0,1}$. Доказательство: • $\dfrac{\chi_n^2}{n} \xrightarrow{p} 1$ т.к по ЗБЧ $\dfrac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_1^2}{n} \to \mathbb{E}\xi_1^2 = 1$ $\left(\xi_1 \in \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}},\ \mathbb{E}\xi_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1} = 1\right)$

• $t_n = \dfrac{\xi}{\sqrt{\dfrac{\chi_n^2}{n}}} \Rightarrow \xi \in N_{0,1}$

Распределение Фишера

Def. Пусть $\left.\begin{matrix} Z_1 \in \chi_n^2 \\ Z_2 \in \chi_m \end{matrix}\right\}$ независимы.

Распределение случайной величины $f_{n,m} = \dfrac{\frac{Z_1}{n}}{\frac{Z_2}{m}} = \dfrac{m}{n}\,\dfrac{Z_1}{Z_2}$ имеет распределение Фишера с

n и m степенями свободы. ($F_{n,m}$)

Свойство: $F_{n,m} \underset{n,m\to\infty}{\Rightarrow} I_1$

Очевидно, т.к. $\dfrac{Z_1}{n} = \dfrac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n} \xrightarrow{p} \mathbb{E}\xi_1^2 = 1$ и $\dfrac{Z_2}{m} = \dfrac{\eta_1^2 + \ldots + \eta_m^2}{m} \to \mathbb{E}\eta_1^2 = 1$