Распределение суммы случайных величин, имеющих нормальное распределение.

Пусть X_1 и X_2 независимы, $X_1 \in N_{a_1,\sigma_1^2}$, $X_2 \in N_{a_2,\sigma_2^2}$. Тогда $X_1+X_2 \in N_{a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

Доказательство: Введем новые случайные величины $Y_1 = \frac{X_1-a_1}{\sigma_1}$ $\quad Y_2 = \frac{X_2-a_2}{\sigma_1}$

$$Y_1 \in N_{0,1} \qquad Y_2 \in \frac{\sigma_2}{\sigma_2}\,\frac{X_2-a_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\overset{\in N_{0,1}}{\frac{X_2-a_2}{\sigma_2}} \in N_{0,\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}$$

Докажем, что $Y_1+Y_2 \in N_{0,\,1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}$, тогда $X_1+X_2 = \sigma_1(Y_1+Y_2)+a_1+a_2 \in N_{a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

Обозначим $\Theta = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$. Тогда, по формуле свертки:

$$f_{Y_1+Y_2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\Theta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-u)^2}{2}}\, du = \frac{1}{2\pi\Theta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{\Theta^2}+t^2-2tu+u^2\right)} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi\Theta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[u^2\frac{(1+\Theta^2)}{\Theta^2} - 2tu + t^2\frac{(1+\Theta)^2}{(1+\Theta)^2}\right]} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi\Theta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[u^2\frac{(1+\Theta^2)}{\Theta^2} - 2u\cdot\sqrt{\frac{1+\Theta^2}{\Theta^2}}\cdot t\cdot\sqrt{\frac{\Theta^2}{1+\Theta^2}} + t^2\frac{\Theta^2}{(1+\Theta)^2} + t^2\frac{1}{(1+\Theta)^2}\right]} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi\Theta}\, e^{-\frac{t^2}{2(1+\Theta)^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\Big[\underbrace{u\sqrt{\frac{1+\Theta^2}{\Theta^2}} - t\sqrt{\frac{\Theta^2}{1+\Theta^2}}}_{v}\Big]^2} du =$$

$$dv = du\cdot\sqrt{\frac{1+\Theta^2}{\Theta^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\Theta^2}}\, e^{-\frac{t^2}{2(1+\Theta)^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv}_{\sqrt{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\Theta^2)}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2(1+\Theta)^2}} \quad \blacktriangle$$

Стандартное норм. распр. от $-\infty$ до $+\infty$ $= 1$