Метод моментов, примеры. Состоятельность оценок, полученных методом моментов.

Метод моментов

Он заключается в следующем:

- Любой момент случайной величины X_1 (пусть напр. k-ый) является функцией от Θ (неизвестного параметра распределения)
- Тогда и Θ может оказаться функцией от теоретического k-ого момента.
- Выразим Θ и теоретический момент заменим выборочным.

Алгоритм: $\vec{X} \in F_\Theta$, $\Theta \in \mathbb{R}$

чаще всего $g(y) = y^k$

1. Выбираем пробную функцию $g(y)$ такую, чтобы момент $\mathbb{E}g(X_1)$ существовал и $m(\Theta) = \mathbb{E}g(X_1)$ была обратима
2. Выражаем Θ: $\Theta = m^{-1}\left(\mathbb{E}g(X_1)\right)$
3. Заменяем истинный момент выборочным: $\Theta^* = m^{-1}\left(\overline{g(x)}\right)$

Θ^* – О.М.М. – оценка методом моментов.

Примеры: 1) $\vec{X} \in U_{[0,\theta]}$, $\theta > 0$

- $g(y) = y$, $\mathbb{E}g(X_1) = \mathbb{E}X_1 = \frac{\theta}{2}$
- $\theta = 2\mathbb{E}X_1$
- $\theta^* = 2\overline{X}$

Попробуем $g(y) = y^k$

- $\mathbb{E}g(X_1) = \mathbb{E}X_1^k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \frac{1}{\theta} dt = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta t^k dt = \frac{t^{k+1}}{\theta(k+1)}\Big|_0^\theta = \frac{\theta^k}{k+1}$
- $\theta = \sqrt[k]{(k+1) \cdot \mathbb{E}X_1^k}$
- $\theta^* = \sqrt[k]{(k+1) \cdot \overline{X^k}}$

miro

2) $\vec{X} \in \Pi_\lambda$

- $g(y) = y$ $\quad \mathbb{E}g(X_1) = \mathbb{E}X_1 = \lambda$
- $\lambda^* = \overline{X}$

3) $\vec{X} \in E_\alpha$

- $g(y) = y$ $\quad \mathbb{E}X_1 = \frac{1}{\alpha}$
- $\alpha = \frac{1}{\mathbb{E}X_1}$ $\quad$ а) Сост: $\frac{1}{\overline{X}} = \frac{n}{X_1 + \ldots + X_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{\mathbb{E}X_1} = \frac{1}{\alpha}$
- $\alpha^* = \frac{1}{\overline{X}}$ $\quad$ б) Несмещ: $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\overline{X}}\right) = n\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{X_1 + \ldots + X_n}\right) = n \cdot \frac{\alpha}{n-1}$

$X_i \in \Gamma_{\alpha,1} \Rightarrow \sum X_n \in \Gamma_{\alpha,n}$ $\quad \gamma_{\alpha,\lambda} = \frac{\alpha^\lambda t^{\lambda-1} \cdot e^{-\alpha t}}{\Gamma(\lambda)}$ $\quad t = \frac{z}{\alpha}$, $z = \alpha t$, $dz = \alpha dt$

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{-1} \cdot t^{n-1} \cdot \alpha^n e^{-\alpha t}}{\Gamma(n)} dt = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} t^{n-2} e^{-\alpha t} dt = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \cdot \frac{1}{\alpha^{n-1}} \int_0^\infty z^{n-2} e^{-z} dz$$

$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(n)} \cdot \Gamma(n-1) = \frac{\alpha}{n-1}$$

miro

Теорема о состоятельности ОММ.

Пусть $\mathbb{D}g(X_1) < \infty$, $m(t)$ – обратима и непрерывна. тогда $\theta^* = m^{-1}(\overline{g(X)})$ состоятельна

Доказательство: $\overline{g(X)} \xrightarrow{P} \mathbb{E}g(X_1)$

$$\theta^* = m^{-1}(\overline{g(X)}) \xrightarrow{P} m^{-1}(\mathbb{E}g(X_1)) = \theta$$

Неравенство Йенсена

Если $g(u)$ - выпуклая вниз $(\smile)$, то $\mathbb{E}g(x) \geq g(\mathbb{E}X)$ если $\mathbb{E}X < \infty$

Причем равенство достигается $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} g \text{ – линейная функция} \\ X \in I_c \end{array}\right.$

Пример использования:

10.16. Используя метод моментов, оценить параметр θ равномерного распределения на отрезке:
а) $[-\theta;\ \theta]$, $\theta > 0$; б) $[\theta;\ \theta + 1]$.
Исследовать полученные оценки на несмещенность и состоятельность.

б) I $\mathbb{E}X_1 = \dfrac{(\theta+1)^2 - \theta^2}{2} = \dfrac{2\theta+1}{2}$

II. $\theta + \frac{1}{2} = \overline{X}$

III. $\theta^* = \overline{X} - \frac{1}{2}$

Сост: $\theta^* \xrightarrow{P} EX_1 - \frac{1}{2} = \theta + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \theta$ ✓

Несмещ: $E\theta^* = E(\overline{X} - \frac{1}{2}) = EX_1 - \frac{1}{2} = \theta$ ✓

Лин.