HW 12

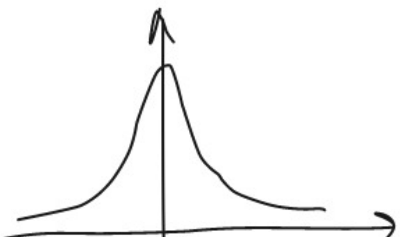
Status	ready
checkbox	☑
class	Prob & Stats
due date	@May 18, 2021

12.1. Пусть элементы выборки $\vec{X}$ имеют плотность распределения

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1+(t-\theta)^2)}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Здесь θ — неизвестный параметр, $\theta \in \mathbf{R}$. Построить оптимальный точный доверительный интервал для параметра θ по одному наблюдению ($n = 1$).

$$f(t) = \frac{1}{\pi(1+(t-\theta)^2)} \qquad C_{0,1} = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$$



I $G(\vec{X}_1, \theta) = X_1 - \theta \in C_{0,1}$

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(t-\theta)$$

II $P(t_1 < X_1 - \theta < t_2) = 1-\varepsilon$

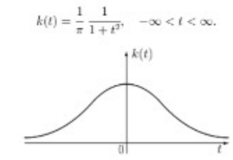
$$F(t) = P(x-\theta < t) = $$
$$= P(x < t+\theta) = F_{x-\theta}(t+\theta) = C_{0,1}(t)$$

$$P(-t < X_1 - \theta < t) = 1-\varepsilon$$

$$C_{0,1}(t) - C_{0,1}(-t) = 1-\varepsilon$$

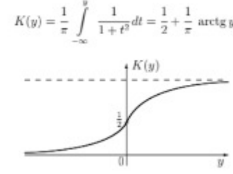
5. *Распределение Коши K.* Плотность задается формулой

$$k(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}, \quad -\infty < t < \infty.$$



По своему виду график плотности напоминает плотность стандартного нормального распределения, только в отличие от последнего стремление $k(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$ происходит значительно медленнее. Интегрируя плотность, находим функцию распределения:

$$K(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y.$$



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(t) - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(-t) = 1-\varepsilon$$

$$\operatorname{arctg}(t) = (1-\varepsilon)\frac{\pi}{2}$$

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon\pi}{2}\right)$$

$$P\left(-\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}(1-\varepsilon)\right] < X_1 - \theta < \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}(1-\varepsilon)\right]\right) = 1-\varepsilon$$

$$P\left(-\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}(1-\varepsilon)\right] + X_1 < \theta < \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}(1-\varepsilon)\right] + X_1\right) = 1-\varepsilon$$

12.5. Имеется выборка объема 1 из нормального распределения $\Phi_{a,1}$. Проверяются простые гипотезы $H_0: a = 0$, $H_1: a = 1$. Используется следующий критерий (при заданной постоянной c):

$$H_0 \Leftrightarrow X_1 \le c.$$

Вычислить, в зависимости от c, вероятности ошибок первого и второго рода.

$X_1 \in N_{a,1}$ $\quad H_0 = \{a = 0\}$ $\quad X_1 \in \Phi_{0,1}$

$\quad H_a = \{a = 1\}$

$$\delta = \begin{cases} 0, & X_1 \le C \\ 1, & X_1 > C \end{cases}$$

$$\alpha_1 = P_{H_0}(\delta \neq 0) = P\{\overset{X_1 \in N_{0,1}}{a = 0}, X_1 > C\} = 1 - P(X_1 \le C) = 1 - N_{0,1}(C)$$

$$\alpha_2 = P_{H_a}(\delta \neq 1) = P\{a = 1, X_1 \le C\} = P(X_1 \le C) = N_{1,1}(C)$$

12.9. Пусть $\vec{X} \Subset \Phi_{a,1}$. Для проверки гипотез $H_0: a = 0$ против $H_1: a = 1$ используется следующий критерий: H_0 принимается, если $X_{(n)} < 3$, и отвергается в противном случае. Найти вероятности ошибок.

$\vec{X} \in N_{a,1}$ $\quad H_0 = \{a = 0\}$

$\quad H_a = \{a = 1\}$

$$\delta = \begin{cases} 0, & X_{(n)} < 3 \\ 1, & X_{(n)} \geqslant 3 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = P_{H_0}(\delta \neq 0) = P\{\overset{\vec{X} \in N_{0,1}}{a = 0}, X_{(n)} \geqslant 3\} = P(\vec{X} \in N_{0,1}, \text{хотя бы один эл-т} \geqslant 3) =$$

$$= 1 - \prod_{i=n} P(X_i < 3) = 1 - [N_{0,1}(3)]^n$$

$$\alpha_2 = P_{H_a}(\delta \neq 1) = P\{\vec{X} \in N_{1,1}, X_{(n)} < 3\} = [N_{1,1}(3)]^n$$

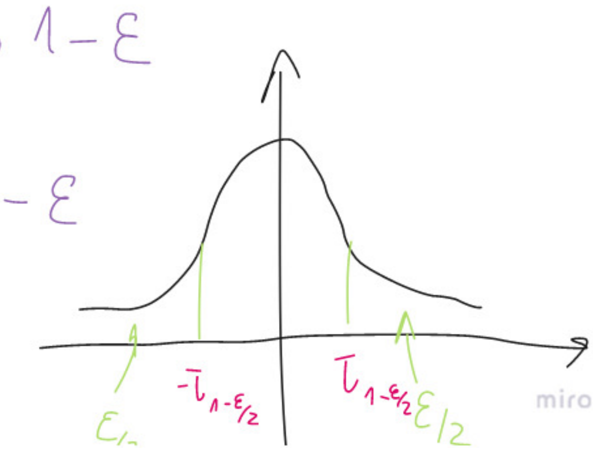
12.3 a) $\bar{X}$: $\mathbb{E}X_1 = \frac{\theta}{2}$ $\quad \mathbb{D}X = \frac{\theta^2}{12}$

$$\frac{n\bar{X} - n\mathbb{E}X}{\sqrt{n\mathbb{D}X}} \in N_{0,1}$$

$$P\left(-\tau_{1-\varepsilon/2} < \frac{\bar{X}\, n\left(\bar{X} - \frac{\theta}{2}\right)}{\bar{X}\,\underbrace{\frac{\theta}{2}}_{\to 1}\sqrt{n/3}} < \tau_{1-\varepsilon/2}\right) \to 1-\varepsilon$$

$$P\left(-\tau_{1-\varepsilon/2} < \frac{n\left(\bar{X} - \frac{\theta}{2}\right)}{\bar{X}\cdot\sqrt{n/3}} < \tau_{1-\varepsilon/2}\right) \to 1-\varepsilon$$

$$P\left(\underbrace{2\bar{X} - \frac{2\tau_{1-\varepsilon/2}\bar{X}}{\sqrt{3n}}}_{\theta_1^-} < \theta < \underbrace{2\bar{X} + \frac{2\tau_{1-\varepsilon/2}\bar{X}}{\sqrt{3n}}}_{\theta_1^+}\right) \to 1-\varepsilon$$



12.6 a) $H_0 = \{\theta = 1\}$ $\quad \vec{X} \in N_{\theta,1}$

$H_a = \{\theta \neq 1\}$

$$P\left(-t < \sqrt{n}(\bar{X} - \theta) < t\right) = N_{0,1}(t) - N_{0,1}(-t) = 1-\varepsilon$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{t}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{X} + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1-\varepsilon$$

Д.И: $\left(\bar{X} - \frac{t}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \theta \in \left(\bar{X} - \frac{t}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

б) $\vec{X} \in N_{1,\theta}$ $\quad H_0 = \{\theta = 1\}$

$H_a = \{\theta \neq 1\}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - 1)^2}{\theta} \in \chi^2_n \qquad \tau_1 : \chi^2_n(\tau_1) = \frac{\varepsilon}{2} \; ; \; \tau_2 : \chi^2_n(\tau_2) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$P\left(\tau_1 < \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - 1)^2}{\theta} < \tau_2\right) = \chi^2_n(\tau_2) - \chi^2_n(\tau_1) = 1-\varepsilon$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)^2}{\tau_1} < \theta < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)^2}{\tau_2}\right) = 1-\varepsilon$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \theta \in \left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - 1)^2}{\tau_1} ; \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - 1)^2}{\tau_2} \right) \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

вероятности ошибок.

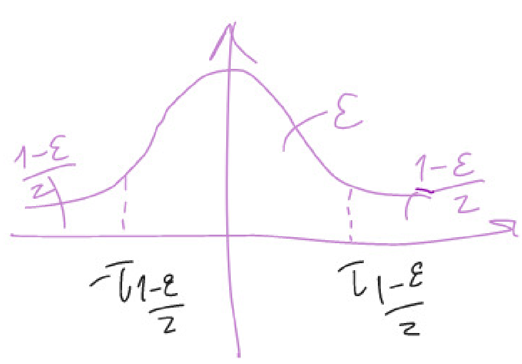
12.10. Используя конструкции доверительного интервала, построить критерий асимптотического уровня ε для проверки гипотезы $\mathrm{H}: \theta = 1$, если а) $\vec{X} \in \mathrm{E}_\theta$; б) $\vec{X} \in \mathrm{B}_{\theta/2}$; в) $\vec{X} \in \Pi_\theta$.

а) $\vec{X} \in E_\theta$ $\quad H_0 = \{\theta = 1\}$

$H_a = \{\theta \neq 1\}$

$$\frac{n\bar{X} - n\mathbb{E}X}{\sqrt{n\mathbb{D}X}} = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \frac{1}{\theta}\right)}{\sqrt{\frac{1}{\theta^2}}} = \sqrt{n}(\bar{X}\theta - 1) \in N_{0,1}$$

$$\mathbb{P}(-t < \sqrt{n}(\bar{X}\theta - 1) < t) = (N_{0,1}(t) - N_{0,1}(-t)) \to \varepsilon$$



$$1 - \frac{1-\varepsilon}{2} = \frac{2 - 1 - \varepsilon}{2} = \frac{1-\varepsilon}{2}$$

$$P\left(-\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}} < \sqrt{n}\left(\overline{X}\theta - 1\right) < \tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}\right) \to \varepsilon$$

$$P\left(\frac{\sqrt{n} - \tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}}{\sqrt{n}\,\overline{X}} < \theta < \frac{\sqrt{n} + \tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}}{\sqrt{n}\,\overline{X}}\right) \to \varepsilon$$

$$P\left(\frac{1}{\overline{X}} - \frac{\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}}{\sqrt{n}\,\overline{X}} < \theta < \frac{1}{\overline{X}} + \frac{\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}}{\sqrt{n}\,\overline{X}}\right) \to \varepsilon$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \theta \in \left(\frac{1}{\overline{X}} - \frac{\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}}{\sqrt{n}\,\overline{X}};\ \frac{1}{\overline{X}} - \frac{\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}}{\sqrt{n}\,\overline{X}}\right) \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\vec{X} \in B_{\frac{\theta}{2}}$ $\quad E X_1 = p \quad D X_1 = p(1-p)$

$$\frac{n\overline{X} - nEX}{\sqrt{n DX}} = \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X} - \frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\frac{\theta}{2}\left(1-\frac{\theta}{2}\right)}} \cdot \frac{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X} - \frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}}_{\in N_{0,1}} \frac{\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{\frac{\theta}{2}\left(1-\frac{\theta}{2}\right)}}$$

п.н. $\to 1$

$$P\left(-\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}} < \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X} - \frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\overline{X}\left(1-\overline{X}\right)}} < \tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}\right) \to \varepsilon$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{-\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{n}} < \overline{X} - \frac{\theta}{2} < \frac{\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{n}}\right) \to \varepsilon$$

$$\mathbb{P}\left(2\overline{X} - 2\,\frac{\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{n}} < \theta < 2\overline{X} + 2\,\frac{\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{n}}\right) \to \varepsilon$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \theta \in \left(2\overline{X} - 2\,\frac{\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{n}};\ 2\overline{X} - 2\,\frac{\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}}{\sqrt{n}}\right) \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

в) $\vec{X} \in \Pi_\theta \qquad \mathbb{E}X_1 = \theta \qquad \mathbb{D}X_1 = \theta$

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \theta)}{\sqrt{\theta}} \cdot \sqrt{\frac{\theta}{\overline{X}}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \theta)}{\sqrt{\overline{X}}} \Rightarrow \eta \in N_{0,1}$$

$$\mathbb{P}\left(-\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}} < \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \theta)}{\sqrt{\overline{X}}} < \tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}\right) \to \varepsilon$$

$$\mathbb{P}\left(\overline{X} - \frac{\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}\sqrt{\overline{X}}}{\sqrt{n}} < \theta < \overline{X} + \frac{\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}\sqrt{\overline{X}}}{\sqrt{n}}\right) \to \varepsilon$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \theta \in \left(\overline{X} - \frac{\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}\sqrt{\overline{X}}}{\sqrt{n}};\ \overline{X} - \frac{\tau_{\frac{1-\varepsilon}{2}}\sqrt{\overline{X}}}{\sqrt{n}}\right) \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$