Задача оценивания неизвестных параметров. Несмещенность, состоятельность оценок.

Def Статистика – любая функция от выборки.

Пусть дана выборка из распределения с неизвестным параметром. Точно узнать его невозможно. Однако можно приблизить.

Def Оценкой неизвестного параметра Θ наз. любая функция от выборки $\Theta^* = g(X_1, \ldots, X_n)$ в том или ином смысле приближающая Θ.

Def Оценка Θ^* наз. несмещенной, если $\mathbb{E}\Theta^* = \Theta$

Def Оценка Θ^* наз. состоятельной, если $\Theta^* \xrightarrow[n\to\infty]{P} \Theta$

Пример: Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка объема n из нормального распределения N_{a,σ^2}, где $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Оценкой для истинного среднего $a = \mathbb{E}X_1$ может служить выборочное среднее $a^* = \overline{X}$. Эта оценка состоятельная и несмещенная:

1) $\mathbb{E}\overline{X} = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_2}{n} = \frac{n\,\mathbb{E}X_1}{n} = \mathbb{E}X_1$

2) $\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[\text{ЗБЧ}]{P} \mathbb{E}X_1$

Дисперсия $\sigma^2 = \mathbb{D}X_1$ может быть оценена: $S^2 = \frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})^2$, $S_0^2 = \frac{n-1}{n} S^2$

1) $S^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 \xrightarrow{P} \mathbb{E}X_1^2 - (\mathbb{E}X_1)^2 = \mathbb{D}X_1$ – сост.

2) $S_0^2 = \frac{n-1}{n} S^2 \to 1 \cdot \mathbb{D}X_1$ – сост.

1.2) $\mathbb{E}S^2 = \mathbb{E}(\overline{X^2} - (\overline{X})^2) = \mathbb{E}\overline{X^2} - \mathbb{E}(\overline{X})^2 = \mathbb{E}\overline{X^2} - \mathbb{D}\overline{X} - (\mathbb{E}\overline{X})^2 = \mathbb{E}X_1^2 - \frac{\mathbb{D}X_1}{n} - (\mathbb{E}X_1)^2 =$

$\mathbb{D}\overline{X} = \mathbb{E}(\overline{X})^2 - (\mathbb{E}\overline{X})^2$

$= \mathbb{D}X_1 - \frac{\mathbb{D}X_1}{n} = \mathbb{D}X_1 \cdot \frac{n-1}{n}$

2.2) $\mathbb{E}S_0^2 = \mathbb{E}\left(S^2 \cdot \frac{n}{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{D}X_1 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1}\right)$