Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Бернулли.

Неравенство Маркова

Если $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ то $\forall x > 0 \quad P(|\xi| \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{E}|\xi|}{x}$

Доказательство: Вспомним, что индикатор события A это $I(A) = \begin{cases} 1, & A \text{ произошло} \\ 0, & A \text{ не произошло} \end{cases}$

По опр. $I(A) \in B_p$, где $p = P(A)$, $\mathbb{E}I = p$. А также, знаем что $I(A) + I(\overline{A}) = 1$

$$|\xi| = |\xi| \cdot 1 = |\xi| \left[\underbrace{I(|\xi| < x)}_{\geqslant 0} + I(|\xi| \geqslant x)\right] \geqslant |\xi| \cdot I(|\xi| \geqslant x) \geqslant x\, I(|\xi| \geqslant x)$$

$|\xi| \geqslant x\, I(|\xi| \geqslant x)$ возьмем $\mathbb{E}$ от обеих частей

$$\mathbb{E}|\xi| \geqslant \mathbb{E}(x \cdot I(|\xi| \geqslant x)) = x \cdot P(|\xi| \geqslant x)$$

$$\frac{\mathbb{E}|\xi|}{x} \geqslant P(|\xi| \geqslant x) \quad \blacktriangle$$

Следствие: обобщённое неравенство Чебышёва

Пусть функция g неубывает и неотрицательна на $\mathbb{R}$. Если $\mathbb{E}g(\xi) < \infty$, то $\forall x \in \mathbb{R}$

$$P(\xi \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{E}g(\xi)}{g(x)}$$

Доказательство: Поскольку g не убывает $P(\xi \geqslant x) \leqslant P(g(\xi) \geqslant g(x))$

Т.к. $g(x) \geqslant 0$, применим неравенство Маркова $P(g(\xi) \geqslant g(x)) \leqslant \frac{\mathbb{E}g(\xi)}{g(x)}$

Неравенство Чебышева

Если $\mathbb{D}\xi$ существует, то $\forall x>0$ $\quad P(|\xi-\mathbb{E}\xi|\geqslant x)\leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{x^2}$ (*)

Доказательство: Для $x>0$ $\;|\xi-\mathbb{E}\xi|\geqslant x$ равносильно $(\xi-\mathbb{E}\xi)^2\geqslant x^2$

поэтому $P(|\xi-\mathbb{E}\xi|\geqslant x)=P((\xi-\mathbb{E}\xi)^2\geqslant x^2)\leqslant \frac{\mathbb{E}(\xi-\mathbb{E}\xi)^2}{x^2}=\frac{\mathbb{D}\xi}{x^2}$ ▲

Закон Больших Чисел (в форме Чебышёва)

$\forall \xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots$ – н.о.р.с.в. (независимые одинаково распределенные случ. величины) таких, что $\mathbb{D}\xi_1<\infty$ (*)

$$\frac{\xi_1+\dots+\xi_n}{n}\xrightarrow{P}\mathbb{E}\xi_1$$

miro

Доказательство:

$$S_n=\xi_1+\dots+\xi_n\;,\quad \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{\mathbb{E}\xi_1+\dots+\mathbb{E}\xi_n}{n}=\frac{n\,\mathbb{E}\xi_1}{n}=\mathbb{E}\xi_1$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ $\quad P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\geqslant\varepsilon\right)\overset{(*)}{\leqslant}\frac{\mathbb{D}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\mathbb{D}S_n}{n^2\varepsilon^2}=$

$$\overset{\text{нз.}}{=}\frac{\mathbb{D}\xi_1+\dots+\mathbb{D}\xi_n}{n^2\varepsilon^2}=\frac{n\,\mathbb{D}\xi_1}{n^2\varepsilon^2}=\frac{\mathbb{D}\xi_1}{n\varepsilon^2}\xrightarrow[n\to\infty]{(*)}0$$

Теорема Бернулли

Пусть S_n – число успехов в n испытаниях сх. Бернулли p – вероятность успеха. Тогда $\quad \frac{S_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{P}p$

Доказательство: очевидное следствие прошлой теоремы

miro