Подмодели и основная теорема о гомоморфизмах

13.1 Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$

$\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$:

1) $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{B}|$

2) $\forall P^n, f^n, c \in \sigma$, $\forall a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$

а) $\mathfrak{A} \models P^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models P^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$

б) $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n)$

в) $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$

13.3 $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $A \subseteq |\mathfrak{B}|$

Множество замкнуто относительно операций модели $\mathfrak{B}$ если:

1) $\forall f^n \in \sigma$, $\forall a_1, \dots, a_n \in A \quad f^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) \in A$

2) $\forall c \in \sigma \quad c^{\mathfrak{B}} \in A$

т.е значения функций от элементов множества A должны принадлежать этому же множеству и константы означены на этом же множестве

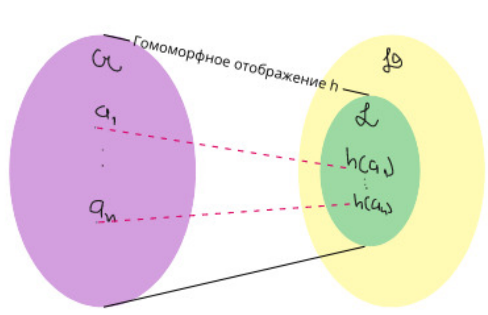
miro

13.4 Множество A определяет некоторую подмодель $\mathfrak{B}$ <=> A замкнуто относительно операций модели $\mathfrak{B}$

13.5 $\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma) \\ h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \text{ — гомоморф} \end{array}\right\} \Rightarrow C = h(A) = \{h(a) \mid a \in |\mathfrak{A}|\}$ — замкнуто отн. операций в $\mathfrak{B}$

Т.е $\exists \mathfrak{C}: \mathfrak{C} = \langle C, \sigma \rangle : \mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$

ТО ЕСТЬ образ гомоморфизма модели является подмоделью



$h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$

$\mathfrak{C} \leq \mathfrak{B}$

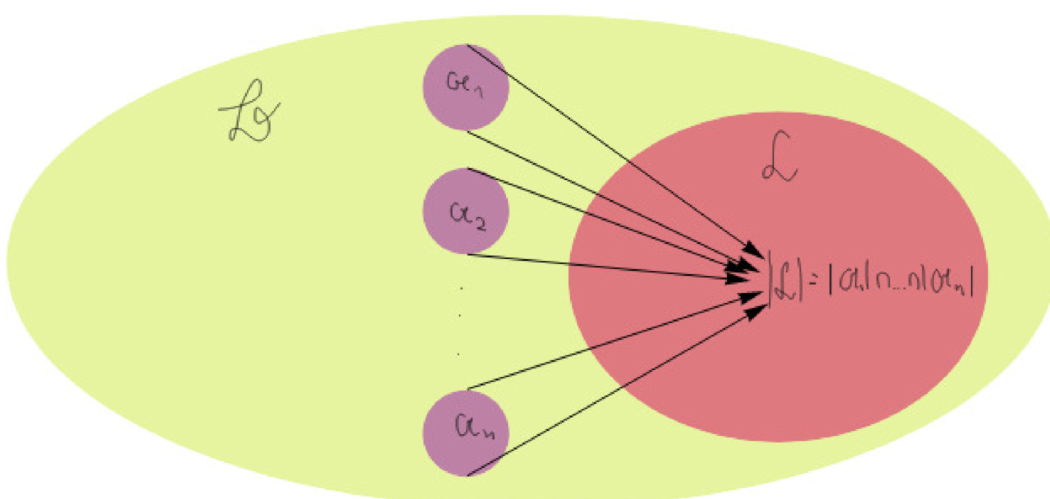
miro

13.6 $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$

$H = \{\mathfrak{A} \in K(\sigma) \mid \mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}\} \neq \varnothing$

Тогда $\exists C = \bigcap_{\mathfrak{A} \in H} |\mathfrak{A}|$ замкнуто в $\mathfrak{B}$ отн. операций

т.е. $\exists \mathfrak{L} \leq \mathfrak{B} : |\mathfrak{L}| = C$



$H = \{\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_n\}$

$C = \{|\mathfrak{A}_1|, \dots |\mathfrak{A}_n|\}$

эти все замкнуты относительно операций потому что они - основные множества подмоделей

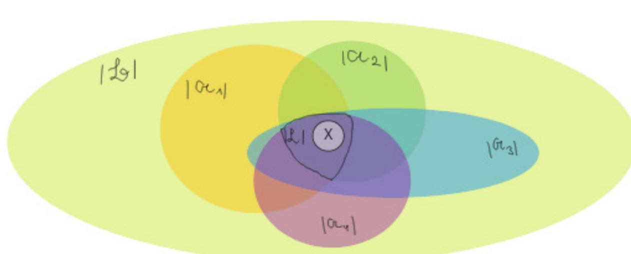
miro

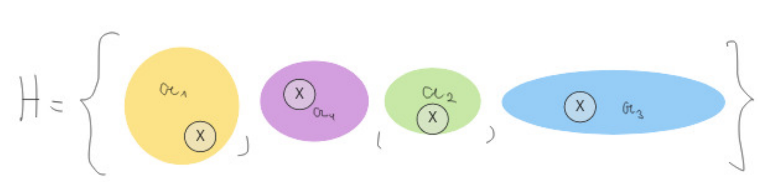
13.7 $\mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $X \subseteq |\mathfrak{B}|$, $X \neq \varnothing$

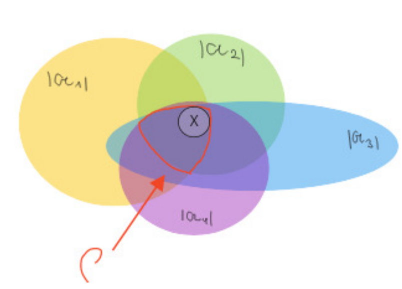
Тогда $\exists \mathfrak{L} : \mathfrak{L} \leq \mathfrak{B}$ минимальная по включению среди подмоделей $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B} : X \subseteq |\mathfrak{A}|$

то есть среди всех подмоделей содержащих X $\mathfrak{L}$ наименьшая

Такая подмодель называется подмоделью порождаемой множеством X $\leftrightharpoons \mathfrak{L} = \mathrm{Sub}_{\mathfrak{B}}(X)$







miro

$X \subseteq C \quad X \neq \varnothing \Rightarrow C \neq \varnothing \overset{13.6}{\Rightarrow} \exists \mathfrak{L} \leqslant \mathfrak{B} : |\mathfrak{L}| = C \Rightarrow X \subseteq |\mathfrak{L}|$

$\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{L}$ и $X \subseteq |\mathfrak{M}|$ $\overset{13.6}{\text{то}}$ $\mathfrak{M} \in H \Rightarrow C \subseteq |\mathfrak{M}| \Rightarrow |\mathfrak{L}| \subseteq |\mathfrak{M}|$

13.8 $\quad \mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}, \ \mathfrak{L} \leqslant \mathfrak{B}, \ |\mathfrak{L}| \subseteq |\mathfrak{A}| \Rightarrow \mathfrak{L} \leqslant \mathfrak{A}$

$\triangle$

1) $|\mathfrak{L}| \subseteq |\mathfrak{A}|$

2) – $\mathfrak{A} \models p^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models p^{\mathfrak{B}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{L} \models p^{\mathfrak{L}}(a_1, \dots, a_n)$

– $f^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = f^{\mathfrak{B}}(\bar{a}) = f^{\mathfrak{L}}(\bar{a})$

– $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{L}}$

13.9 **Следствие 13.9.**

а) Если $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{B}$, то $|\mathfrak{C}| \subseteq |\mathfrak{A}| \Leftrightarrow \mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{A}$;

б) Если $X \subseteq |\mathfrak{B}|$, $X \neq \varnothing$, то $\exists \mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{B}$ такая, что $X \subseteq |\mathfrak{C}|$ и для $\forall \mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B} : (X \subseteq |\mathfrak{A}| \Rightarrow \mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{A})$.

13.10 $\quad \forall \sigma \quad \forall A \ \exists \mathfrak{A} \in K(\sigma) : |\mathfrak{A}| = A$

Тут штука в том что можем как угодно означить сигнатуру, например предикаты сделать истинными всегда, значения всех функций сделать разными одному элементу

13.11 **Замечание 13.11.**
$K(\sigma)$ - не множество.

Парадокс Кантора.

$K(\sigma) = \{ \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ – модель сигнатуры $\sigma \}$

Если $\mathfrak{A} \in P(K(\sigma))$ то $\mathfrak{A} \subseteq K(\sigma) \Rightarrow \mathfrak{A}$ - мод.

$\Rightarrow \mathfrak{A} \in K(\sigma) \Rightarrow P(K(\sigma)) \subseteq K(\sigma)$

$\Rightarrow \quad \| P(K(\sigma)) \| \leqslant \| K(\sigma) \|$

Но по Т. Кантора $\| K(\sigma) \| < \| P(K(\sigma)) \|$

13.12 **Предложение 13.12.**

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$,

терм $t(x_1, \ldots, x_n) \in T(\sigma)$, $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$.

Тогда $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = t^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n)$.

Доказательство: Индукция по построению терма:

1) $t(x) = x$, $t^{\mathfrak{A}}(a) = a = t^{\mathfrak{B}}(a)$, $t = c$, $t^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}} = t^{\mathfrak{B}}$;

2) $t = f(t_1(\overline{x}), \ldots, t_k(\overline{x}))$, тогда $t^{\mathfrak{A}}(\overline{a}) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(\overline{a}), \ldots, t_k^{\mathfrak{A}}(\overline{a})) =$
$= f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{B}}(\overline{a}), \ldots, t_k^{\mathfrak{B}}(\overline{a})) = f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}(\overline{a}), \ldots, t_k^{\mathfrak{B}}(\overline{a})) = t^{\mathfrak{B}}(\overline{a})$.

Предложение доказано.

*Определим понятие **терма** сигнатуры σ.*

1. *Термами являются:*

а) переменные $x_1, x_2, x_3, \ldots$;

б) константы: $c_1, \ldots, c_l \in \sigma$.

2. *Если $t_1, \ldots, t_r$ – термы и функциональный символ $f^r \in \sigma$, то $f(t_1, \ldots, t_r)$ – терм.*

3. *Других термов нет.*

Теорема 13.13.

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in F(\sigma)$, $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$. Тогда $\mathfrak{A} \vDash \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(\overline{a})$, φ - бескванторная.

Доказательство: Индукция по построению формул:

а) Пусть $\varphi(\overline{x}) = (t_1(\overline{x}) = t_2(\overline{x}))$. Тогда $\mathfrak{A} \vDash \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}(\overline{a}) = t_2^{\mathfrak{A}}(\overline{a}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{B}}(\overline{a}) = t_2^{\mathfrak{B}}(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(\overline{a})$.

б) $\varphi(\overline{x}) = P(\overline{x})$. Тогда $\mathfrak{A} \vDash \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash P(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash P(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(\overline{a})$.

$\varphi = (\varphi_1 \,\&\, \varphi_2)$. Тогда $\mathfrak{A} \vDash \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi_1(\overline{a})$ и $\mathfrak{A} \vDash \varphi_2(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi_1(\overline{a})$ и $\mathfrak{B} \vDash \varphi_2(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi(\overline{a})$. Далее упражнение.

1. Если t_1 и t_2 – термы, то $t_1 = t_2$ – формула.

2. Если $t_1, \ldots, t_s$ – термы и предикатный символ $P^s \in \sigma$, то $P(t_1, \ldots, t_s)$ – формула.

3. Если φ и ψ – формулы, то $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \,\&\, \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$, $\exists x\varphi(x)$ и $\forall x\varphi(x)$ – формулы.

4. Других формул нет.

1. **Пусть $\boldsymbol{\varphi = (\varphi_1 \& \varphi_2)}$.** Тогда

$\mathfrak{A} \vDash (\varphi_1 \& \varphi_2)(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi_1(a_1, \ldots, a_n)$ и $\mathfrak{A} \vDash \varphi_2(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi_1(a_1, \ldots, a_n)$ и $\mathfrak{B} \vDash \varphi_2(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash (\varphi_1 \& \varphi_2)(a_1, \ldots, a_n)$.

miro

3. **Пусть $\boldsymbol{\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)}$.** Тогда

$\mathfrak{A} \vDash (\varphi_1 \vee \varphi_2)(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \varphi_1(a_1, \ldots, a_n)$ или $\mathfrak{A} \vDash \varphi_2(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi_1(a_1, \ldots, a_n)$ или $\mathfrak{B} \vDash \varphi_2(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash (\varphi_1 \vee \varphi_2)(a_1, \ldots, a_n)$.

4. **Пусть $\boldsymbol{\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)}$.** Тогда

$\mathfrak{A} \vDash (\varphi_1 \to \varphi_2)(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$ если $\mathfrak{A} \vDash \varphi_1(a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathfrak{A} \vDash \varphi_2(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ если $\mathfrak{B} \vDash \varphi_1(a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathfrak{B} \vDash \varphi_2(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash (\varphi_1 \to \varphi_2)(a_1, \ldots, a_n)$.

5. **Пусть $\boldsymbol{\varphi = \neg\varphi_1}$.** Тогда

$\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi_1(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \nvDash \varphi_1(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \nvDash \varphi_1(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \neg\varphi_1$.

Теорема 13.14.

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ - бескванторная.

Тогда:

а) Если $\mathfrak{A} \vDash \exists x_1, \ldots, \exists x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, то $\mathfrak{B} \vDash \exists x_1, \ldots, \exists x_n \varphi(\overline{x})$;

б) Если $\mathfrak{B} \vDash \forall x_1, \ldots, \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, то $\mathfrak{A} \vDash \forall x_1, \ldots, \forall x_n \varphi(\overline{x})$.

Доказательство.

1. $\mathfrak{A} \vDash \exists x_1 \ldots \exists x_n\, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \exists\, a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{B}|: \mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \exists x_1 \ldots \exists x_n\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.
2. $\mathfrak{B} \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \forall\, a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{B}|: \mathfrak{B} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|: \mathfrak{A} \vDash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

miro

13.15. $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$

$\sim$ — эквивалентность на $A = |\mathfrak{A}|$ называется конгуэнцией на $\mathfrak{A}$

Если: $\forall f^n \in \sigma, \forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in |\mathfrak{A}|$

если $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$, то $f(\bar{a}) \sim f(\bar{b})$

конгруэнция - отношение эквивалентности, перестановочное с операциями

13.16 $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\sim$ — конгруэнция на $\mathfrak{A}$

класс эквивалентности $a/_\sim = [a]_\sim = [a] = \{b \in |\mathfrak{A}| \mid a \sim b\}$

Пусть $A = |\mathfrak{A}|$, $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$

Тогда $A/_\sim = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$

фактор модель $\mathfrak{A}/_\sim = \langle A/_\sim ; \sigma \rangle$

Если $P^n, f^n, c \in \sigma, a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$

Тогда:

а) $\mathfrak{A}/_\sim \models P([a_1] \dots [a_n]) \Leftrightarrow \exists b_1, \dots, b_n \in |\mathfrak{A}| : a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n, \mathfrak{A} \models P(b_1 \dots b_n)$

б) $f([a_1], \dots, [a_n]) = [f(a_1, \dots, a_n)]$

в) $c^{\mathfrak{A}/_\sim} = [c^{\mathfrak{A}}]$

ВАПРОС: ПОЧЕМУ ЭТО ДОКАЗЫВАЕТ КОРРЕКТНОСТЬ?
т.к. конгруэнтность на функциях, а в определении фактор модели мы по определению кладём вот так

Предложение 13.14. Данное определение фактор-модели корректно.

Доказательство. Пусть символ $f^n \in \sigma$, элементы $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in |\mathfrak{A}|$ и выполнено $a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$. Для доказательства корректности определения фактор-модели необходимо показать, что тогда $f([a_1], \dots, [a_n]) = f([b_1], \dots, [b_n])$.

По определению конгруэнции выполнено $f(a_1, \dots, a_n) \sim f(b_1, \dots, b_n)$. Поэтому $[f(a_1, \dots, a_n)] = [f(b_1, \dots, b_n)]$. Следовательно,

$$f([a_1], \dots, [a_n]) = [f(a_1, \dots, a_n)] = [f(b_1, \dots, b_n)] = f([b_1], \dots, [b_n]).$$

miro

13.18

Конгруэнция - это в точности такое отношение эквивалентности на алгебраической системе, по которому можно корректно проводить операцию факторизации.

13.19 $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\sim$ - конгр. на $\mathfrak{A}$

$h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}|/_\sim$, $h(a) = [a]_\sim$

Тогда h - эпиморфизм

Доказательство: Сначала покажем, что h - гомоморфизм. Пусть P^n, $f^n, c \in \sigma$, $a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}|$. Тогда:

а) $\mathfrak{A} \vDash P(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathfrak{A}/_\sim \vDash P([a_1], \dots, [a_n])$, т.е.

$\mathfrak{A}/_\sim \vDash P(h(a_1), \dots, h(a_n))$;

б) $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = [f(a_1, \dots, a_n)] = f([a_1], \dots, [a_n]) =$

$= f(h(a_1), \dots, h(a_n))$;

в) $h(c^{\mathfrak{A}}) = [c] = c^{\mathfrak{A}/\sim}$.

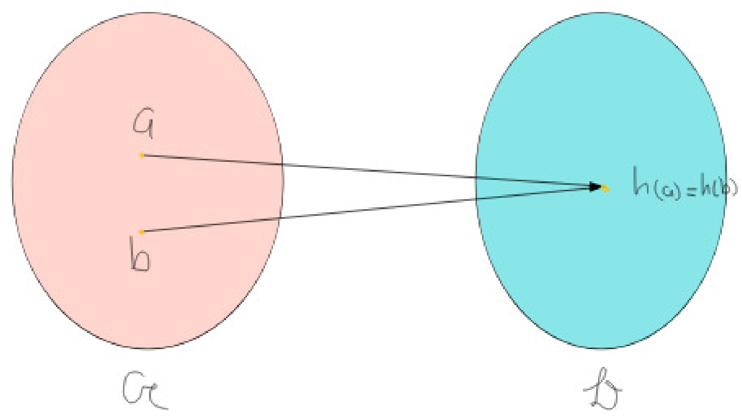
Гомоморфизм h является эпиморфизмом, так как для любого $[a] \in \mathfrak{A}/_\sim$ имеет место $h(a) = [a]$.

miro

13.20 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$, $h: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ - гомоморфизм, $a, b \in |\mathfrak{A}|$

$a \sim b \Leftrightarrow h(a) = h(b)$ является конгруэнцией

Элементы a и b множества A являются эквивалентными, если они отображаются в один элемент множества B



$\Leftrightarrow$ $a \sim b$ - конгруэнция

△ $\forall f^n$, $\forall a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in |\mathfrak{A}|$

если $a_1 \sim b_1, \ldots, a_n \sim b_n$, то $h(a_1) = h(b_1), \ldots, h(a_n) = h(b_n)$

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(b_1), \ldots, h(b_n)) = h(f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n))$$

$$h(f^{\mathfrak{A}}(\bar{a})) = h(f^{\mathfrak{B}}(\bar{b}))$$

$$f^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \sim f^{\mathfrak{B}}(\bar{b})$$ ▼

miro

13.21

Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K(\sigma)$ и $h: |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ – эпиморфизм

$\forall a, b \in |\mathfrak{A}|$ $a \sim b \Leftrightarrow h(a) = h(b)$

Тогда $\mathfrak{A}/_\sim \cong \mathfrak{B}$. А именно, $\exists g: \mathfrak{A}/_\sim \to \mathfrak{B}$, $g([a]) = h(a)$

g осуществляет изоморфизм моделей $\mathfrak{A}/_\sim$ и $\mathfrak{B}$

$\triangle$ g - биекция :

1) сюрьекция $b \in |\mathfrak{B}| \Rightarrow \exists a \in |\mathfrak{A}|: h(a) = b \Rightarrow g([a]) = h(a) = b.$

$[a] \in \mathfrak{A}/_\sim$

2)инъекция $g([a]) = g([b]) \Rightarrow h(a) = h(b) \Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a] = [b].$

g изоморфизм : $\forall P^n, f^n, c \in \sigma$, $\forall \bar{a} \in |\mathfrak{A}|$

а) $(\Rightarrow)$ $\mathfrak{A}/_\sim \models P([a_1], \dots, [a_n]) \Rightarrow \exists \bar{b} \in |\mathfrak{A}|: b_i \sim a_i$ и $\mathfrak{A} \models P(b_1, \dots, b_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathfrak{B} \models P(\overline{h(b)}) \Rightarrow \mathfrak{B} \models P(\overline{g([a])})$, т.к. $a_i \sim b_i \Rightarrow h(a_i) = h(b_i) = g([a_i])$

$(\Leftarrow)$ $\mathfrak{B} \models P(\overline{g[a]}) \Rightarrow \mathfrak{B} \models P(\overline{h(a)}) \Rightarrow \exists \bar{b} \in |\mathfrak{A}|: a_i \sim b_i$ и $\mathfrak{A} \models P(\bar{b}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \bar{b} \in |\mathfrak{A}|: a_i \sim b_i$ и $\mathfrak{A}/_\sim \models P(\overline{[a]})$

$\mathfrak{A}/_\sim = \langle A/_\sim; \sigma \rangle$ - **фактор-модель.**

Пусть P^n, f^n, $c \in \sigma$, $a_1 \dots a_n \in |\mathfrak{A}|$. Тогда:

а) $\mathfrak{A}/_\sim \models P([a_1], \dots, [a_n]) \Leftrightarrow \exists b_1 \dots b_n \in |\mathfrak{A}|: a_1 \sim b_1, \dots, a_n \sim b_n$ и

23

$\mathfrak{A} \models P(b_1, \dots, b_n)$;

б) $f([a_1], \dots, [a_n]) = [f(a_1, \dots, a_n)]$;

в) $c^{\mathfrak{A}/_\sim} = [c^{\mathfrak{A}}]$.

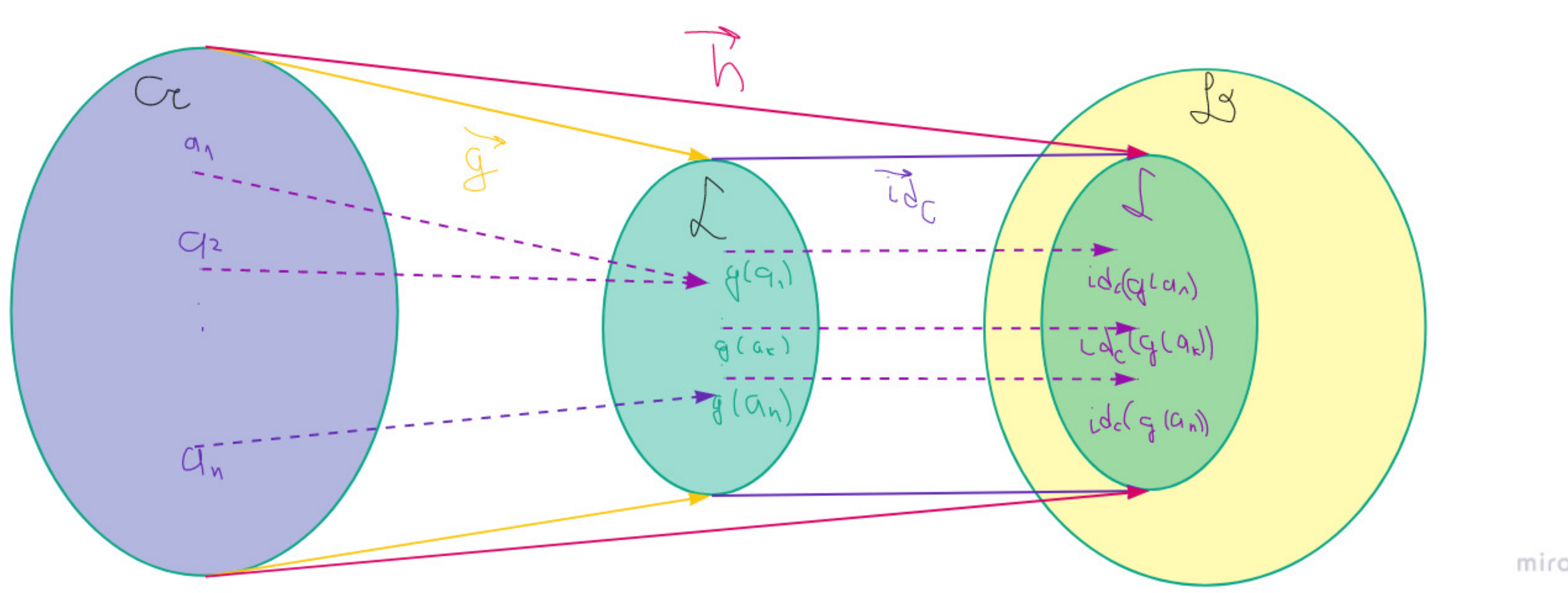
б) $g(f(\overline{[a]})) = g([f(\bar{a})]) = h(f(\bar{a})) = f(\overline{h(a)}) = f(\overline{g[a]})$

в) $g(c^{\mathfrak{A}/_\sim}) = g([c^{\mathfrak{A}}]) = h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ $\blacktriangledown$

miro

Замечание 13.22.

Любой гомоморфизм является композицией эпиморфизма и изоморфного вложения.



$h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ гомоморфизм

g определено для всех элементов $\mathfrak{A}$ значит g сюрьективно

$\mathfrak{L} \leftrightharpoons h(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{L} \leqslant \mathfrak{B}$. Пусть $g : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{L}| \mid \forall a \in |\mathfrak{A}| \; g(a) \leftrightharpoons h(a)$

Тогда $g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{L}$ эпиморфизм (Гомоморфизм + сюрьекция)

$C = |\mathfrak{L}| = \{h(a) \mid a \in \mathfrak{A}\} = \{g(a) \mid a \in \mathfrak{A}\}$

$id_C : \mathfrak{L} \to \mathfrak{B}$. Тогда $id_C(a) = a \Rightarrow h(a) = id_C(g(a))$, т.е. $h = g \circ id_C$

miro

Основная теорема о гомоморфизмах

Любой гомоморфизм является композицией факторизации и изоморфного вложения

$h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ - гомоморфизм, $h = g \circ id_C$, $\mathfrak{L} \leftrightharpoons h(\mathfrak{A})$, $g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{L}$ эпиморфизм

$id_C : \mathfrak{L} \to \mathfrak{B}$ изоморфное вложение

определим конгруэнцию на А: $a \sim b \Leftrightarrow h(a) = h(b)$

$g : \mathfrak{A}/_\sim \to \mathfrak{L} \mid g([a]) = g(a)$ по теореме 13.18 g осуществляет изоморфизм моделей $\mathfrak{A}/_\sim$ и $\mathfrak{L}$

u – факторизация модели $\mathfrak{A}$, $u : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/_\sim \mid \forall a \in |\mathfrak{A}| \; u(a) = [a]$

$v \leftrightharpoons g \circ id_C$, v *– изоморфное вложение модели* $\mathfrak{A}/_\sim$ в $\mathfrak{B}$

изоморфизм

Зададим цепочку отображений $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/_\sim \to \mathfrak{L} \to \mathfrak{B}$, где $u : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/_\sim$

$g : \mathfrak{A}/_\sim \to \mathfrak{L}$

$id_C : \mathfrak{L} \to \mathfrak{B}$

$h = u \circ g \circ id_C$, но $v = g \circ id_C \Rightarrow h = u \circ v$

miro