док-ва

Теор. Пирсона $k=2$

$t_0 \quad t_1 \quad t_2$, $\Delta_1 = [t_0, t_1]$, $\Delta_2 = [t_1, t_2]$

$$H_0 = \{X \in F_0\} \qquad H_a = \{X \notin F_0\}$$

$$(\chi^2)^* = \frac{(\nu_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(\nu_2 - np_2)^2}{np_2} =$$

$\nu_1 + \nu_2 = n$

$p_1 + p_2 = 1$

$p_2 = 1 - p_1$

$\nu_2 = n - \nu_1$

$$\left[\frac{(\nu_1 - np_1)^2 n(1-p_1) + (np_1 - \nu_1)^2 np_1}{n^2 p_1(1-p_1)}\right] = \left(\frac{\nu_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right)^2 = \xi^2 \Rightarrow \text{но опр } (\chi^2)^* \in \chi^2_1$$

Сх. Бернулли: попадаем в Δ_1 - успех (p_1)

попадаем в Δ_2 - неуд. $(1-p_1)$

$\mathbb{E}X_1 = p_1$

$\mathbb{D}X_1 = p_1(1-p_1)$

$$\frac{S_n - n \cdot \mathbb{E}X_1}{\sqrt{n\,\mathbb{D}X_1}} \Rightarrow Y \in N_{0,1}$$

S_n - число успехов в сх. Бернулли

Сост. кр. Колмогорова

$$H_0 = \{\vec{X} \in F_0\} \qquad H_a = \{\vec{X} \notin F_0\}$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & d_k < c \\ 1, & d_k > c \end{cases}$$

$$d_k = \sqrt{n} \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n^*(t) - F_0(t)|$$

Т. Гливенко Кантелли $\xrightarrow[n\to\infty]{P} F(t)$

$$\alpha_2 = P_{H_a}(d_k < c) = P_{H_a}\left(\sqrt{n} \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n^*(t) - F_0(t)| < c\right) =$$

$$\left[\text{верна } H_a \Rightarrow F(t) \neq F_0(t)\right] \Rightarrow \exists \tilde{t} : |F(\tilde{t}) - F_0(\tilde{t})| > 0$$

$$|F_n^*(\tilde{t}) - F_0(\tilde{t})| \xrightarrow[n\to\infty]{P} |F(\tilde{t}) - F_0(\tilde{t})|, \text{ но } \sup|-\!\!\shortparallel\!\!-| \geq |-\!\!\shortparallel\!\!-|\Big|_{\tilde{t}}$$

$$\Rightarrow \sup|-\!\!\shortparallel\!\!-| > 0 \qquad P_{H_a}(\underbrace{\sqrt{n} \cdot \sup|-\!\!\shortparallel\!\!-|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty} < c) \longrightarrow 0$$

Сост. крит. Стьюдента

$H_0 = \{a_1 = a_2\}$ $\qquad \delta = \begin{cases} 0, & |d| < t_{1-\varepsilon/2} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$

$H_1 = \{a_1 \neq a_2\}$

Если верна H_1, то $a_1 \neq a_2 \Rightarrow$

$$d = \frac{\sqrt{nm}}{\sqrt{n+m}} \frac{(\bar{X} - \bar{Y})\sqrt{n+m-2}}{\sqrt{nS^2(X) + mS^2(Y)}} \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}]{} \infty$$

$\sigma_1 = \sigma_2$ по условию

$$(\bar{X} - \bar{Y}) \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}]{P} const$$

$$\bar{X} \to EX = a_1, \quad \bar{Y} \to EY = a_2$$

$$\frac{n\overset{\xrightarrow{P} \sigma_1^2}{S^2(X)} + m\overset{\xrightarrow{P} \sigma_2^2}{S^2(Y)}}{n+m-2} \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}]{P} \frac{\sigma_1^2(n+m)}{n+m-2} \to \underset{const}{\sigma_1^2}$$

$$P_{H_a}(|d| \overset{\to\infty}{<} C) \to 0$$

Состоятельность χ^2

$H_0 = \{\vec{X} \in F_0\}$

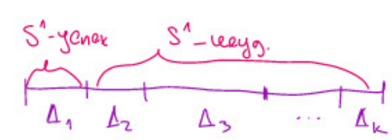
$H_a = \{\vec{X} \notin F_0\}$

- Для этих гипотез не всегда будет выполнятся K_2.
Если распределение $\vec{X}$ $F_1 \neq F_0$ имеет такие же как у F_0 вероятности p_i попадания в каждый из Δ_i то по данной ф-ции (χ^2) эти распределения различить невозможно.

Поэтому введем более корректные гипотезы:

$H_0' = \{F : \forall i \quad P(X_1 \in \Delta_i) = p_i\}$

$H_a' = \{F : \exists i : \quad P(X_1 \in \Delta_i) \neq p_i\}$



Введем случайную величину $S^i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta_i \\ 0, & x \notin \Delta_i \end{cases}$ — Сх. Бернулли $\left(\begin{matrix} \text{успех} - p_i \\ \text{неуд.} - (1-p_i) \end{matrix}\right)$

Тогда по ЗБЧ, $\dfrac{S_1^i + \ldots + S_n^i}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E} S_1^i = p_i$

$$\alpha_2 = P_{H_a}\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j} < c \right)$$

верна $H_a \Rightarrow \exists i : P(X_1 \in \Delta_i) \neq p_i$ (*)

$$\forall \text{ слагаемое } \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{n}{p_i}\Big(\underbrace{\overset{\frac{S_1^i + \ldots + S_n^i}{n}}{\frac{\nu_i}{n}}}_{\to\, p_k \neq p_i \text{ (по (*))}} - p_i\Big)^2 = \frac{n}{p_i}\underbrace{(p_k - p_i)^2}_{>0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Следовательно,

$$\alpha_2 = P_{H_a}\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{k} \frac{(\nu_j - np_j)^2}{np_j}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty} < c \Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

miro

Сост. кр. Фишера

$$\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n) \qquad \vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$$

$$H_0 = \{\sigma_1^2 = \sigma_2^2\}$$

$$H_a = \{\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2\}$$

$$d_F = \frac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})} \in F_{n-1, m-1}$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & f_{\frac{\varepsilon}{2}} \leq \dfrac{S_0(\vec{X})}{S_0(\vec{Y})} \leq f_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Убедимся, что посл-ть квантилей $f_\delta = f_\delta(n,m)$ распр $F_{n,m}$ $\forall$ уровня $\delta \in (0,1)$ сходится к 1 при $n, m \to \infty$:

Пусть $\xi_{n,m} \in F_{n,m}$ по опр квантиля $P(\xi_{n,m} < f_\delta) = \delta$

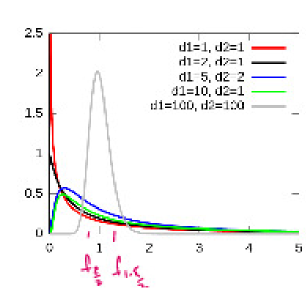
$P(\xi_{n,m} > f_\delta) = 1 - \delta$

Опр. $Y \in F_{n,m}$ если $Y = \dfrac{\frac{Z_1}{m}}{\frac{Z_2}{k}} = \dfrac{k}{m} \cdot \dfrac{Z_1}{Z_2}$

$Z_1 \in \chi_m^2$

$Z_2 \in \chi_k^2$

$$\boxed{\frac{Z_1 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2}{m} \xrightarrow{P} \underline{E\xi_1^2 = 1}}$$



т.е. $\xi_{n,m} \xrightarrow[n,m\to\infty]{P} 1$

miro

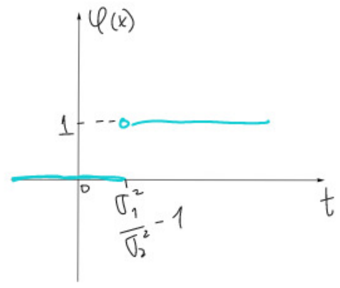
Поэтому, $P(\xi < 1-\varepsilon) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

$P(\xi > 1-\varepsilon) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$ $\Bigg\}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{1-\varepsilon < f_\delta < 1+\varepsilon}_{\text{при больших } n,m}$ $\Rightarrow$ $f_\delta \xrightarrow[n,m]{} 1$ (*)

Далее, т.к. верна H_a, то $\sigma_1 \neq \sigma_2 \Rightarrow \dfrac{S_0^2(\vec{x})}{S_0^2(\vec{y})} \xrightarrow[n,m\to\infty]{P} \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

И по (*) можем сказать, что $\dfrac{S_0^2(\vec{x})}{S_0^2(\vec{y})} - f_{1-\varepsilon} \to \underbrace{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 1}_{>0}$

$\varphi(x) = P\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 1 < x\right)$ – непр в $x=0$ и очевидно, $P\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 1 < 0\right) = 0$



$\alpha_2 = P_{H_a}\left(\dfrac{S_0^2(\vec{x})}{S_0^2(\vec{y})} < f_{1-\varepsilon}\right) = P\left(\dfrac{S_0^2(\vec{x})}{S_0^2(\vec{y})} - f_{1-\varepsilon} < 0\right) \xrightarrow{P} P\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 1 < 0\right) =$

miro

$\vec{X} \in N_{a,\sigma^2}$

I. $\dfrac{\bar{X} - a}{\sigma}\sqrt{n} \in N_{0,1}$

по св-ву норм распред

$\underline{\bar{X} \in N_{a,\frac{\sigma^2}{n}}} \Rightarrow$

$\dfrac{\bar{X} - a}{\sigma}\sqrt{n} \in N_{0,1}$

II. $\dfrac{nS_1^2}{\sigma^2} \in \chi_n^2$

$nS_1^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2$

$\sum_{i=1}^{n} \Big(\underbrace{\dfrac{x_i - a}{\sigma}}_{\in N_{0,1}}\Big)^2 \in \chi_n^2$ по опред

$X_i \in N_{a,\sigma^2}$

$\dfrac{X_i - a}{\sigma} \in N_{0,1}$

miro

III $\frac{nS^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1}$

(*) $\overline{X}$ и S^2 − незав. $\Rightarrow$ лемма Фишера

Q не зав от Y_i

$\frac{nS^2}{\sigma^2}$ не зав $\underbrace{\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}-a}{\sigma}\right)}_{\overline{Z}}$

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2 = \sum\left(\frac{X_i-\overline{X}+a-a}{\sigma}\right)^2 =$$

$$= \sum\Big(\underbrace{\frac{X_i-a}{\sigma}}_{Z_i\in N_{0,1}} - \underbrace{\frac{\overline{X}-a}{\sigma}}_{\overline{Z}}\Big)^2 = \sum(Z_i-\overline{Z})^2 = \sum Z_i^2 - n(\overline{Z})^2 = Q$$

$$\frac{X_1+X_2\ldots X_n - na}{n\sigma} = \overset{\overline{Z}}{\frac{\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-a}{\sigma}}$$

$$S^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2$$

$$Q = \underbrace{\sum Z_i^2}_{\sum X_i^2} - \underbrace{n(\overline{Z})^2}_{Y_1^2} \in \chi^2_{n-1}$$

по лемме Фишера

$Y_1 = \sqrt{n}\,\overline{Z}$

$$Q = X_1^2 + \ldots + X_n^2 - Y_1^2 - \ldots - Y_r^2 \in \chi^2_{n-r}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}}\end{pmatrix}} \underset{\vec{X}}{\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n\end{pmatrix}} = \underset{\vec{Y}}{\begin{pmatrix}\underbrace{\frac{Z_1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{Z_n}{\sqrt{n}}}_{\frac{nZ_1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}Z_1}\end{pmatrix}}$$

IV $\frac{\overline{X}-a\sqrt{n}}{S_0} \in T_{n-1}$

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &:= \frac{\overline{X}-a}{\sigma}\sqrt{n} \in N_{0,1} \\ Z &= \frac{nS^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1}\end{aligned}\right\} \text{не зависят } (*)$$

по опред $Y = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{Z}{m}}}$ где $\xi_0 \in N_{0,1}$, $Z \in \chi^2_m$

$$\frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{Z}{n-1}}} = \frac{\frac{\overline{X}-a}{\cancel{\sigma}}\sqrt{n}}{\sqrt{\underbrace{\frac{nS^2}{\cancel{\sigma^2}(n-1)}}_{S_0^2}}} = \frac{\overline{X}-a}{S_0}\sqrt{n} \in T_{n-1}$$