



События, операции над ними. Классическое определение вероятности.

Def. Пространство элементарных исходов Ω — множество, включающее в себя все возможные взаимоисключающие исходы данного случайного эксперимента.

Его элементы, наз. наз. элементарными исходами

miro

Def. Событием наз. подмножество множества Ω ($A = \{w_1, w_2, \dots, w_n | w_i \in \Omega\}$)

Def. Говорят, что произошло событие A если эксперимент завершился одним из элементарных исходов, входящих в A .

miro

Операции над событиями:

1. $A \cup B$ — из двух событий случилось хотя бы одно

2. $A \cap B$ — произошли оба события

3. $A \setminus B$ — произошло A , но не произошло B

4. $\bar{A} = \Omega \setminus A$ — событие A не произошло

miro

Def. Факториальное событие — обязательно происходит в результате эксперимента. Т.е. оно содержит все элементарные исходы — событие Ω

miro

Def

Невозможное событие — не может произойти в результате эксперимента (\emptyset)

$$\begin{array}{lll} \circ \quad \bar{\Omega} = \emptyset & \circ \quad A \cup \bar{A} = \Omega & \circ \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \\ \circ \quad \bar{\emptyset} = \Omega & \circ \quad A \cap \bar{A} = \emptyset & \circ \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{array}$$

Def

$A \cup B$ несовместные, если $A \cap B = \emptyset$

miro

Def

A включает B ($A \subseteq B$) если всегда, как только происходит A , происходит B .

Def

Каждому элементарному исходу соответствует число $p_i \in [0, 1] : p_1 + \dots + p_n = 1$

Тогда, вероятность события A : $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$

miro

Сообщают, что эксперимент описывается классической вероятностной моделью, если его пространство элементарных исходов состоит из конечного числа равновозможных исходов

Def

Вероятность каждого исхода равна $\frac{1}{N}$, если событие $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$ то

$$P(A) = p_{i_1} + \dots + p_{i_k} = k \cdot \frac{1}{N} = \frac{|A|}{|\Omega|} - \text{классическое определение вероятности}$$

miro



Элементы комбинаторики. Гипергеометрическое распределение.

Def. Размещения (A_n^k) — общее кол-во различных наборов при выборе k из n элементов без возвращения и с учетом порядка.

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Def. Число сочетаний (C_n^k) — общее кол-во различных наборов при выборе k из n элементов без возвращения и без учета порядка

$$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

miro

Def. Общее число наборов при выборе k из n эл-тоў с возвращением и с учетом порядка равно \tilde{n}^k

Def. Общее число наборов при выборе k из n эл-тоў с возвращением без учета порядка — \hat{C}_n^k (шары и перегородки)

$$\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k \quad (\text{исходне не равновероятные})$$

miro

Гипергеометрическое распределение

Пусть у нас есть ящик, в нем k белых и $N-k$ черных шаров. Из ящика мы наудачу вытаскиваем n шаров. Тогда, вероятность что вытащили k белых и $n-k$ черных равна $\frac{C_k^k \cdot C_{N-k}^{n-k}}{C_N^n}$

Вероятности данного вида наз. гипергеометрическим распределением

k	$N-k$
-----	-------

$\Downarrow n$

k	$n-k$
-----	-------

miro



Геометрические вероятности. Задача о встрече.

Def. Пусть Ω - область в \mathbb{R}^n с конечной мерой (длина, площадь, объем). Эксперимент состоит в том, что мы бросаем случайную точку в $A \subseteq \Omega$. (вероятность попадания не зависит от формы и расположения A в Ω).

Тогда

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

miro

Задача о встрече

Пусть 2 человека условились встретиться между 16:00 и 17:00. При этом, каждый из них идет 10 минут, затем уходит. Какова вероятность встречи? (Она тавка, какова она есть, и больше никаких)

У нас есть 2 случайные величины - время прихода 1 и 2го человека (X и Y)



Понятно, что время прихода должно отличаться максимум на 10 минут ($\frac{1}{6}$ часа)

$$A = \{(x, y) : |x-y| \leq \frac{1}{6}\}$$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}{1} = \frac{11}{36}$$

miro



Понятие о вероятностном пространстве общего вида. Аксиоматическое задание вероятности, основные свойства вероятности.

Def. Вероятностное пространство состоит из тройки $\langle \Omega, \mathcal{F}, P \rangle$

- Ω - пр-во элем. исходов
- \mathcal{F} - множество подмножеств Ω ($|\mathcal{F}| = 2^{\Omega}$)
- $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ - вероятность.

Аксиомы вероятности:

1) $P(\Omega) = 1$

2) Если A_1, \dots, A_n, \dots - нонарно излаб. ($\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$), то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

miro

Из аксиом вытекают свойства:

1) $P(\emptyset) = 0$

$$A_i = \begin{cases} A, & i=1 \\ \emptyset, & i>1 \end{cases}$$

\nwarrow нонарно излабисиине

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

$$P(A \cup \emptyset \cup \dots \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset) + \dots + P(\emptyset)$$

$$\cancel{P(A) = P(A) + P(\emptyset) + \dots + P(\emptyset)}$$

$$\Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

miro

$$2) A_1, \dots, A_n - \text{нечароо шегаб.} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

$$3) P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$$

$$4) P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$\Omega = A \cup \bar{A} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$1 - P(\bar{A}) = P(A)$$

miro

$$5) A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$B = A \cup B \setminus A$$

$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0}$$

$$6) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$(A \cup B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(A \setminus B)}_{\text{зеленая линия}} + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\text{зеленая линия}} + \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{зеленая линия}} + \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{зеленая линия}} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

miro

7) Непрерывность вероятности.

• Если $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$, то $P(\bigcup_i A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$

$$\bigcup_i A_i = A_1 \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots$$

$$P(\bigcup_i A_i) = P(A_1) + P(A_1 \setminus A_2) + P(A_2 \setminus A_3) + \dots$$

$$P(\bigcup_i A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} [P(A_1) + P(A_1 \setminus A_2) + \dots + P(A_n \setminus A_{n-1})] = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

• Если $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$

$$\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2 \subset \bar{A}_3 \subset \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{A}_n) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{A}_n) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i) =$$

$$= 1 - P(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

miro



Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Def. Вероятностью события A , при условии что произошло событие B наз.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Def. Полная группа событий — $H_1, \dots, H_n : H_1 \cup \dots \cup H_n = \Omega, H_i \cap H_j = \emptyset \forall i \neq j$
 H_i — исходы.
 $+ P(H_i) > 0 \forall i$

Def. Тогда $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P(A|H_i)$

$$\Delta A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup_i H_i) = \bigcup_i (A \cap H_i)$$

$$P(A) = \sum_i P(A \cap H_i) = \sum_i \frac{P(H_i) P(A \cap H_i)}{P(H_i)} = \sum_i P(H_i) P(A|H_i) \blacksquare$$

miro

Def. Ф-на Байеса: $P(H_k|A) = \frac{P(H_k) P(A|H_k)}{\sum_i P(H_i) P(A|H_i)}$

$$\Delta P(H_k|A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) P(H_k \cap A)}{P(H_k)} \cdot \frac{1}{\sum_i P(H_i) P(A|H_i)} =$$

$$= \frac{P(H_k) P(A|H_k)}{\sum_i P(H_i) P(A|H_i)} \blacksquare$$

miro



Независимые события. Схема Бернулли.

Def. События наз. независимыми, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

• Если $A \cup B$ - незав. то $A \cup \bar{B}$, $\bar{A} \cup B$, $\bar{A} \cup \bar{B}$ тоже независимы.

$$\Delta A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A) = P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\bar{B})$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\bar{B}) \blacksquare$$

miro

Def. A_1, \dots, A_n наз. независимыми в совокупности, если $\forall k \in [1, n] \text{ и } \forall 0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq 1$

$$P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

Def. Серия независимых в совокупности испытаний, исходами которых являются успех (с вероятностью p) и неудача (с вероятностью $1-p$) наз. схемой Бернулли

S_n - число успехов в сх. Бернулли с n испытаниями

$$P(S_n = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

miro



Случайные величины. Функции распределения и их свойства.

Def. Функция $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ наз. случайной величиной.

т.е. каждому элементарному исходу сопоставляется число $\xi(\omega) \in \mathbb{R}$

Def. Функцией распределения наз. $F_\xi(t) = P(\xi < t)$

Свойства функции распределения:

1) Непрерывность: $x_1 < x_2 \Rightarrow F_\xi(x_1) \leq F_\xi(x_2)$

• Следует из монотонности вероятности: $\{\xi < x_1\} \subseteq \{\xi < x_2\} \Rightarrow P(\xi < x_1) \leq P(\xi < x_2)$

2) Сущ. пределы: $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_\xi(t) = 1$ (1)

$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_\xi(t) = 0$ (2)

• Сущ. пределов вытекает из монотонности и ограниченности $F_\xi(t)$ (т.к. это P)

(1) Покажем, что $F_\xi(-n) \rightarrow 0$.

Рассмотрим $B_n = \{\xi < -n\}$ — вложенная убывающая посл.-ть.

$$B_{n+1} = \{\xi < -(n+1)\} \subseteq B_n = \{\xi < -n\}$$

Пересечение B_n состоит только из тех элементарных исходов, для которых случайная величина $\xi(\omega)$ меньше любого существующего числа $\xi(\omega) \in \mathbb{R}$, оно не может быть меньше всех чисел из \mathbb{R} .

Следовательно, пересечение B_n пусто и $F_\xi(-n) = P(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 0$

(2) Покажем, что $F_\xi(n) \rightarrow 1$ (или, что то же, $1 - F_\xi(n) = P(\xi \geq n) \rightarrow 0$)

Рассмотрим $B_n = \{\xi \geq n\}$. $B_{n+1} \subseteq B_n$

$$P(\xi \geq n+1) \rightarrow P(\xi \geq n)$$

Пересечение B_n пусто, т.к. никакое существующее число не может быть больше любоговещ. числа.

$$1 - F_\xi(n) = P(B_n) \rightarrow P(\bigcap_{i=n}^{\infty} B_i) = P(\emptyset) = 0. \quad \triangle$$

miro

3) Непрерывность слева. $F_\xi(t_0^-) = F_\xi(t_0)$

• Достаточно доказать, что $F_\xi(t_0 - \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_\xi(t_0)$.

$$F_\xi(t_0) - F_\xi(t_0 - \frac{1}{n}) = P(\xi < t_0) - P(\xi < t_0 - \frac{1}{n}) = P(t_0 - \frac{1}{n} \leq \xi < t_0)$$

$$B_n = \left\{ t_0 - \frac{1}{n} \leq \xi < t_0 \right\}$$

$B_{n+1} \subseteq B_n$, а пересечение сиба нужно, т.к. введено $t_0 \leq \xi < t_0$.

Значит, $P(t_0 - \frac{1}{n} \leq \xi < t_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(\emptyset) = 0$. \blacksquare

miro

! Для случайных величин характеристические.

• $P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$

$\Delta \quad \{\xi < b\} = \{\xi < a\} \cup \{a \leq \xi < b\}$

$$P(\xi < b) = P(\xi < a) + P(a \leq \xi < b)$$

$$F_\xi(b) - F_\xi(a) = P(a \leq \xi < b) \quad \blacksquare$$

miro



Типы распределений, примеры.

Def. Случайная величина ξ имеет дискретное распределение, если она принимает лишь счетное число значений.
(Они называются атомами)

- Например, распределение Бернулли. Атомы: $P(X=1) = p$
 $P(X=0) = 1-p$

Def. Ф-я распределения в этом случае имеет вид

$$F_\xi(t) = P(\xi < t) = \sum_{i: \alpha_i < t} P(\xi = \alpha_i)$$

Def. Случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, если $\exists f_\xi(t)$ — плотность, такая, что $\forall t$

$$F_\xi(t) = \int_{-\infty}^t f_\xi(y) dy$$

miro

Свойства плотности: 1) $\forall t \quad f_\xi(t) > 0$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t) dt = 1$$

$$\circ P(a < \xi < b) = P(a \leq \xi < b) = P(a < \xi \leq b) = P(a \leq \xi < b) = \int_a^b f_\xi(t) dt$$

т.к. в случае абсолютно непрерывного распределения $P(\xi = c) = 0 \quad \forall c = \text{const}$

Def. Распределение ξ наз. сингулярным, если ξ непрерывна, но не существует $f_\xi(t) > 0$ такой, что $\forall t \quad F_\xi(t) = \int_{-\infty}^t f_\xi(y) dy$ Клрп. распред. на лестнице кватора

miro

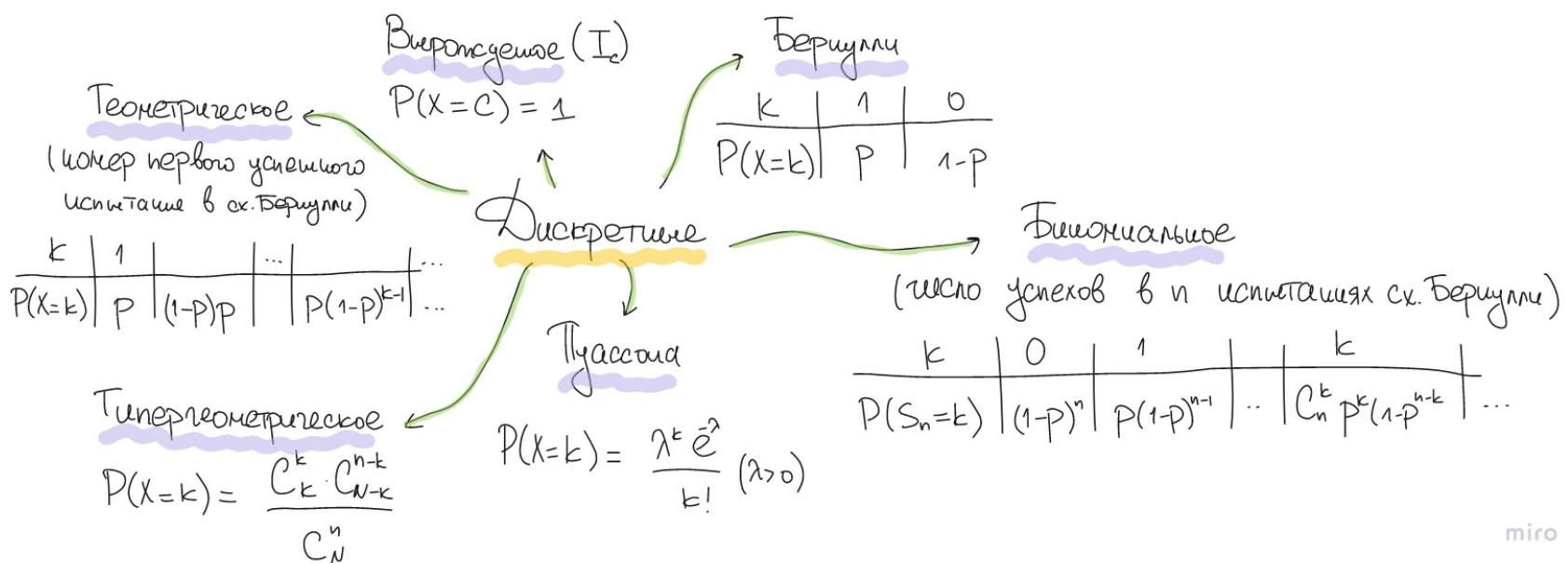
Def. ξ имеет смешанное распределение если $F_\xi(t) = \alpha F_D(t) + \beta F_C(t)$
 $\beta = 1 - \alpha, \quad \alpha \in [0, 1]$

Например, $Y = \min(1, X)$, $X \in U_{[0, 2]}$

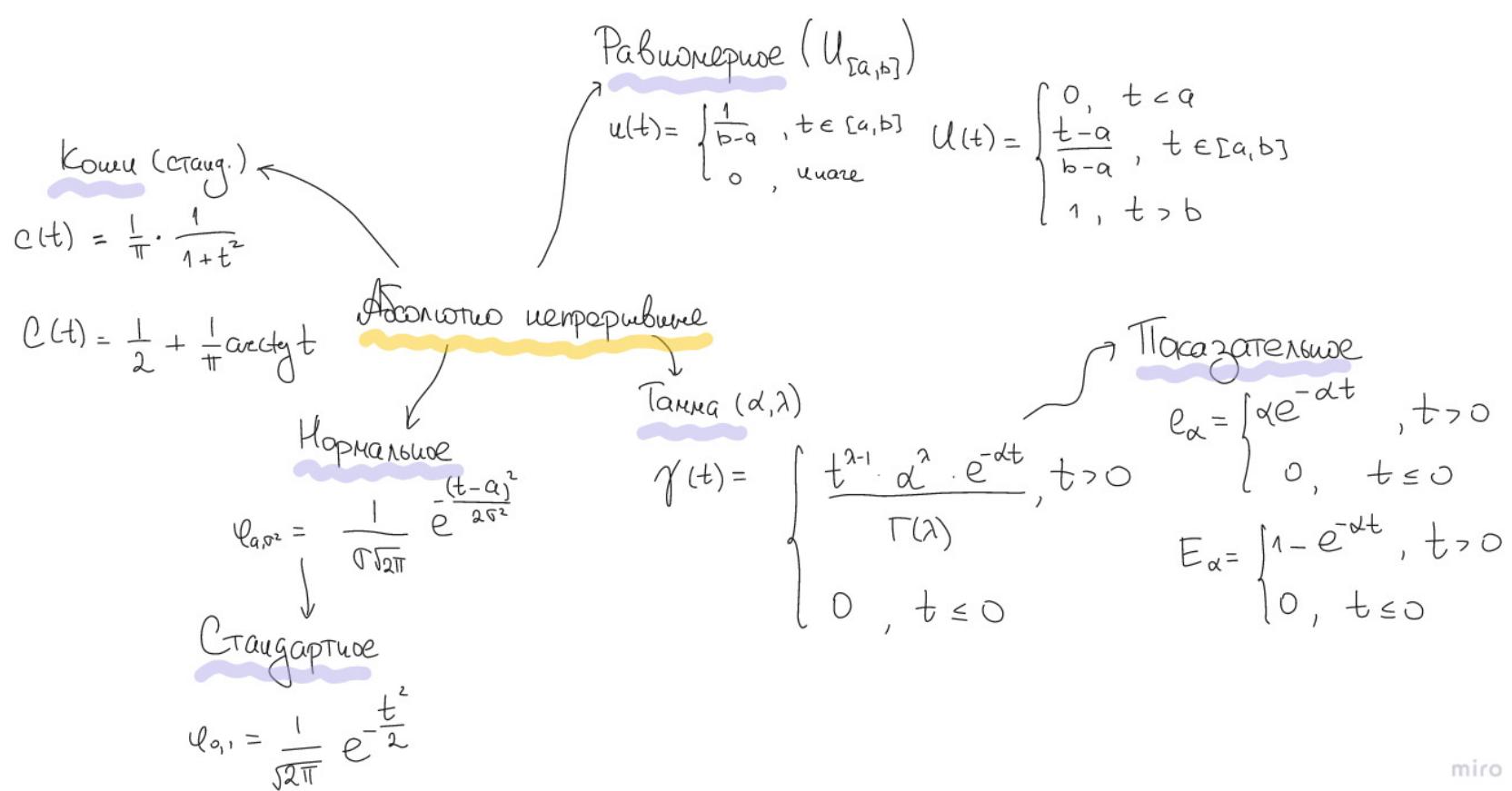
miro



Основные семейства распределений



miro



miro



Многомерные распределения и плотности, их основные свойства, примеры.

Def $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$, где X_i - случайная величина, наз. случайным вектором

Def Собственная функция распределения $F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = P(X_1 < t_1, \dots, X_n < t_n)$

Свойства функции собственного распределения:

- 1) Неубывающая по каждому аргументу.
- 2) Непрерывна слева по каждому аргументу
- 3) $\lim_{t_i \rightarrow -\infty} F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = 0$
- 4) $\lim_{t_n \rightarrow +\infty} F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{X_1, \dots, X_{n-1}}(t_1, \dots, t_{n-1})$

miro

Абсолютно непрерывное

- $F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_n} f_{X_1, \dots, X_n}(\eta_1, \dots, \eta_n) d\eta_1 \dots d\eta_n$
- $f_{X_1, \dots, X_n}(\eta_1, \dots, \eta_n)$ - собственная плотность распределения

Свойства:

- 1) $f_{\vec{X}}(\vec{t}) \geq 0$
- 2) $\iint_{\mathbb{R}^n} f_{\vec{X}}(\vec{t}) d\vec{t} = 1$
- 3) $B \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow P(X \in B) = \iint_B f_{\vec{X}}(\vec{t}) d\vec{t}$

Дискретное

- $\forall k \in [1, n] \quad X_k$ имеет дискретное распределение

Пример: $Y = |X-1| + 1$

$$X: \begin{array}{c|c|c} -2 & 0 & 2 \\ \hline 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{array}$$

$$Y: \begin{array}{c|c} 4 & 2 \\ \hline 0,1 & 0,9 \end{array}$$

miro

$$4) F_{\vec{X}}(\vec{t}_1) = \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_n} f_{\vec{X}}(\vec{t}) dt_2 \dots dt_n$$

Пример: Равномерное распределение
 $S \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda(S)$ — конечная лебегова мера

Вектор \vec{X} имеет равномерное распределение в S
 если плотность $f_{\vec{X}}(\vec{t})$ постоянна в S и равна чисто биле S :

$$f_{\vec{X}}(\vec{t}) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda(S)}, & \vec{t} \in S \\ 0, & \vec{t} \notin S \end{cases}$$

$$\circ \int_{\mathbb{R}^n} f_{\vec{X}}(\vec{t}) d\vec{t} = \frac{1}{\lambda(S)} \int_S d\vec{t} = \frac{1}{\lambda(S)} \cdot \lambda(S) = 1$$

если S конь, откуда

• Симметричное распределение:

YX	-2	0	2
2	0	0,3	0,6
4	0,1	0	0

miro



Теорема о независимости функций от независимых случайных величин. Линейные преобразования случайных величин, применения к гауссовским распределениям.

Def Случайные величины X_1, \dots, X_n независимые, если

$$F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = F_{X_1}(t_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(t_n)$$

Def Абсолютно непрерывные случайные величины X_1, \dots, X_n независимые $\Leftrightarrow f_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = f_{X_1}(t_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(t_n)$

miro

Теорема о независимости функции от независимых случайных величин

Пусть случайные величины X и Y независимы, g и h - ф-ции из \mathbb{R} в \mathbb{R} .
Тогда, $g(X)$ и $h(Y)$ - независимы

Доказательство:

$$\forall B_1 \subset \mathbb{R}, B_2 \subset \mathbb{R}$$

$$\{y : g(y) \in B_1\}$$

$$P(g(X) \in B_1, h(Y) \in B_2) = P(X \in g^{-1}(B_1), Y \in h^{-1}(B_2)) = [X \text{ и } Y \text{ - незав.}]$$

$$= P(X \in g^{-1}(B_1)) \cdot P(Y \in h^{-1}(B_2)) = P(g(X) \in B_1) \cdot P(h(Y) \in B_2)$$

miro

Линейные преобразования случайных величин.

- Теорема. Пусть ξ имеет ϕ -функцию распределения $F_\xi(x)$ и плотность $f_\xi(t)$. Тогда для $\eta = a \cdot \xi + b$

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

miro

- Доказательство:

$$1) [a > 0] F_\eta(x) = P(a \cdot \xi + b < x) = P\left(\xi < \frac{x-b}{a}\right) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) =$$

$$t = \frac{u-b}{a} \quad dt = \frac{du}{a}$$

$$= \int_{-\infty}^{\left(\frac{x-b}{a}\right)} f_\xi(t) dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^t f_\xi\left(\frac{u-b}{a}\right) du$$

$f_\eta(t)$

$$2) [a < 0] F_\eta(x) = P(a \cdot \xi + b < x) = P\left(\xi > \frac{x-b}{a}\right) = \int_{\left(\frac{x-b}{a}\right)}^{+\infty} f_\xi(t) dt =$$

$$t = \frac{u-b}{a} \quad u \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow -\infty$$

$\frac{du}{a} = dt$

$$= \frac{1}{a} \int_t^{-\infty} f_\xi\left(\frac{u-b}{a}\right) du = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^t f_\xi\left(\frac{u-b}{a}\right) du$$

$f_\eta(t)$

miro

Следствия: ° $\xi \in N_{a, \sigma^2}$, $\frac{\xi - a}{\sigma} \in N_{0, 1}$

$$\Delta \eta = \xi \cdot \frac{1}{\sigma} - \frac{a}{\sigma}$$

$$f_\eta(x) = \frac{1}{|\frac{1}{\sigma}|} f_\xi\left(\frac{x - \frac{a}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\sigma\left(x + \frac{a}{\sigma}\right) - a\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

° $\xi \in N_{0, 1}$, $\tau\xi + a \in N_{a, \sigma^2}$

$$\Delta f_\eta(x) = \frac{1}{\sigma} f_\xi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

miro

° $\xi \in U_{0,1}$, $a\xi + b \in U_{b, a+b}$ ($a > 0$)

$$\bullet \frac{x-b}{a} = 0 \Rightarrow x = b \quad \bullet \frac{x-b}{a} = 1 \Rightarrow x - b = a \\ x = a + b$$

$$\Delta u_\eta(x) = u_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) = \begin{cases} \frac{(\frac{x-b}{a})}{1-0}, & \frac{x-b}{a} \in [0, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} \frac{x-b}{a}, & x \in [b, a+b] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} = u_{b, b+a}(x)$$

miro

° $\xi \in E_\alpha$, то $\lambda\xi \in E_1$

$$\Delta e_\eta(x) = \frac{1}{\alpha} e_\xi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \alpha e^{-\frac{x}{\alpha}} = e^{-x} \in E_1$$



Распределение суммы случайных величин, имеющих пуассоновское распределение. Плотность суммы случайных величин.

Теор. Пусть X и Y - независимые величины, имеющие пуассоновское распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} P(X=k) &= p_k \\ P(Y=k) &= q_k \end{aligned} \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Тогда } \forall k=0, 1, 2, \dots \quad \tau_k = P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^k p_i q_{k-i} \quad (*)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= P(\{X=0, Y=k\} \cup \{X=1, Y=k-1\} \cup \dots \cup \{X=k, Y=0\}) = \\ &= \sum_{i=0}^k P(X=i, Y=k-i) = \sum_{i=0}^k \underbrace{P(X=i)}_{\text{независимо}} \cdot P(Y=k-i) = \sum_{i=0}^k p_i q_{k-i} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Последовательность чисел τ_k наз. сверхской последовательностью p_k и q_k

Теор. Пусть X_1 и X_2 - независимы, $X_1 \in \Pi_{\lambda_1}$, $X_2 \in \Pi_{\lambda_2}$. Тогда $X_1 + X_2 \in \Pi_{\lambda_1 + \lambda_2}$

$$P(X_1 + X_2 = k) = (*) \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{(k-i)}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} = \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{1}{\lambda_1^i \lambda_2^{(k-i)}} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

[Биномиальное уравнение: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$]

$$= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} \cdot \sum_{i=0}^k C_n^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{k!} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)^k \in \Pi_{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \blacksquare$$

miro

Формула сложки

Пусть X и Y независимые и имеют плотности f_x и f_y . Тогда

$$f_{x+y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(u) f_y(t-u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(v) \cdot f_x(t-v) dv$$

↑
u v = y - u

Доказательство: $F_{x+y}(y) = P(X+Y < y) = P((X,Y) \in \{(u,v) : u+v < y\}) =$

$$= \iint_{u+v < y} f_{x,y}(u,v) du dv = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_x(u) \int_{-\infty}^{y-u} f_y(v) dv \right] du \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(u) \left[\int_{-\infty}^t f_y(t-u) dt \right] du$$

$v = t-u$
 $dv = dt$
 $v = y-u \Leftrightarrow t = y$

$$F_{x+y}(y) = \int_{-\infty}^y \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(u) f_y(t-u) du \right\}}_{f_{x+y}(y)} dt$$

miro



Распределение суммы случайных величин, имеющих гамма распределение.

Пусть X_1 и X_2 независимы, $X_1 \in \Gamma_{\alpha, \lambda_1}$, $X_2 \in \Gamma_{\alpha, \lambda_2}$. Тогда $X_1 + X_2 \in \Gamma_{\alpha, \lambda_1 + \lambda_2}$

Доказательство:

$$f_{X_1+X_2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{\alpha, \lambda_1}(u) \gamma_{\alpha, \lambda_2}(t-u) du. \text{ Т.к. } \gamma_{\alpha, \lambda}(t) = 0 \text{ при } t \leq 0, \text{ то } \begin{cases} t > 0 \\ t-u > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t-u > 0 \end{cases}$$

$$f_{X_1+X_2}(t) = \int_0^t \frac{\alpha^{\lambda_1} u^{\lambda_1-1} e^{-\alpha u}}{\Gamma(\lambda_1)} \cdot \frac{\alpha^{\lambda_2} (t-u)^{\lambda_2-1} e^{-\alpha(t-u)}}{\Gamma(\lambda_2)} du = \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} \int_0^t u^{\lambda_1-1} e^{-\alpha u} \cdot (t-u)^{\lambda_2-1} e^{-\alpha(t-u)} du$$

[Замена $u=vt$]

$$du = t dv$$

$$dv = \frac{du}{t}$$

$$= \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} e^{-\alpha t} \int_0^t v^{\lambda_1-1} \cdot t^{\lambda_2-1} \cdot (t-vt)^{\lambda_2-1} \frac{dv}{t} = \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} e^{-\alpha t} \cdot t^{\lambda_1+\lambda_2-1} \underbrace{\int_0^t v^{\lambda_1-1} (1-v)^{\lambda_2-1} dv}_{B(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)}}$$

$$= \frac{\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}}{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2)} e^{-\alpha t} \cdot t^{\lambda_1+\lambda_2-1}$$

miro



Распределение суммы случайных величин, имеющих нормальное распределение.

Пусть X_1 и X_2 независимы, $X_1 \in N_{\alpha_1, \sigma_1^2}$, $X_2 \in N_{\alpha_2, \sigma_2^2}$. Тогда $X_1 + X_2 \in N_{\alpha_1 + \alpha_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

Доказательство: Введем новые случайные величины $Y_1 = \frac{X_1 - \alpha_1}{\sigma_1}$, $Y_2 = \frac{X_2 - \alpha_2}{\sigma_2}$

$$Y_1 \in N_{0,1} \quad Y_2 \in \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad \frac{X_2 - \alpha_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \frac{X_2 - \alpha_2}{\sigma_2} \in N_{0, \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}$$

$\in N_{0,1}$

Докажем, что $Y_1 + Y_2 \in N_{0, 1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}$, тогда $X_1 + X_2 = \sigma_1(Y_1 + Y_2) + \alpha_1 + \alpha_2 \in N_{\alpha_1 + \alpha_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

Обозначим $\theta = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$. Тогда, по формуле свертки:

$$f_{Y_1+Y_2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\theta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\theta^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-u)^2}{2}} du = \frac{1}{2\pi\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{u^2}{\theta^2} + t^2 - 2tu + u^2)} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[u^2 \frac{(1+\theta^2)}{\theta^2} - 2tu + t^2 \frac{(1+\theta^2)}{(1+\theta)^2} \right]} du =$$

miro

$$= \frac{1}{2\pi\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[u^2 \frac{(1+\theta^2)}{\theta^2} - 2u \cdot \sqrt{\frac{1+\theta^2}{\theta^2}} \cdot t + t^2 \frac{\theta^2}{(1+\theta)^2} + t^2 \frac{1}{(1+\theta)^2} \right]} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi\theta} e^{-\frac{t^2}{2(1+\theta)^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[u \sqrt{\frac{1+\theta^2}{\theta^2}} - t \sqrt{\frac{\theta^2}{1+\theta^2}} \right]^2} du =$$

$$dv = du \cdot \sqrt{\frac{1+\theta^2}{\theta^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1+\theta^2}} e^{-\frac{t^2}{2(1+\theta)^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\theta^2)}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2(1+\theta)^2}}$$



$$\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

Гауссово норм. расп.

$$\text{от } -\infty \text{ до } +\infty = 1$$

miro



Математическое ожидание случайной величины и его свойства, примеры.

Мат. ожидание

для дискретных

$$\mathbb{E}X = \sum_k y_k P(X=y_k),$$

если этот ряд абсолютно сходится

для абсолютно непрерывных

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_x(t) dt,$$

если $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_x(t) dt < \infty$

miro

Свойства:

$$1) \mathbb{E}g(x) = \begin{cases} \sum_k g(y_k) P(X=y_k) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_x(t) dt \end{cases}$$

$$2) \mathbb{E}C = C$$

$$3) \mathbb{E}(cX) = c \cdot \mathbb{E}X$$

Доказательство для дискр.

Пусть $g(x)$ принимает значения c_1, c_2, \dots . Тогда,

$$\mathbb{P}(g(X)=c_m) = \sum_{k: g(y_k)=c_m} P(X=y_k)$$

$$\mathbb{E}X = \sum_m c_m \mathbb{P}(g(X)=c_m) = \sum_m c_m \sum_{k: g(y_k)=c_m} P(X=y_k)$$

$$= \sum_m \sum_{k: g(y_k)=c_m} g(y_k) P(X=y_k) = \sum_k g(y_k) P(X=y_k) \blacksquare$$

miro

$$4) \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$$

(если все мат. ожидания существуют.)

$$5) \text{Если } X \geq 0 \text{ (т.е. } P(X \geq 0) = 1\text{), то}$$

$$\mathbb{E}X \geq 0$$

$$6) \text{Если } X \geq Y, \text{ то } \mathbb{E}X \geq \mathbb{E}Y$$

$$7) \text{Если } X \text{ и } Y - \text{независимы, то}$$

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$$

Доказательство: $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x,y) = x+y$. $\mathbb{E}(X+Y) =$

$$= \sum_{k,n} (x_k + y_n) P(X=x_k, Y=y_n) = \sum_k x_k \sum_n P(X=x_k, Y=y_n) +$$

$$+ \sum_n y_n \sum_k P(X=x_k, Y=y_n) = \left[\begin{array}{l} \text{сумма вероятностей по} \\ \text{всем индексам} = 1 \end{array} \right] =$$

$$= \sum_k x_k P(X=x_k) + \sum_n y_n P(Y=y_n) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y \blacksquare$$

Доказательство: $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \sum_{k,n} (x_k \cdot y_n) P(X=x_k, Y=y_n) =$

$$= \sum_k x_k P(X=x_k) \cdot \sum_n y_n P(Y=y_n) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y \blacksquare$$

miro

Примеры:

Распределение	$\mathbb{E}X$
B_p	p
$B_{n,p}$	np
Π_λ	λ
E_α	$\frac{1}{\alpha}$
$T_{\alpha,\lambda}$	$\frac{\lambda}{\alpha}$
N_{α,σ^2}	α
$U_{[a,b]}$	$\frac{a+b}{2}$

Доказем некоторые:

$$1) X \in B_p. \quad \mathbb{E}X = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

$$2) X \in B_{n,p}. \quad X = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad \xi_i \in B_p \quad \forall i$$

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i = n \cdot p$$

$$3) X \in \Pi_\lambda. \quad \mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

$$4) X \in U_{[a,b]}. \quad \mathbb{E}X = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

мид



Моменты, вопросы их существования. Дисперсия случайной величины, ее свойства, примеры.

Def. Моментом m -го порядка случайной величины X наз. $\mathbb{E}X^m$

Теорема о существовании моментов

Пусть $\mathbb{E}|X|^m < \infty$ ($m > 0$), тогда $\forall \varepsilon \in (0, m)$ $\mathbb{E}|X|^\varepsilon < \infty$

Доказательство: $|X|^\varepsilon \leq |X|^m + 1 \Rightarrow \mathbb{E}|X|^\varepsilon \leq \mathbb{E}|X|^m + 1$ — док.

Def. • Дисперсия — $DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$

• \sqrt{DX} — среднеквадратичное отклонение

miro

Свойства: 1) $DX = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

$$\Delta DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}\left[X^2 - \underbrace{2X\mathbb{E}X}_{\text{const}} + \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_{\text{const}}\right] = \mathbb{E}X^2 - 2(\mathbb{E}X)^2 + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

2) $D(C) = 0$

3) $D(cX) = c^2 DX$

4) $DX \geq 0$ т.к. мат. ожидание квадрата неотрицательно при $X \geq 0$ $\mathbb{E}X \geq 0$

5) Если X и Y независимы, $D(X+Y) = DX + DY$

$$\Delta D(X+Y) = \mathbb{E}(X+Y)^2 - (\mathbb{E}(X+Y))^2 = [\mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}Y^2 + 2\mathbb{E}XY] - [\mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}Y^2 + 2\cancel{\mathbb{E}XY}] = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = DX^2 + DY^2$$

независимы

6) $D(X+C) = DX$

7) Если $DX=0$ то $\exists C : P(X=C)=1$

miro

Распределение

$D X$

	<u>$D X$</u>
B_p	$p(1-p)$
$B_{n,p}$	$np(1-p)$
Π_λ	λ
E_α	$\frac{1}{\alpha^2}$
$\Gamma_{\alpha,\lambda}$	$\frac{\lambda}{\alpha^2}$
$U_{[a,b]}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
N_{a,r^2}	r^2

Доказаем некоторые:

$$1) X \in B_p \quad E X^2 = 1^2 p + 0^2 q = p$$

$$D X^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

$$2) X \in B_{n,p} \quad X = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad \xi_i \in B_p \quad \text{возл.}$$

$$D X = n D \xi_1 = n p(1-p)$$

$$3) X \in \Pi_\lambda$$

$$E X(x-1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2$$

$$E X^2 = E X(x+1) + E X = \lambda^2 + \lambda$$

$$D X = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$4) X \in U_{[a,b]}$$

$$E X^2 = \int_a^b t^2 \frac{1}{b-a} dt = \frac{t^3}{3} \frac{1}{b-a} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} =$$

$$= \frac{(b-a)(b^2 + ba + a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ba + a^2}{3}$$

$$D X = \frac{b^2 + ba + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

miro



Коэффициент корреляции и его свойства.

Def

Ковариацией случайных величин X и Y наз. число

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Эту величину используют как индикатор зависимости между двумя случайными величинами.

Свойства: 1) $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$\Delta \text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[XY - XEY - YEY + EYE] = \\ = E(XY) - 2E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \Delta$$

$$2) \text{cov}(X, X) = D(X)$$

$$3) \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$$

$$4) \text{cov}(cX, Y) = \text{cov}(X, cY) = c \cdot \text{cov}(X, Y)$$

miro

Def

Коэффициентом корреляции $\rho(X, Y)$ случайных величин X и Y , дисперсии которых существуют и отличны от нуля, наз. число

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

Свойства: 1) Если X, Y - независимы, то $\rho(X, Y) = 0$

$$2) |\rho(X, Y)| \leq 1$$

$$3) |\rho(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow X, Y линейно связанные (P(X=aY+b) = 1)$$

Доказательство: 1) X, Y -независимы $\Rightarrow \text{cov}(X, Y) = 0 \Rightarrow g(X, Y) = 0$

2) $\hat{\xi} = \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}$ — стандартизация

$$\circ E\hat{\xi} = \frac{E\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}} = 0$$

$$\circ D\hat{\xi} = E\hat{\xi}^2 = D\left[\frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}}\right] = \frac{D(\xi - E\xi)}{D\xi} = \frac{D\xi}{D\xi} = 1$$

Tогда $g(\xi, \eta) = E(\hat{\xi} \cdot \hat{\eta})$

Дано, $(x \pm y)^2 \geq 0$ равносильно $-\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

$-\frac{1}{2}(\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2) \leq \hat{\xi} \cdot \hat{\eta} \leq \frac{1}{2}(\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2)$, возьмем мат. ожидание от обеих частей

$$-1 = -\frac{1}{2}E(\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2) \leq g(\xi, \eta) \leq \frac{1}{2}E(\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2) = 1 \quad (*) \blacksquare$$

miro

3) (\Leftarrow) Если $\eta = a\xi + b$ то

$$g(\xi, a\xi + b) = \frac{E[\xi(a\xi + b)] - E\xi \cdot E(a\xi + b)}{\sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D(a\xi + b)}} = \frac{aE\xi^2 + Eb - a(E\xi)^2 - Eb}{\sqrt{D\xi} \cdot a \cdot \sqrt{D\xi}} = \frac{aD\xi}{|a|\sqrt{D\xi}} = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$

(\Rightarrow) $|g(\xi, \eta)| = 1 \Rightarrow \exists a \neq 0 \text{ и } b : P(\eta = a\xi + b) = 1$

$$\circ g(\xi, \eta) = E(\hat{\xi} \cdot \hat{\eta}) = 1$$

$$\text{Tогда, б. } (*) \quad E(\hat{\xi} \cdot \hat{\eta}) = \frac{1}{2}E(\hat{\xi}^2 + \hat{\eta}^2) \Rightarrow E(\hat{\xi} - \hat{\eta})^2 = 0$$

По свойствам мат. ожидания из этого следует, что $(\hat{\xi} - \hat{\eta})^2 = 0$

$$\text{Tогда } \hat{\xi} = \hat{\eta} \Rightarrow \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D\xi}} = \frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D\eta}} \Rightarrow \eta = \underbrace{\xi \cdot \frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}}}_{a} - \underbrace{\frac{\sqrt{D\eta}}{\sqrt{D\xi}} E\xi + E\eta}_{b} \quad \blacksquare$$

miro



Матрица ковариаций. Многомерное нормальное распределение и его свойства.

Def. Случайный вектор - $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

Def. Матрицей ковариаций случайного вектора X наз. матрица $C(X)$, у которой на месте с номером (i, j) стоит $c_{i,j} = \text{cov}(X_i, X_j)$ $i, j \in [1, n]$

Матрица ковариаций есть аналог дисперсии для случайных векторов.

При $n=1$ это и есть дисперсия. В общем случае на диагонали стоят дисперсии DX_1, \dots, DX_n , и $C(X)$ симметрична относительно диагонали

$$C(X) = \begin{bmatrix} DX_1 & \text{cov}(X_2, X_1) & \dots & \text{cov}(X_n, X_1) \\ \text{cov}(X_1, X_2) & DX_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_1, X_n) & \dots & & DX_n \end{bmatrix}$$

miro

Теорема Пусть A -матрица из констант (m строк, n столбцов), B - m -вектор из констант. Тогда:

$$C(AX + B) = A C(X) A^T$$

Доказательство: $C(X)$ представлена в виде:

$$\mathbb{E} \left[\begin{bmatrix} X_1 - \mathbb{E}X_1 \\ X_2 - \mathbb{E}X_2 \\ \vdots \\ X_n - \mathbb{E}X_n \end{bmatrix} \cdot (X_1 - \mathbb{E}X_1, X_2 - \mathbb{E}X_2, \dots, X_n - \mathbb{E}X_n) \right] = \mathbb{E} \left[\begin{bmatrix} (X_1 - \mathbb{E}X_1)^2 & (X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_2 - \mathbb{E}X_2) & \dots & (X_1 - \mathbb{E}X_1)(X_n - \mathbb{E}X_n) \\ (X_2 - \mathbb{E}X_2)(X_1 - \mathbb{E}X_1) & (X_2 - \mathbb{E}X_2)^2 & \dots & (X_2 - \mathbb{E}X_2)(X_n - \mathbb{E}X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_n - \mathbb{E}X_n)(X_1 - \mathbb{E}X_1) & \dots & \dots & (X_n - \mathbb{E}X_n)^2 \end{bmatrix} \right]$$

То есть: $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)^T] = C(X)$

$$\text{Тогда } C(AX + B) = \mathbb{E} \left[((AX + B) - \mathbb{E}(AX + B))((AX + B) - \mathbb{E}(AX + B))^T \right] =$$

$$= \mathbb{E} \left[(AX + B - \mathbb{E}AX - \mathbb{E}B)(AX + B - \mathbb{E}AX - \mathbb{E}B)^T \right] =$$

- Транспонированное произведение матриц равно произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке.
 $(AB)^T = B^T A^T$

$$= \mathbb{E} \left[A(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)^T A^T \right] = A \cdot \mathbb{E} \left[(X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)^T \right] A^T = AC(X)A^T$$

miro

Многомерное нормальное распределение

Пусть $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ Y_i — независимы $Y_i \in N_{0,1}$. $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$

$$\circ f_Y(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n t_i^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{t}^T \mathbf{t}} = \prod_{i=1}^n \varphi_{0,1}(t_i)$$

т.к. Y_i — независимы то это представляется произведением $f_{Y_i}(t_i)$

• Пусть A — невырожденная матрица $n \times n$, состоит из констант. $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ $\alpha_i = \text{const}$

• $\mathbf{X} = A\mathbf{Y} + \alpha$ — распределение \mathbf{X} будем называть многомерным нормальным.

Теорема Плотность многомерного норм. расп. равна $f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{\det C(X)} \cdot (2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2} (t - \alpha)^T C(X)^{-1} (t - \alpha)}$

где $C(X)^{-1} = (AC(Y)A^T)^{-1} = (AA^T)^{-1}$
единичная, т.к. $Y_i \in N_{0,1}$

miro

Следствие Для нормального вектора независимость и корреляционность равивалентны

т.е. \mathbf{Y} — норм. вектор. $\text{cov}(Y_i, Y_j) = 0 \quad \forall i \neq j$, тогда Y_1, \dots, Y_n — независимы

Доказательство:

$$C(Y) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$(C(Y))^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & \sigma_n^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\det C(Y)} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_n$$

$$f_{Y_1, \dots, Y_n}(\mathbf{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(t_i - \alpha_i)^2}{\sigma_i^2}} = \prod_{i=1}^n \varphi_{\alpha_i, \sigma_i^2}(t_i)$$

\vec{X} — стандартный нормальный вектор, если каждая его компонента распределена стандартно нормально и компоненты независимы.

$\vec{Y} = A\vec{X} + \vec{b}$ — нормальный вектор. A — невырожденная матрица.

$$C(\vec{Y}) = C(A\vec{X} + \vec{b}) = AC(\vec{X})A^T = AA^T$$

Если A — ортогональная, то $\mathbf{Y} = AX$ это тоже стандартно нормальный вектор.

miro



Сходимость по вероятности, ее свойства.

Def. Последовательность случайных величин X_1, X_2, X_3, \dots сходится к X по вероятности $X_n \xrightarrow{P} X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Def. Последовательность случайных величин X_1, X_2, X_3, \dots слабо сходится к X $X_n \Rightarrow X$, если для любой точки непрерывности t функции $F_X(t)$, $F_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(t)$.

miro

Свойства:

$$1) \quad X_n \xrightarrow{P} X, \quad Y_n \xrightarrow{P} Y \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$$

$$\Delta \quad P(|X_n + Y_n - X - Y| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| + |Y_n - Y| > \varepsilon) \xrightarrow{\substack{\nearrow 0 \\ \searrow 0}} 0$$

$$\leq P(\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\}) \leq P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \blacksquare$$

$$2) \quad X_n \Rightarrow X, \quad g(t) - \text{непрерывная} \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$$

$$3) \quad X_n \xrightarrow{P} X, \quad g(t) - \text{непрерывная} \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$$

$$4) \quad \text{Если } X_n \xrightarrow{P} X \text{ то } X_n \Rightarrow X$$

miro

$$5) \quad \text{Если } X_n \Rightarrow C \text{ то } X_n \xrightarrow{P} C.$$

$$\Delta \quad \text{Пусть } X_n \Rightarrow C, \quad \text{т.е. } F_{X_n}(t) \xrightarrow{P} F_C(t) = \begin{cases} 0, & t \leq C \\ 1, & t > C \end{cases} \quad \forall t \neq C$$

т.к. это точка
непрерывности

$$P(|X_n - C| < \varepsilon) = P(C - \varepsilon < X_n < C + \varepsilon) = F_C(C + \varepsilon) - F_C(C - \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - 0 = 1$$

Положим, что $P(|X_n - C| < \varepsilon) \rightarrow 1 \Rightarrow P(|X_n - C| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} C \blacksquare$

6) Теорема Случкого

$$\text{Если } X_n \xrightarrow{P} C, \quad Y_n \Rightarrow Y, \quad \text{то} \quad ① \quad X_n + Y_n \Rightarrow C + Y$$

$$② \quad X_n \cdot Y_n \Rightarrow C \cdot Y$$

miro



Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Теорема Бернулли.

Неравенство Маркова

Если $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ то $\forall x > 0 \quad P(|\xi| \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi|}{x}$

Доказательство: Вспомним, что индикатор события A это $I(A) = \begin{cases} 1, & A \text{ произошло} \\ 0, & A \text{ не произошло} \end{cases}$

Тоavr. $I(A) \in \mathcal{B}_p$, где $p = P(A)$, $\mathbb{E}I = p$. А также, знаем что $I(A) + I(\bar{A}) = 1$

$$|\xi| = |\xi| \cdot 1 = |\xi| \underbrace{[I(|\xi| < x) + I(|\xi| \geq x)]}_{\geq 0} \geq |\xi| \cdot I(|\xi| \geq x) \geq x \cdot I(|\xi| \geq x)$$

$|\xi| \geq x \cdot I(|\xi| \geq x)$ богълбом от обеих частей

$$\mathbb{E}|\xi| \geq \mathbb{E}(x \cdot I(|\xi| \geq x)) = x \cdot P(|\xi| \geq x)$$

$$\frac{\mathbb{E}|\xi|}{x} \geq P(|\xi| \geq x) \quad \blacktriangleleft$$

miro

Следствие: обобщенное неравенство Чебышёва

Пусть функция g убывает и неотрицательна на \mathbb{R} . Если $\mathbb{E}g(\xi) < \infty$, то $\forall x \in \mathbb{R}$

$$P(g \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}g(\xi)}{g(x)}$$

Доказательство: Поскольку g неубывает $P(g \geq x) \leq P(g(\xi) \geq g(x))$

Т.к. $g(x) \geq 0$, применим неравенство Маркова $P(g(\xi) \geq g(x)) \leq \frac{\mathbb{E}g(\xi)}{g(x)}$

miro

Неравенство Чебышева

Если $D\xi$ существует, то $\forall x > 0$

$$P(|\xi - E\xi| \geq x) \leq \frac{D\xi}{x^2} \quad (*)$$

Доказательство: Для $x > 0$ $|\xi - E\xi| \geq x$ равносильно $(\xi - E\xi)^2 \geq x^2$

$$\text{поэтому } P(|\xi - E\xi| \geq x) = P((\xi - E\xi)^2 \geq x^2) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{x^2} = \frac{D\xi}{x^2}$$

Закон Больших Чисел (в форме Чебышева)

$\forall \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ - и.о.р.с.в. (независимое однократное распределение слг. величин)

таких, что $D\xi_i < \infty$ (*)

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E\xi_1$$

miro

Доказательство:

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E\xi_1 + \dots + E\xi_n}{n} = \frac{n E\xi_1}{n} = E\xi_1$$

$$\text{Для произвольного } \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \stackrel{(*)}{\leq} \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D S_n}{n^2 \varepsilon^2} =$$

$$\stackrel{wz}{=} \frac{D\xi_1 + \dots + D\xi_n}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{n D\xi_1}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{D\xi_1}{n \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Теорема Бернулли

Пусть S_n - число успехов в n испытаниях сх. Бернулли

p - вероятность успеха. Тогда

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$$

Доказательство: очевидное следствие прошлой теоремы

miro



Центральная предельная теорема: формулировка, обсуждение, примеры применения. Теорема Муавра-Лапласа

Центральная предельная Теорема

Пусть ξ_1, ξ_2, \dots – и.о.р.с.в. такие, что $0 < D\xi_i < \infty$. Тогда

$$\frac{S_n - n \cdot E\xi_1}{\sqrt{n D\xi_1}} \Rightarrow N_{0,1}$$

(к S_n применили стандартизацию, т.к. $E S_n = n \cdot E\xi_1$, $D S_n = n D\xi_1$)

miro

Интервальная формулировка

ξ_1, ξ_2, \dots – и.о.р.с.в с конечной квадратичной дисперсией. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y$

$$P(x \leq \frac{S_n - n E\xi_1}{\sqrt{n D\xi_1}} \leq y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N_{0,1}(y) - N_{0,1}(x)$$

Эта форма используется в решении задач:

Пусть нужно найти вероятность $P(C \leq S_n \leq D)$. Приведем к штучному виду:

$$P(C \leq S_n \leq D) = P\left(\frac{C - E\xi_1}{\sqrt{n D\xi_1}} \leq \frac{S_n - E\xi_1}{\sqrt{n D\xi_1}} \leq \frac{D - E\xi_1}{\sqrt{n D\xi_1}}\right) \approx N_{0,1}(B) - N_{0,1}(A)$$

$$A = \frac{C - E\xi_1}{\sqrt{n D\xi_1}}, \quad B = \frac{D - E\xi_1}{\sqrt{n D\xi_1}}$$

Неравенство Берри - Эссея

Пусть в условиях У.П.Т. имеем $E|\xi_i|^3 < \infty$, тогда

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n - nE\xi_i}{\sqrt{nD\xi_i}} < y\right) - N_{0,1}(y) \right| \leq \frac{C \cdot E|X_1 - EX_1|^3}{\sqrt{n} (DX_1)^{3/2}}, \quad C \approx 0,4784$$

Теорема Муавра - Лапласа.

Пусть событие A может произойти в любом из n независимых испытаний с одной и той же вероятностью p и пусть $\lambda_n(A)$ — число осуществлений события A в n испытаниях. Тогда

$$\frac{\lambda_n(A) - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N_{0,1}$$

Доказательство: частный случай У.П.Т для B_p

miro



Приближение Пуассона для биномиального распределения

Теорема Пуассона

Пусть в схеме Бернулли $P_{n \rightarrow \infty}^0$, np $\rightarrow \lambda > 0$. Тогда

$$P(S_n = k) \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

или

$$S_n \Rightarrow Y \in \Pi_\lambda$$

miro

Доказательство: $\lambda_n = np_n$, но усл. $\lambda_n \rightarrow \lambda > 0$.

Поставим $p_n = \frac{\lambda_n}{n}$ в ф-лу Бернулли: $C_n \frac{\lambda_n^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} =$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{\lambda_n^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}$$

$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 

$\frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \xrightarrow[1]$ Одного порядка

$\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \xrightarrow[e^{-\lambda}]{} 1$ Замечательный предел

$\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \xrightarrow[1]{} 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{x}\right)^x = e^n$$

miro