Проверка гипотез о совпадении дисперсий двух нормальных совокупностей.

Критерий Фишера

$\vec{X} \in N_{a_1, \sigma_1^2} \qquad \vec{Y} \in N_{a_2, \sigma_2^2}$

$H_0 = \{\sigma_1 = \sigma_2\}$

$H_a = \{\sigma_1 \neq \sigma_2\}$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{nS^2(\vec{X})}{\sigma_1} \in \chi^2_{n-1} \\ &\frac{mS^2(\vec{Y})}{\sigma_2} \in \chi^2_{m-1} \end{aligned}\right\} \quad \overbrace{\frac{nS^2(X)}{\sigma_1 \cdot (n-1)}}^{S_0^2(\vec{X})} \cdot \overbrace{\frac{\sigma_2 (m-1)}{mS^2(\vec{Y})}}^{\frac{1}{S_0^2(\vec{Y})}} \in F_{n-1, m-1}$$

Теорема Фишера: $d_F = \frac{S_0(\vec{X})}{S_0(\vec{Y})} \in F_{n-1, m-1}$ при верной H_0.

$$\delta = \begin{cases} 0, & f_{\frac{\varepsilon}{2}} \le d_F \le f_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Сост. кр. Фишера

$H_0 = \{\sigma_1^2 = \sigma_2^2\}$

$H_a = \{\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2\}$

$\vec{X} = (x_1, \dots, x_n) \qquad \vec{Y} = (y_1, \dots, y_n)$

$$d_F = \frac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})} \in F_{n-1, m-1}$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & f_{\frac{\varepsilon}{2}} \le \frac{S_0(\vec{X})}{S_0(\vec{Y})} \le f_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Убедимся, что посл-ть квантилей $f_\delta = f_\delta(n,m)$ распр $F_{n,m}$ $\forall$ уровня $\delta \in (0,1)$ сходится к 1 при $n, m \to \infty$:

Пусть $\xi_{n,m} \in F_{n,m}$ по опр квантиля $P(\xi_{n,m} < f_\delta) = \delta$

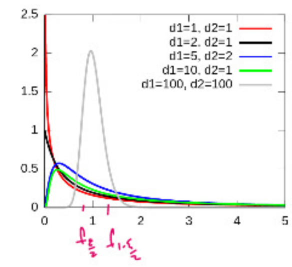
$P(\xi_{n,m} > f_\delta) = 1-\delta$

Опр. $Y \in F_{n,m}$ если $Y = \dfrac{\frac{Z_1}{m}}{\frac{Z_2}{k}} = \dfrac{k}{m} \cdot \dfrac{Z_1}{Z_2}$

$Z_1 \in \chi^2_m$

$Z_2 \in \chi^2_k$

$$\boxed{Z_1 = \frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2}{m} \xrightarrow{P} \underline{E\xi_1^2 = 1}}$$



Т.е. $\xi_{n,m} \xrightarrow[n,m\to\infty]{P} 1$

Поэтому, $P(\xi < 1-\varepsilon) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

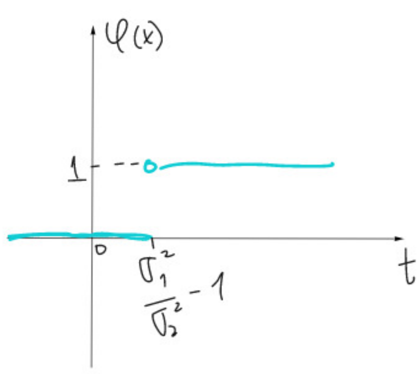
$P(\xi > 1-\varepsilon) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \underbrace{1-\varepsilon < f_\delta < 1+\varepsilon}_{\text{при больших } n,m} \Rightarrow f_\delta \xrightarrow[n,m]{} 1 \; (*)$

Далее, т.к. верна H_a, то $\sigma_1 \neq \sigma_2 \Rightarrow \dfrac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})} \xrightarrow[n,m\to\infty]{P} \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

И по $(*)$ можем сказать, что $\dfrac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})} - f_{1-\varepsilon} \to \underbrace{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 1}_{>0}$

$\varphi(x) = P\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 1 < x\right)$ — непр в $x=0$ и очевидно, $P\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 1 < 0\right) = 0$



$\alpha_2 = P_{H_a}\left(\dfrac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})} < f_{1-\varepsilon}\right) =$

$= P\left(\dfrac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})} - f_{1-\varepsilon} < 0\right) \xrightarrow{P} P\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 1 < 0\right) = 0$