Центральная предельная теорема: формулировка, обсуждение, примеры применения. Теорема Муавра-Лапласа

Центральная предельная теорема

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – н.о.р.с.в. такие, что $0 < \mathbb{D}\xi_1 < \infty$. Тогда

$$\frac{S_n - n \cdot \mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n \mathbb{D}\xi}} \Rightarrow N_{0,1}$$

(к S_n применили стандартизацию, т.к. $\mathbb{E}S_n = n \cdot \mathbb{E}\xi_1$, $\mathbb{D}S_n = n\mathbb{D}\xi_1$)

miro

Интервальная формулировка

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ – н.о.р.с.в с конечной ненулевой дисперсией. $\forall\, x, y \in \mathbb{R} : x < y$

$$P\left(x \le \frac{S_n - n\mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_1}} \le y\right) \xrightarrow[n\to\infty]{P} N_{0,1}(y) - N_{0,1}(x)$$

Эта форма используется в решении задач:

Пусть нужно найти вероятность $P(C \le S_n \le D)$. Приведем к нужному виду:

$$P(C \le S_n \le D) = P\left(\frac{C - \mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_1}} \le \frac{S_n - \mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_1}} \le \frac{D - \mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_1}}\right) \approx N_{0,1}(B) - N_{0,1}(A)$$

$$A = \frac{C - \mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_1}} \qquad B = \frac{D - \mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_1}}$$

miro

Неравенство Берри-Эссеена

Пусть в условиях Ц.П.Т ещё $\mathbb{E}|\xi_1|^3 < \infty$, тогда

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n - n\mathbb{E}\xi_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_1}} < y\right) - N_{0,1}(y) \right| \le \frac{C \cdot \mathbb{E}|X_1 - \mathbb{E}X_1|^3}{\sqrt{n}\,(\mathbb{D}X_1)^{3/2}}, \quad C \sim 0{,}4784$$

Теорема Муавра-Лапласса.

Пусть событие A может произойти в любом из n независимых испытаний с одной и той же вероятностью p и пусть $\nu_n(A)$ – число осуществлений события A в n испытаниях. Тогда

$$\frac{\nu_n(A) - np}{\sqrt{np(1-p)}} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} N_{0,1}$$

Доказательство: частный случай Ц.П.Т для B_p