Математическое ожидание случайной величины и его свойства, примеры.

Мат. ожидание

Для дискретных

$$\mathbb{E}X = \sum_k y_k (X = y_k),$$

если этот ряд абсолютно сходится

Для абсолютно непрерывных

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\,dt,$$

если $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\, f_X(t)\,dt < \infty$

miro

Свойства:

1) $Eg(x) = \begin{cases} \sum_k g(y_k)(X = y_k) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, f_X(t)\,dt \end{cases}$

2) $\mathbb{E}C = C$

3) $\mathbb{E}(cX) = c \cdot \mathbb{E}X$

Доказательство для дискр:

Пусть $g(X)$ принимает значение $c_1, c_2, \ldots$ Тогда,

- $P(g(X) = c_m) = \sum_{k: g(y_k) = c_m} P(X = y_k)$
- $\mathbb{E}X = \sum_m c_m P(g(X) = c_m) = \sum_m c_m \sum_{k: g(y_k) = c_m} P(X = y_k)$

$$= \sum_m \sum_{k: g(y_k) = c_m} g(y_k) P(X = y_k) = \sum_k g(y_k) P(X = y_k) \blacktriangle$$

miro

4) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

(если все мат. ожидания существуют.)

5) Если $X \geqslant 0$ (т.е. $P(X \geqslant 0) = 1$), то $\mathbb{E}X \geqslant 0$

6) Если $X \geqslant Y$, то $\mathbb{E}X \geqslant \mathbb{E}Y$

7) Если X и Y – независимые, то $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

Доказательство: $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x + y$. $\mathbb{E}(X+Y) =$

$$= \sum_{k,n} (x_k + y_n) P(X = x_k, Y = y_n) = \sum_k x_k \sum_n P(X = x_k, Y = y_n) +$$

$$+ \sum_n y_n \sum_k P(X = x_k, Y = y_n) = \begin{bmatrix}\text{сумма вероятностей по} \\ \text{всем индексам} = 1\end{bmatrix} =$$

$$= \sum_k x_k P(X = x_k) + \sum_n y_n P(Y = y_n) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y \blacktriangle$$

Доказательство: $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \sum_{k,n} (x_k \cdot y_n) P(X = x_k, Y = y_n) \overset{\text{незав.}}{=}$

$$= \sum_k x_k P(X = x_k) \cdot \sum_n y_n P(Y = y_n) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y \blacktriangle$$

miro

Примеры:

Распределение	$\mathbb{E}X$
B_p	p
$B_{n,p}$	np
Π_λ	λ
E_α	$\frac{1}{\alpha}$
$\Gamma_{\alpha,\lambda}$	$\frac{\lambda}{\alpha}$
N_{a,σ^2}	a
$U_{[a,b]}$	$\frac{a+b}{2}$

Докажем некоторые:

1) $X \in B_p$. $\mathbb{E}X = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

2) $X \in B_{n,p}$. $X = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $\xi_i \in B_p \ \forall i$

$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\xi_i = n \cdot p$

3) $X \in \Pi_\lambda$. $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$

$= \lambda e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$

4) $X \in U_{[a,b]}$. $\mathbb{E}X = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$