Многомерные распределения и плотности, их основные свойства, примеры.

Def $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, где X_i – случайная величина, наз. случайным вектором

Def Совместная функция распределения $F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = P(X_1 < t_1, \ldots, X_n < t_n)$

Свойства функции совместного распределения:

1) Не убывает по каждому аргументу.
2) Непрерывна слева по каждому аргументу
3) $\lim\limits_{t_i \to -\infty} F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = 0$
4) $\lim\limits_{t_n \to +\infty} F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = F_{X_1,\ldots,X_{n-1}}(t_1,\ldots,t_{n-1})$

miro

Абсолютно непрерывное

- $F_{X_1,\ldots,X_n}(t_1,\ldots,t_n) = \int\limits_{-\infty}^{t_1}\ldots\int\limits_{-\infty}^{t_n} f_{X_1\ldots X_n}(y_1,\ldots,y_n)\,dy_1\ldots dy_n$
- $f_{X_1\ldots X_n}(y_1,\ldots,y_n)$ – совместная плотность распределение

Свойства:

1) $f_{\vec{X}}(\vec{t}) \geq 0$
2) $\int\!\!\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_{\vec{X}}(\vec{t})\,d\vec{t} = 1$
3) $B \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow P(X \in B) = \int\!\!\int\limits_{B} f_{\vec{X}}(\vec{t})\,d\vec{t}$

Дискретное

- $\forall k \in [1, n]$ X_k имеет дискретное распределение

Пример: $Y = |X-1| + 1$

X:

-2	0	2
0,1	0,3	0,6

Y:

4	2
0,1	0,9

miro

4) $F_{X_1}(t_1) = \int\limits_{-\infty}^{t_2}\dots\int\limits_{-\infty}^{t_n} f_{\vec{X}}(\vec{t})\,dt_2\dots dt_n$

• Совместное распределение:

Y \ X	−2	0	2
2	0	0,3	0,6
4	0,1	0	0

Пример: Равномерное распределение

$S \subset \mathbb{R}^n$, $\lambda(S)$ – конечная лебегова мера

Вектор $\vec{X}$ имеет равномерное распределение в S

если плотность $f_{\vec{X}}(\vec{t})$ постоянна в S и равна нулю вне S:

$$f_{\vec{X}}(\vec{t}) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda(S)}, & \vec{t} \in S \\ 0, & \vec{t} \notin S \end{cases}$$

• $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_{\vec{X}}(\vec{t})\,d\vec{t} = \frac{1}{\lambda(S)} \int\limits_{S} d\vec{t} = \frac{1}{\lambda(S)} \cdot \lambda(S) = \underline{1}$

вне S ноль, откинули