Эквивалентность классов вычислительных функций

Предложение 17.1. Следующие функции являются правильно вычислимыми на машине Тьюринга (пвт):

1) $0(x) = 0$;

2) $S(x) = x + 1$;

3) $I_m^n(x_1, \ldots, x_n) = x_m$;

4) А – перенос 0;

5) Б$^+$, Б$^-$ – правый, левый сдвиг;

6) Г – удвоение;

7) R – вычитание единицы;

8) S – прибавление единицы;

9) K_n – копирование;

10) Ц$_n$ – циклический сдвиг;

11) Л – ликвидация.

Доказательство: упражнение.

1. 2. 3. 6.

4.
$q_1 0 \to q_2 0 R$
$q_2 0 \to q_3 0 R$
$q_3 1 \to q_3 1 R$, $q_3 0 \to q_4 0 L$
$q_4 1 \to q_5 0 L$
$q_5 0 \to q_0 1 L$, $q_5 1 \to q_5 1 L$

5.
$q_1 0 \to q_2 0 R$
$q_2 0 \to q_0 0$, $q_2 1 \to q_2 1 R$

$q_1 0 \to q_2 0 L$
$q_2 1 \to q_2 1 L$, $q_2 0 \to q_0 0$

7.
$q_1 0 \to q_2 0 R$
$q_2 1 \to q_2 1 R$, $q_2 0 \to q_3 0 L$
$q_3 1 \to q_4 0 L$
$q_4 1 \to q_4 1 L$, $q_4 0 \to q_0 0$

8.
$q_1 0 \to q_2 0 R$
$q_2 1 \to q_2 1 R$, $q_2 0 \to q_3 1 L$
$q_3 1 \to q_3 1 L$, $q_3 0 \to q_0 0$

9. $K_n = (Ц_n \circ (Б^+)^{n-1} \circ Г \circ (Б^-)^{n-1} \circ (Ц_n)^{n-1} \circ Б^+)^n \circ (Б^-)^n$

10. $Ц_n = (Б^+ \circ B)^{n-1} \circ (Б^-)^{n-1}$

11.
$q_1 0 \to q_2 0 R$
$q_2 1 \to q_2 1 R$, $q_2 0 \to q_3 0 L$
$q_3 1 \to q_3 0 L$, $q_3 0 \to q_0 0$

Определение 9.3. ***Примитивно-рекурсивные функции (прф):***
а) простейшие функции являются примитивно-рекурсивными;
б) функция, полученная из примитивно-рекурсивных функций однократным применением оператора суперпозиции или оператора примитивной рекурсии, является примитивно-рекурсивной;
в) других примитивно-рекурсивных функций нет.

Частично-рекурсивные функции (чрф):
а) простейшие функции являются частично-рекурсивными;
б) функция, полученная из частично-рекурсивных функций однократным применением оператора суперпозиции, оператора примитивной рекурсии или оператора минимизации, является частично-рекурсивной;
в) других частично-рекурсивных функций нет.

Общерекурсивными функциями (орф) *называются всюду определённые частично-рекурсивные функции.*

*Класс всех примитивно-рекурсивных функций обозначается **ПРФ**, класс всех общерекурсивных функций – **ОРФ**, а класс всех частично-рекурсивных функций – **ЧРФ**.*

Предложение 17.2.

Пусть функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m)$ - **пвт**. Тогда их суперпозиция $f(g_1(\overline{x}), \ldots, g_n(\overline{x}))$ - **пвт**.

Доказательство:

Пусть МТ F вычисляет f, а $G_1, \ldots, G_n$ вычисляют $g_1, \ldots, g_n$.

Тогда

$q_1\, 0\, 1^{x_1+1}\, 0 \ldots 0\, 1^{x_m+1}\, 0$ *копируем аргументы чтобы после вычисления g1 могли посчитать следующую*

$\xRightarrow{K_m} q_1\, 0\, 1^{x_1+1}\, 0 \ldots 0\, 1^{x_m+1}\, 0\, 1^{x_1+1}\, 0 \ldots 0\, 1^{x_m+1}\, 0$

правым сдвигом идём к копии аргуметов и считаем от них g1

$\xRightarrow{(Б^+)^m G_1} 0\, 1^{x_1+1}\, 0 \ldots 0\, 1^{x_m+1}\, q_{i_2}\, 0\, 1^{g_1(\overline{x})+1}\, 0$

двигаемся в начало, делаем цикличиский сдвиг и уходим за результат g1 *позиция как в начале, но первая функция уже посчитан*

$\xRightarrow{(Б^-)^m (Ц_{m+1})^m Б^+} 0\, 1^{g_1(\overline{x})+1}\, q_{i_3}\, 0\, 1^{x_1+1}\, 0 \ldots 0\, 1^{x_m+1} 0$

$\xRightarrow{K_m (Б^+)^m G_2 (Б^-)^m (Ц_{m+1})^m Б^+} 0\, 1^{g_1(\overline{x})+1}\, 0\, 1^{g_2(\overline{x})+1}\, q_{i_4}\, 0\, 1^{x_1+1}\, 0 \ldots 0\, 1^{x_m+1}\, 0$

$\Rightarrow$ (упр.) $\Rightarrow q_0\, 0\, 1^{f(g_1(\overline{x}), \ldots, g_n(\overline{x}))+1}\, 0.$ *так считаем все g, затем возвращаемся в начало и считаем f*

Предложение доказано.

Предложение 17.3.

Пусть f получена из функций g и h при помощи оператора примитивной рекурсии и пусть g, h - правильно вычислимые. Тогда f - правильно вычислимая.

Без доказательства.

Предложение 17.4.

Пусть $f(\overline{x}) = \mu y[g(\overline{x}, y) = 0]$, где g - правильно вычислимая. Тогда f - правильно вычислимая.

Без доказательства.

Теорема 17.5.

Класс **ЧРФ** $\subseteq$ **ПВТ**, т.е. каждая **чрф** функция является правильно вычислимой на некоторой МТ.

Доказательство: упражнение. (Индукцией по построению частично рекурсивных функций при помощи Предложений 17.1 -17.4 показываем, что каждая частично рекурсивная функция является правильно вычислимой на машине Тьюринга).

ну тут мы доказали что все составляющие чрф правильно вычислимы, значит всё что мы будем образовывать с помощью суперпозиции, минимизации и примтивной рекурсии будет оставаться ПВ тк. эти операции сохрняют правильную вычислимость

Теорема 17.6.(Основная теорема арифметики)

$\forall n \in \mathbb{N} : (n > 1)\ \exists$ единственное разложение $n = q_1^{k_1} \ldots q_n^{k_n}$, где $q_1^{k_1}, \ldots, q_n^{k_n}$– простые и $\forall i \leqslant n :\ k_i \neq 0$.

Без доказательства.

это даёт нам то, что с помощью простых числел мы можем уникально нумеровать кортежи

что это за шпиен линала((((((

ну нам это нужно сказать, иначе не могли бы гарантировать уникальность

Определение 17.7.

Рассмотрим кортеж $(a_1, \ldots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{N}$.

двойка - "индикатор" того что это номер кортежа

единица прибавляется потому, что если в степени стоит ноль, то мы не смо понят на каком разряде он стоял возникнет коллизия

Номером кортежа назовем $\gamma(a_1, \ldots, a_n) = 2 \cdot p_1^{a_1+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n+1}$, где $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ и т.д. (следующие p_n - простые числа).

пример: Г(3, 2, 1) = 2 * 3^(3+1) * 5^(2+1) * 7^(1+1) = 2 * 3^4 * 5^3 * 7^2

Определение 17.8.

Пусть $B \subseteq \mathbb{N}$. Функция $\chi_B : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ называется **характеристической функцией**, если:

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

задаётся для множества, на вход какой то элемент натуральных чисел, на выход принадлежит заданому множеству или нет

Обозначим $A_1 = \{\gamma(S) \mid S \in \{0, 1\}^*\}$.

Предложение 17.9.

χ_{A_1} - **прф**.

Без доказательства.

пример:

$\alpha \quad i \quad j \quad \beta$

0(q1)110

Г = 4 * 3 * 5 * 7^(Г(0)) * 11^(Г(1, 0)) = 4 * 3 * 5 * 7^6 * 11^90

Г(0) = 2 * 3 = 6   Г(1, 0) = 2 * 9 * 5 = 90

Определение 17.10.

Пусть $\alpha q_i j \beta -$ машинное слово.

Тогда $\gamma(\alpha q_i j \beta) = 2^2 \cdot 3^i \cdot 5^j \cdot 7^{\gamma(\alpha)} \cdot 11^{\gamma(\beta)}$ будет номером машинного слова.

два во второй говорит что это именно нумерация машинного слова

Предложение 17.11.

Пусть $A_2 = \{\gamma(S) \mid S -$ машинное слово$\}$ - множество номеров машинных слов. Тогда χ_{A_2} - **прф**.

функция, вычисляющая является ли номер номером машинного слова является прф

Определение 17.12.

Пусть есть команда $K_{ij} = (q_i j \to q_s l \triangle)$.

Тогда номером команды называется число $\gamma(K_{ij}) = p^{\delta}_{c(i,j)}$,

где $\delta = 2^s \cdot 3^l \cdot 5^{\xi}$,

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{если } \triangle = \varnothing \\ 2, & \text{если } \triangle = R \\ 3, & \text{если } \triangle = L \end{cases}$$

и $c(i, j) -$ канторовская нумерация.

Определение 9.12. *Функция* $c(x, y) = \left[\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}\right]$, $c\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, *называется* ***канторовской нумерующей функцией*** (***канторовской нумерацией***).

Определение 17.13.

для программы двойка в 3 степени индикатор

Пусть есть МТ с программой П.

Тогда $\gamma(\Pi) = 2^3 \cdot 3^n \cdot \prod \gamma(K_{ij})$, где $n = \max\{i \mid q_i$ входит в $\Pi\}$, $K_{ij} \in \Pi$.

i - кол-во состояний

не важно в каком порядке записаны команды!
на номер программы влияет кол-во состояний и номера команд

Предложение 17.14.

Пусть $A_3 = \{\gamma(\Pi) \mid \Pi$ - программа МТ$\}$. Тогда χ_{A_3} - **прф**.

Определение 17.15.

вернётся номер машинного слова, которое получится на следующем шаге

$$t(x,y) = \begin{cases} \gamma(\alpha' q_l a \beta'), \ x = \gamma(\Pi), \ y = \gamma(\alpha q_i j \beta) \text{ и выполнено след.:} \\ \qquad \Pi\colon \ \alpha q_i j \beta \xrightarrow{1 \text{ шаг}} \alpha' q_l a \beta' \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$$

x - номер программы МТ

y - номер текущего состояния (машинного слова)

$$T(x,y,z,t) = \begin{cases} 1, \ x = \gamma(\Pi), \ y = \gamma(\alpha q_i j \beta) \text{ и} \\ \qquad \Pi\colon \ \alpha q_i j \beta \xrightarrow{\leq t \text{ шагов}} \alpha' q_0 0 1^{z+1} 0 \beta' \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$$

x - номер программы МТ

y - номер текущего состояния (машинного слова)

z - результат, t - максимальное кол-во шагов до результата

"тест"

$$T^n(a, x_1, \ldots, x_n, z, t) = \begin{cases} 1, \ a = \gamma(\Pi) \text{ и} \\ \qquad \Pi\colon \ q_1 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_n+1} 0 \xrightarrow{\leq t \text{ шагов}} \alpha q_0 0 1^{z+1} 0 \beta \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}$$

n - кол-во аргументов

a - номер программы МТ

x_1,...,x_n - входные аргументы

z - результат

t - максимальное кол-во шагов

miro

Теорема 17.18. (о нормальной форме Клине) Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ вычислима на машине Тьюринга. Тогда существует примитивно рекурсивная функция $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ такая, что $f(x_1, \ldots, x_n) = l(\mu y\ [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0])$.

тут g - ПРФ а f представима в виде ЧРФ

а потом берём от минимального такого "y" левую часть, которая и была результатом который мы подавали в T^n

Доказательство. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ вычислима на машине Тьюринга при помощи программы П. Пусть $a = \gamma(\Pi)$ – номер данной программы.

$$l(m) = m \dot- \left[\frac{\left[\frac{[\sqrt{8m+1}]+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{[\sqrt{8m+1}] \dot- 1}{2}\right]}{2}\right]$$

$$r(m) = \left[\frac{[\sqrt{8m+1}]+1}{2}\right] \dot- (l(m)+1).$$

Определим функцию $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ следующим образом:

$$g(x_1, \ldots, x_n, y) = |T^n(a, x_1, \ldots, x_n, l(y), r(y)) - 1|.$$

то есть чтобы g = 0 программа с номером "a" должна вычислять l(y) за r(y) шагов

Очевидно, что функция $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ является примитивно рекурсивной.

по предыдущему предложению

Покажем, что $f(x_1, \ldots, x_n) = l(\mu y\ [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0])$.

c) ***Оператор минимизации.*** *Рассмотрим функцию* $g(x_1, \ldots, x_n, y)$. *Пусть выполнено:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} y, & \begin{array}{c} g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0, \\ \forall i < y \ \ g(x_1, \ldots, x_n, i) \text{ определена} \\ \text{и } \forall i < y \ \ g(x_1, \ldots, x_n, i) \neq 0; \end{array} \\ \text{не определена,} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда говорят, что функция f *получена из функции* g *применением* ***оператора минимизации****. Это обозначается так:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y[g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0].$$

Рассмотрим 2 варианта:

1) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ не определена. Тогда для любого $y \in \mathbb{N}$ имеем $T^n(a, x_1, \ldots, x_n, l(y), r(y)) \neq 1$. Следовательно, для любого $y \in \mathbb{N}$ имеем $g(x_1, \ldots, x_n, y) \neq 0$. А значит функция $l(\mu y\ [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0])$ не определена.

опреатор минимизации от g не определен, и левая часть от него тоже

miro

$$l(m) = m \dot- \left[\frac{\left[\frac{[\sqrt{8m+1}]+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{[\sqrt{8m+1}] \dot- 1}{2}\right]}{2}\right]$$

$$r(m) = \left[\frac{[\sqrt{8m+1}]+1}{2}\right] \dot- (l(m)+1).$$

c(x , y) = c(l(c(x, y)), r (c (x, y)))

2) Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = z$. Тогда найдется такое $t \in \mathbb{N}$, что $\Pi\colon\ q_1 0 1^{x_1+1} 0 \ldots 0 1^{x_n+1} 0 \underset{t \text{ шагов}}{\Longrightarrow} \alpha q_0 0 1^{z+1} \beta$. Положим $y_0 = c(z,t)$. Тогда $l(y_0) = z$, и $r(y_0) = t$. Следовательно $T^n(a, x_1, \ldots, x_n, l(y_0), r(y_0)) = 1$.

запомнили результат и кол-во шагов

это просто по построению, мы уже знаем что z считается за t

теперь, докажем что оператор минимизации вернет именно y_0

Для любого $t_1 \geq t$ определим $y_1 = c(z, t_1)$. Очевидно, что $T^n(a, x_1, \ldots, x_n, l(y_1), r(y_1)) = 1$.

минимальный "y" - это минимальное число за которое проходится "тест"

Если $t_1 > t$, то $y_1 > y_0$ т.к канторовская нумерация возрастает по обоим аргументам

Если для y_1 имеем $T^n(a, x_1, \ldots, x_n, l(y_1), r(y_1)) = 1$, то $l(y_1) = z$ и $t_1 = r(y_1) \geq t$. Следовательно, если $y_1 = c(z, t_1)$, то $y_1 \geq y_0$. А значит $\mu y\ [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0] = y_0$. От сюда получаем $l(\mu y\ [g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]) = l(y_0) = z = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема 17.18 доказана.

miro

Следствие 17.19.

Пусть f - **чрф**. Тогда $\exists$ **прф** $g(\overline{x}, y)$ такая, что $f(x_1, \ldots, x_n) = l(\mu y[g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0])$.

Теорема 17.5.
Класс **ЧРФ** $\subseteq$ **ПВТ**,

Доказательство:

по теореме о нормальной форме Клини

Пусть f - **чрф** $\Rightarrow$ f - **пвт** $\Rightarrow$ f - **вт** $\Rightarrow$ существует такая примитивно рекурсивная функция g, что $f(x_1, \ldots, x_n) = l(\mu y[g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0])$.

Следствие доказано.

Следствие 17.20.(основная теорема о вычислимых функциях)
ЧРФ = **ВТ** = **ПВТ**.

Доказательство:

по теореме о нормальной форме Клини

ЧРФ $\subseteq$ **ПВТ**, **ПВТ** $\subseteq$ **ВТ** $\subseteq$ **ЧРФ** $\Rightarrow$ **ЧРФ** = **ВТ** = **ПВТ**.

Теорема 17.5.
Класс **ЧРФ** $\subseteq$ **ПВТ**,

Следствие доказано.

Общерекурсивными функциями (орф) *называются всюду определённые частично-рекурсивные функции.*

Следствие 17.21.

Любая **орф** функция может быть получена из простейших функций применением оператора суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации так, чтобы на каждом шаге получались только **орф**, т.е. можем строить их, не выходя за пределы этого класса.

Доказательство: упражнение.

если f - всюду определена, то и минимизация от g всюду определена, так как g - вообще ПРФ

Следствие 17.22.

Класс **ОРФ** совпадает с классом всюду определенных функций, вычислимых на машине Тьюринга, который совпадает с классом всюду определенных функций, правильно вычислимых на машине Тьюринга.

Доказательство: *т.к. если изначально берём f - орф то и g для неё будет орф*

Д.Е. Пальчунов: Дальше, исходя из предыдущего, из того, что мы шли совершенно разными путями, где один путь - это аналог логического исчисления, когда есть аксиомы и правила вывода, так же есть простейшие функции, операторы, а другой путь - это механизмы МТ, которая является примитивным аналогом компьютера, в итоге оказалось, что все это одно и тоже. Отсюда сформулирован следующий тезис.

Теорема 17.23.(Тезис Чёрча)

Любая интуитивно вычислимая функция является частично рекурсивной.

его нельзя доказать, нет орпределения интуитивно вычислимой функции

тут подразумеваем что интуитивно вычислима == есть алгоритм вычисления

он говорит о том, что мы не сможем придумать компьютер который вычисляет что-то больше ЧРФ

формулировка не математическая, докзать нельзя, возможно, можно уточнить и там уже смотреть ;)

miro