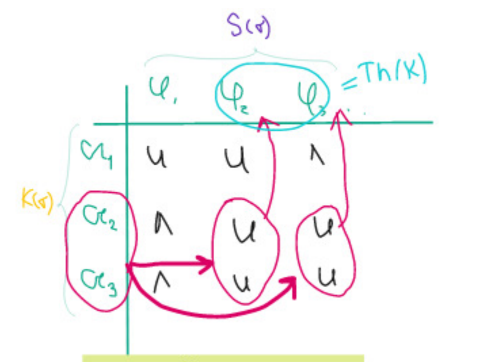
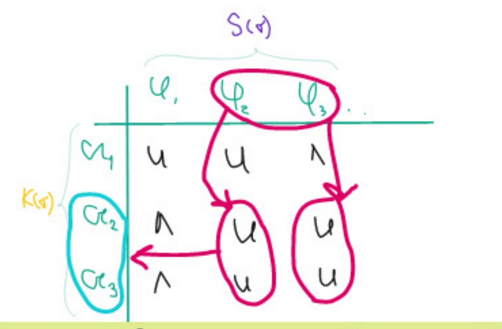
Аксиоматизируемые классы

Определение 21.1.

Рассмотрим $K_\sigma = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ – модель сигнатуры $\sigma\}$. Пусть класс моделей $K \subseteq K_\sigma$. Тогда **теорией класса** называется множество предложений $Th(K) = \{\varphi \in S(\sigma) \mid \forall \mathfrak{A} \in K\colon \mathfrak{A} \vDash \varphi\}$. *теория - максимальное мн-во аксиом*



тут по K ищем теорию



тут по предложениям ищем K то есть K(Г)

Определение 21.2.

Пусть $\Gamma \subseteq S(\sigma)$. Тогда $K(\Gamma) = \{\mathfrak{A} \in K_\sigma \mid \forall \varphi \in \Gamma\colon \mathfrak{A} \vDash \varphi\}$.

Определение 21.3.

Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Класс K называется **аксиоматизируемым**, если $\exists \Gamma \subseteq S(\sigma)$ такое, что $K = K(\Gamma)$. В нашем случае Γ есть множество аксиом.

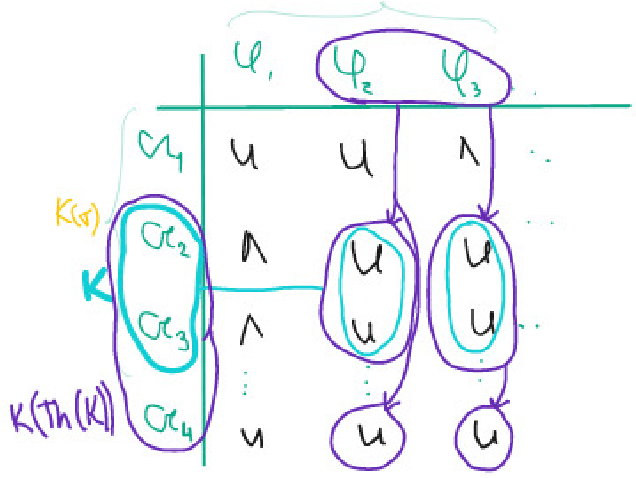
Предложение 21.4.

Пусть $K \subseteq K_\sigma$. Тогда $K \subseteq K(Th(K))$.

Доказательство:

Пусть $\mathfrak{A} \in K$. Возьмем некоторую формулу $\psi \in Th(K) \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi \Rightarrow$ $\Rightarrow \mathfrak{A} \vDash Th(K)$(по определению теории). Раз так, то и по определению 21.2. получаем $\mathfrak{A} \in K(Th(K))$.

Предложение доказано.



теперь предположим мы нашли теорию по моделям

$K = \{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3\} \to Th(K) = \{\varphi_2, \varphi_3, \dots\}$

и теперь по предложениямиз теории ищем модели, могут найтись ещё какие-то

такая которой в К не было

$K(Th(K)) = \{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_n\}$

если K - акс. то K = K(Th(K)) = K(Г)

Предложение 21.5.

Пусть $K = K(\Gamma)$. Тогда $\Gamma \subseteq Th(K(\Gamma))$.

Доказательство:

Рассмотрим $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \forall \mathfrak{A} \in K(\Gamma) : \mathfrak{A} \vDash \varphi \Rightarrow \varphi \in Th(K(\Gamma))$.

Предложение доказано.

Предложение 21.6.

Пусть $K \subseteq K_\sigma$.

Класс K является <u>аксиоматизируемым</u> $\Leftrightarrow K = K(Th(K))$.

Доказательство:

$\boxed{(\Rightarrow)}$ Пусть K - аксиоматизируем $\Rightarrow \exists \Gamma \in S(\sigma) : K = K(\Gamma) \Rightarrow$
$\Rightarrow K \subseteq K(Th(K))$.

Осталось доказать вложенность в обратную сторону.

Пусть $\mathfrak{A} \in K(Th(K)) \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash Th(K)$. Соответственно, $\Gamma \subseteq Th(K) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \in K(\Gamma) \Rightarrow \mathfrak{A} \in K$. Отсюда выходит, что $K(Th(K)) \subseteq K \Rightarrow$
$\Rightarrow K = K(Th(K))$.

$\boxed{(\Leftarrow)}$ Пусть $K = K(Th(K))$, тогда берем $\Gamma := Th(K)$. $\Gamma \subseteq S(\sigma) \Rightarrow$
$\Rightarrow K$ - аксиоматизируем.

Предложение доказано.

Следствие 21.7.

Для любого аксиоматизируемого класса K существует наибольшее по включению множество аксиом. Это множество совпадает с $Th(K)$.

Предложение 21.8.

Пусть класс K - аксиоматизируем, и $\mathfrak{A} \in K$. Если $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B} \in K$, т.е. аксиоматизируемый класс замкнут относительно элементарной эквивалентности.

$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Leftrightarrow Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$

Доказательство:

Т.к. $K = K(\Gamma)$, $\mathfrak{A} \in K \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{B} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{B} \in K(\Gamma)$.

$\forall \varphi \in S(\sigma)\ \mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$

Предложение доказано.

Предложение 21.9. *соответствие Галуа (Гульнара сказала)*

Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq S(\sigma)$ и $K_1, K_2 \subseteq K_\sigma$. Тогда:

а) Если $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \Rightarrow K(\Gamma_2) \subseteq K(\Gamma_1)$; *неформальный смысл: чем меньше "требований", тем больше моделей под него подходит*

б) Если $K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow Th(K_2) \subseteq Th(K_1)$. *при увеличении числа моделей число общих свойств уменьшается*

Доказательство:

а) Пусть $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$. Пусть $\mathfrak{A} \in K(\Gamma_2) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_2 \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_1 \Rightarrow \mathfrak{A} \in K(\Gamma_1)$.

б) Пусть $K_1 \subseteq K_2$. Пусть $\varphi \in Th(K_2) \Rightarrow K_2 \models \varphi \Rightarrow K_1 \models \varphi \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi \in Th(K_1)$.

Предложение 21.10.

Множество предложений $\Gamma = Th(K(\Gamma)) \Leftrightarrow \Gamma$ является теорией.

Доказательство:

$\boxed{(\Rightarrow)}$ Очевидно.

$\boxed{(\Leftarrow)}$ Пусть Γ - теория и $\Gamma \subseteq Th(K(\Gamma))$. Предположим, что $\Gamma \neq Th(K(\Gamma)) \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists \varphi$: $\varphi \in Th(K(\Gamma))$ и $\varphi \notin \Gamma$. Т.к. $\varphi \notin \Gamma \Rightarrow \Gamma \nvdash \varphi \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ - непротиворечиво $\Rightarrow \exists \mathfrak{A}$: $\mathfrak{A} \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Следовательно, $\mathfrak{A} \vDash \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \in K(\Gamma)$. Но так же $\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \nvDash \varphi \Rightarrow \varphi \notin Th(K(\Gamma))$, откуда получаем противоречие с предположением в начале. Предложение доказано.

Замечание 21.10. В общем случае не верно, что

a) $K = K(Th(K))$;

b) $\Gamma = Th(K(\Gamma))$.

по теорме о нестандартной арифметике натуральных чисел

Доказательство. *a)* Пусть $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}; \cdot, +, 0, 1 \rangle$ и пусть $K = \{\mathfrak{N}\}$. Существует модель $\mathfrak{M}$ такая, что $\mathfrak{M} \vDash Th(\mathfrak{N})$ и $\|\mathfrak{M}\|$ более чем счетная. Следовательно, $\mathfrak{M} \ncong \mathfrak{N}$. А значит $\mathfrak{M} \notin K$.

С другой стороны, так как $\mathfrak{M} \vDash Th(\mathfrak{N}) = Th(K)$, то $\mathfrak{M} \in K(Th(K))$. Следовательно, $\mathfrak{M} \in K(Th(K) \setminus K$, т.е. $K \neq K(Th(K))$.

b) Пусть $\Gamma = \emptyset$. Тогда $K(\Gamma) = K_\sigma$. Следовательно,

$Th(K(\Gamma)) = Th(K_\sigma) = \{\varphi \in S(\sigma) |\ \varphi -$ тождествено истино$\} \neq \emptyset$. Таким образом, мы получили, что $\Gamma \neq Th(K(\Gamma))$.

Следствие 21.11. Не каждый класс моделей аксиоматизируем.

пример - класс конечный групп, или конечных множеств

Доказательство: упражнение.

$K_\infty \overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}} \{\mathfrak{A} \in K(\sigma) \mid \mathfrak{A} \vDash \Gamma\}$ $\quad$ $K_\infty = K(\underline{\underline{\Gamma}})$

$\Gamma = \{\varphi_n \mid n \in N\}$ $\quad$ $\shortparallel$ $K(\Gamma)$ $\quad$ $\exists\, \Gamma \subseteq S(\sigma)$

$\varphi_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n \underset{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}{\&} (x_i \neq x_j)$ $\quad$ $\exists a_1, \ldots, a_n -$ разл

$n \geq 2 -$ т.л.

$\{\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_k}\}$

$\geq n_1 \quad \geq n_k$

$m = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$

$\|\mathfrak{A}\| \geq m$

$\mathfrak{A} \vDash \Gamma_A \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \Gamma_0$

Предложение 21.12. $\Gamma = Th(\ K(\Gamma))$ тогда и только тогда, когда Γ является теорией.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Очевидно.

($\Leftarrow$) Пусть Γ является теорией. Очевидно, что $\Gamma \subseteq Th(\ K(\Gamma))$. Допустим, что $\Gamma \neq Th(\ K(\Gamma))$. Тогда найдется такое предложение $\varphi \in S(\sigma)$, что $\varphi \in Th(\ K(\Gamma))$ и $\varphi \notin \Gamma$. Так как $\Gamma -$ теория, то $\Gamma \nvdash \varphi$. Следовательно, множество предложений $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} -$ непротиворечиво. А значит, по Теореме о существовании модели, найдется такая модель $\mathfrak{A} \in K_\sigma$, что $\mathfrak{A} \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Следовательно, с одной стороны, так как $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$, то $\mathfrak{A} \in K(\Gamma)$. И, с другой стороны, так как $\mathfrak{A} \vDash \neg\varphi$, то $\mathfrak{A} \nvDash \varphi$. Значит, $\varphi \notin Th(K(\Gamma))$. Таким образом, мы пришли к противоречию. Следовательно, $\Gamma = Th(\ K(\Gamma))$.

Предложение 21.12 доказано.

Следствие 21.13. Отображения $K \to Th(K)$ и $\Gamma \to K(\Gamma) -$ взаимно обратные, т.е. устанавливающие взаимно однозначное соответствие между аксиоматизируемыми классами и теориями.

K = K(Th(K))

Γ= Th(K(Γ))

Доказательство: упражнение.

miro

Определение 21.14. Класс K называется ***конечно аксиоматизируемым***, если существует конечное множество предложений Γ такое, что $K = K(\Gamma)$.

Замечание 21.15. Класс K является конечно аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда существует предложение $\varphi \in S(\sigma)$ такое, что

$K = K(\{\varphi\})$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ и $K = K(\Gamma)$. Положим $\varphi = (\psi_1 \& \dots \& \psi_n)$. Тогда $K = K(\{\varphi\})$.

($\Leftarrow$) Очевидно.

Замечание 21.15 доказано.

Предложение 21.16. Если $K = K(\{\varphi\})$, то $\overline{K} = K_\sigma \setminus K = K(\{\neg\varphi\})$.

Доказательство.

$\overline{K} = K_\sigma \setminus K = \{\mathfrak{A} \in K_\sigma | \mathfrak{A} \notin K\} = \{\mathfrak{A} \in K_\sigma | \mathfrak{A} \nvDash \varphi\} = \{\mathfrak{A} \in K_\sigma | \mathfrak{A} \vDash \neg\varphi\} = K(\{\neg\varphi\})$.

Предложение 21.16 доказано.

Следствие 21.17. Класс моделей K конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда класс моделей $\overline{K}$ конечно аксиоматизируем.

Доказательство: упражнение.

Теорема 21.14.

Класс K конечно аксиоматизируем $\Leftrightarrow K, \overline{K}$ просто аксиоматизируемы.

Доказательство:

$\boxed{(\Rightarrow)}$ Если класс K конечно аксиоматизируем, то по 21.13 класс $\overline{K}$ тоже конечно аксиоматизируем. Следовательно, классы K и $\overline{K}$ аксиоматизируемы.

$\boxed{(\Leftarrow)}$ Пусть K и $\overline{K}$ аксиоматизируемы $\Rightarrow \exists \Gamma, \triangle \subseteq S(\sigma)$: $K = K(\Gamma)$, $\overline{K} = K(\triangle)$. Рассмотрим объединение $\Gamma \cup \triangle$. Оно может быть противоречивым или непротиворечивым.

Случай 1: $\Gamma \cup \triangle$ непротиворечиво $\Rightarrow \exists \mathfrak{A}$: $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \triangle$.

Т.к. $\mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \in K$.

Но т.к. $\mathfrak{A} \models \triangle \Rightarrow \mathfrak{A} \in \overline{K}$. Получаем противоречие!($K \cap \overline{K} = \varnothing$)

Случай 2: $\Gamma \cup \triangle$ противоречиво $\Rightarrow \exists \Gamma_0, \triangle_0$ - конечные, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma, \triangle_0 \subseteq \triangle$ такие, что секвенция $\Gamma_0, \triangle_0 \vdash$ доказуема. Покажем, что $K = K(\Gamma_0)$.

$\Gamma_0 \subseteq \Gamma \Rightarrow K(\Gamma) \subseteq K(\Gamma_0)$

по опр.

Возьмём $\mathfrak{A} \in K = K(\Gamma) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_0 \Rightarrow K \subseteq K(\Gamma_0)$.

Теперь возьмём $\mathfrak{A} \in K(\Gamma_0) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma_0$. Допустим, что $\mathfrak{A} \notin K \Rightarrow$ т.к либо истинно, либо ложно $\Rightarrow \mathfrak{A} \in \overline{K} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \triangle$(т.к. $\overline{K} = K(\triangle)) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \triangle_0 \Rightarrow \mathfrak{A} \models \triangle_0 \cup \Gamma_0$, чего быть не может(т.к. секвенция $\Gamma_0, \triangle_0 \vdash$ доказуема). Пришли к противоречию!

а значит для любой модели и любого означивания будет хоть одна модель кт. на этом мн-ве ложна

Отсюда выходит, что $\mathfrak{A} \in K \Rightarrow K(\Gamma_0) \subseteq K \Rightarrow K = K(\Gamma_0)$. Аналогично доказываем случай $K = K(\triangle_0)$.

Теорема доказана.