ТОСМ. Начало.

15.1

$\Gamma \subseteq F(\sigma)$, $\varphi \in F(\sigma)$

а) $\Gamma \vdash \varphi$: $\exists\, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma : \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ – док-ма

б) $\Gamma \vdash$ $\quad \exists\, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma : \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ – док

в) $\Gamma \nvdash$ $\quad \forall\, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ недок.

$\Gamma \subseteq S(\sigma)$

г) Γ – теория, если Г дедуктивно замкнуто, то есть $\forall \varphi \in S(\sigma) \left(\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma \right)$

д) Γ – полно, если $\forall \varphi \in S(\sigma) \quad \varphi \in \Gamma$ или $\neg \varphi \in \Gamma$

miro

15.2

T — теория сигнатуры сигма, тогда

1) $\forall \varphi \in S(\sigma) \quad \varphi \in T \Leftrightarrow T \vdash \varphi$

2) $\sigma \subseteq \sigma_1$, $\sigma \neq \sigma_1 \Rightarrow T$ – не теория σ_1

$\triangle$ 1) $(\Rightarrow)$ $\varphi \in T$, $\varphi \vdash \varphi$ - док. $\Rightarrow T \vdash \varphi$

$(\Leftarrow)$ $T \vdash \varphi$, T - теор. $\Rightarrow \varphi \in T$

miro

2) $\sigma \subseteq \sigma_1$, $\sigma \neq \sigma_1 \Rightarrow \exists q \in \sigma_1 \setminus \sigma$

а) q -- константа

по правилу вывода расширение

$\vdash (q = q)$ - док. $\Rightarrow T \vdash (q = q)$

Но $(q = q) \notin T$ т.к. q не из σ а T - теория именно σ.

$\Rightarrow$ T - не теор. σ_1

б) q – предикат

Пусть $\varphi = \exists x (q(x))$

$\vdash (\varphi \vee \neg \varphi) \Rightarrow T \vdash (\varphi \vee \neg \varphi)$

Но $(\varphi \vee \neg \varphi) \notin T$, т.к. $\varphi \notin T$, т.к. $q \notin T$

(потому что опять же q принадлежит σ_1 и не принадлежит σ, а T теория σ)

$\Rightarrow$ T - не теор σ_1

в) $q = f^n$, Let $\varphi = \forall x (q(\bar{x}) = q(\bar{x}))$

$\vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$, но $\varphi \notin T$

$\Rightarrow$ T - не теор σ_1 $\blacktriangledown$

Предложение 15.3.

Непротиворечивое, полное множество предложений является теорией, т.е. если $T \subseteq S(\sigma)$, T - полное, $T \nvdash$, то T - теория.

$\triangle$ Пусть T - не теория $\Rightarrow \exists \varphi \in S(\sigma) : T \vdash \varphi, \varphi \notin T \Rightarrow$

$\Rightarrow \neg\varphi \in T$.

$T \vdash \varphi \Rightarrow \exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T : \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ - док.

Возьмем это утверждение и аксиому, тогда по 10 правилу вывода:

(1) *аксиома* $\quad \dfrac{\neg\varphi \vdash \neg\varphi;\ \overline{\varphi} \vdash \varphi}{\overline{\varphi}, \neg\varphi \vdash} \quad$ *доказуема* (2)

доказуема

Но по условию T непротиворечиво, что значит $\forall \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash$ - недок.

а у нас доказуема $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\varphi \vdash$.

противоречие => T - теория ∇

15.4

$$Th(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in S(\sigma) \mid \mathfrak{A} \vDash \varphi\}$$

15.5 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$:

$Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$, т.е. $\forall \varphi \in S(\sigma)$ $\mathfrak{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi$

15.6

Замечание 15.6.

Элементарная теория модели $\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ - полная непротиворечивая теория σ.

1) $\varphi \notin Th(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{A} \nvDash \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi \in Th(\mathfrak{A})$

2) $Th(\mathfrak{A}) \vdash \quad \Rightarrow \exists \overline{\varphi} \subset Th(\mathfrak{A})$: $\overline{\varphi} \vdash$ - док. $\Rightarrow$

$\overline{\varphi} \vdash$ - т.и. $\Rightarrow \exists \varphi_i \in Th(\mathfrak{A})$: $\mathfrak{A} \nvDash \varphi_i$

но!

$\Downarrow$

$\mathfrak{A} \vDash \varphi_i$

Получили противоречие, значит теория непротиворечива $Th(\mathfrak{A}) \nvdash$

miro

15.7 $T \subseteq S(\sigma)$, T - теория σ. Тогда

а) $T \vdash$;

б) $\forall \varphi \in S(\sigma)$ $\quad \varphi \in T$ (т.е $T = S(\sigma)$)

в) $\exists \varphi \in S(\sigma)$ $\quad \varphi, \neg\varphi \in T$

$\triangle$ $(а \Rightarrow б)$ $T \vdash \Rightarrow \exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in T: \ \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash$ - док.

Тогда $\forall \varphi \in S(\sigma)$ $\dfrac{\dfrac{\overline{\varphi} \vdash}{\overline{\varphi}, \neg\varphi \vdash}}{\overline{\varphi} \vdash \varphi}$ доказуема $\Rightarrow$ $\overset{\in T}{\overline{\varphi}} \vdash \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T \Rightarrow T = S(\sigma)$

$(б \Rightarrow в)$ $\begin{cases} \varphi \in S(\sigma) \\ \neg\varphi \in S(\sigma) \end{cases} \Rightarrow \varphi, \neg\varphi \in T$

$(в \Rightarrow а)$ $\varphi \in S(\sigma): \varphi, \neg\varphi \in T \Rightarrow$ $\dfrac{\varphi \vdash \varphi; \ \neg\varphi \vdash \neg\varphi}{\varphi, \neg\varphi \vdash}(10)$ $\Rightarrow$ $\overset{\in T}{\varphi, \neg\varphi} \vdash$ - док

$\Downarrow$

$T \vdash$. $\triangledown$

15.8 **Следствие 15.8.**

Пусть T - теория сигнатуры σ, $T \vdash \Leftrightarrow T = S(\sigma)$.

$(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$ $T = S(\sigma) \Rightarrow \varphi, \neg\varphi \in T$

miro

Теорема 15.9.

Пусть A, B - множества, B - бесконечно, $\|A\| \leqslant \|B\|$. Тогда $\|A \cup B\| = \|B\|$.

Без доказательства.

Теорема 15.10.

Пусть A - бесконечное, $A^* = \bigcup\limits_{n \in N} A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A,\ n \in N\}$. Тогда $\|A^*\| = \|A\|$.

Теорема 15.11.

Для любого множества A существует такой кардинал α, что $\|A\| = \|\alpha\|$.

Теорема 15.12.

$\forall A, B$ выполняется: $\|A\| \leqslant \|B\|$ или $\|B\| \leqslant \|A\|$.

Доказательство:

Пусть существуют кардиналы α, β такие, что $\|A\| = \|\alpha\|$, $\|B\| = \|\beta\|$. Но т.к. α, β - кардиналы, выполняется $\alpha \leqslant \beta$ или $\beta \leqslant \alpha$. Тогда выполняется и условие: $\|A\| \leqslant \|B\|$ или $\|B\| \leqslant \|A\|$.

Теорема доказана.

Предложение 15.13.

Если α - бесконечный кардинал, то α - предельный ординал.

Доказательство:

Докажем от противного. Пусть α - бесконечный кардинал и непредельный ординал, т.е. $\alpha = \beta + 1 \Rightarrow \beta$ - бесконечный ординал и $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Но тогда по теореме 15.9. выходит, что $\|\alpha\| = \|\beta\|$, откуда следует $\beta < \alpha$. Получаем противоречие, т.к. предположили, что α - непредельный ординал $\Rightarrow \alpha$ - предельный ординал.

Предложение доказано.

Определение 7.22. ***Ординальными числами*** (***ординалами***) *называются*:

$$\alpha_0 = 0 = \emptyset;$$
$$\alpha_1 = 1 = \{\emptyset\};$$
$$\alpha_2 = 2 = \{\emptyset;\ \{\emptyset\}\};$$
$$\alpha_3 = 3 = \{\emptyset;\ \{\emptyset\};\{\emptyset;\ \{\emptyset\}\}\};$$
$$\ldots$$
$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \cup \{\alpha_n\};$$
$$\omega = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \ldots\};$$
$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \ldots, \omega\};$$
$$2\omega = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, \omega + n, \ldots\};$$
$$\ldots$$
$$\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}.$$

Определение 7.23. *α называется **непредельным** ординалом, если существует ординал β такой, что $\alpha = \beta + 1$.*

*α называется **предельным** ординалом, если не существует ординала β такого, что $\alpha = \beta + 1$.*

Определение 7.26. *Ординал α называется **кардиналом**, если для любого ординала $\beta < \alpha$ имеет место $\| \beta \| \neq \| \alpha \|$.*

15.14

$\mathfrak{A} \in K(\sigma)$, X – мн-во пер.

$\gamma : X \to |\mathfrak{A}|$ – означивание переменных из X на $\mathfrak{A}$

- $FV(\Gamma) = \{x \mid \exists \varphi \in \Gamma : x \in FV(\varphi)\}$ множество свободных переменных множества формул Г

  где $\Gamma \subseteq F(\sigma)$

Пусть $FV(\Gamma) \subseteq X$. Тогда

- $\mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$ (Г истинно на модели при означивании гамма) Если $\forall \varphi \in \Gamma \quad \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$
- Г выполнимо на модели A-красивое если $\exists \gamma : FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}| \quad : \mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$

  то есть если существует такое означивание что гамма истинно на модели.

- Г выполнимо (имеет модель) если существует модель на которой Г выполнимо

  $\exists \mathfrak{A} \in K(\sigma(\Gamma))$ и $\exists \gamma : FV(\Gamma) \to |\mathfrak{A}| \quad : \mathfrak{A} \models \Gamma[\gamma]$