Понятие о вероятностном пространстве общего вида. Аксиоматическое задание вероятности, основные свойства вероятности.

Def Вероятностное пространство состоит из тройки $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} \rangle$

- Ω – пр-во элем. исходов
- $\mathcal{F}$ – множество подмножеств Ω ($|\mathcal{F}| = 2^{\Omega}$)
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ – вероятность.

Аксиомы вероятности:

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2) Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ – попарно незав. ($\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \varnothing$), то

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Из аксиом вытекают свойства:

1) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

$$A_i = \begin{cases} A, & i = 1 \\ \varnothing, & i > 1 \end{cases}$$

попарно несовместные

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)$$

$$\mathbb{P}(A \cup \varnothing \cup \ldots \cup \varnothing) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\varnothing) + \ldots + \mathbb{P}(\varnothing)$$

$$\cancel{\mathbb{P}(A)} = \cancel{\mathbb{P}(A)} + \mathbb{P}(\varnothing) + \ldots + \mathbb{P}(\varnothing)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

2) $A_1, \dots, A_n$ – попарно несовм. $\Rightarrow$ $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

3) $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1$

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

4) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$

$$\Omega = A \cup \bar{A} \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \dots$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$$

$$1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(A)$$

5) $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

$$B = A \cup B \setminus A$$
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B \setminus A)}_{\geqslant 0}$$

6) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$$(A \cup B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

7) Непрерывность вероятности.

- Если $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$, то $P(\bigcup\limits_i A_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{P}(A_n)$

$$\bigcup_i A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots$$

$$P(\bigcup_i A_i) = \underline{P}(A_1) + \underline{P}(A_2 \setminus A_1) + \underline{P}(A_3 \setminus A_2) + \dots$$

$$\underline{P}(\bigcup_i A_i) = \lim_{n\to\infty} \left[\underline{P}(A_1) + \underline{P}(A_2 \setminus A_1) + \dots + \underline{P}(A_n \setminus A_{n-1}) \right] = \lim_{n\to\infty} \underline{P}(A_n)$$

- Если $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ то $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i)$

$$\overline{A}_1 \subset \overline{A}_2 \subset \overline{A}_3 \subset \dots$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\overline{A}_n) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i); \quad \lim_{n\to\infty} \underline{P}(A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} \underline{P}(\overline{A}_n) = 1 - P(\bigcup^{\infty} \overline{A}_i) =$$

$$= 1 - P(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}) = P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$$