# Домашнее задание 9

Дз.

Д39. Группа 19202. Номера: ~~9.1 + nY1->?~~ 9.7, ~~9.3~~, 9.4, 9.10, 9.11

9.1. Доказать, что $Y_1$ сходится к нулю с вероятностью единица при $n \to \infty$ для последовательности случайных величин $Y_1 = Y_1(n) = \min(X_1, \ldots, X_n)$, введенных в задаче 5.12 (указание: см. задачу 9.8).

1)

$$F_{X_1} = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1-\left(1-\frac{t}{a}\right)^n, & t \in (0, a] \\ 1, & t > a \end{cases} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

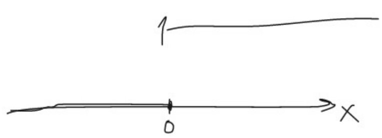
$Y_1 \Rightarrow 0$ по св-ву 4' $Y_1 \xrightarrow{P} 0$

$F_x = P(x < t)$

$F_x(0) = P(x<0) = 0$

$a \to +0$

$F_x(a) = 1$





2) $n \cdot Y_1 \to ?$

$$F_{nY_1}(t) = P(nY_1 < t) = P\left(Y_1 < \frac{t}{n}\right) = F_{Y_1}\left(\frac{t}{n}\right) =$$

$$F_{Y_1}\left(\frac{t}{n}\right) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1-\left(1-\frac{t}{na}\right)^n, & t \in (0, a n] \\ 1, & t > an \end{cases} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1-e^{-\frac{t}{a}}, & t \in (0, a \cdot n] \\ 1, & t > a \cdot n \end{cases} = E_{\frac{1}{a}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} (1+tu)^{\frac{1}{u}} = e^t$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^x = e^n$

$n \cdot Y_1 \Rightarrow nY_1 \in E_{\frac{1}{a}}$

9.3

9.3. Студент получает на экзамене 5 с вероятностью 0,2, 4 с вероятностью 0,4, 3 с вероятностью 0,3 и 2 с вероятностью 0,1. За время обучения он сдает 100 экзаменов. Найти пределы, в которых с вероятностью 0,95 лежит средний балл.

$5 - 0{,}2$

$4 - 0{,}4$

$3 - 0{,}3$

$2 - 0{,}1$

Цпт. $\mathring{S}_n = \dfrac{S_n - n \cdot \mathbb{E}X_1}{\sqrt{n \mathbb{D}X_1}} \Rightarrow N_{0,1}$

$\mathbb{E}X = 0{,}2 + 0{,}9 + 1{,}6 + 1 = 2{,}8 + 0{,}9 = 3{,}7$

$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 14{,}5 - 13{,}69 = 0{,}81$

$\mathbb{E}X^2 = 0{,}4 + 2{,}7 + 6{,}4 + 5 = 7{,}7 + 6{,}8 = 14{,}5$



$$P(t_1 \le \mathring{S}_n \le t_2) = \Phi_{0,1}(t_2) - \Phi_{0,1}(t_1)$$

$$P\left(t_1 \le \frac{S_n - \overbrace{100 \cdot 3{,}7}^{370}}{\underbrace{\sqrt{100 \cdot 0{,}81}}_{9}} \le t_2\right) =$$

$$P\left(-1,96 < \frac{S_n - 370}{9} < 1,96\right) \simeq 0,95$$

$$P\left(3,7 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,81}{100}} \le \frac{S_n}{100} \le 3,7 + 1,96\sqrt{\frac{0,81}{100}}\right) \simeq 0,95$$

$$P\left(3,52 \le \frac{S_n}{100} \le 3,88\right) \simeq 0,95$$



9.4. Урожайность куста картофеля задается следующим распределением:

| Урожай в кг | 0 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Вероятность | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,2 |

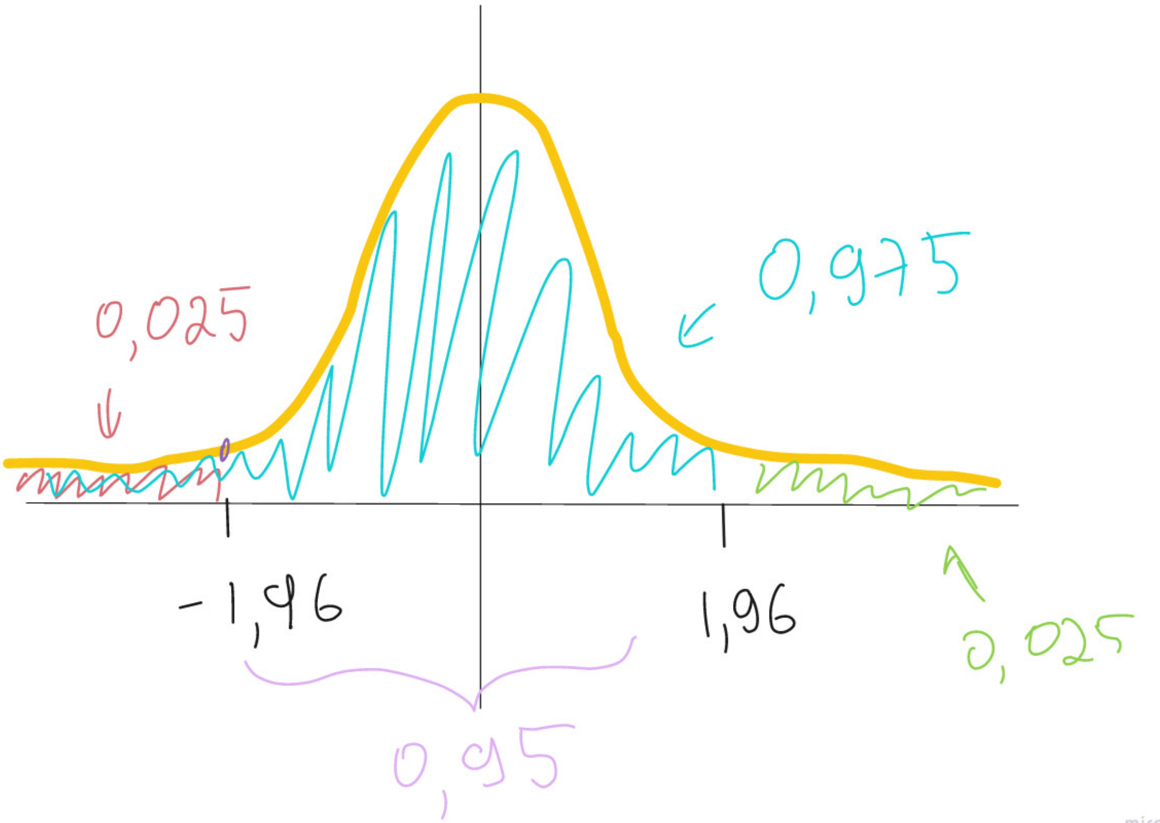
На участке высажено 900 кустов. В каких пределах с вероятностью 0,95 будет находиться урожай? Какое наименьшее число кустов нужно посадить, чтобы с вероятностью не менее 0,975 урожай был не менее тонны?

$$\mathbb{E}X = 0,2 + 0,3 + 0,6 + 0,5 = 1,6$$

$$\mathbb{E}X^2 = 0,2 + 0,45 + 1,2 + 1,25 = 1,4 + 1,7 = 3,1$$

$$\mathbb{D}X = 3,1 - 2,56 = 0,54$$

$$P\left(-1,96 \le \frac{S_n - 900 \cdot 1,6}{\underbrace{\sqrt{900 \cdot 0,54}}_{22}} \le 1,96\right) \approx 0,95$$




$$P(1440 - 43{,}2 \le S_n \le 1440 + 43{,}2) \approx 0{,}95$$

$$P(1396{,}8 \le S_n \le 1483{,}2) \simeq 0{,}95$$

б) $P(S_n \geqslant 1000) \geqslant 0{,}975$

$$1 - P(S_n \le 1000) = 1 - \Phi\left(\frac{1000 - n \cdot 1{,}6}{\sqrt{n} \cdot 0{,}54}\right) =$$

$$= \Phi\left(-\frac{1000 - 1{,}6n}{\sqrt{0{,}54 n}}\right) \geqslant 0{,}975$$

**Центральная предельная теорема** (ЦПТ). *Пусть $X_1, X_2 \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$. Обозначим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $a = \mathbf{E}X_1$, $\sigma^2 = \mathbf{D}X_1$, и пусть $\sigma^2 > 0$. Тогда для любого $y$*

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < y\right) = F_{\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}}(y) \to \Phi_{0,1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}\, dt$$

*при $n \to \infty$.*

$$-1000 + 1{,}6n \geqslant 1{,}96 \cdot \sqrt{0{,}54 n}$$

$$1{,}6t^2 - 1{,}96 \cdot \sqrt{0{,}54}\, t - 1000 \le 0$$

$$D = 1{,}96^2 \cdot 0{,}54 + 4 \cdot 1{,}6 \cdot 1000 \approx 6402$$

$$\sqrt{n} = \frac{1{,}96\sqrt{0{,}54} + 80}{2 \cdot 1{,}6} \approx 25{,}44$$

$$n \approx 647$$

miro

9.7. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены по закону Пуассона с параметром $\lambda$. К чему сходится с вероятностью единица последовательность

$$\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} - \left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right)^2 \; ? \quad \to \quad \mathbb{E}X_1^2 - (\mathbb{E}X_1)^2 = \mathbb{D}X_1 = \lambda$$

ЗБЧ: $\dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mathbb{E}X_1$

miro

9.10. Для лица, дожившего до двадцатилетнего возраста, вероятность смерти на 21-м году жизни равна 0,006. Застрахована группа 10000 лиц 20-летнего возраста, причем каждый застрахованный внес 1200 рублей страховых взносов за год. В случае смерти застрахованного родственникам выплачивается 100000 рублей. Какова вероятность того, что:

а) к концу года страховое учреждение окажется в убытке;

б) его доход превысит 6000000 рублей?

$$n \cdot p = 10000 \cdot 0{,}006 = 60$$

$S_n$ - кол-во умерших

а) $P\left(S_n > \dfrac{1200 \cdot 10000}{100\,000}\right) = 1 - P(S_n < 120) =$

$$= 1 - \Phi_{0,1}\left(\frac{120 - 60}{\sqrt{60 \cdot 0{,}994}}\right) = 1 - \Phi_{0,1}\left(\frac{60}{\sqrt{59{,}54}}\right) = 1 - \Phi_{0,1}(7.77) \approx 0$$

miro

б) $P(S_n < 60) = P\left(\frac{S_n - EX_1 \cdot n}{\sqrt{DX \cdot n}} < \frac{60-60}{\sqrt{60 \cdot 0,994}}\right) = \Phi_{0,1}(0) = 0,5$

Какой минимальный страховой взнос следует учредить, чтобы в тех же условиях с вероятностью 0,95 доход был не менее 4000000 рублей?

$S_n$ - кол-во умерших

$$\Phi_{0,1}\left(\frac{S_n - 60}{\sqrt{60 \cdot 0,994}}\right) = \Phi_{0,1}(1,65) = 0,95$$

$$S_n - 60 = 1,65 \cdot \sqrt{60 \cdot 0,994}$$

miro

$$S_n = 1,65 \cdot \sqrt{60 \cdot 0,994} + 60 \approx 73$$

$X$ - взнос

$$X \cdot 1\cancel{0000} - 73 \cdot 100\cancel{.000} \geqslant 4.000\cancel{.000}$$

$$X \geqslant 400 + 730 = 1130$$

miro

9.11. Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сверла укладываются в коробки по 100 шт. Чему равна вероятность того, что в коробке не окажется бракованных сверл? Какое наименьшее количество сверл нужно класть в коробку для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, в ней было не менее 100 исправных?

брак: $p = 0{,}02$

испр.: $1-p: 0{,}98$

1) По теореме Пуассона: $P(S_n=0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!}$ $\quad n \cdot p_n \to \lambda$

$100 \cdot 0{,}02 \to \lambda = 2$

$P(S_n=0) = e^{-2}$

2) $n = 100 + x$ $\quad (100+x)\, 0{,}02 \to \lambda$

$$P(S_n \le x) = \sum_{k=0}^{x} P(S_n=k) = e^{-2}\left(1+2+\frac{4}{2!}+\dots+\frac{2^x}{x!}\right) \geqslant 0{,}9$$

$$\left(1+2+\frac{4}{2!}+\dots+\frac{2^x}{x!}\right) \geqslant 0{,}9 \cdot e^2 = 6{,}65$$

$x \geqslant 4$ Как минимум ещё 4.