Универсальные вычислимые функции

Определение 18.1.

Пусть K — множество частичных функций вида $g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Функция $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ называется **универсальной для класса** K, если:

а) $\forall m \in \mathbb{N}:\ f(m, x_1, \ldots, x_n) \in K$;

б) $\forall g(x_1, \ldots, x_n) \in K\ \exists m \in \mathbb{N}:\ g(x_1, \ldots, x_n) = f(m, x_1, \ldots, x_n)$,

Если объединить два условия, то выходит, что класс $K = \{f(m, x_1, \ldots, x_n) \mid m \in \mathbb{N}\}$. Или же, иными словами, функция f осуществляет нумерацию всех функций класса K.

кортеж х-ов это аргументы функции, а м - номер этой программы
пример C-runtime то есть мы пишем программу, её исполняет дргуая программа, для этого она получает адрес(у нас это номер) программы и аргументы, и возвращает значение

Пример:

K = {Sum(x, y), Mul(x, y)}

f(m, x, y) = (m%2)*Sum(x, y) + (1 - m%2)*Mul(x, y)

f(5, x, y) = 5%2*Sum(x, y) + (1 - 5%2)*Mul(x, y) = Sum(x, y)
f(12, x, y) = 12%2*Sum(x, y) + (1 - 12%2)*Mul(x, y) = Mul(x, y)

Замечание 18.2.

Класс K имеет универсальную функцию $\Leftrightarrow$ класс конечен или счётен.

Доказательство: упражнение.

Следствие 18.3. *т.к. m - натуральное, мы не сможем пересчитать континуальное число функций*

Если класс K континуален, то он не имеет универсальной функции.

Доказательство: упражнение.

б) $\forall g(x_1, \ldots, x_n) \in K$ $\exists m \in \mathbb{N}$ $f(m, \bar{x}) = g(\bar{x})$. $K = \{f(m, x_1, \ldots, x_n) \mid m \in \mathbb{N}\}$.
Замечание 2. Класс K имеет универсальную функцию $\Leftrightarrow$ когда он счётен или конечен,
т.е. имеется отображение "на" такое: $\lambda x_0\, f(x_0, x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} K$
$(\Rightarrow)$ $m \in \mathbb{N} \xrightarrow{\lambda x_0 f(x_0, \bar{x})} f(m, x_1, \ldots, x_n) \in K \Rightarrow \|K\| \leq \|\mathbb{N}\| \Rightarrow$ K-конечно или счётно.
$(\Leftarrow)$ K-конечно или счётно, то $\exists$ универсальная функция.
Следствие 2. Если класс K-континуален, то K не имеет универсальной функции.

Следствие 18.4.

Класс всех n—местных частичных функций не имеет универсальной функции. *этот класс континуален, (может принимать действительные аргументы?)*

Доказательство: упражнение.

частичные функции == все функции. можно доказать, что всех функций континуум. например, характеристические функции для всех подмножеств натуральных чисел (а таких подмножеств несчетное количество). тогда функций континуум => их нельзя пронумеровать => нет универсальных функций

Следствие 18.5.

Классы **ПРФ, ОРФ, ЧРФ** имеют универсальные функции.

Доказательство:

Покажем, что классы счетные, $\textbf{ПРФ} \subseteq \textbf{ОРФ} \subseteq \textbf{ЧРФ} = \textbf{ПВТ}$.

Пусть A – алфавит, на котором записываются программы машин Тьюринга. Тогда любая программа машины Тьюринга *следует из того, что алфавит счётен*

$$\Pi \in A^* = \{(a_1, \ldots, a_m) \mid m \in \mathbb{N}, a_i \in A\}$$

Множество A^* – счётно, значит счётно и множество всевозможных программ машин Тьюринга. Следовательно, счётен и класс ПВТ.

Поэтому классы ПРФ, ОРФ и ЧРФ счётны.

Следствие 18.5 доказано.

Предложение 7.5.

1. $\|\mathbb{N}^*\| = \omega$.

2. Если $\|A\| = \omega$, *то* $\|A^*\| = \omega$ *(множество всех конечных слов счётного алфавита счётно).*

Доказательство: упражнение.

Следствие 7.6.

1. Для любого языка программирования множество всех программ счётно.

2. Множество всех функций, вычислимых на машине Тьюринга, счётно.

3. Множество всех частично рекурсивных функций счётно.

4. Множество многочленов с целыми коэффициентами счётно.

5. Множество всех алгебраических чисел счётно.

Доказательство: упражнение.

Замечание 18.6. Пусть $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — взаимно-однозначное отображение, а $f(x_0, \dots, x_n)$ – универсальная функция для класса K. Тогда функция $g(x_0, \dots, x_n) = f\big(h(x_0, \dots, x_n)\big)$ также является универсальной для класса K.

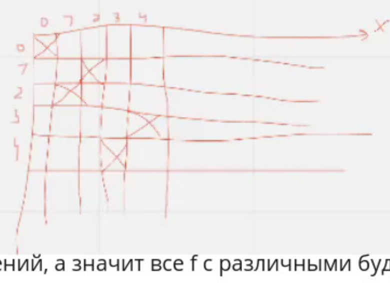
|N -> N| >= континуум

|N -> N| >= |N -> {0, 1}|
N^N >= 2^N

|N -> N| <= континуум

|N -> N|

Каждая функция - это множество пар, а именно: {(x, y) | y = f(x)}



То есть множество наших функций - это множество подмножеств точек на натуральной плоскости (N^2). Мы значем, что |N| = |N^2|. А мощность мн-ва всех подмножеств N равна континууму. Но мы имеем некоторые ограничения на наши подмножества (1 - это функция, а значит, для одного аргумента может быть только одно значение. 2 - наша функция - биекция, значит, что для одного значения может быть только аргумент). То есть, наше мн-во по мощности меньше либо равно мощности континуума.

По теореме Кантора-Бернштейна, из <= и >= следует равенство.

N -> N континуум отображений, а значит все f с различными будут универсальными для K

Теорема 18.8.

а) Не существует примитивно рекурсивной функции, универсальной для класса ПРФ^n; прф от н аргументов

б) Не существует общерекурсивной функции, универсальной для класса ОРФ^n;

в) Не существует частично рекурсивной функции, универсальной для класса ОРФ^n.

Доказательство.

а) Будем доказывать от противного. Допустим, что существует прф $f(x_0, \dots, x_n)$, являющаяся универсальной для ПРФ^n. Рассмотрим функцию $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, x_1, \dots, x_n) + 1$. Очевидно, что она является прф. Следовательно, найдется такое число $m \in \mathbb{N}$, что $g(x_1, \dots, x_n) = f(m, x_1, \dots, x_n)$. Тогда получим

$$f(m, \dots, m) + 1 = g(m, \dots, m) = f(m, \dots, m).$$

Пришли к противоречию.

б) Доказывается аналогично.

Определение 18.1.

Пусть K— множество частичных функций вида $g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Функция $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ называется **универсальной для класса** K, если:

а) $\forall m \in \mathbb{N}: \ f(m, x_1, \dots, x_n) \in K$;

б) $\forall g(x_1, \dots, x_n) \in K \ \exists m \in \mathbb{N}: \ g(x_1, \dots, x_n) = f(m, x_1, \dots, x_n)$,

Если объединить два условия, то выходит, что класс

$K = \{f(m, x_1, \dots, x_n) \mid m \in \mathbb{N}\}$. Или же, иными словами, функция f осуществляет нумерацию всех функций класса K.

в) Будем доказывать от противного. Допустим, что существует чрф $f(x_0, \dots, x_n)$, являющаяся универсальной для ОРФ^n. Рассмотрим функцию $f(m_0,\ x_1, \dots, x_n)$, где $m_0 \in \mathbb{N}$. По определению универсальной функции, она принадлежит классу ОРФ^n. Следовательно, для любых $m_0, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ функция $f(m_0, m_1, \dots, m_n)$ определена. А, значит, $f \in$ ОРФ$^{n+1}$.

то есть эта ЧРФ веда будет ОРФ, а мы доказали в Б что для ОРФ_н нет универс. ОРФ

Мы пришли к противоречию с тем, что не существует орф, универсальной для класса ОРФ^n.

Теорема 18.8 доказана.

Теорема 18.9.

Класс K $n-$местных **чрф** имеет универсальную **чрф**.

Доказательство:

x_0 - номер программы

Рассмотрим $f(x_0, \dots, x_n) = l(\mu y[\,|T^n(x_0, \dots, x_n, l(y), r(y)) - 1| = 0])$. Очевидно, что $f-$ **чрф**. Покажем, что f универсальна для **ЧРФ**^{n}:

а) Пусть $m \in \mathbb{N} \Rightarrow f(m, x_1, \dots, x_n)-$ **чрф**; по Основной Теореме о Вычислимых Функциях, g - ЧРФ, значит она ПВТ

б) Рассмотрим $g(x_1, \dots, x_n) \in$ **ЧРФ**^{n}. Пусть программа П вычисляет g, m - номер П. по теореме о нормальной форме Клини

Тогда $g(\overline{x}) = l(\mu y[\,|T^n(m, \overline{x}, l(y), r(y)) - 1| = 0])$, т.е. $g(\overline{x}) = f(m, \overline{x})$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

та же самая но от двух аргументо

Определение 18.10.

Обозначим $\varphi^2(x_0, x_1) = l(\mu y[\,|T^1(x_0, x_1, l(y), r(y)) - 1| = 0])$.

Определение 9.16.

1. $c_2(x, y) = c(x, y)$.
2. $c_1^2(m) = l(m)$.
3. $c_2^2(m) = r(m)$.
4. $c_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = c(c_n(x_1, \dots, x_n), x_{n+1})$.
5. $c_k^{n+1}(m) = c_k^n(l(m)),\ k \le n$.
6. $c_{n+1}^{n+1}(m) = r(m)$.

Следствие 18.11. частный случай теоремы 18.9

$\varphi^2(x_0, x_1)$ - **чрф**^{2} универсальная для класса **ЧРФ**^{1}.

Доказательство: упражнение.

Замечание 9.18.

а. *Для любых* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ *если* $c_n(x_1, \dots, x_n) = m$, *то*

$$c_k^n(m) = x_k,\ k \le n.$$

б. *Для любого* $m \in \mathbb{N}$ *выполнено*

$$c_n(c_1^n(m), \dots, c_n^n(m)) = m.$$

Определение 18.12.

Обозначим $\varphi^{n+1}(x_0, \dots, x_n) = \varphi^2(x_0, c^n(x_1, \dots, x_n))$.

$C_3(x,y,z) = c(c(x,y),z)$

$C_2^3(C_3(x,y,z)) = C_2^2(l(C_3(x,y,z))) = r(l(C_3(x,y,z))) = r(l(c(c(x,y),z))) = r(c(x,y)) =$

$X = C_4(1,7,3,5)$

$C_4^1 = 1$

$C_4^2 = 7$

$C_4^3 = 3$

$C_4^4 = 5$

Предложение 18.13.

φ^{n+1} - **чрф**, универсальная для **ЧРФ**^{n}.

Доказательство:

Пусть φ^{n+1} - **чрф**, поэтому: так как у неё н аргументов, м уже передали, оно задано (константа)

а) Если $m \in \mathbb{N}$, то $\varphi^{n+1}(m, x_1, \dots, x_n) \in$ **ЧРФ**^{n};

б) Пусть $g(x_1, \dots, x_n) \in$ **ЧРФ**^{n}.

Тогда рассмотрим $h(x) = g(c_1^n(x), \dots, c_n^n(x))$. h - ЧРФ т.к. ci - ПРФ g - ЧРФ

Очевидно, что $h(x) \in$ **ЧРФ**$^1 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : h(x) = \varphi^2(m, x)$.

Тогда $\varphi^{n+1}(m, x_1, \dots, x_n) = \varphi^2(m, c(x_1, \dots, x_n)) = h(c(x_1, \dots, x_n)) = g(x_1, \dots, x_n)$.

м - номер h(x)

Предложение доказано.

Определение 18.1.

Пусть $K-$ множество частичных функций вида $g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Функция $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ называется **универсальной для класса** K, если:

а) $\forall m \in \mathbb{N}:\ f(m, x_1, \dots, x_n) \in K$;

б) $\forall g(x_1, \dots, x_n) \in K\ \exists m \in \mathbb{N}:\ g(x_1, \dots, x_n) = f(m, x_1, \dots, x_n)$,

Если объединить два условия, то выходит, что класс $K = \{f(m, x_1, \dots, x_n) \mid m \in \mathbb{N}\}$. Или же, иными словами, функция f осуществляет нумерацию всех функций класса K.

$h(c(x_1, \dots, x_n)) = g(C_n^1(c(x_1 \dots x_n)), \dots, C_n^n(c(x_1, \dots x_n))) =$

$= g(x_1, \dots, x_n)$

а. *Для любых* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ *если* $c_n(x_1, \dots, x_n) = m$, *то*

$$c_k^n(m) = x_k,\ k \le n.$$

Определение 18.14. клиниевская нумерция выражается через канторовскую

Следующие функции называются **клиниевскими скобками:**

$[x, y] = c\ (l(x),\ c(r(x), y))$. она выглядит так, потому что взаимно-однозначно сопоставляет одно число двум дргуим и имеет полезные свойства кт мы дальше увидим

Тогда

$[x_1, \dots, x_{n+1}] = [[x_1, \dots, x_n], x_{n+1}]$; проверяется непосредственно

$[k]_{21} = c(l(k), l(r(k)))$;

$[k]_{22} = r(r(k))$;

$[k]_{n,1} = [[k]_{21}]_{n-1,1}$;

...

$[k]_{n,n-1} = [[k]_{21}]_{n-1,n-1}$;

$[k]_{n,n} = [k]_{2,2}$.

Предложение 18.15.

Функции из Определения 18.14. являются **прф**.

Доказательство: упражнение.

Предложение 18.16.

а) $[[x_1, \dots, x_n]]_{n,l} = x_l$;

б) $[[k]_{n,1}, \dots, [k]_{n,n}] = k$;

в) $[\ ] : N^n \to N$- взаимно-однозначное отображение

Доказательство: упражнение.

аналогия с :

Замечание 9.18.

а. *Для любых* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$ *если* $c_n(x_1, \dots, x_n) = m$, *то*

$$c_k^n(m) = x_k,\ k \le n.$$

б. Для любого $m \in \mathbb{N}$ *выполнено*

$$c_n(c_1^n(m), \dots, c_n^n(m)) = m.$$

miro

Предложение 18.17.

а) $[c(x_0, x_1), x_2] = c(x_0, c(x_1, x_2))$;

б) $c^n(c(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{n+1}) = c^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})$;

в) $[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_m], x_{m+1}, \dots, x_n]$.

Доказательство: упражнение.

Определение 18.18.

Следующие функции называются **клиниевскими универсальными функциями**: $\boxed{[x, y] = c\ (l(x),\ c(r(x), y))}$.

$K^2(x_0, x_1) = \varphi^2(l(x_0), c(r(x_0), x_1))$;

$K^{n+1}(x_0, \dots, x_n) = K^n([x_0, x_1], x_2, \dots, x_n)$.

Значит $[x, y]$, $[x]_{21}$ и $[x]_{22}$ – *нумерационные функции* для пар натуральных чисел. Их определенные преимущества перед канторовскими нумерационными функциями $c(x, y)$, $l(x)$ и $r(x)$ будут видны позже.

Далее стандартным приемом индукцией по n определяются *нумерационные функции* для наборов длины n натуральных чисел

$$[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, x_3, \dots x_{n-1}], x_n],$$
$$[x]_{n1} = [[x]_{21}]_{n-1,1},\ [x]_{n2} = [[x]_{21}]_{n-1,2},$$
$$\dots$$
$$[x]_{n,n-1} = [[x]_{21}]_{n-1,n-1},\ [x]_{n,n} = [x]_{22}.$$

Индукцией по n устанавливается справедливость равенств

$$[[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]]_{ni} = x_i, \quad [[x]_{n1}, [x]_{n2}, \dots, [x]_{nn}] = x.$$

В дальнейшем часто будет использоваться равенство

$$[x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n] = [[x_1, x_2, x_3, \dots, x_m], x_{m+1}, \dots, x_n],$$

справедливость которого сразу следует из определения функции

$$[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n].$$

miro

Предложение 18.19.

$K^n(c(x_0, x_1), x_2, \dots, x_n) = \varphi^{n+1}(x_0, \dots, x_n)$.

Без доказательства.

Теорема 18.20. Функция K^{n+1} является универсальной для класса ЧРФ^n.

Доказательство. $K^{n+1}(x_0, \dots, x_n) = K^2([x_0, \dots, x_{n-1}], x_n)$ а K2 есть фи2 которое явл ЧРФ

а) Так как $K^{n+1} \in$ ЧРФ$^{n+1}$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ функция $K^{n+1}(m, x_1, \dots, x_n) \in$ ЧРФ^n. опять же м фиксируется поэтому аргументов н а не н+1

б) Пусть $g(x_1, \dots, x_n) \in$ ЧРФ^n. Введем фиктивный аргумент и рассмотрим функцию $f(y, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) = 0 \cdot y + g(x_1, \dots, x_n)$. Очевидно, что $f(y, x_1, \dots, x_n) \in$ ЧРФ$^{n+1}$. Следовательно, найдется такое число $a \in \mathbb{N}$, что $f(y, x_1, \dots, x_n) = \varphi^{n+2}(a, y, x_1, \dots, x_n)$. Тогда

для ЧРФн+1 существует универсальная фи_н+2 (по 18.13)

$K^{n+1}(c(a, y), x_1, \dots, x_n) = \varphi^{n+2}(a, y, x_1, \dots, x_n) = f(y, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$.

а - номер функции f

Следовательно, для любого числа $k \in \mathbb{N}$, положив $m_k = c(a, k)$, получим $K^{n+1}(m_k, x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n)$. И для $m_0 = c(a, 0)$ получим $g(x_1, \dots, x_n) = K^{n+1}(m_0, x_1, \dots, x_n)$.

т.е для КАЖДОЙ функции сущ бесконечное число клиниевских номеров

т.к. к - это игрек, а он фиктивный (зануляется)

Определение 18.1.

Пусть K– множество частичных функций вида $g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Функция $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ называется **универсальной для класса** K, если:

а) $\forall m \in \mathbb{N}:\ f(m, x_1, \dots, x_n) \in K$;

б) $\forall g(x_1, \dots, x_n) \in K\ \exists m \in \mathbb{N}:\ g(x_1, \dots, x_n) = f(m, x_1, \dots, x_n)$,

Если объединить два условия, то выходит, что класс

$K = \{f(m, x_1, \dots, x_n) \mid m \in \mathbb{N}\}$. Или же, иными словами, функция f осуществляет нумерацию всех функций класса K.

miro

Следствие 18.21. Любая частично рекурсивная функция имеет бесконечно много клиниевских номеров: для любой функции $g \in \text{ЧРФ}^n$ существует бесконечно много номеров m_k, таких что

$$g(x_1, \dots, x_n) = K^{n+1}(m_k, x_1, \dots, x_n).$$

Доказательство: упражнение.

простая аналогия:

f(x, y, z, t) = x + y + z + t

S(x, y) = x + y

g(x, y, z) = x + y + z

f(x, y, z, t) = g(S(x, y), z, t)

Теорема 18.22. (s–m–n теорема) Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ найдется примитивно рекурсивная функция $S_m^n(x_0, \dots, x_n)$ такая, что

$$K^{n+m+1}(x_0, \dots, x_{n+m}) = K^{m+1}(S_m^n(x_0, \dots, x_n), x_{n+1}, \dots, x_{n+m}).$$

Доказательство. Положим $S_m^n(x_0, \dots, x_n) = [x_0, \dots, x_n]$. Тогда

18.18

$K^{n+1}(x_0, \dots, x_n) = K^n([x_0, x_1], x_2, \dots, x_n).$

$$K^{n+m+1}(x_0, \dots, x_{n+m}) = K^{n+m}([x_0, x_1], \dots, x_{n+m}) =$$

$$= K^{n+m-1}(\,[\,[x_0, x_1], x_2], \dots x_{n+m}\,) = \underset{n\ раз}{\cdots} =$$

$$= K^{m+1}(\,[\dots[x_0, x_1], x_2], \dots, x_n], x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) =$$

по определению

$[x_1, \dots, x_{n+1}] = [[x_1, \dots, x_n], x_{n+1}];$

$$= K^{m+1}([x_0, \dots, x_n], x_{n+1}, \dots, x_{n+m}).$$

miro

Теорема 18.22 доказана.

НЕФОРМАЛЬНО: то есть, пусть у нас есть какой-то преобразователь (напр. компилятор) который получает на вход один исходный код, на выход даёт другой, тогда, для любого "преобразователя" будет существовать такая программа, которая не измениться после работы этого преобразователя

Теорема 18.23.(о неподвижной точке)

Для любой **чрф**$^{n+1}$ $h(x_1, \dots, x_{n+1})$ существует **прф**^{n} $g(x_1, \dots, x_n)$ такая, что $K^2(h(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)), y) = K^2(g(x_1, \dots, x_n), y)$.

только в примере код, а у нас номер программы

h - перобразователь программ получает на вход номер программы и аргументы, на выход возвращвет новую программу, g - переданная программа

Доказательство:

параметры: K2(z, y, x1,...,xn), их н+2

Рассмотрим функцию $K^2(h(x_1, \dots, x_n, [z, z, x_1, \dots, x_n]), y) \in \text{ЧРФ}^{n+2}$. Тогда $\exists a \in \mathbb{N}$ такой, что $K^2(h(x_1, \dots, x_n, [z, z, x_1, \dots, x_n]), y) =$ $= K^{n+3}(a, z, x_1, \dots, x_n, y)$.

Теорема 18.20. Функция K^{n+1} является универсальной для класса ЧРФ^n.

Положим в качестве $g(x_1, \dots, x_n) = [a, a, x_1, \dots, x_n]$. Тогда

$K^2(h(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)), y) = K^2(h(x_1, \dots, x_n, [a, a, x_1, \dots, x_n]), y) =$

$= K^{n+3}(a, a, x_1, \dots, x_n, y) \overset{(s-m-n)\ \text{теор.}}{=\!=\!=} K^2([a, a, x_1, \dots, x_n], y) =$

$= K^2(g(x_1, \dots, x_n), y)$.

Теорема доказана.

miro

Определение 18.24.

Функция $æ(n) = K^2(n, x)$ называется **клиниевской нумерацией ЧРФ**^{1}, т.е. $æ : \mathbb{N} \to$ **ЧРФ**^{1}.

Следствие 18.25. *следстветие из теоремы о неподвижной точке*

$\forall h(x) \in$ **ЧРФ**^{1} $\exists n \in \mathbb{N}$ такая, что $æ(h(n)) = æ(n)$.

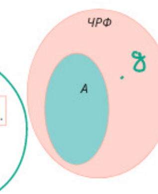
н - номер

miro

НЕФОРМАЛЬНО: имея номер функции мы не сможем определить какому классу функций она принадлежит (к какому подмножеству функция принадлежит) потому что по номеру ЧРФ можем сказать что она ЧРФ:))

Теорема 18.26 (Райса). Пусть множество $A \subseteq \text{ЧРФ}^1$ таково, что $A \neq \emptyset$ и $A \neq \text{ЧРФ}^1$. Тогда множество номеров $B = \{n \mid æ(n) \in A\}$ не рекурсивно, т.е. функция $\chi_B(x) = \begin{cases} 0, & x \notin B \\ 1, & x \in B \end{cases}$ не является частично рекурсивной.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Допустим, что $\chi_B(x)$ – частично рекурсивная функция. Так как *существуют ЧРФ и сущ их номера* $A \neq \emptyset$, то $B \neq \emptyset$, и, следовательно, найдется $a \in B$. Так как $A \neq \text{ЧРФ}^1$, то найдётся частично рекурсивная функция $\in$ ЧРФ $g \notin A$, пусть $g = æ(b)$. Следовательно, нашёлся номер $b \notin B$.



Рассмотрим функцию $f(x) = b\chi_B(x) + a\,\overline{sg}\,(\chi_B(x))$. По Следствию 18.25 теоремы о неподвижной точке найдется такое n, что $æ(n) = æ(f(n))$.

т.к. хи - ЧРФ $\forall h(x) \in \text{ЧРФ}^1\ \exists n \in \mathbb{N}$ такая, что $æ(h(n)) = æ(n)$.

Будет ли функция $æ(n)$ принадлежать множеству A?

*f = b*1 + a*0*

1) Если $æ(n) \in A$, то $n \in B$. Следовательно, $f(n) = b \notin B$. Тогда $æ(n) = æ(f(n)) = æ(b) \notin A$ – противоречие.

*f = b*0 + a*1 = a*

2) Если $æ(n) \notin A$, то $n \notin B$. Следовательно, $f(n) = a \in B$. Тогда $æ(n) = æ(f(n)) = æ(a) \in A$ – опять получили противоречие.

Отсюда следует, что $\chi_B(x)$ – не является частично рекурсивной функцией, т.е. множество номеров B не рекурсивно.