Разумова Д. гр. 533

BD_HW-3

$y_i = a_i x + \varepsilon_i \quad i=\overline{1,n}$

$E\varepsilon_i = 0, D\varepsilon_i = E\varepsilon_i^2 = \sigma^2$

a) Чтобы получить хорошую оценку $\hat{x}$ для x, нужно найти min величины $\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_i x)^2$.

$$K^2(x) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a_i x)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - 2y_i a_i x + a_i^2 x^2)$$

$$\frac{\partial K^2(x)}{\partial x} = -2\sum_{i=1}^{n} y_i a_i + 2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \hat{x} = \sum_{i=1}^{n} y_i a_i \Rightarrow \hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

b) Да, эта оценка явл. оптимальной, т.к. это МНК.

c) Эта оценка явл. несмещенной.

Δ: Для несмещенной оценки выполняется рав-во: $E\hat{x} = x$.

$$E\hat{x} = E\,\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = [y_i = a_i x + \varepsilon_i] =$$

(по условию)

$$= E\,\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 x + a_i \varepsilon_i)}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \frac{Ex\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{E\varepsilon_i}_{0}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} =$$

$$= \frac{Ex \sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = Ex = x \Rightarrow \boxed{E\hat{x} = x}$$

d) $D\hat{x}$ - ?

$$D\hat{x} = E(\hat{x} - x)^2 = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i x + \varepsilon_i)a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} - x\right)^2 =$$

$$= E\left(\frac{\cancel{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 x} + \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i - \cancel{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 x}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)^2 =$$

$$= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)^2 = E\left(\frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_i \varepsilon_i a_j \varepsilon_j}{\sum_{i,j=1}^{n} a_i^2 a_j^2}\right) =$$

$$= \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$\boxed{D\hat{x} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

NOTES

e) $\hat{\sigma}^2 - ?$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S^2(\hat{x})}{n-1}$$

$$S^2(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} y_i a_i \hat{x} + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \hat{x}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} y_i a_i \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \times \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_i y_i a_j y_j}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} +$$

$$+ \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_i y_i a_j y_j}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_i y_i a_j y_j}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}{n-1}}$$

f) $\widehat{D\hat{x}} - ?$

Например, $\widehat{D\hat{x}} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$

NOTES

g) $(y_1, a_1), \ldots, (y_n, a_n) \quad \underbrace{\quad}_{v} \quad i = \overline{1,n}$

$$D\hat{x} = \frac{\sigma^2}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}_{T}}, \quad \hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Следовательно, канонической информацией будет (T, v), где

$$T = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \quad v = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$$

h) $$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}, \quad \widehat{D\hat{x}} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2},$$

$$\hat{\sigma}^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right)^2}{n-1} \right)$$

В таком случае, кроме T и v, еще нужно добавить величины n и $S = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$. Тогда каноническая информация: (T, v, n, S).

i) обновление информации

Добавление (y_{n+1}, a_{n+1}):

$(T, v, S, n) \to (T + a_{n+1}^2, v + y_{n+1}a_{n+1}, S + y_{n+1}^2, n+1)$

г) Объединение информации.

$$\left.\begin{matrix}(T_1, v_1, S_1, n_1)\\(T_2, v_2, S_2, n_2)\end{matrix}\right\} \to \oplus (T_1 + T_2, v_1 + v_2, S_1 + S_2, n_1 + n_2)$$