Разумова Д. гр.533

BD_HW-4

① $y_1 = x_1 + x_2 + \nu_1$

$y_2 = x_1 - x_2 + \nu_2$

$y_3 = -x_1 + x_2 + \nu_3$

$E\nu_i = 0$; $D\nu_i = E\nu_i^2 = \sigma^2$, $i = 1, 2, 3$

a) $y = Ax + \nu$ $\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

$$S = D\nu = E \begin{pmatrix} \nu_1^2 & \nu_1\nu_2 & \nu_1\nu_3 \\ \nu_2\nu_1 & \nu_2^2 & \nu_2\nu_3 \\ \nu_3\nu_1 & \nu_3\nu_2 & \nu_3^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma^2 I_3$$

b) $Q = (A^* S^{-1} A)^{-1} \ominus$

NOTES

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} (\sigma^2 I_3)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} =$$

$$= \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D\hat{x}_1 = \frac{3\sigma^2}{8} = D\hat{x}_2 < \sigma^2$$

$$R = (A^* S^{-1} A)^{-1} A^* S^{-1} = Q A^* S^{-1}$$

$$R = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = Ry = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 - y_3 \\ 2y_1 - y_2 + y_3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$y_1 = x + \nu_1$$
$$y_2 = x + \nu_2$$

$$\nu_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_0, \ \nu_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_0$$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim (0, \sigma_1^2), \ \varepsilon_0 \sim (0, \sigma_0^2)$$

$$\sigma_0^2 + \sigma_1^2 = \sigma^2, \ r = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma_1^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}$$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $y = Ax + \nu \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

$$S = D\nu = E \begin{pmatrix} \nu_1^2 & \nu_1\nu_2 \\ \nu_2\nu_1 & \nu_2^2 \end{pmatrix} =$$

$$= E \begin{pmatrix} (\varepsilon_1+\varepsilon_0)^2 & (\varepsilon_1+\varepsilon_0)(\varepsilon_2+\varepsilon_0) \\ (\varepsilon_2+\varepsilon_0)(\varepsilon_1+\varepsilon_0) & (\varepsilon_2+\varepsilon_0)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2+\sigma_0^2 & \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 & \sigma_2^2+\sigma_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 & \sigma^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[r = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right] = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$S^{-1} = \frac{1}{\sigma^2(r^2-1)} \begin{pmatrix} -1 & r \\ r & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q = (A^* S^{-1} A)^{-1} = \sigma^2(r^2-1) \cdot$$

$$\times \left((1 \;\; 1) \begin{pmatrix} -1 & r \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{\sigma^2(r+1)}{2}$$

$$D\hat{x} = \frac{\sigma^2(r+1)}{2}$$

c) См. рис. НЮ4_1

Зависимость дисперсии $D\hat{x}$ от коэфф. корреляции r при $\sigma^2 = 1$

Из графика видно, что чем больше r, тем хуже оценка. Такое поведение объясняется тем, что чем больше r, тем измерения более зависимы друг от друга.

$$y_1 = x + \varepsilon_1 + \varepsilon_0 \qquad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_0^2$$

$$y_2 = x + \underbrace{\varepsilon_2}_{\sigma_1^2} + \underbrace{\varepsilon_0}_{\sigma_0^2} \qquad r = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}$$

• $r = 1 \Rightarrow \sigma_1^2 = 0 \Rightarrow$ $y_1 = x + \varepsilon_0$, $y_2 = x + \varepsilon_0$ – зависимые измерения

При уменьшении r зависимость уменьшается.

• $r = 0 \Rightarrow \sigma_0^2 = 0 \Rightarrow$

$y_1 = x + \varepsilon_1$, $y_2 = x + \varepsilon_2$ $\Rightarrow$ независимые измерения, точность повышается.

NOTES

③ $y_1 = x_1 + x_2 + \nu_1$

$y_2 = x_1 - x_2 + \nu_2$

$y_3 = -x_1 + x_2 + \nu_3$

$\nu_i = \varepsilon_i + \varepsilon_0,$

$\varepsilon_i \sim (0, \sigma_1^2), \ \varepsilon_0 \sim (0, \sigma_0^2);$

$\sigma_0^2 + \sigma_1^2 = \sigma^2;$

$r = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}; \quad i = 1, 2, 3$

a) $y = Ax + \nu \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$$

$$S = D\nu = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & r & r \\ r & 1 & r \\ r & r & 1 \end{pmatrix}$$

b) $S^{-1} = (\sigma^2(2r^2 - r - 1))^{-1} \begin{pmatrix} -r-1 & r & r \\ r & -r-1 & r \\ r & r & -r-1 \end{pmatrix}$

$Q = (A^* S^{-1} A)^{-1} = \sigma^2 (2r^2 - r - 1) \cdot$

$$\times \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r-1 & r & r \\ r & -r-1 & r \\ r & r & -r-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{\sigma^2 (1-r)}{8(r+1)} \begin{pmatrix} 5r+3 & 3r+1 \\ 3r+1 & 5r+3 \end{pmatrix}$$

$$D\hat{x}_1 = \frac{\sigma^2 (1-r)}{8(r+1)} (5r+3) = D\hat{x}_2 = D\hat{x}$$

c) см. рис. HW4_2

Зависимость дисперсии $D\hat{x}$ от коэфф. корреляции r при $\sigma^2 = 1$.

Из графика видно, что чем больше r, тем лучше оценка.

Два предельных случая:

- $r = 0 \Rightarrow$ измерения максимально зависимы друг от друга $\Rightarrow$ точность мала.
- $r = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + \varepsilon_0 \\ y_2 = x_1 - x_2 + \varepsilon_0 \\ y_3 = -x_1 + x_2 + \varepsilon_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1 - y_3}{2} \\ x_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ система решается точно, т.е. $D\hat{x} = 0$.

NOTES