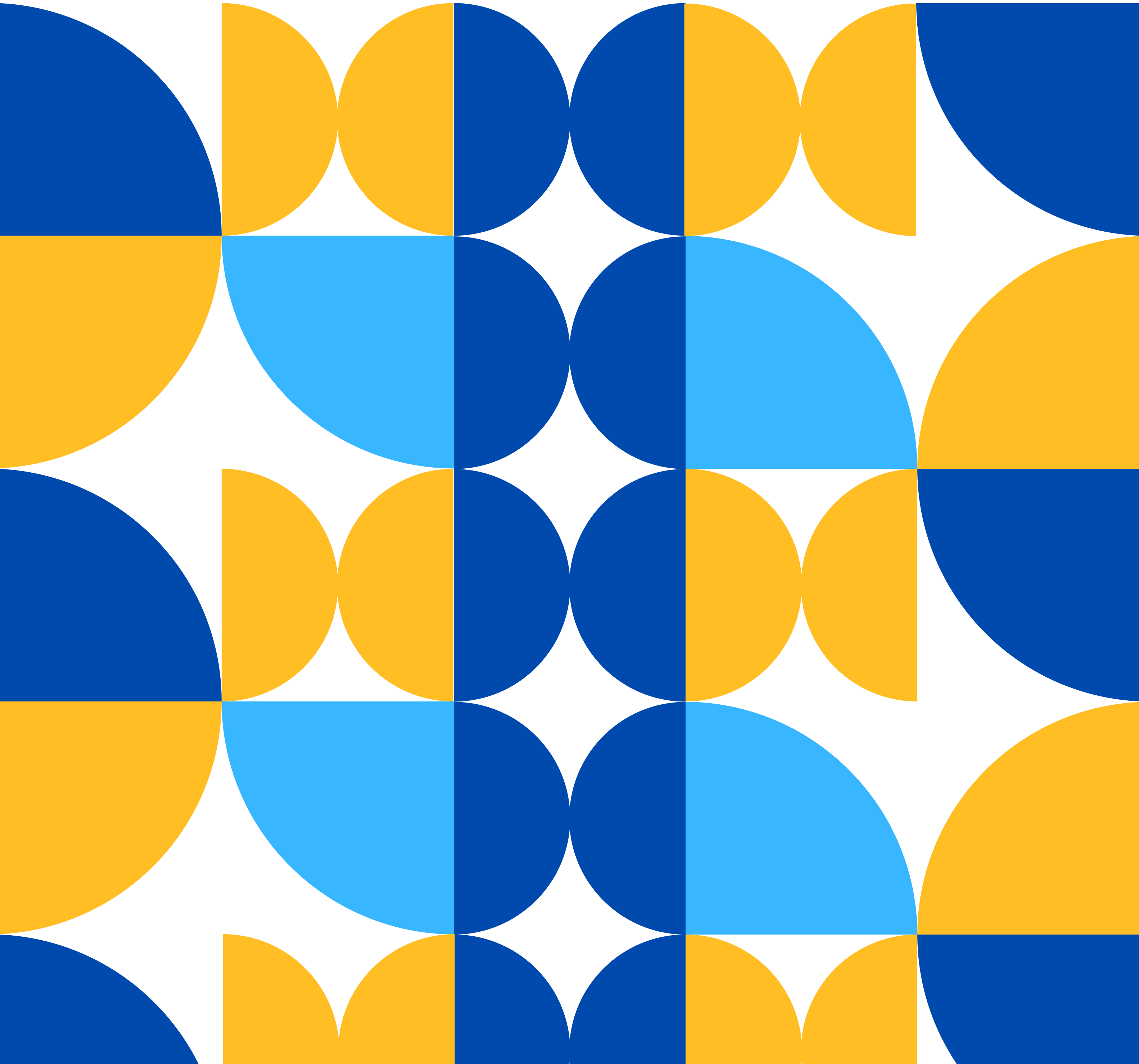
teoría de juegos e información

DARIEL AMADOR



Contents

Incertidumbre y decisiones personales

El supuesto fundamental de la teoría de juegos es que las personas son racionales. Provee un marco de referencia para la construcción de modelos rigurosos que permitan explicar la forma en que toman las decisiones los agentes racionales.
Todos los días se toman decisiones; algunas triviales y otras trascendentales.
En este curso se estudia la forma en la que los agentes **racionales** toman sus decisiones. Se utilizan los supuestos para modelar la interacción estratégica entre acciones, resultados y preferencias. Los problemas de decisión se estructuran a partir de:

- Conjunto de situaciones sobre las que se debe decidir
- Conjuntos de individuos (**jugadores**)
- Conjunto de acciones que puede tomar (**acciones**)
- Conjunto de posibles resultados para cada una de las acciones (**resultados**)

Es preponderante el análisis de las preferencias. Basta con conocer la preferencia del jugador por cada resultado.

- $x \succsim y \Rightarrow$ x es débilmente preferido a y
- $x \succ y \Rightarrow$ x es preferido a y
- $x \sim y \Rightarrow$ x es igualmente preferido a y

Ejemplos:

$$A = \{d, a\} = \{\text{desayuno fuerte}, \text{almuerzo tarde}\}$$
$$R = \{x, y\} = \{\text{resultado de desayunar fuerte}, \text{resultado de almorzar tarde}\}$$

Un conjunto de acciones podría ser finito o infinito:

- Finito
  - $A = \{d, a\} = \{\text{FCE}, \text{generales}, \text{Derecho} \dots\}$
  - $A = \{d, a\} = \{\text{largo}, \text{corto}, \dots\}$
  - $A = \{d, a\} = \{\text{Economía}, \text{negocios}, \text{estadística}, \text{estadística}, \dots\}$
- Infinito
  - $A = [0, 10mill]$
  - $A = (0, 10mill]$
  - $A = \{0, \dots\}$

1. Preferencias

Hay dos supuestos básicos:

1. Axioma de completitud: los jugadores son capaces de ordenar sus preferencias sobre dos resultados diferentes que provienen de un mismo conjunto de resultados.
2. Axioma de transitividad: los jugadores son capaces de ordenar todos los resultados posibles.

1.1 Axioma de completitud

El ordenamiento de las preferencias es completo. Cuales quiera dos pares de resultados $x, y \in X$ pueden ser ordenados de acuerdo a las preferencias.

Este axioma garantiza que los jugadores no pueden quedar indecisos entre dos resultados alternativos.

1.2 Axioma de transitividad

Las preferencias de los jugadores son transitivas. Es decir, para cada subconjunto de resultados $x, y, z \in X$ si $x \succsim y$ y $y \succsim z$ entonces $x \succsim z$.

Este axioma garantiza que no exista alguna contradicción en las elecciones de los jugadores. Estos dos axiomas garantizan que, dado un conjunto de resultados X, cualquiera de los elementos puede ser ordenado de acuerdo a sus preferencias sin entrar en contradicciones, o crear ciclos de indecisión. **Como supuesto base se supone que los jugadores tienen una relación de preferencias racionales**.

1.3 Función de ganancias

Las preferencias están asociadas a los pagos asociados. El objetivo de un jugador racional es **maximizar utilidades**. Así, al ordenar las preferencias, implícitamente está realizando un ordenamiento derivado de las funciones de ganancia de los jugadores.
Sea $a \in A$ una acción del jugador J_i y $\pi(a)$ la función de ganancias. Bajo el supuesto de la racionalidad de los jugadores no es necesario conocer la función de ganancias; basta con conocer la ganancia asociada a cada acción.

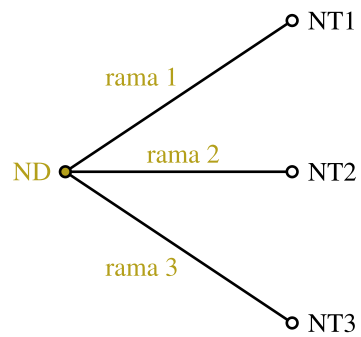
Definición 1.1 Una función de ganancias $u : X \to \mathbb{R}$ representa las relaciones de preferencia $\succsim$ si para cada par $x, y \in X, u(x) \geq u(y)$ si y sólo si $x \succsim y$.

La importancia de las ganancias se debe a que permiten el ordenamiento y no tanto su valor cardinal. Si un conjunto de resultados X es finito, entonces cualquier relación de preferencias racionales sobre X puede ser representada por la función de ganancias.

2. Decisiones

Una forma de representar la toma de decisiones es a través de los árboles de decisión. Los elementos de un árbol de decisión son los siguientes:

- Nodo de decisión
- Rama
- Nodo terminal



2.1 Paradigma de la elección racional

Definición 2.1 Elegir la mejor acción, del conjunto de acciones posibles, dadas las creencias y restricciones del jugador. En otras palabras, determina la mejor estrategia que satisfaga sus deseos.

Asumir el paradigma de la teoría de la elección racional implica aceptar que todos los jugadores conocen el problema de decisión. Se supone que todos los jugadores conocen:

- Todas las posibles acciones: A
- Todos los posibles resultados: X
- La forma en que las acciones A afectan los resultados X si son seleccionadas
- Los pagos asociados y son capaces de establecer las preferencias

2.2 De acciones a ganancias

Si $x(a)$ es el resultado de seleccionar la acción a, entonces el pago de la acción a está dado por $v(a) = u(x(a))$. Por lo tanto, $v(a)$ representa el pago asociado a la selección de la acción. En el fondo representa la utilidad percibida.

Definición 2.2 Un jugador que se enfrenta a un problema de decisión con una función de ganancia $v(\cdot)$ sobre las acciones es racional si elige la acción $a \in A$ que maximiza sus ganancias. Es decir, $a^* \in A$ se elige si y sólo si $v(a^*) \geq v(a)$

El supuesto fundamental de la teoría de juegos es que las personas son racionales.

3. Incertidumbre

Existen resultados estocásticos y probabilidades. Esto se refiere a que hay incertidumbre asociada a cada uno de los posibles resultados. Las probabilidades se relacionan con la factibilidad de que el resultado se materialice. Se hacen los siguientes supuestos:

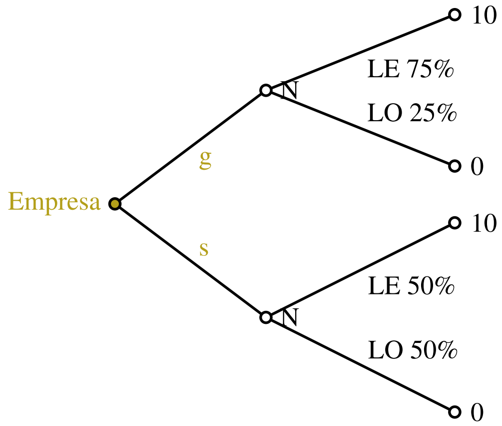
- Los resultados se determinan mediante **aleatorización**. **Esto implica que la probabilidad de cada resultado se puede determinar**, por ejemplo en las loterías y apuestas.
- Los tomadores de decisiones se interesan en el **resultado y su probabilidad de ocurrencia**, no en el proceso generador del resultado.
- X corresponde al **conjunto de resultados y es finito**.
- Cada posible resultado está representado por **una medida de probabilidad**.

Lo más difícil de este curso es entender el proceso generador de la decisión; cómo se estructuran las cosas. Vamos a ver el ejercicio de investigación y desarrollo.

■ **Ejemplo 3.1 — Investigación y desarrollo.** Póngase en los zapatos de la gerencia de división que **está decidiendo si emprender o no un proyecto** de I + D. Sus posibles acciones son g para avanzar o s para mantener el *status quo*, de modo que $A = \{g, s\}$. Para hacer que el problema sea lo más simple posible, imagine que solo hay dos resultados finales: su línea de productos tiene éxito, lo que equivale a un beneficio de 10, o su línea de productos es obsoleta, lo que equivale a un ganancia de 0, de modo que $X = \{0, 10\}$. Sin embargo, como ya se explicó, aquí no hay una correspondencia de uno a uno entre las acciones y los resultados. En cambio, **existe incertidumbre sobre qué resultado prevalecerá**, y la incertidumbre está vinculada a la elección realizada por el jugador, el gerente de la división.

1. Quién tiene que tomar la decisión? $\rightarrow$ la empresa
2. Qué puede decidir la empresa? $\rightarrow$ llevar a cabo o no el proyecto
3. Cuáles son los posibles resultados del proyecto? $\rightarrow$ independientemente de si desarrolla o no el proyecto, va a tener una línea exitosa u obsoleta. Entonces la cuestión es si hace o no el proyecto para aumentar las probabilidades, tiene sentido económico.
4. Cuál es la información relevante del planteamiento? $\rightarrow$ se tiene decisión. Si desarrollo g eso lleva a una probabilidad de línea exitosa dado g es igual a 0.75 y que la probabilidad de línea exitosa sin el proyecto es de 0.50. Otro dato importante son las ganancias, que son 10 si la línea es exitosa y si la línea es obsoleta es de 0. **Esta es la información que necesito para hacer el árbol**.
   - $A = \{g, s\}$
   - $g \rightarrow P(LE|g) = 0.75$
   - $s \rightarrow P(LE|s) = 0.50$

- $X = \{10, 0\} \begin{cases} 10 & si \quad LE \\ 0 & si \quad LO \end{cases}$



La decisión la toma la empresa y debe decidir si hace o no el proyecto. Si hace el proyecto puede tener una línea exitosa o una línea obsoleta. **Esto no ocurre con certeza, ocurre con una cierta probabilidad, y por ende juega la naturaleza**. Si no desarrolla el proyecto cambian las probabilidades de los resultados pero no hay cambios en los pagos.
Siempre que hay incertidumbre se dice que la naturaleza juega. No puede faltar la notación de que la naturaleza actúa. Ahora, vamos a ver los conceptos de lotería simple y compuesta. ■

3.1 Loterías

Una lotería simple no es otra cosa más que una distribución de probabilidad sobre los resultados que se tienen. El ejemplo de inversión y desarrollo son dos loterías simples, porque como la lotería es una distribución de probabilidad, cuando la decisión es s tiene una distribución de probabilidad y cuando la decisión es g hay otra distribución de probabilidad. Tengo posibles resultados, que podrían ocurrir con cierta probabilidad cada uno.
Las loterías simples cumplen con todas las propiedades de una distribución de probabilidad. Las probabilidades tienen dos características básicas:

1. Cada una de las probabilidades asociadas a cada evento es mayor o igual a 0
2. La suma de todas las probabilidades que corresponden a esa distribución tiene que ser igual a 1

Uno demuestra que sabe eso, diciendo que:

$$\boxed{\begin{aligned} p(g_{LE}) \geq 0 \wedge p(g_{LO}) \geq 0 \\ p(g_{LE}) + p(g_{LO}) = 1 \end{aligned}}$$

Eso hay que hacerlo en todo y cada uno de los ejercicios. Eso son nuestras restricciones y condicionamiento para que sirva de guía. Hay que acostumbrarse a decir todos los supuestos porque uno se puede comunicar con gente que no lo sepa. g y s no tienen probabilidad porque son acciones sobre las que se puede decidir, lo que sí tienen probabilidades asociadas es si sale una línea exitosa u obsoleta.
Las loterías son útiles porque nos permiten incorporar a la naturaleza en la toma de decisiones. Cuando tomamos decisiones dificilmente tenemos certeza, entonces siempre vamos a tener una probabilidad asociada.

Definición 3.1 Una lotería simple sobre los resultados $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se define como una distribución de probabilidad $X = \{p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n)\}$ donde $p(x_k)$ es la probabilidad de

x_k, $p(x_k) > 0$ y

$$\sum_{k=1}^{n} p(x_k) = 1$$

Las loterías son importantes porque incorporan el papel de la naturaleza sobre las probabilidades. Se dice que **la naturaleza actúa** cuando existe incertidumbre sobre los resultados. Las loterías pueden representarse mediante árboles de decisión.
Ahora hay que ver **cuánto esperaría ganar**:

- Si desarrolla el proyecto

$$0.75 \cdot (10) + 0.25 \cdot (0) = 7.5$$

- Si no desarrolla el proyecto

$$0.5 \cdot (10) + 0.5 \cdot (0) = 5$$

Hay que tener presente la posición frente al riesgo para distinguir el uso entre utilidades y ganancia. Las probabilidades están asociadas a la acción que tome el jugador. $p(x_k|a)$: se toma una acción $a \in A$ que lleva a un resultado $x_k \in X$ con cierta probabilidad. Las probabilidades condicionales cumplen con las características básicas de las distribuciones de probabilidad.
Hay una lotería que nos va a hacer muy útil durante el curso.

Definición 3.2 Las loterías con probabilidad $p(x_k|a) = 1$ se conocen como loterías degeneradas.

Estas loterías degeneradas se asocian con eventos que son ciertos.

3.2 Teorema de Bayes

Definición 3.3 Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un conjunto de eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos, donde $P(A_i) > 0$. Sea B un suceso del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B|A_i)$. Entonces el teorema de Bayes muestra que

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

Existe un enfrentamiento entre la estadística bayesiana vs la estadística frecuentista. **En este curso no nos vamos a centrar en el proceso generador de probabilidades**.

Definición 3.4 — Lotería simple continua. Una lotería simple sobre el intervalo $X = [\underline{x}, \overline{x}]$, que viene dada de una FDA $F : X \to [0,1]$ donde $F(\hat{x}) = Pr\{x \leq \hat{x}\}$ es la probabilidad de que el resultado sea menor a o igual a $\hat{x}$.
Las probabilidades condicionales requieren definir $F(x|a)$.

3.3 Valor Esperado

La teoría de la utilidad esperada de Von Neumann-Morgensten (1994) se basa en el axioma de la independencia.

Definición 3.5 — Valor esperado discreto. Sea $u(x)$ la función de utilidad sobre los resultados $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y sea $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ una lotería sobre X tal que $p_k = Pr\{x = x_k\}$, el valor esperado de la lotería p se define como:

$$\mathbb{E}[u(x)|p] = \sum_{k=1}^{n} p_k u(x_k) = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + \cdots + p_n u(x_n)$$

Definición 3.6 — Valor esperado continuo. Sea $u(x)$ la función de utilidad sobre los resultados en el intervalo $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ y una lotería dada por $F(x)$ con densidad $f(x)$. El valor esperado se define como:

$$\mathbb{E}[u(x)] = \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} u(x) f(x) dx$$

3.4 Axioma de la independencia

Suponga cuatro loterías:

- Lotería I tiene como resultado R con probabilidad $1-\alpha$ y P con probabilidad α
- Lotería II tiene como resultado R con probabilidad $1-\alpha$ y Q con probabilidad α
- Lotería III tiene como resultado S con probabilidad $1-\beta$ y P con probabilidad β
- Lotería IV tiene como resultado S con probabilidad $1-\beta$ y Q con probabilidad β

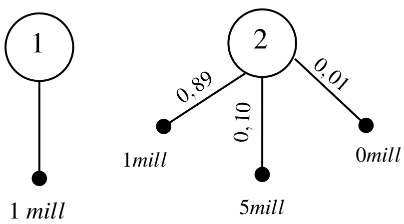
[Axioma de la independencia] Establece que la lotería I será preferida a la lotería II si y sólo si se prefiere el resultado P al resultado Q. Por lo tanto, la lotería III será preferida a la lotería IV si y sólo si la lotería I es preferida a la lotería II.

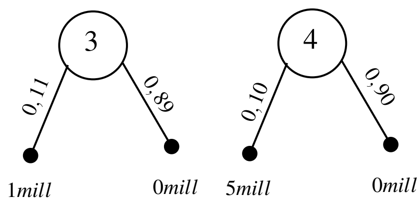
3.5 Elección racional

$$\begin{aligned} v(g) = 7.5 > 5 = v(s) \\ g \succ s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7,5 &= 0,75 \cdot (10) + 0,25 \cdot (0) \\ 5 &= 0,5 \cdot (10) + 0,5(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7,5 = 0,75 \cdot (10) + 0,25 \cdot (0) - c \\ 7,5 - c = 5 \\ 2,5 = c \end{aligned}$$





$1 \quad < \quad 1,39$ $\qquad$ $110mil \quad < \quad 500mil$

3.6 Axioma de la continuidad

No hay nada tan bueno (o tan malo) que no se vuelva insignificante si ocurre con una probabilidad suficientemente pequeña.

[Axioma de la continudad] Sean P y Q dos loterías que pertenecen al conjunto de loterías posibles L, tal que $P \succsim Q$ entonces para toda lotería $R \in L$, existe:

- Un α, con $0 < \alpha < 1$ tal que $P \succ (1-\alpha)Q + \alpha R$
- Un β, con $0 < \beta < 1$ tal que $(1-\beta)P + \beta R \succ Q$

4. Riesgo

Los jugadores racionales toman en consideración el riesgo asociado a cada lotería.

- Valor del dinero
- Valor de los pagos
- **Neutral al riesgo**: el jugador es neutral al riesgo si está dispuesto a intercambiar cualquier pago seguro con cualquier lotería que prometa el mismo pago monetario esperado.
- **Averso al riesgo**: el jugador es averso al riesgo si no está dispuesto a intercambiar un pago seguro con cualquier lotería (no degenerada) que prometa el mismo pago monetario esperado.
- **Amante del riesgo**: el jugador es amante al riesgo si prefiere estrictamente cualquier lotería que prometa el mismo pago monetario esperado.

4.1 Decisiones racionales bajo incertidumbre

Hasta ahora se ha trabajado con los supuestos:

1. La elección de las acciones implica elegir loterías
2. El jugador conoce las probabilidades asociadas a cada lotería
3. El jugador sabe que los resultados están condicionados a las acciones

[Decisiones racionales bajo incertidumbre] Un jugador toma decisiones racionales sobre un problema si dada la función de pagos $u(\cdot)$ elige la acción $a \in A$ que maximiza los pagos esperados.

$$a \in A \text{ es la solución } \Leftrightarrow$$
$$v(a^*) = E\left[u(x)|a^*\right] \geq E\left[u(x)|a\right] = v(a) \quad \forall a \in A$$

4.2 Inducción hacia atrás

4.3 Valor del dinero en el tiempo

En la mayoría de las decisiones en negocios el momento de la toma de decisiones y el momento de recibir las ganancias difieren. Es necesario entonces, considerar el valor del dinero en el tiempo.

Definición 4.1 — Valor presente.

$$VP = \frac{x}{(1+r)^t}$$

Definición 4.2 — Factor de descuento. Probabilidad de que los pagos se realicen. Es un $\delta \in (0,1)$.

Definición 4.3 — Valor descontado de pagos futuros.

$$v(x_1, x_2, \dots, x_T) = u(x_1) + \delta u(x_2) + \cdots + \delta^{T-1} u(x_T) = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} u(x_t)$$

II Juegos estáticos con información completa

5. Juegos estáticos con información completa

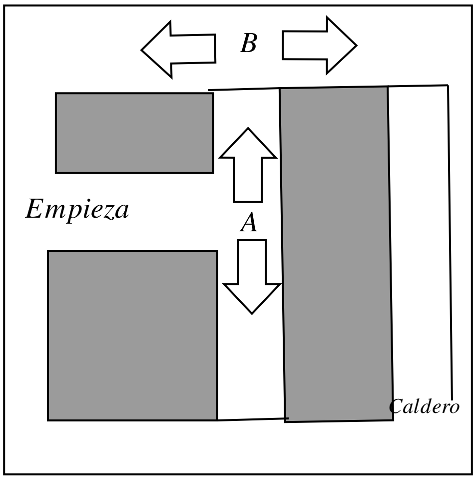
Definición 5.1 — Juego. Cualquier situación gobernada por reglas, con un resultado bien definido caracterizado por una interdependencia estratégica.

En los exámenes solo hay que poner el número de carnet, no el nombre. Desde el punto de vista económico: el principio de todo juego es que los participantes, cada uno de ellos, desean maximizar el beneficio que pueden obtener del juego. Por lo tanto, las técnicas del cálculo diferencial son útiles en la solución de juegos empresariales o económicos.

Definición 5.2 — Estrategia. Es un plan de acción **completo** en un juego determinado para lograr un objetivo específico: maximizar la utilidad.

Cuando se planea una estrategia, se quiere lograr un objetivo. La decisión más importante es la primera, así que la estrategia me dice cuál es la ruta para llegar a ese objetivo. Por inducción hacia atrás me voy al puro final para ver cuál decisión tomo al principio. Así, todas las posibles estrategias se plantean al principio, antes de que el juego inicie.

5.0.1 El caldero de oro



La estrategia es un plan de acción completo, es decir que desde antes de iniciar el juego, se tienen que contemplar todas las posibilidades de cursos de acción a tomar. No se saben los pagos de antemano, así que el jugador plantea todas las posibilidades. Así, las posibles estrategias serían:

Lo que se sabe antes de empezar son las posibles acciones que se pueden tomar, lo que no se sabe es a qué va a llevar cada decisión.

Plan (estrategia)	Resultado
$\mathrm{D}_a - I_b$	0
$\mathrm{D}_a - D_b$	0
$\mathrm{I}_a - I_b$	0
$\mathrm{I}_a - D_b$	D

Se pueden obtener ganancias cero o negativas (siguiendo una mala estrategia).
En los juegos estáticos, cada jugador elige, independientemente, una acción de su conjunto de acciones posibles, donde la acción elegida lleva a un resultado conocido. Cada jugador, de forma independiente y simultánea, elige una acción.

- Los jugadores no se ponen de acuerdo para la toma de la decisión
- Los jugadores no conocen las decisiones que toman los otros jugadores

Los pagos se distribuyen a cada jugador de acuerdo a la lotería asociada.

- Una vez tomadas las decisiones sobre las acciones, se tienen los resultados para cada jugador
- Los jugadores establecen las preferencias sobre los resultados (dependiendo de la función de utilidad)

6. Juegos con información completa

Un juego con información completa requiere que sea de conocimiento común de todos los jugadores: 2

1. Todas las posibles acciones de todos los jugadores
2. Todos los posibles resultados
3. Cómo cada combinación de acciones de cada uno de los jugadores afecta los resultados
4. Las preferencias de todos y cada uno de los jugadores sobre los resultados

6.1 Conocimiento común

Definición 6.1 — Conocimiento común. Se considera que un evento E es de conocimiento común si:

1. Todos conocen el evento E
2. Los otros jugadores saben que los demás saben que conoce el evento E

Es necesario suponer el conocimiento común entre los jugadores de forma que los jugadores siguen un razonamiento estratégico lógico. Si el J_1 sabe que J_2 sabe qué es lo que hará el J_1 y además supone que el J_2 es racional, entonces J_2 tomará su decisión considerando las posibles acciones de J_1.

Definición 6.2 — Estrategia pura. Es un plan de acción determinista. El conjunto de todas las estrategias puras para el jugador i se denota S_i. Un perfil de estrategias puras $s_i = (s_1, s_2, \dots, s_n) \quad s_i \in S_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, describe una combinación particular de estratgias puras elegidas por todos los n jugadores en el juego.

Definición 6.3 — Forma normal. Un juego definido en forma normal requiere identificar:

1. Un conjunto finito de jugadores $N = \{1, 2, \dots, n\}$
2. Una colección de conjuntos acciones $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$
3. Una colección de conjuntos estrategias puras $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$
4. Un conjunto de funciones de pago $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, cada uno asignando un pago a cada combinación de estrategias elegidas, es decir, un conjunto de funciones $v_i : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_x \to \mathbb{R}$ para cada $i \in N$

$$\boxed{\Gamma : \langle N, \{A_i\}_{i=1}^{n}, \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{v_i(\cdot)\}_{i=1}^{n} \rangle}$$

6.1.0.1 Dilema del prisionero

El dilema del prisionero es uno de los juegos más utilizados en teoría de juegos. Considere las siguientes reglas:

- Los prisiones son puestos en celdas separadas
- Los prisioneros pueden hablar o guardar silencio
- Les ofrecen un trato que implica hablar (delatar)
  - Si ambos guardan silencio, irá cada uno a prisión por 2 años
  - Si uno habla y otro guarda silencio, el delator va 1 año y el otro 5 años
  - Si ambos hablan, ambos irán a prisión por 4 años
- Forma normal
  - Jugadores: $N = \{J_1, J_2\}$, donde J_1: prisionero #1 y J_2: prisionero #2
  - Acciones: $A_i = \{D, C\} \quad \forall i \in N$, donde D: delatar y C: callar
  - Estrategias: $S_i = \{D, C\} \quad \forall i \in N$, donde D: delatar y C: callar
  - Pagos: $v(\cdot) = v_i(s_1, s_2) \quad \forall i \in N$
- Matriz de pagos

Pagos en forma matricial

	D	C
D	$4,4$	$1,\underline{5}$
C	$\underline{5},1$	$\underline{2},\underline{2}$

$$\begin{aligned} v_1(D,C) &= 1 = v_2(C,D) \\ v_1(D,D) &= 4 = v_2(D,D) \\ v_1(C,D) &= 5 = v_2(D,C) \\ v_1(C,C) &= 2 = v_2(C,C) \end{aligned}$$

6.1.0.2 Juegos finitos

Definición 6.4 — Juegos finitos. Un juego con un número finito de jugadores, en el que el número de estrategias S_i es finito todos los jugadores $i \in N$.

La representación matricial de los juegos finitos en el caso de dos jugadores permite resumir la información.

Definición 6.5 — Solución. Método de análisis del juego con el objetivo de restringir el conjunto de todos los posibles resultados a aquellos resultados más razonables. Requiere realizar supuestos razonables y consistentes sobre el comportamiento y las creencias de los jugadores.

Los supuestos que son necesarios para el análisis de la o las soluciones de equilibrio son:

- Los jugadores son racionales: eligen $s_i \in S_i$ que maximiza sus resultados de acuerdo a sus creencias de cómo se desarrolla el juego.
- Los jugadores son inteligentes: un jugador inteligente conoce todo respecto al juego (acciones, resultados y preferencias de los jugadores)
- Conocimiento común: los dos supuestos anteriores son de conocimiento común
- Auto-mejoramiento: cualquier predicción sobre la solución (equilibrio) debe buscar el mejor resultado posible (juegos no cooperativos)

Los jugadores se involucran en un comportamiento no cooperativo si: **Cada jugador tiene el control de sus propias acciones y solo se apegará a una acción si considera que es lo mejor para sí mismo.**

Esto quiere decir que, para que un perfil de estrategias sea un equilibrio, se necesita que cada jugador esté satisfecho con su propia elección, dado que los demás van a tomar sus propias decisiones.

6.1.0.3 Dominancia de Pareto

Definición 6.6 Una estrategia $s \in S$ domina en el sentido de Pareto a la estrategia $s' \in S$ si $v_i(s) \geq v_i(s') \forall i \in N$ y $v_i(s) > v_i(s')$ para, al menos, un jugador $i \in N$. Así, la estrategia s' es Pareto dominada por s.

Nota: no confundir el óptimo de Pareto con el mejor resultado "simétrico" que deja a los jugadores "igualmente" satisfechos, como por ejemplo en el dilema del prisionero.

6.1.1 Racionalidad y conocimiento común

6.1.1.1 Dominancia en estrategias puras

La estrategia de un jugador se define como:

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

La función de pagos $v_i(s)$

Las acciones de los demás jugadores pueden representarse como:

$$(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$$

Entonces

$$S_{-i} \equiv S_1 \times S_2 \times \dots S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$$

Y por lo tanto es posible definir: $s_{-i} \in S_{-i}$ como la estrategia de los demás jugadores y $v_i(s_i, s_{-i})$ como función de pagos.

6.1.2 Estrategia dominada

Sean $s_i \in S_i$ y $s'_i \in S_i$ posibles estrategias del jugador i. Se dice que la estrategia s'_i es estrictamente dominada por s_i si para cualquier otra combinación de estrategias de los otros jugadores $s_{-i} \in S_{-i}$, los resultados del jugador i para la estrategia s'_i son estricamente menores que los resultados dada la estrategia s_i.

$$v_i(s_i, s_{-i}) > v_i(s'_i, s'_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

En términos de preferencias $s'_i \succ s_i$

Recordar que el hecho de que la solución sea única lo que significa es que se puede reducir la cantidad de perfiles de estrategias que son opción, no que solo haya una. Vimos la dominancia de Pareto, y aún cuando lo haya, el perfil que sea óptimo de Pareto no necesariamente es solución.

Entonces cómo hago para saber si hay una estrategia estrictamente dominada? $\rightarrow$ el pago de una estrategia alternativa (que está dentro del conjunto de posibles estrategias del jugador) le de mayores pagos que la estrategia evaluada para cualquier estrategia que siga el jugador; por ende, no se ocupa la matriz, lo que se necesita es el árbol para poder definir los pagos.

En un árbol es difícil ver cuál es la estrategia dominada. Hay estrategias dominantes y dominadas. Una estrategia dominante domina a las demás, y una dominada es que existe otra que la domina, que no necesariamente es estrictamente dominante. **Estrictamente dominante es aquella que siempre voy a jugar porque no importa lo que haga el otro porque siempre me genera mayores pagos. Dominada significa que existe otra estrategia que me genera mayores pagos, aunque no necesariamente sea estrictamente dominante.**

■ **Ejemplo 6.1 — Otro ejemplo.** Determine las estrategias estrictamente dominadas: yo quiero saber si hay estrategias dominadas para saber cómo hacer la **Eliminación Iterada de Estrategias Dominadas (EIEED)**.

$$\begin{array}{cc|c|c|c|}
 & & & J_2 & \\
 & & D & C & I \\
\hline
J_1 & D & 8,7 & 6,\underline{12} & \underline{9},3 \\
\hline
 & I & \underline{9},\underline{10} & \underline{9},3 & 0,2 \\
\hline
\end{array}$$

- Derecha no domina izquierda porque $6 < 9$
- Izquierda no domina derecha porque $0 < 9$
- Centro no domina derecha porque $3 < 10$
- Lo que sí sucede es que para el jugador #2: $3 > 2$ y en términos de preferencia significa que centro siempre es preferido a la izquierda para el jugador #2. Como los jugadores son racionales, el jugador #1 sabe que el jugador #2 prefiere jugar Centro indistintamente de lo que él haga, y así, el jugador #2 sabe que el jugador #1 sabe que él prefiere jugar al centro sobre la izquierda. Cuándo el jugador #2 va a jugar izquierda? $\rightarrow$ nunca. Porque centro domina a izquierda. Es decir, **izquierda está estrictamente dominada por centro.** Si izquierda en lugar de $0,2$ fuera $0,12$, ahí ya no sería estrictamente, sería débilmente dominada y ya no se podría eliminar; en ese caso el jugador #2 jugaría izquierda cuando el jugador #1 juegue izquierda y ahí sería indiferente.
- Ahora veamos si hay una estrategia dominada para el jugador #1. Jugar derecha le reporta 8 y $8 < 9$. Le reporta 6 jugar al centro y 9 a la izquierda. Jugar centro le reporta 9 cuando el jugador #2 va al centro. Jugar derecha le reporta 9 y jugar izquierda le reporta 0 cuando el jugador #2 va a la izquierda. Hay dominancia? $\rightarrow$ no.

Lo que se hizo fue decir: cuando inició el juego los jugadores tenían de opciones:

$$s_1^0 = \{D, I\} \qquad s_2^0 = \{D, C, I\}$$

Luego, vimos que el jugador #2 prefiere estrictamente el centro a la izquierda y la conclusión es que al jugador #2 le quedan solamente la derecha y el centro.

$$s_1^0 = \{D, I\} \qquad s_2^0 = \underset{C \succ I}{\{D, C, I\}}$$

Para el jugador #1 concluimos que le quedan las dos opciones y arranca la ronda #1 con derecha e izquierda.

$$s_1^1 = \{D, I\} \qquad s_2^1 = \{D, C\}$$

Ahora, qué pasa con la matriz? $\rightarrow$ perdimos la izquierda.

$$\begin{array}{cc|c|c|c|}
 & & & J_2 & \\
 & & D & C & I \\
\hline
J_1 & D & 8,7 & 6,\underline{12} & \underline{9},3 \\
\hline
 & I & \underline{9},\underline{10} & \underline{9},3 & 0,2 \\
\hline
\end{array}$$

En la siguiente ronda, para el jugador #1 sé que $9 > 8$ y $9 > 6$ y por ende la izquierda es preferida estrictamente a la derecha. Y qué sé del jugador #2? $\rightarrow$ en esta ronda sabemos que no hay dominancia de ninguna estrategia. En esta ronda no pude eliminar a nadie.

$$s_1^1 = \underset{I \succ D}{\{D, I\}} \qquad s_2^1 = \{D, C\}$$

En esta nueva ronda lo que se sabe es que:

$$s_1^2 = \{I\} \qquad s_2^2 = \{D, C\}$$

			J_2	
		D	C	~~I~~
J_1	D	$8,7$	$6,\underline{12}$	~~$\underline{9},3$~~
	~~I~~	~~$\underline{9},\underline{10}$~~	~~$\underline{9},3$~~	~~$0,2$~~

Al jugador #1 le sobrevive solo la izquierda pero al jugador #2 le quedan centro y derecha. Luego,

$$s_1^2 = \{I\} \qquad s_2^2 = \underset{C \succ D}{\{D,C\}}$$

Así:

$$s_1^3 = \{I\} \qquad s_2^3 = \{C\}$$

Y finalmente:

$$\boxed{S^* = (I,D)}$$

Es una eliminación iterada porque se inicia con todas las estrategias, se hace una primera ronda, se ve si hay dominancia, luego se pasa a una siguiente ronda con lo que sobreviva y eso se analiza para ambos jugadores nuevamente y se pasa a la siguiente ronda con lo que sobreviva y así sucesivamente.

Esta estrategia siempre es una eliminación por rondas; se quiere buscar como solucionar dado que no hay estrategias estrictamente dominantes. Como no las hay, metamos racionalidad y conocimiento común (jugadores saben lo que va a pasar) y a partir de allí eliminan.

El perfil de equilibrio es izquierda, derecha.

En una eliminación iterada también podría eliminar dos o tres o más por jugador. En este caso concreto, se iba una por jugador a la vez. Hasta ahora la solución se determina considerando lo que los jugadores racionales no harían. Es igualmente válido preguntarse: ¿Qué haría el jugador antes las posibles estrategias dadas las condiciones?

■

7. Mejor respuesta

Uno de los conceptos más importantes en teoría de juegos es el de mejor respuesta.

Definición 7.1 — Mejor respuesta. La estrategia $s_i \in S_i$ del jugador i es la mejor respuesta a la estrategia $s_{-i} \in S_{-i}$ de su oponente si:

$$v_i(s_i, s_{-i}) \geq v_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall s_i' \in S_i$$

Esta mejor respuesta lo que busca es **qué haría un jugador racional**, que tiene conocimiento común de la racionalidad de los jugadores y que cree que el otro jugador podría jugar una cierta estrategia.

El jugador cree que sus oponentes van a jugar una cierta estrategia, y ante eso escoge la estrategia que le genera el mayor pago de entre todas sus estrategias.

Un jugador racional que cree que sus oponentes van a jugar alguna estrategia $s_{-i} \in S_{-i}$ siempre elige la mejor respuesta a s_{-i}. En un juego finito si s^* es un equilibrio de estrategia estrictamente dominante o es la única sobreviviente al proceso de EIEED, entonces s_i^* es la mejor respuesta a $s_{-i}^* \forall i \in N$.

Ahora vamos a ver casos:

- Dilema del prisionero: Entonces lo que hay que buscar es cuál es la mejor respuesta que tengo siendo racional y con el conocimiento común de la racionales, pero ahora, adicionalmente, creo que el jugador 2 va a jugar D. Entonces, **¿qué es lo mejor que puedo hacer?** $\rightarrow$ Delatar.
  Pero, si creo que el jugador 2 va a callar, **¿qué es lo mejor que puedo hacer?** $\rightarrow$ Delatar.
  Ahora vamos con el jugador 2.
  Si el jugador 2 cree que el jugador 1 va a jugar D, **¿qué es lo mejor que puedo hacer?** $\rightarrow$ Delatar.
  Si el jugador 2 cree que el jugador va a jugar C, **¿qué es lo mejor que puedo hacer?** $\rightarrow$ Delatar.
  Entonces hay una estrategia que es la más racional para el jugador 1 $\rightarrow$ Delatar
  Entonces hay una estrategia que es la más racional para el jugador 2 $\rightarrow$ Delatar
  Hay mejores respuestas que me dicen si puede eliminar alguna otra estrategia. Ese proceso se llama **razonabilidad**. Un equilibrio de correspondencia de mejores respuestas es un equilibrio de Nash. Aquí lo importante es que puede reducir matrices por medio de la razonabilidad. En el caso del dilema del prisionero solo sobrevive Delatar.
  - ¿Existen estrategias estrictamente dominantes? $\rightarrow$ Existe✓

		J_2	
		No delata	Delata
J_1	No delata	$-2,-2$	$-5,-1$
	Delata	$-1,-5$	$-4,-4$

$$S_1^0 = \underbrace{\{D,C\}}_{D\succ C} \qquad S_2^0 = \underbrace{\{D,C\}}_{D\succ C}$$

Por EIEED también se puede eliminar, pero lo que difiere es el análisis. Lo primero que hay que hacer es: dominantes. Si hay una solución que se da por EED $\rightarrow$ ¿cuáles son las estrategias que sobreviven EIEED? $\rightarrow$ dominantes. ¿Cuáles son las estrategias que sobreviven EIEED? $\rightarrow$ dominantes. ¿Cuáles son las estrategias del equilibrio de Nash? $\rightarrow$ dominantes.
Si se tiene un equilibrio por EED, dado que sé que son racionales, sé que es lo único que van a jugar.
Si se hace el proceso de razonabililidad y todas las estrategias convergen a una sola $\rightarrow$ significa que sí había una EED.
En mejor respuesta o razonabilidad buscamos qué es lo mejor que puedo hacer mientras que en EED y EIEED buscaba qué no hago. Si solamente un jugador tiene EED y los otros jugadores no tienen, no habría equilibrio por EED.
¿Qué es lo mejor que puedo hacer asumiendo que el otro hace....
Entonces, con respecto a los supuestos:

1. Racionalidad: primero veo si hay una EED.
2. Conocimiento común de la racionalidad: si no hay EED entonces esto permite hacer EIEED: permite ver qué es lo que no haría el otro jugador
3. Razonabilidad: busca qué es lo que haría una persona racional de la cual tengo conocimiento común y estoy generando una creencia.

Cuando se llegue a Nash se añade un cuarto supuesto: que las creencias sean correctas.
Entonces, si se tiene tiene un equilibrio por un EED de dos jugadores: ese equilibrio solo podría tener un perfil de estrategias:

- $EED \rightarrow s^D = (s_1^*, s_2^*)$
- Si se le aplica EIEED solamente ese mismo perfil puede sobrevivir a la EIEED $\rightarrow$ $s^{EE} = (s_1^*, s_2^*)$. Entonces, si se hace eliminación y solo queda 1, es posible que haya EED y no lo haya visto, pero no necesariamente.
  Las anteriores serían las que sobreviven a lo que no haría. ¿Cuáles serían las que sobrevivirían siendo racional, teniendo conocimiento común de la racionalidad y asumiendo el jugador 2 que el jugador 1 va a jugar s^*?
- Razonabilidad $\rightarrow s^R = (s_1^R, s_2^R)$

Entonces, si hay EED para abajo todas son la misma, sin embargo al revés no necesariamente. ***Para abajo es cierto, para arriba no***.
El fin de semana sube una guía de ejercicios de los 6 capítulos resueltos y explicados. También va a haber una práctica disponible en línea.

- Direcciones (U,M,D,L,C,R)
  - ¿Se puede reducir la matriz utilizando EIEED?

			J_2	
		L	C	R
	U	4,3	5,1	6,2
J_1	M	2,1	8,4	3,6
	D	3,0	9,6	2,8

$$S_1^0 = \{U,M,D\} \qquad S_2^0 = \underset{R\succ C}{\{L,C,R\}}$$

			J_2	
		L	~~C~~	R
	U	4,3	~~5,1~~	6,2
J_1	M	2,1	~~8,4~~	3,6
	D	3,0	~~9,6~~	2,8

$$S_1^0 = \underset{\substack{U\succ M\\ U\succ D}}{\{U,M,D\}} \qquad S_2^0 = \{L,R\}$$

			J_2	
		L	~~C~~	R
	U	4,3	~~5,1~~	6,2
J_1	~~M~~	~~2,1~~	~~8,4~~	~~3,6~~
	~~D~~	~~3,0~~	~~9,6~~	~~2,8~~

$$S_1^0 = \{U\} \qquad S_2^0 = \underset{L\succ R}{\{L,R\}}$$

			J_2	
		L	~~C~~	~~R~~
	U	4,3	~~5,1~~	~~6,2~~
J_1	~~M~~	~~2,1~~	~~8,4~~	~~3,6~~
	~~D~~	~~3,0~~	~~9,6~~	~~2,8~~

$$S_1^0 = \{U\} \qquad S_2^0 = \{L\}$$

- La batalla de los sexos
  - ¿Existen estrategias estrictamente dominantes? $\rightarrow$ No
  - ¿Se puede reducir la matriz por EIEED? $\rightarrow$ No

		J_2 C	J_2 T
J_1	C	1,2	0,0
	T	0,0	2,1

Entonces razonabilidad lo que quiere decir es ***voy a buscar la que es la mejor respuesta para mí, dado lo que creo que va a hacer el otro jugador***.

Para cada estrategia s_{-i} el jugador i encuentra una estrategia s_i que corresponde a la mejor respuesta, de forma que es posible encontrar una función de mejor respuesta para el jugador i.

Sin embargo, esto es cierto sólo en los juegos que tienen una mejor respuesta única. ¿Qué pasa si esto no se cumple?

		J_2 L	J_2 C	J_2 R
J_1	U	4,3	5,1	6,2
	M	2,1	8,4	3,6
	D	3,0	9,6	2,8

Jugador 1:

- Cree que el jugador 2 va a jugar L: ¿qué es lo mejor que puede hacer? $\rightarrow$ U
  $MR_1(L) = \{U\}$
- Cree que el jugador 2 va a jugar C: ¿qué es lo mejor que puede hacer? $\rightarrow$ D
  $MR_1(C) = \{D\}$
- Cree que el jugador 2 va a jugar R: ¿qué es lo mejor que puede hacer? $\rightarrow$ U
  $MR_1(R) = \{U\}$

Jugador 2:

- Cree que el jugador 1 va a jugar U: ¿qué es lo mejor que puede hacer? $\rightarrow$ L
  $MR_2(U) = \{L\}$
- Cree que el jugador 1 va a jugar M: ¿qué es lo mejor que puede hacer? $\rightarrow$ R
  $MR_2(M) = \{R\}$
- Cree que el jugador 1 va a jugar D: ¿qué es lo mejor que puede hacer? $\rightarrow$ U o D
  $MR_2(D) = \{R\}$

Entonces, ¿en qué momento tiene el jugador 2 como mejor respuesta a lo que haga el jugador 1, C? $\rightarrow$ nunca. Porque la mejor respuesta a U es L, a M es R y a D es R también. Entonces, en esta ronda, las estrategias razonalizables para el jugador 2 son L y R.

		J_2 L	J_2 C	J_2 R
J_1	U	3,3	5,1	6,2
	M	4,1	8,4	3,6
	D	4,0	9,6	6,8

Al igual que en EIEED, se hace por rondas.

Para el jugador 1, la mejor respuesta a L es U, a C es D y a R es U. Entonces, ¿en qué momento tiene el jugador 1 como mejor respuesta a lo que haga el jugador 1, M? $\rightarrow$ nunca.

		J_2		
		L	~~C~~	R
J_1	U	$3,3$	~~$5,1$~~	$6,2$
	~~M~~	~~$4,1$~~	~~$8,4$~~	~~$3,6$~~
	D	$4,0$	~~$9,6$~~	$6,8$

Entonces para el jugador 1, las estrategias que sobreviven a la razonabilidad son U y D.

Por EIEED se reduce el juego por lo que no jugarán. Por razonabilidad se eliminan las estrategias que creen que no deberían jugar.

Definición 7.2 — Estrategias razonalizables. Las estrategias razonalizables son aquellas que sobreviven al proceso de racionalización.

		J_B	
		C	T
J_A	C	$1,2$	$0,0$
	T	$0,0$	$2,1$

- $MR_B(C) = C$
- $MR_B(T) = T$
- $MR_A(C) = C$
- $MR_A(T) = T$

Entonces por razonabilidad, 4 perfiles son parte de la solución, es decir, todos, igual que en el otro.

$$S^R = \{(C,T),(C,C),(T,C),(T,T)\}$$

Definición 7.3 — Correspondencia de mejor respuesta. La correspondencia de mejor respuesta del jugador i seleccionada para cada $s_{-i} \in S_{-i}$ es un subconjunto $MR_i(s_{-i}) \subset S_i$ donde cada estrategia $s_i \in MR_i(s_{-i})$ es la mejor respuesta para s_{-i}.

Entonces, la mejor respuesta para el ejemplo anterior:

$$MR_1(R) = \{U\} \quad y \quad MR_1(L) = \{U\}$$

8. Razonabilidad

Definición 8.1 — Razonabilidad. Una estrategia $s_i \in S_i$ nunca es mejor respuesta si no se tienen creencias $s_{-i} \in S_{-i}$ del jugador i sobre que $s_i \in BR_i(s_{-i})$.

¿Qué podría hacer un jugador racional? $\rightarrow$ **Siempre buscará la mejor respuesta a las estrategias de los oponentes**.

		J_2		
		L	C	R
	U	$4,3$	$5,1$	$6,2$
J_1	M	$2,1$	$8,4$	$3,6$
	D	$3,0$	$9,6$	$2,8$

9. Equilibrio de Nash

El equilibrio de Nash es un sistema de creencias y un perfil de acciones para el cual el jugador está jugando la mejor respuesta a sus creencias y, además, los jugadores tienen **creencias correctas**.

Es un perfil de estrategias para el cual el jugador elige la mejor respuesta a las estrategias de todos los demás jugadores.

Definición 9.1 — Equilbirio de Nash. Un perfil de estrategias puras $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \in S$ es un equilibrio de Nash si s_i^* es la mejor respuesta a $s_i^* \forall i \in N$, esto es

$$v_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq v_i(s_i', s_{-i}^*) \quad \forall s_i' \in S_i \wedge \forall i \in N$$

La relación entre los conceptos solución de estrategias estrictamente dominantes, la EIEED y los resultados del equilibrio de Nash no es coincidencia.

Considere una estrategia pura $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \in S$, si s^* es:

1. Un equilibrio en EED
2. La única sobreviviente del proceso de EIEED
3. La única estrategia razonalizable

Entonces s^* es un equilibrio de Nash único.

Dos supuestos importantes para el Equilibrio de Nash:

- Cada jugador juega la mejor respuesta dadas sus creencias
- Las creencias de los jugadores con respecto a sus oponentes son correctas

10. Estrategias mixtas

Hasta ahora, se ha sabido qué es lo que se juega con certeza. Si no se sabe qué se va a jugar con certeza, entonces hay que buscar qué cosas podría hacer el jugador y bajo qué circunstancias. ¿Qué sucede por ejemplo con el lanzamiento del penal o tirar la moneda? → **nunca va a haber correspondencia de mejores respuestas**. En un juego de suma cero eso no va a pasar nunca.

Estrategias mixtas:

$$\Gamma : \langle N, \{A_i\}_{i=1}^n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v(\cdot)\}_{i=1}^n, \{\Delta S_i\}_{i=1}^n \rangle$$

- $N = \{P, J\}$ donde P es el portero y J es el jugador que tira el penal
- $A_i = \{I, D\}$ donde I es ir a la izquierda y D es ir a la derecha
- $S_i = \{I, D\}$ donde I es ir a la izquierda y D es ir a la derecha
- $\Delta S_i = \{(\sigma_i(D), \sigma_i(I)) : \sigma_i(D) \geq 0; \sigma_i(I) \geq 0; \sigma_i(D) + \sigma_i(I) = 1\} \quad \forall i \in N$

Para el análisis se puede definir:

- $p = \sigma_P(D)$ por complemento $1 - p = \sigma_P(I)$
- $q = \sigma_J(D)$ por complemento $1 - q = \sigma_Q(I)$

¿Qué pasa si no hay correspondencia de mejor respuesta en estrategias puras? → hay que pasar a estrategias mixtas. Una estrategia mixta es una distribución sobre todas las estrategias puras del jugador.

Si no hay mejor correspondencia en estrategias puras, se pasa a estrategias mixtas. Una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre **todas** las estrategias puras de un jugador.

Una estrategia mixta consiste en una distribución de probabilidad sobre, alguna o todas, las estrategias pura $s_i \in S_i$. Por ejemplo $\sigma_i = (q, 1-q)$ en el caso de dos posibles estrategias puras del jugador i. En los juegos con decisión simultánea en información completa las estrategias de un jugador corresponden a las diferentes probabilidades que el jugador le asigne a jugar esa estrategia.

En cuanto a los juegos estáticos con información completa, hasta ahora se tiene solución por:

- Estrategias Estrictamente Dominantes (EED)
- Eliminación Iterada de Estrategias Estrictamente Dominadas (EIEED)
- Reducción o Eliminación de Estrategias Racionalizables (ER)
- Equilibrio de Nash en Estrategias Puras (EN)

Qué tienen en común? → Se sabe con certeza lo que seguirá un jugador.

■ **Ejemplo 10.1 — Lanzamiento de penal.** Lanzamiento de penal: (igual al del lanzamiento de la moneda)

J_1 \ J_2	*Derecha*	*Izquierda*
Derecha	$1,-1$	$-1,1$
Izquierda	$-1,1$	$1,-1$

No hay correspondencia de mejores respuestas.

Existe equilibrio de Nash en estrategias puras? $\rightarrow$ no hay Habíamos empezado a ver las estrategias mixtas, que son una distribución de probabilidad sobre todas las posibles estrategias puras. Las estrategias puras son una estrategia mixta degenerada.

En el caso de los penales, se vio que no hay correspondencia de mejores respuestas, entonces, ¿qué se puede hacer? $\rightarrow$ es un juego con dos jugadores con dos acciones cada uno.

En qué se basan las elecciones del portero y el tirador?

El análisis debe incluir las restricciones para ese análisis, y por eso siempre hay que poner las dos condiciones que deben cumplir las distribuciones de probabilidad.

$$s_1 = \{D, I\} \quad P_1 = \{\underbrace{(\sigma_1(D), \sigma_1(I))}_{\substack{\text{vector que representa} \\ \text{la distribución de} \\ \text{probabilidad} \\ \text{para el jugador 1}}}; \sigma_1(D) \geq 0, \sigma_1(I) \geq 0; \sigma_1(D) + \sigma_1(I) = 1\}$$

$$s_2 = \{D, I\} \quad P_2 = \{\underbrace{(\sigma_2(D), \sigma_2(I))}_{\substack{\text{vector que representa} \\ \text{la distribución de} \\ \text{probabilidad} \\ \text{para el jugador 2}}}; \sigma_2(D) \geq 0, \sigma_2(I) \geq 0; \sigma_2(D) + \sigma_2(I) = 1\}$$

$$\sigma_1(s_1) \geq \forall s_1 \in S_1$$
$$\sigma_2(s_2) \geq \forall s_2 \in S_2$$

Esta es una manera de resumir la no negatividad en una sola expresión.

El vector debe ir entre paréntesis; si se le quitan los paréntesis diría que son elementos separados y estaría incorrecto. Como en ese caso para los dos son iguales, se pudo haber hecho en i.

$$s_1 = \{D, I\} \quad \Delta S_1 = \{(\sigma_1(D), \sigma_1(I)); \sigma_1(D) \geq 0, \sigma_1(I) \geq 0; \sigma_1(D) + \sigma_1(I) = 1\}$$
$$s_2 = \{D, I\} \quad \Delta S_2 = \{(\sigma_2(D), \sigma_2(I)); \sigma_2(D) \geq 0, \sigma_2(I) \geq 0; \sigma_2(D) + \sigma_2(I) = 1\}$$

■

■ **Ejemplo 10.2 — Piedra-papel-tijeras.** Ahora podemos pasar a ver el ejemplo de piedra-papel-tijeras.

J_1 \ J_2	*Piedra*	*Papel*	*Tijera*
Piedra	$0,0$	$-1,1$	$1,-1$
Papel	$1,-1$	$0,0$	$-1,1$
Tijera	$-1,1$	$1,-1$	$0,0$

Es un juego de suma cero, y por ende no hay correspondencia de mejor respuesta, por lo que no va a haber equilibrio de Nash en estrategias puras. Entonces no habría solución por equilibrio de Nash porque no se restringe nada.

Entonces en estrategias mixtas hay que hacer una distribución de probabilidad sobre las estrategias del jugador. La definición de la forma normal va a ir creciendo. Y hay que definir las estrategias mixtas sobre todos los jugadores. Establezca la Mejor Respuesta del jugador 2 ante la estrategia del jugador 1:

$$MR_2(s_1) = \begin{cases} Papel \text{ si } s_1 = Piedra \\ Tijeras \text{ si } s_1 = Papel \\ Piedra \text{ si } s_1 = Tijeras \end{cases}$$

$$\Gamma : \langle N, \{A_i\}_{i=1}^n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v(\cdot)\}_{i=1}^n, \{\Delta S_i\}_{i=1}^n \rangle$$

- $N = \{1,2\}$ donde 1 es el jugador #1 y 2 es el jugador #2
- $A_i = \{R,P,T\}$ donde R es jugar piedra, P es jugar papel y T es jugar tijeras $\forall i \in N$
- $S_i = \{R,P,T\}$ donde R es jugar piedra, P es jugar papel y T es jugar tijeras $\forall i \in N$
- $v_i(s_i,s_j) \rightarrow$ forma matricial
- $\Delta S_i = \{(\sigma_i(R), \sigma_i(P), \sigma(T)) : \sigma_i(R) \geq 0; \sigma_i(P) \geq 0, \sigma_i(T) \geq 0; \sigma_i(R) + \sigma_i(P) + \sigma_i(T) = 1\} \quad \forall i \in N$

■

10.1 Estrategias, Creencias y Pagos Esperados

Concepto de estrategias estocásticas:

Definición 10.1 Sea $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{im}\}$ un conjunto finito de estrategias puras del jugador i. Se define ΔS_i el simplex de S_i.

Las estrategias mixtas del jugador i corresponden a un elemento $\sigma_i \in \Delta S_i$ tal que $\sigma_i = \{\sigma_i(s_{i1}, \sigma_i(s_{i2}), \ldots, \sigma_{im})\}$ es la distribución de probabilidad sobre S_i, donde $\sigma_i(s_i)$ es la probabilidad de que el jugador i elija la estrategia s_i.

Dada una estrategia mixta $\sigma_i(\cdot)$ para el jugador i, diremos que una estrategia pura $s_i \in S_i$ apoya $\sigma_i(\cdot)$ si y solo si s_i ocurre con una probabilidad positiva, es decir $\sigma_i(s_i) > 0$.

Definición 10.2 Sea S_i el conjunto de estrategias puras del jugador i que se mueve en un intervalo. Una estrategia mixta del jugador i es una función de distribución acumulada $F_i : S_i \rightarrow [0,1]$ donde $F_i(x) = Pr\{s_i \leq x\}$. Si $F(\cdot)$ es diferenciable con densidad $f_i(\cdot)$ entonces $s_i \in S_i$ está en el dominio de $F(\cdot)$ y $f_i(s_i) > 0$.

Recuerde que toda distribución de probabilidad debe cumplir:

- $\sigma_i(s_i) \geq 0$ para toda $s_i \in S_i$
- $\sum\limits_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$

Como una probabilidad debe estar entre 0 y 1, se pueden encontrar infinitas distribuciones de probabilidad que cumplan eso. A continuación se definen las estrategias mixtas:

$$\Delta S_i = \{(\sigma_i(R), \sigma_i(P), \sigma(T)) : \sigma_i(R) \geq 0; \sigma_i(P) \geq 0, \sigma_i(T) \geq 0; \sigma_i(R) + \sigma_i(P) + \sigma_i(T) = 1\} \quad \forall i \in N$$

Como es de suma cero, lo que gana uno lo pierde el otro (como en lanzamiento de penales) y entonces no va a haber correspondencia de mejor respuestas.

- Defina la estrategias puras y las estrategias mixtas para el juego de las monedas.
- Defina la estrategias puras y las estrategias mixtas para el juego de Piedra-Papel-Tijera.

  Las estrategias mixtas para el jugador i:

  $$\Delta S_i = \{(\sigma_i(I), \sigma_i(D)) : \sigma_i(I) \geq 0, \sigma_i(D) \geq 0, \sigma_i(I) + \sigma_i(D) = 1\}$$

  Para el análisis se puede definir:

   - $\alpha = \sigma_1(R)$, $\beta = \sigma_1(P)$ por complemento $1 - \alpha - \beta = \sigma_1(T)$
   - $\omega = \sigma_2(R)$, $\lambda = \sigma_2(P)$ por complemento $1 - \omega - \lambda = \sigma_2(T)$

  Las estrategias puras son un caso particular de las estrategias mixtas. Una estrategia pura es una estrategia degenerada de una estrategia mixta.

Los supuestos para un equilibrio Nash son:

- Racionalidad
- Creencias
- Creencias correctas

Como para el equililbrio de Nash hacen falta creencias, y que además dichas creencias sean correctas, hace falta generar una distribución de probabilidad sobre lo que se crea que va a hacer el oponente.

11. Creencias

Definición 11.1 Una creencia para el jugador i viene dada por una distribución de probabilidad $\pi_i \in \Delta S_{-i}$ sobre las estrategias de sus oponentes.

Se denota $\pi_i \in \Delta s_{-i}$ la probabilidad de que el jugador i le asigna a que sus oponentes jueguen $s_{-i} \in S_{-i}$.

$$\Gamma : \langle N, \{A_i\}_{i=1}^n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v(\cdot)\}_{i=1}^n, \underbrace{\{\Delta S_i\}_{i=1}^n, \{\pi_i(s_{-i}\}_{i=1}^n}_{creencias}\rangle$$

Entonces, se tiene una probabilidad del jugador 1, con la que cree que el jugador 2 va a jugar cierta estrategia. Entonces ocupo una creencia de que el jugador 2 juegue piedra, papel o tijera.

- Defina las creencias en el juego de las monedas
- Defina las creencias en el juego de Piedra-Papel-Tijera

  El juego de Piedra-Papel-Tijera: Ahora, qué pasa con la matriz? → perdimos la izquierda.

		J_2	
	Piedra	*Papel*	*Tijera*
J_1 *Piedra*	$0,0$	$-1,1$	$1,-1$
J_1 *Papel*	$1,-1$	$0,0$	$-1,1$
J_1 *Tijera*	$-1,1$	$1,-1$	$0,0$

Establezca la Mejor Respuesta del jugador 2 ante la estrategia del jugador 1:

$$MR_2(s_1) = \begin{cases} Papel \text{ si } s_1 = Piedra \\ Tijeras \text{ si } s_1 = Papel \\ Piedra \text{ si } s_1 = Tijeras \end{cases}$$

$$s_1 = \{R, P, T\}$$
$$s_2 = \{R, P, T\}$$

$$\Delta S_i = \{(\sigma_i(R), \sigma_i(P), \sigma_i(T)); \sigma_i(R) \geq 0, \sigma_i(P) \geq 0, \sigma_i(T) \geq 0; \\ \sigma_i(R) + \sigma_i(P) + \sigma_i(T) = 1\} \quad \forall i \in N$$

Faltan las creencias:

$$\pi_1(s_2) = \{(\pi_1(R), \pi_1(P), \pi_1(T));$$
$$\pi_1(s_2) \geq 0 \quad \forall \quad s_2 \in S_2, \sum_{s_2 \in S_2} \pi_1(s_2) = 1\}$$

Entonces: en las estrategias mixtas es

$$\sigma_{i(s_{i1})}$$

Mientras que en las creencias es

$$\pi_{i(s_{-i})}$$

Es decir, las estrategias mixtas del jugador i son la distribución de probabilidad de las estrategias puras del jugador i, mientras que las creencias del jugador i son la distribución de probabilidad sobre las estrategias puras de los demás jugadores.

Aquí ya no es recomendado definir los pagos en términos de i, si no hacerlo para cada jugador individualmente.

Ya se tienen las estrategias mixtas y las creencias. Ahora lo que sigue es definir los pagos esperados.

11.1 Pagos esperados

Los pagos esperados se vienen trabajando desde hace tiempo. Ahora lo que cambia es que hay una interacción entre la probabilidad de ocurrencia de las estrategias que los otros jugadores jueguen y lo que uno juegue. Entonces lo que se necesita saber es la distribución de probabilidad que sigue el oponente y así poder saber los pagos que se van obtener si se sigue una estrategia y el otro jugador sigue otra estrategia.

Definición 11.2 Los pagos esperados del jugador i cuando elige entre estrategias puras $s_i \in S_i$ y sus oponentes juegan estrategias mixtas $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ es

$$v_i(s_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}(s_{-i}) v_i(s_i, s_{-i})$$

Los pagos esperados del jugador i cuando elige entre estrategias mixtas $\sigma_i \in \Delta S_i$ y sus oponentes juegan estrategias mixtas $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ is

$$v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_i(s_i) v_i(s_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \left(\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_i(s_i) \sigma_{-i}(s_{-i}) v_i(s_i, s_{-i}) \right)$$

Entonces se tiene el juego

J_1 \ J_2	Derecha	Izquierda
Derecha	$1, -1$	$-1, 1$
Izquierda	$-1, 1$	$1, -1$

Y ahora hay que asignale un nombre a la probabilidad de que tome una u otra decisión. Para el jugador 1, digamos p:

		J_2 Derecha	J_2 Izquierda
J_1	Derecha p	$1,-1$	$-1,1$
J_1	Izquierda $1-p$	$-1,1$	$1,-1$

$$\sigma_1(D) = p$$
$$1-\sigma_1(D) = \sigma_1(I) = 1-p$$

Entonces p se definió como la probabilidad de que 1 juegue ir a la Derecha, y por complemento, ir a la izquierda tiene que ser 1 menos la probabilidad de ir a la Derecha.

Entonces, siguiendo la definición, el pago esperado para el jugador 1 sería:

$$1(p)+-1(1-p) = v_2(\sigma_1, D) = 2p-1$$

Pero p es una distribución de probabilidad sobre las acciones de 1. Ahora se ocupa el pago cuando el jugador 2 juega I.

$$-1p+1(1-p) = v_2(\sigma_1, I) = 1-2p$$

Ahora, hay que buscar cuál es la distribución de probabilidad del jugador #1 que deje al jugador #2 indiferente entre jugar tanto derecha como izquierda. Entonces hay que encontrar la indiferencia igualando los pagos de ambas acciones para el jugador 2 dada la estrategia mixta del jugador 1.

Indiferencia:

$$\begin{aligned} v_2(\sigma_1, D) &= v_2(\sigma_1, I) \\ \Leftrightarrow 2p-1 &= 1-2p \\ \Leftrightarrow 2p+2p &= 1+1 \\ \Leftrightarrow 4p &= 2 \\ \Leftrightarrow p &= \frac{2}{4} \\ &\boxed{\Leftrightarrow p = \tfrac{1}{2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se sabe que:

$$\sigma_1(D) = 0.5$$

Por complemento:

$$\sigma_1(I) = 0.5$$

Así, esta es la distribución de probabilidad para el jugador 1 que deja indiferente al jugador 2. Ahora, hay que hacer lo mismo para el jugador 2. Este juego, además de ser suma cero, además es simétrico.

		J_2 Derecha q	J_2 Izquierda $1-q$
J_1	Derecha p	$1,-1$	$-1,1$
J_1	Izquierda $1-p$	$-1,1$	$1,-1$

Por lo tanto, por ser simétrico y suma cero van a dar lo mismo:

$$\begin{aligned} q &= \sigma_2(D) \\ q &= 0.5 \\ 1-q &= \sigma_2(I) \\ 1-q &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\sigma_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Por lo tanto $\sigma_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ deja indiferente al jugador 1 entre jugar Derecha o Izquierda.

Entonces en realidad estamos encontrando los puntos a partir de los cuales se toman las decisiones, ya que justamente entontramos los momentos de indiferencia.

$$v_2(\sigma_1, D) = 2p-1 \qquad 1-2p = v_2(\sigma_1, I)$$

- $p = \frac{1}{2} \Rightarrow \underset{0}{v_2(\sigma_1, D)} = \underset{0}{v_2(\sigma_1, I)}$
- $\underset{p=1}{p > \frac{1}{2}} \Rightarrow \underset{1}{v_2(\sigma_1, D)} > \underset{-1}{v_2(\sigma_1, I)}$
- $\underset{p=0}{p < \frac{1}{2}} \Rightarrow \underset{-1}{v_2(\sigma_1, D)} < \underset{1}{v_2(\sigma_1, I)}$

Como las probabilidades se mueven de 0 a 1, lo que se recomienda es tomar siempre el límite extremo para ilustrar cómo evalúan en esos intervalos los pagos de las decisiones. Entonces así, ya se tiene la solución, lo que haría falta sería el dato, por ejemplo saber si en la práctica el pateador se inclina a patear más de un lado o del otro.

$$Pateador \quad \sigma_1^* = (\overset{p}{\frac{1}{2}}, \overset{1-p}{\frac{1}{2}})$$

$$Portero \quad \sigma_2^* = (\overset{a}{\frac{1}{2}}, \overset{1-q}{\frac{1}{2}})$$

Nótese que la distribución de probabilidad del jugador 1 se hace utilizando los pagos del jugador 2 $\rightarrow$ en el fondo lo que se está haciendo es incorporar las creencias del otro jugador. Como las creencias tienen que ser correctas, entonces entre las estrategias mixtas y las creencias deben ser iguales para que las creencias sean correctas.

Por eso entonces en los pagos esperados,

$$v_2(\overset{\pi_2}{\sigma_1}, D) = 2p-1 \qquad 1-2p = v_2(\overset{\pi_1}{\sigma_1}, I)$$

la estrategia mixta del jugador 1 debe ser igual a la creencia que tiene el jugador 2 y viceversa.

Vamos a hacer la probabilidad de la q para salir de la duda y verlo explícitamente:

$$\begin{aligned} v_1(D, \sigma_2) &= -1(q) + 1(1-q) = -q + 1 - q = 1 - 2q \\ v_1(I, \sigma_2) &= 1(q) + (-1)(1-q) = q - 1 + q = 2q - 1 \end{aligned}$$

Ahora hay que ver la indiferencia:

$$\begin{aligned} v_1(D, \sigma_2) &= v_1(I, \sigma_2) \\ \Leftrightarrow 1 - 2q &= 2q - 1 \\ \Leftrightarrow 2 &= 4q \\ &\boxed{\Leftrightarrow \tfrac{1}{2} = q} \end{aligned}$$

$$\sigma_2^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Entonces, importante: para el calcular el pago de 1 se tiene la estrategia pura de 1 y la mixta de 2. Para calcular el pago de 2 se usa la mixta del 1 y la pura de 2.

Uno sabe que el juego es simétrico a partir de la diagonal: se tienen los mismos pagos arriba y abajo de la diagonal.

Por lo tanto, el equilibrio de Nash sería:

$$S^N = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$$

También se podría poner en términos de p y q.

Ahora vamos a volver nuevamente a pidra, papel y tijeras para ver cómo sería con más de dos acciones.

$$\begin{aligned} \Delta S_i = \{(\sigma_i(R), \sigma_i(P), \sigma_i(T)); \sigma_i(R) \geq 0, \sigma_i(P) \geq 0, \sigma_i(T) \geq 0; \\ \sigma_i(R) + \sigma_i(P) + \sigma_i(T) = 1\} \quad \forall i \in N \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \sigma_1(R) &= \alpha \\ \sigma_2(P) &= \beta \\ \sigma_1(T) &= 1 - \alpha - \beta \end{aligned}$$

		J_2		
		Piedra	*Papel*	*Tijera*
J_1	*Piedra*	$0, 0$	$-1, 1$	$1, -1$
	Papel	$1, -1$	$0, 0$	$-1, 1$
	Tijera	$-1, 1$	$1, -1$	$0, 0$

$$\begin{aligned} v_2(\sigma_1, R) = 0(\alpha) + (-1)(\beta) + (1)(1 - \alpha - \beta) = -\beta + 1 - \alpha - \beta = 1 - \alpha - 2\beta \\ v_2(\sigma_1, P) = 1(\alpha) + 0(\beta) + (-1)(1 - \alpha - \beta) = \alpha - 1 + \alpha + \beta = 2\alpha + \beta - 1 \\ v_2(\sigma_1, T) = (-1)(\alpha) + 1(\beta) + 0(1 - \alpha - \beta) = -\alpha + \beta \end{aligned}$$

Y la indiferencia sería:

$$\begin{aligned} v_2(\sigma_1, R) = v_2(\sigma_1, P) = v_2(\sigma_1, T) \\ \Leftrightarrow 1 - \alpha - 2\beta = 2\alpha + \beta - 1 = -\alpha + \beta \end{aligned}$$

Tome primero solo dos:

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta - 1 &= -\alpha + \beta \\ \Leftrightarrow 2\alpha + \alpha &= 1 + \beta - \beta \\ \Leftrightarrow 3\alpha &= 1 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Y luego sustituyendo en la primera ecuación:

$$\begin{aligned}
1-\alpha-2\beta = 1-\frac{1}{3}-2\beta = \frac{2}{3}-2\beta \\
\Leftrightarrow \frac{2}{3}-2\beta = -\frac{1}{3}+\beta \\
\Leftrightarrow \frac{2}{3}+\frac{1}{3} = \beta+2\beta \\
\Leftrightarrow 1 = 3\beta \\
\Leftrightarrow \frac{1}{3} = \beta
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$1-\alpha-\beta = 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

12. Teorema de Nash

Definición 12.1 — Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas. Un perfil de estrategias mixtas $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ es un equilibrio de Nash si para cada jugador i, σ^i es la mejor respuesta a σ^{-i} . Para todo $i \in N$

$$v_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \quad \forall \sigma_i \in \Delta S_i$$

Definición 12.2 — Indiferencia entre estrategias puras. Si σ^* es un equilibrio de Nash, y las estrategias σ_i y σ'_{-i} respaldan σ_i^*, entonces

$$v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = v_i(s_i', \sigma_{-i}^*) = v_i(\sigma^*, \sigma_{-i}^*)$$

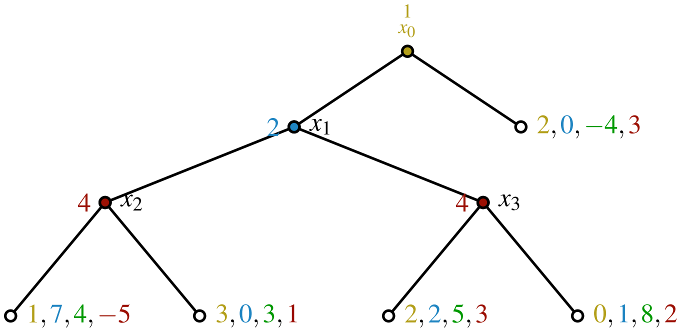
Sobre el equilibrio de Nash:

- El equilibrio de Nash requiere que las creencias de los jugadores sean correctas
- El perfil de estrategias mixtas σ^* captura la creencia incierta sobre todas las estrategias puras que pueden jugar los oponentes del jugador i
- La racionalidad requiere que un jugador tenga la mejor respuesta dadas sus creencias
- Las estrategias mixtas amplían la noción de racionalidad permitiendo la existencia de incertidumbre

III Juegos dinámicos con información completa

Ahora sigue retomar conjuntos de información. Es importante recordar que en los árboles de los juegos, todos los *'aquí'*, tienen un nombre: $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Donde se unen dos líneas, son nodos.

Hay nodos de decisión. Por ejemplo:



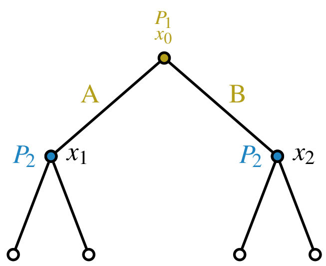
- El jugador 1 tiene 1 conjunto de información
- El jugador 2 tiene 2 conjuntos de información
- El jugador 4 tiene 2 conjuntos de información

Ahora hay que formalizar el concepto de conjunto de información.

Definición 12.3 Cada jugador i tiene un conjunto de información $h_i \in H_i$ que divide los nodos del juego en los cuales puede mover, según:

1. Si h_i es un conjunto único e incluye solo a x el jugador i sabe que está en x.
2. Si $x \neq x'$ y si $x \in h_i$ y $x' \in h_i$ entonces el jugador i al que le corresponde mover, no sabe si está en x o x'.
3. Si $x \neq x'$ y si ambos $x \in h_i$ y $x' \in h_i$ entonces $A_i(x') = A_i(x)$.

Todos los conjuntos de información del jugador i, pertenecen a la historia de ese jugador i, que es H_i. Si es el único, se sabe que tiene que ser ese nodo en particular y por ende sabría en dónde está.



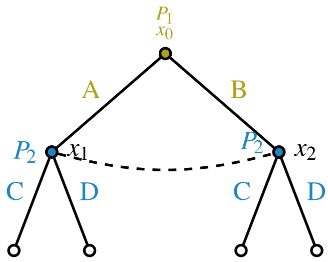
Pero, el jugador 2 tiene dos nodos y dos conjuntos de información. Cada conjunto de información nace de una toma de decisiones, y cada conjunto puede tener uno, o varios nodos. Si se tienen nodos únicos, se sabe que se está en ese nodo particular. Pero, si en un conjunto de información hay varios nodos, tienen que tener las mismas acciones, dado que, de lo contrario, si tienen acciones distintas, se podría distinguir un nodo de otro, implicando que puede saber en dónde está.

Entonces por ejemplo, el jugador 1 solo tiene un conjunto de información, y ese conjunto únicamente tiene un nodo, por lo que el jugador 1 siempre sabe dónde está.

Entonces, ahora la forma normal se va a extender para incluir más información; va a haber que definir los conjuntos de información.

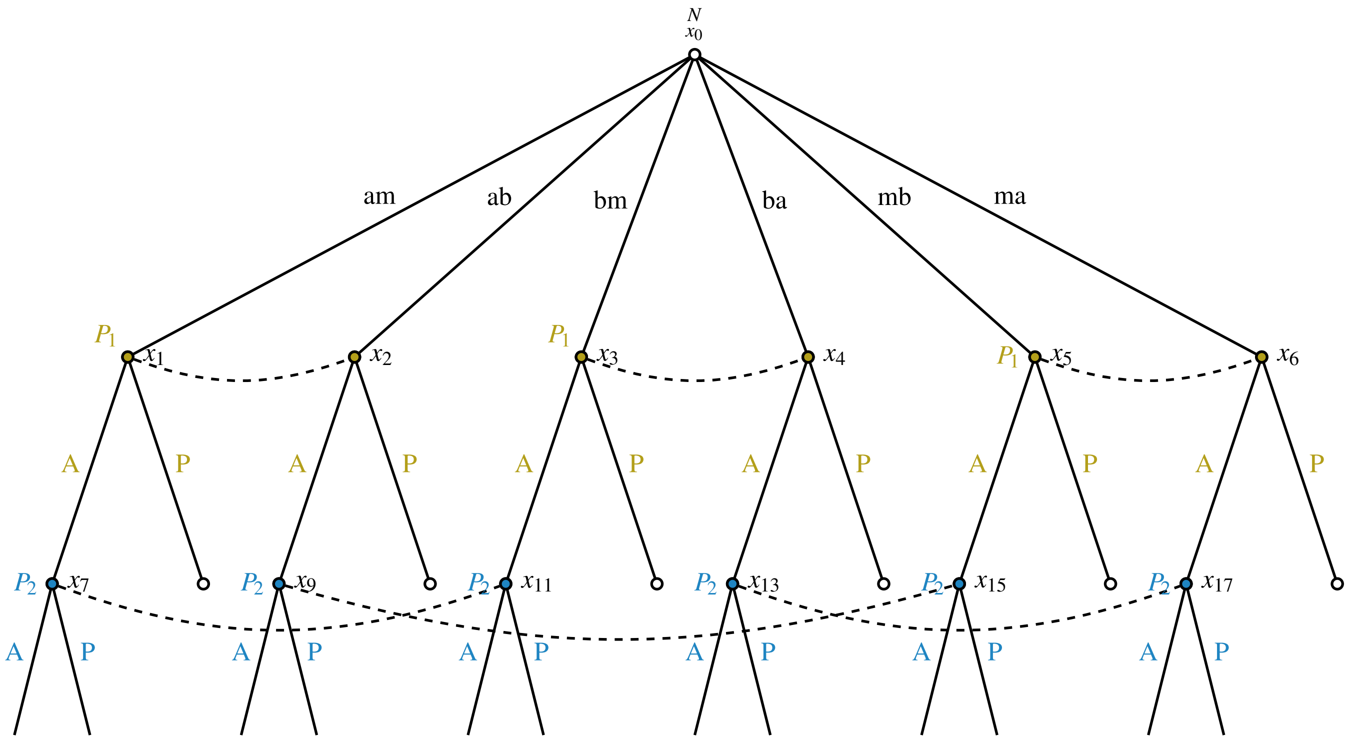
Definición 12.4 Un juego donde cada conjunto de información es único y la naturaleza no juega es un **juego con información perfecta**. Un juego en el que algunos conjuntos de información tienen varios nodos o en el que la naturaleza juega es un **juego con información imperfecta**.

En el momento en que no se sepa con exactitud en cuál nodo se está, se vuelve un juego de información incompleta. Si juega la naturaleza automáticamente es un juego de información incompleta. También es de información incompleta con que, al menos en un conjunto de información, haya más de un nodo. Por ejemplo:



La única manera en que puede haber información perfecta es que todos los conjuntos de información únicamente tengan un solo nodo y, además, no juegue la naturaleza.

■ **Ejemplo 12.1** Las cartas



A veces hay que leer bien los ejercicios para ver bien cuáles son las acciones, porque no necesariamente siempre son lo primero que aparecen.

Ahora vamos a ver las estrategias, que son el plan de acción completo que se lleva a cabo antes de que inicie el juego.

12.1 Estrategias

El jugador 1 tiene tres conjuntos de información.

- $h_1^1 = \{x_1, x_2\}$
- $h_1^2 = \{x_3, x_4\}$
- $h_1^3 = \{x_5, x_6\}$

Le corresponde tomar decisiones en 3 lugares distintos, una vez en cada conjunto de información. La decisión se toma en el conjunto de información. Entonces, los nodos que están en el mismo conjunto de información, tienen que tener las mismas acciones. Ahora hay que ver las acciones que puede seguir el jugador 1 en cada conjunto de información.

- $A_1(h_1^1) = \{A, P\}$
- $A_1(h_1^2) = \{A, P\}$
- $A_1(h_1^3) = \{A, P\}$

Ya se tienen los conjuntos de información y las acciones del jugador 1.

En estos ejercicios no es tan fácil alterar los juegos. Cada cambio puede traer situaciones totalmente distintas y sería un juego nuevo completamente.

- $h_2^1 = \{x_7, x_{11}\}$
- $h_2^2 = \{x_9, x_{15}\}$
- $h_2^3 = \{x_{13}, x_{17}\}$

Ya se tienen los conjuntos de información, lo cual permite definir las acciones, y las acciones se ocupan para poder definir las estrategias. Ahora, con las estrategias: hay que definir las estrategias puras en cada conjunto de información, pero hay una particularidad: ¿cuántas estrategias puras se van a tener? $\rightarrow$ dependiendo de cuántas acciones tenga en cada conjunto de información que juega.

Definición 12.5 Una estrategia pura para el jugador i es una de la estrategias $s_i : H_i \rightarrow A_i$ que asigna una acción $s_i(h_i) \in A_i(h_i)$ para cada conjunto de información $h_i \in H_i$. Se denota con S_i el conjunto de todas las estrategias puras tal que $s_i \in S_i$. La cantidad de estrategias puras del jugador i se define como:

$$|S_i| = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$$

donde m_k corresponde a la cantidad de acciones (m) que puede tomar el jugador en cada conjunto de información (k) en un juego secuencial.

En el ejemplo anterior se tienen dos acciones en tres conjuntos de información, por lo tanto:

$$|S_1| = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$S_1 = \{AAA, AAP, APP, APA, PAA, PPA, PPP, PAP\}_{\overline{a\,b\,m}}$$

Esto significa que el jugador tiene 8 estrategias puras.

Las estrategias se leen como la acción que puede seguir en cada conjunto de información. Como hay 3 conjuntos de información, tiene que haber tres acciones por estrategia. Esto se lee, por ejemplo: PAP: en el conjunto de información 1 pasa, en el conjunto de información 2 apuesta y en el conjunto de información 3 pasa. $\rightarrow$ para esto sirve la "guía del ahorcado" (las rayitas al final del conjunto de estrategias que indican en qué orden va cada acción).

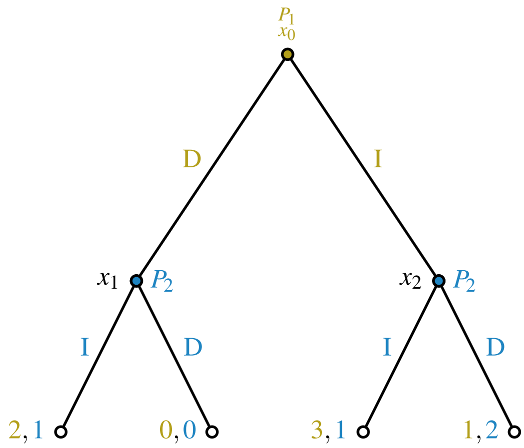
Entonces, primero se identificó los conjuntos de información, para luego definir las estrategias puras para ya luego poder identificar las estrategias.

■ **Ejemplo 12.2 — Derecha o izquierda.** Considere un juego con dos jugadores, cada jugador puede ir a la izquierda o a la derecha, el jugador 1 juega primero, el juego se forma secuencial, y sólo juega una vez cada jugador.

- Si ambos jugadores van a la izquierda J_1 obtiene 3 y J_2 obtiene 1
- Si ambos jugadores van a la derecha J_1 obtiene 0 y J_2 obtiene 0
- Si J_1 va a la izquierda y J_2 va a la derecha, J_1 obtiene 1 y J_2 obtiene 2
- Si J_1 va a la derecha y J_2 va a la izquierda, J_1 obtiene 2 y J_2 obtiene 1

Usualmente se pide la forma extensiva antes de la forma normal.

1. Establezca el juego en forma extensiva



En este caso el juego es de información perfecta. En las instrucciones no dice que no sepa, entonces es porque sí sabe. Secuencial se puede tomar como seguro que se saben las decisiones de los demás excepto, que se diga que no se sabe.

Ahora hay que ver los conjuntos de información para cada jugador.

2. Establezca los conjuntos de información para J_1 y J_2
   - $h_1^0 = \{x_0\}$
   - $h_2^1 = \{x_1\}$
   - $h_2^2 = \{x_2\}$

   Ahora hay que ver las acciones del jugador 1, las cuales se tienen que especificar por conjunto de información.
3. Determine las acciones para J_1 y J_2
   - $A_1(h_1^0) = \{D, I\}$
   - $A_2(h_2^1) = \{D, I\}$
   - $A_2(h_2^2) = \{D, I\}$
4. Determina las estrategias puras de J_1 y J_2

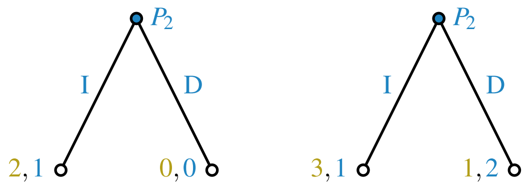
$$|S_1| = 2 \cdot 1 = 2$$
$$|S_2| = 2 \cdot 2 = 4$$

$$S_1 = \{D, I\}$$
$$S_2 = \{DD, DI, II, ID\}_{\overline{DI}}$$

   Nótese que para el jugador 2, estar en el conjunto de información 1 significa que el jugador 1 jugó derecha, mientras que estar en el conjunto de información significa que el jugador 1 jugó izquierda. Solo quedaría faltando la matriz de pagos. Al jugador 1 se le ponen las filas y al 2 las columnas.
5. Establezca la matriz de pagos del juego

		P_2			
		DD	DI	II	ID
P_1	D	0, 0	0, 0	2, 1	2, 1
	I	1, 2	3, 1	3, 1	1, 2

   Note que DD se lee, por ejemplo, que el jugador 2 va a la derecha si el jugador 1 juega derecha, y el jugador 2 juega derecha si el jugador 1 juega izquierda. Los pagos se asignan viendo el árbol y los distintos caminos.



Entonces, por ejemplo, (D,DD) significa que el jugador 1 juega derecha, y el jugador 2 juega derecha si el jugador 1 juega derecha y el jugador 2 juega derecha si el jugador 1 juega izquierda. Así, entonces el pago que se materializa es (0,0). En el caso (D,DI) lo que pasa es que el jugador 1 juega derecha, mientras que el jugador 2 juega derecha si el jugador 1 juega derecha y juega izquierda si el jugador 1 juega izquierda. Por lo tanto, el pago es (0,0). Si fuera (D,II) el jugador 1 juega derecha, y el jugador 2 jugaría izquierda si el jugador 1 juega derecha y jugaría izquierda si el jugador 1 jugara izquierda, por lo que el pago es (2,1).

Ya está la forma extensiva, los conjuntos de información, las acciones, las estrategias y la matriz de pagos. Lo único que faltaría es encontrar los equilibrios de Nash. Hay que encontrar las mejores respuestas:

P_1 \ P_2	DD	DI	II	ID
D	$0,0$	$0,0$	$2,\underline{1}$	$\underline{2},\underline{1}$
I	$\underline{1},\underline{2}$	$\underline{3},1$	$\underline{3},1$	$1,\underline{2}$

Entonces habrían dos equilibrios de Nash en estrategias puras:

$$S^N = \{(I,DD),(D,ID)\}$$

El detalle es que cuando hay un juego de información completa y perfecta, llevan una única solución si dos nodos no llevan al mismo pago. Noten que cuando el jugador 1 juega izquierda, por pagos, el jugador 2 debería jugar derecha (1,2) y si el jugador 1 jugara derecha, el jugador 2 jugaría izquierda (2,1). Ahora, el jugador 1 puede escoger entre derecha e izquierda, y elegiría jugar derecha. Por lo tanto, jugarían derecha (el jugador 1) e izquierda (el jugador 2), por lo tanto, de esos equilibrios de Nash sobreviviría (D,ID).

Entonces, un jugador racional: si el jugador 1 va a la izquierda, ¿jugaría izquierda? $\rightarrow$ no, jugaría derecha porque le genera mayores pagos.

Esto se puede hacer cuando la información es un juego de información completa y perfecta. ■

Una pregunta típica del segundo parcial es preguntar cuántas estrategias tiene el jugador j, si tiene 5 conjuntos de información y cada conjunto tiene 3 estrategias $\rightarrow$ aquí se pregunta **cuántas**, no cuáles, no habría que escribirlas.

13. Estrategias mixtas

Una estrategia mixta sería una distribución de probabilidad para cada estrategia pura del jugador. Ahora lo que pasa es que se van a tener estrategias de comportamiento adicionalmente. La forma normal va a crecer, y lo único que se puede dejar son las creencias.

Entonces, aunque el jugador tenga en dos conjuntos de información las mismas acciones, no está obligado a comportarse de igual manera en uno u otro. Eso quiere decir que hay estrategias mixtas que corren sobre las estrategias puras, pero adicionalmente va a haber estrategias de comportamiento, las cuales definen la distribución de probabilidad cada vez que al jugador le toque jugar en cada conjunto de información.

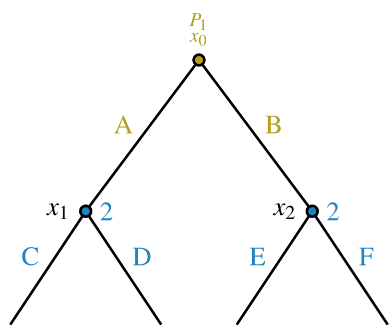
Tanto en mixtas como puras, las probabilidades tienen que sumar 1. En cada conjunto de información se puede comportar diferente, por lo cual, las probabilidades asignadas a cada acción puede variar de conjunto a conjunto.

Definición 13.1 Una estrategia mixta para el jugador i es una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras $s_i \in S_i$.

Definición 13.2 Una estrategia de comportamiento es una distribución de probabilidad específica e independiente sobre $A_i(h_i)$ para cada conjunto de información $h_i \in H_i$ y se denota como $\sigma_i : H_i \to \Delta A_i(h_i)$, donde $\sigma_i(a_i(h_i))$ es la probabilidad de que el jugador i realice la acción $a_i(h_i) \in A_i(h_i)$ en el conjunto de información h_i.

Las estrategias de comportamiento lo que dicen es que, si cada vez que hay un conjunto de información se puede tomar una decisión, no necesariamente se tienen que combinar esas acciones de la misma manera en todos los conjuntos. Se pueden tener distintos comportamientos en uno u otro nodo.

En todas las historias se va a tener una estrategia de comportamiento asociada a esas acciones que se pueden seguir en ese conjunto de información. Véase por ejemplo el siguiente árbol:



El Jugador 2 tiene 4 estrategias puras. Serían:

$$S_2 = \{CE, CF, DE, DF\}_{\substack{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\\ R\,N}}$$
$$|S_2| = 4$$

Y las estrategias mixtas del jugador 2 serían:

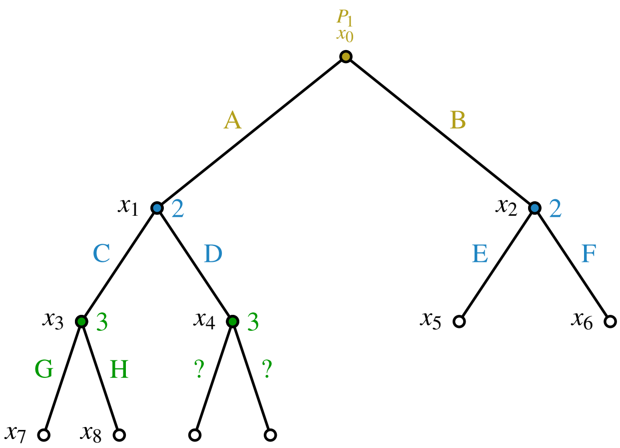
$$\Delta S_A = \{(\sigma_2(CE), \sigma_2(CF), \sigma_2(DE), \sigma_2(DF)); \ldots\}$$

Ese sería el vector de estrategias mixtas. Es la distribución de probabilidad de ocurrencia de cada una de las estrategias puras. Las estrategias de comportamiento lo que dicen es que si 2 está en un conjunto de información determinado, y sabe dónde está, puede definir una estrategia mixta cuando está en el conjunto de información 1.

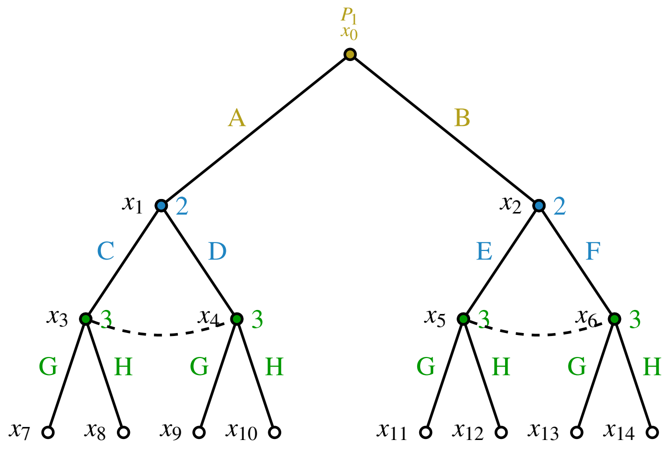
$$\Delta A_2(h_2^1) = \{\underbrace{(\sigma_2(C), \sigma_2(D))}_{\Sigma=1}; \ldots\}$$
$$\Delta A_2(h_2^2) = \{\underbrace{(\sigma_2(E), \sigma_2(F))}_{\Sigma=1}; \ldots\}$$

La idea es que estando en el conjunto de información tal, puedo elegir entre hacer una u otra acción, luego para el otro nodo, se puede elegir entre una u otra opción también. Las estrategias de comportamiento no son ni cortar ni distribuir nada, sino reconocer que si la persona llega a un punto específico, se comporta de una manera diferente. Las estrategias mixtas y las de comportamiento son distribuciones diferentes.

Pero ahora, ¿qué pasaría si más bien hubiera un jugador 3? A continuación se ve:



Nótese que los nodos x_3 y x_4 están en el mismo nodo, así que tienen que tener las mismas acciones. Entonces completo (y añadiendo más), el árbol debería verse así:



El jugador 3 tiene dos conjuntos de información.

$$
\begin{aligned}
|h_3| &= 2 \\
h_3^1 &= \{x_7, x_8\} \\
h_3^2 &= \{x_9, x_10\}
\end{aligned}
$$

Ya se sabe cuántos conjuntos de información tiene y cuáles son, ahora hay que ver qué puede hacer o seguir en cada conjunto:

$$
\begin{aligned}
A_3(h_3^1) &= \{G, H\} \\
A_3(h_3^2) &= \{I, J\}
\end{aligned}
$$

Tiene dos conjuntos de información con dos estrategias en cada uno, por lo tanto tiene 4 estrategias puras.

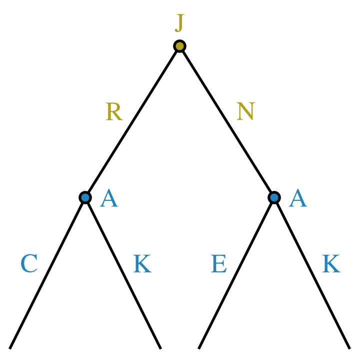
$$|S_3| = 2 \cdot 2 = 4$$

Las estrategias puras del jugador 3 serían:

$$S_3 = \{GI, GJ, HI, HJ\}_{\substack{\overline{x_1}\,\overline{x_2} \\ R\,N}}$$

Y las estrategias de comportamiento dirían:

Ahora, veamos otro juego: un profesor (Jonathan) que puede hacer un examen (revienta R o no revienta N) y un estudiante (Andell) que puede (irse a la casa C, irse al karaoke K o estudiar E):



El profesor tiene dos estrategias puras y Andell tiene 4 estrategias puras.

$$S_A = \{CE, CK, KE, KK\}_{\underline{}\ \substack{x_1 \\ R}\ \substack{x_2 \\ N}}$$

$$|S_A| = 4$$

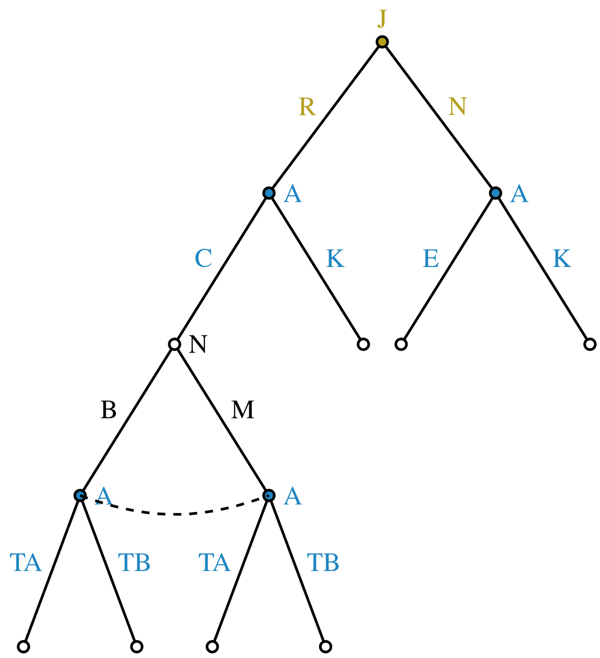
$$\Delta S_A = \{(\sigma_A(CE), \sigma_A(CK), \sigma_A(KE), \sigma_A(KK)); \ldots\}$$

Esas serían las estrategias puras y las mixtas, faltarían las estrategias del comportamiento. Nótese que viene la acción de ir al karaoke en dos ocasiones. Cada una proviene de un nodo distinto, entonces cada una puede tener una distribución de probabilidad distinta. Si el profesor revienta, la probabilidad de ir al karaoke es 3/4, pero si no revienta el profesor, va al karaoke con 9/10 décimos de probabilidad. Esto captura la idea de lo que son las estrategias de comportamiento.

La probabilidad de ir al karaoke puede ser distinta para ir al karaoke en cada nodo. El comportamiento del jugador es diferente en cada nodo, aunque también podría ser igual. Pero aunque sea la misma acción, en nodos distintos, son estrategias distintas.

Entonces una estrategia mixta define una distribución de probabilidd sobre las estrategias puras de un jugador, mientras que las de comportamiento permiten que el jugador genere una distribución de probabilidad en cada conjunto de información.

Pero este mismo juego se podría extender más y pasaría a ser un juego de información incompleta. Un ejemplo podría ser que el jugador no sepa si le fue bien o mal en el examen. Esto se puede ver a continuación:



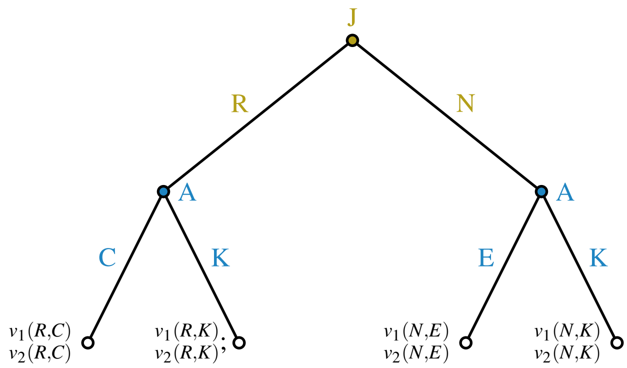
Recomendación: hacer el ejercicio de la batalla de los sexos secuencial. Para así poder ver la relación entre estrategias mixtas y de comportamiento. Está resuelto en el Tadelis.

13.1 Memoria perfecta

En todos los juegos que hemos venido construyendo, se requiere que los juegos sean de memoria perfecta. ¿Por qué? $\rightarrow$ Se tiene que establecer que algo ya pasó.

Un juego de memoria perfecta es aquel en el que los jugdores no olvidan la información previa del juego. Si un jugador juega n veces durante el juego, recuerda lo que ha jugado en los anteriores movimientos. **Recuerda la historia**.

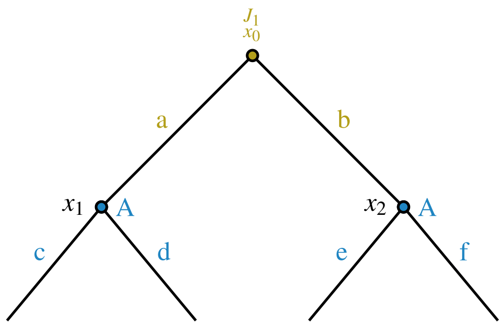
Kuhn demostró que en juegos de memoria perfecta las estrategias mixtas y de comportamiento son equivalentes. Dadas las estrategias de los oponentes la misma distribución sobre los resultados puede ser generada por estrategias mixtas o de comportamiento para el jugador i.



Eso se demuestra con la batalla de los sexos p.143 (versión de Mediación Virtual). Por ejemplo la estrategia CE significa que si el jugador 1 juega R el jugador 2 juega C y si el jugador 1 juega N entonces el jugador 2 juega E.

Cuando se haga el ejercicio se va a haber que se puede pasar de las estrategias mixtas a las de comportamiento, y por lo tanto son equivalentes. El Teorema de Kuhn es importante porque permite ver esa equivalencia.

Los jugadores juegan lo que les de mayores pagos.



13.2 Forma normal:

En juegos simultáneos

$$\Gamma : \langle N, \{A_i\}_{i=1}^n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\Delta S_i\}_{i=1}^n, \{\pi_i(s_j)|i \neq j\}_{i=1}^n \{v_i(\cdot)\}_{i=1}^n \rangle$$

En juegos secuenciales:

$$\Gamma : \langle N, \{A_i\}_{i=1}^n, \{S_i(h_i)\}_{i=1}^n, \{\Delta S_i\}_{i=1}^n, \{v_i(\cdot)\}_{i=1}^n, \{\sigma_i(a_i(h_i))\} \rangle$$

Solo las creencias no se ponen en los juegos secuenciales. La forma normal es importante para efectos de definir las reglas del juego. Estas son las reglas del juego para los juegos secuenciales. La idea es no dejar perdidos elementos necesarios para resolver los juegos.

Ahora toca seguir con el equilibrio de Nash en equilibrios secuenciales.

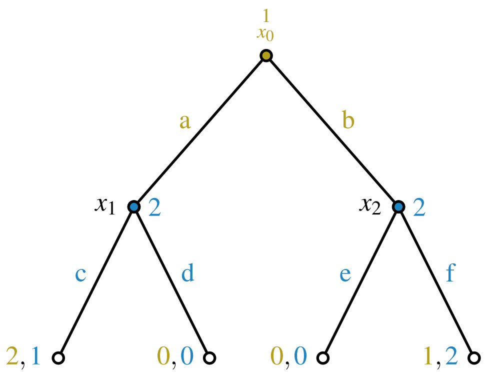
14. Equilibrio de Nash

El perfil de estrategias s^* es un equilibrio de Nash si cada jugador prefiere seguir la ruta de equilibrio dado que cree que los demás jugadores se apegarán a la ruta.

Definición 14.1 Sea $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*\ )$ un perfil de equilibrio de Nash de estrategias de comportamiento. Se dice que un conjunto de información está en la ruta de equilibrio si, σ^8 se alcanza con probabilidad positiva. Se dice que un conjunto de información NO está en la ruta de equilibrio si, σ^* nunca se alcanza.

Vamos ahora a introducir el concepto de ruta de equilibrio. Vamos a encontrar un perfil de estrategias que es equilibrio de Nash si cada jugador prefiere seguir la ruta de equilibrio dado lo que cree que van a hacer los otros jugadores. Se puede también definir para las estrategias mixtas, que en los casos de información perfecta son equivalentes a las mixtas.

Interesa saber si un conjunto está en la ruta de equilibrio: un conjunto está en la ruta de equilibrio si se llega a él con probabilidad positiva.



Entonces por ejemplo en x_0, el jugador 1 juega a, en el nodo x_1 el jugador 2 juega c y en el nodo x_2 el jugador 2 juega e. Entonces no todos los conjuntos de información se alcanzan con probabilidad positiva. La ruta de equilibrio sería la ruta roja. Y las que están fuera de esa ruta roja entonces no se estarían alcanzando con probabilidad positiva.

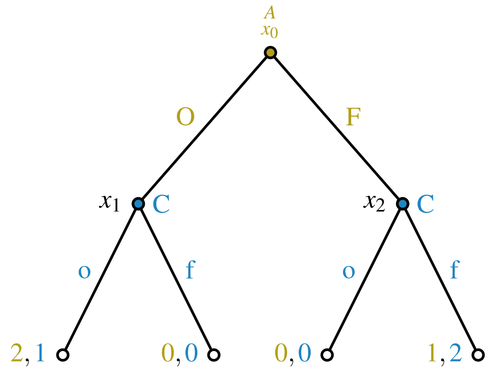
La estrategia oo para el jugador 2, significa que, indistintamente de lo que haga Alex, Chris va a ir a la opera. Esa no es una amenaza creíble, porque ir solo le genera un menor pago. La estrategia la estaría haciendo el jugador 2.

14.0.0.1 Amenazas

Las amenazas de los jugadores pueden ser:

- Creíbles
- No creíbles

Por ejemplo, veamos de nuevo el caso de la guerra de los sexos:



Entonces, para Chris las estrategias oo y ff no se alcanzarían nunca realmente.

En un juego simultáneo no se podrían dar amenazas, porque no se sabe lo que juega el otro jugador. En juegos simultáneos donde se juega una única vez, no hay como amenazar, pero luego vamos a ver juegos repetidos y en etapas.

Entonces ahora se pasa a ver si los jugadores son secuencialmente racionales.

Un jugador utiliza estrategias que sean óptimas en cada conjunto de información, de acuerdo al desarrollo del juego (árbol del juego). Implica que los jugadores juegan racionalmente en cada etapa de la secuencia del juego, ya sea dentro o fuera de la ruta de equilibrio del juego.

Definición 14.2 Dadas las estrategias $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ de los componentes, se dice que la estrategia σ_i es secuencialmente racional si y sólo si está jugando la mejor respuesta a σ_{-i} en cada conjunto de información.

Ahora se pasa a generar creencias sobre si lo que hace el jugador que dice que va a hacer, es secuencialmente racional. Ya se sabe que son racionales, que tienen conocimiento común de la racionalidad, que pueden generar creencias y que esas creencias son correctas, pero además deben ser secuencialmente racionales.

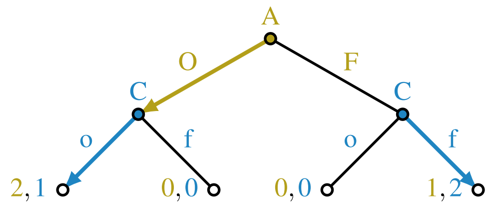
Esto significa que en cada parte de la secuencia del juego, adentro y fuera de la ruta de equilibrio, debe jugar de manera racional. Ahora se necesita saber si los jugadores están jugando su mejor respuesta en cada conjunto de información para que sea secuencialmente racional.

Ahora vamos a ver los posibles equililbrios de la batalla de los sexos:

1. $S^N = (O, oo)$ A sabe que C es racional y por lo tanto, cuando le toque jugar, va a comparar:
   - En caso de A juegue O $\Rightarrow v_C(O,o) = 1 > 0 = v_C(O,f)$. En caso de que A se desvíe a F $\Rightarrow v_C(F,o) = 0 < 2 = v_C(F,f)$. La estrategia de C que dice que **siempre irá a la ópera no es racional**.
2. $S^N = (F, ff)$ A sabe que C es racional y por lo tanto, cuando le toque jugar, va a comparar:
   - En caso de A juegue F $\Rightarrow v_C(F,f) = 2 > 0 = v_C(F,o)$. En caso de que A se desvíe a O $\Rightarrow v_C(O,f) = 0 < 1 = v_C(O,o)$. La estrategia de C que dice que **siempre irá al fútbol no es racional**.
3. $S^N = (O, of)$ A sabe que C es racional y por lo tanto, cuando le toque jugar, va a comparar:
   - En caso de A juegue O $\Rightarrow v_C(O,o) = 1 > 0 = v_C(O,f)$. En caso de que A se desvíe a F $\Rightarrow v_C(F,o) = 0 < 2 = v_C(F,f)$. La estrategia de C que dice que **si A va a la ópera él iría a la ópera y si A va al fútbol él iría al fútbol es racional**.

Por lo tanto, este último equilibrio es el único secuencialmente racional dentro y fuera de la ruta de equilibrio. Aunque haya conjuntos de información que están fuera de la ruta de equilibrio y no se alcanzan con posibilidad positiva, hay que igual tomarlo en cuenta de todos modos, porque el primer jugador técnicamente tiene la posibilidad de desviarse de la ruta de equilibrio.

La semana pasada se vio la Batalla de los Sexos cuando era secuencial y cuándo habían amenazas creíbles o no creíbles. El único equilibrio creíble en ese juego era (O, of). Esto lo habíamos hecho mediante inducción hacia atrás:



$\rightarrow 0 < 2$ y $1 > 0$. Para que haya secuencialidad racional tiene que elegirse la mejor respuesta dentro y fuera de la ruta de equilibrio. Por eso hay ciertas estrategias que no son racionalmente secuenciales, y no serían equilibrios creíbles.

El equilibrio de Nash para este juego involucra tres perfiles:

1. $\underbrace{S^N = \{O, oo\}}_{\text{no racional}}$
2. $\underbrace{S^N = \{F, ff\}}_{\text{no racional}}$
3. $\underbrace{S^N = \{O, of\}}_{\textit{racional}}$

Estas tres son parte del equilibrio de Nash en estrategias puras. Es una correspondencia de mejores respuestas porque así se vio en la matriz de pagos, sin embargo, siguen habiendo dos que no son creíbles, por lo que hace falta refinar más.

Hasta ahora se sabe que **cualquier juego finito de información perfecta tiene una solución por inducción hacia atrás que es secuencialmente racional** $\rightarrow$ estos juegos son una maravilla porque inducción hacia atrás. Cualquier juego finito de información perfecta tiene al menos un equilibrio de Nash en estrategias puras, y mientras que no tenga dos nodos terminales que generen los mismos resultados para cada jugador, será único por inducción hacia atrás.

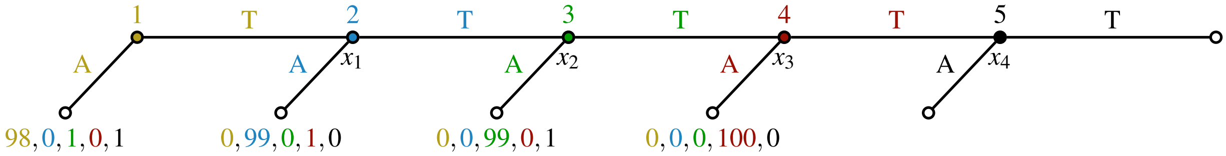
Ahora, si por inducción hacia atrás y la correspondencia de mejores respuestas (Nash) no son exactamente lo mismo, hay que empezar a ver un nuevo concepto que se llama: subjuegos $\rightarrow$ para dividir el juego en partes más pequeñas. Para introducir esto, vamos a introducir el juego de los piratas.

14.0.0.2 El juego de los Piratas

Cinco feroces piratas se juntan para repartir un botin de 100 monedas de oro. Lo harán de acuerdo con las siguientes reglas:

- El pirata 1 propone una división de monedas (cada moneda es indivisible), por ejemplo (55,5,5,6,4,7,3)
- Los 5 piratas votan la propuesta
- Si la mayoría acepta la propuesta se lleva a cabo la repartición; al menos 50% de los votos
- En caso contrario, el pirata 1 es arrojado por la borda y el pirata 2 hace una nueva propuesta, la que se vota entre los restantes y así sucesivamente.
- Un empate en una votación se consideran a favor de la proposición
- Además, si a un pirata le es indiferente aprobar o rechazar una proposición dado lo que ocurre en el futuro, votará en contra, salvo si le ofrecen quedarse con todo el botín, en cuyo caso vota a favor
- Por último, un pirata prefiere no recibir monedas a que lo tiren por la borda

Estructure el juego en forma extensiva, resuelva por inducción hacia atrás:



El pirata 5 no juega porque cuando llega al cuarto pirata solo quedan dos (4 y 5) y 4 siempre va a votar en favor de su propuesta, y ya siempre va a tener un 50% de los votos. Las propuestas de botines son indivisibles. Los pagos, si se aceptan se ponen en las ramas hacia abajo. En todas las ramas van los pagos de todos los jugadores.

La manera correcta de empezar a pensar en los pagos es de atrás hacia adelante, del último pirata hacia atrás. Así entonces, ese último pirata como saber que siempre se va a aprobar su propuesta, se asigna todo él y nada a los demás.

Entonces, sabiendo esto, el jugador 3 no querría llegar al punto donde solo quede el 4, por lo tanto él debe hacer una propuesta mejor que la del 4, y por lo tanto debe convencer a 5, quien en la propuesta de 4 tendría 0. Entonces el jugador 3 se dejaría casi todo y le daría solo uno al jugador 5, y ya con eso se admitiría su propuesta.

Luego, el jugador 2 quisiera convencer al jugador 4 más bien, para evitar que se llegue a la opción del jugador 3 y así evitar que el 4 se quede sin nada. Así, el jugador 1 sabría que tiene que convencer a 3 y 5 y su propuesta sería 98 para él, 0 para 2, 1 para 3, 0 para 4 y 1 para 5.

Por inducción hacia atrás se puede saber cuál es la propuesta votada. La solución del juego es por inducción hacia atrás. La decisión más importante la toma el jugador 1.

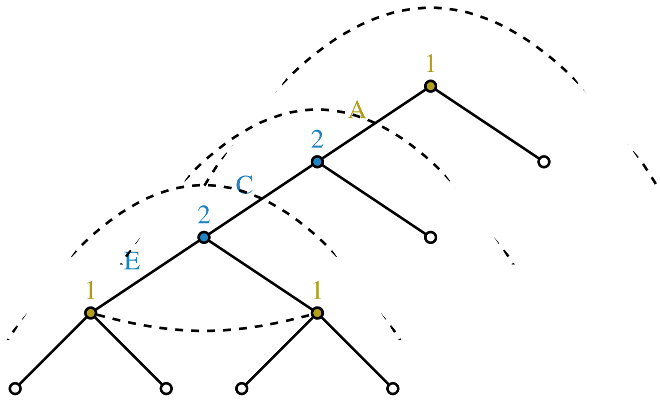
Esto se está analizando por subjuegos, que es lo que sigue.

14.0.0.3 Subjuegos

Definición 14.3 Un subjuego apropiado G de un juego Γ definido de forma extensiva consiste de un solo nodo y todos sus sucesores en Γ con la propiedad de que si $x \in G$ y $x' \in h(x)$ entonces $x' \in G$. El subjuego G en en sí mismo una forma extensiva con sus conjuntos de información y pagos heredados de Γ.

Los subjuegos permiten analizar el juego "por partes", lo que facilita utilizar la racionalidad secuencial en juegos de información imperfecta. Los subjuegos apropiadamente definidos requieren tener un nodo raíz (del que parte el subjuego) y una serie de nodos sucesores.

Se sabe que un subjuego está bien definido porque nace de un nodo único. Por ejemplo:



Este juego presenta 3 subjuegos. En este caso el jugador 1 tiene dos conjuntos de información, al igual que el jugador 2. Cada subjuego propiamente definido nace de un nodo único. El análisis por subjuegos implica inducción hacia atrás. Es pensarlo hacia atrás, por partes.

Los subjuegos se definen de abajo hacia arriba, y el último subjuego que se define es el juego completo. Una manera de saber si los subjuegos están mal definidos es que un subjuego nunca atraviesa las líneas de un conjunto de información (imperfección).

Entonces, la perfección en subjuegos requiere que no solo el perfil de estrategias de Nash sea una combinación de mejores respuestas en la ruta de equilibrio (condición de Nash) sino que además lo sea fuera de la ruta de equilibrio.

14.0.0.4 Equilibrio perfecto en subjuegos vs Equilibrio de Nash

Todo equilibrio perfecto en subjuego es un equilibrio de Nash. Sin embargo, no todos los equilibrios de Nash son necesariamente equilibrios perfectos en subjuegos. Por lo tanto, el concepto solución de equilibrio perfecto en subjuegos refina el conjunto de equilibrios de Nash, produciendo predicciones más precisas sobre el comportamiento de los jugadores.

De hecho, el nombre completo es *Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos*. En la Batalla de los Sexos versión secuencial habían 3 equilibrios de Nash en estrategias puras. Pero de esos solo 1 era creíble. Ahora, lo que se está diciendo es que solo 1 es creíble, los otros no, entonces lo que se va a someter a análisis son a los que se le cree.

El equilibrio perfecto en subjuegos requiere se inducción hacia atrás y se definen de abajo hacia arriba o de derecha a izquierda (si es horizontal). Cada subjuego nace en un nodo único. Nunca atraviesa una línea de conocimiento. Se ocupa que haya un equilibrio dentro y fuera de la ruta de equilibrio.

Hay que ser racional adentro y fuera de la ruta de equilibrio. Esto significa que si por alguna razón un jugador cambia (por la razón que fuera), aún así el otro debería jugar con su mejor respuesta.

Entonces hasta ahora se tienen:

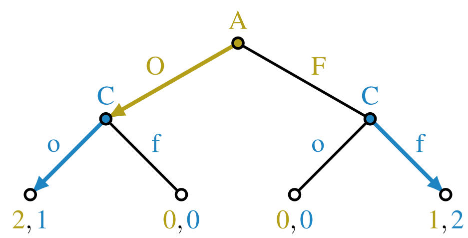
1. EED: racionalidad
2. EIEED: racionalidad y conocimiento de la racionalidad
3. Razonabilidad: racionalidad, conocimiento de la racionalidad y capacidad de generar creencias
4. Nash (puras y mixtas): racionalidad, conocimiento de la racionalidad, capacidad de generar creencias y que las creencias estén correctas
5. Equilibrio perfecto en subjuegos: racionalidad, conocimiento de la racionalidad, capacidad de generar creencias, que las creencias estén correctas **y racionalidad secuencial**

Se han visto 5 conceptos solución, y cada uno va refinando el anterior. Los supuestos son acumulativos. Para cualquier juego finito con información perfecta, el conjunto de equilibrios de perfecto en subjuegos de Nash coincide con el conjunto de equilibrios de Nash que sobreviven a la inducción hacia atrás, porque van a dar exactamente lo mismo.

14.0.0.5 La batalla de los sexos

Considere el juego secuencial donde juega primero Alex, luego Chris. ¿Cuántos subjuegos se tienen? $\rightarrow$ Uno para Alex (inicia en x_0) y dos para Chris: en nodo x_1 y x_2. Hay tres equilibrios de Nash: $S^N = \{(O,oo),(F,ff),(O,of)\}$ pero equilibrio perfecto en subjuegos solo hay uno $\rightarrow S^{PS} = (O,of)$.

Para cualquier juego finito con información perfecta, el conjunto de equilibrios perfectos en subjuegos de Nash coincide con el conjunto de equilibrios de Nash que sobreviven a la inducción hacia atrás.



Ahora, el concepto solución requiere que exista y haber reducido la cantidad de perfiles posibles y que sea invariante. Se tienen esos tres perfiles de equilibrios de Nash; ahora, hay que refinar aún más ese concepto porque no es creíble que los tres sean posibles perfiles que los jugadores vayan a jugar.

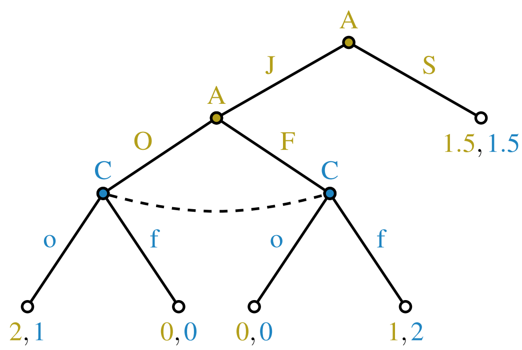
A estos tres perfiles de equilibrios de Nash se les va a someter a un mayor análisis para ver si les cree para refinarlos y pasarlo a un equilibrio perfecto a subjuegos, pero no habría que hacerlo con los 8 perfiles totales, sino lo los 3 que Nash dijo que eran solución.

Entonces ahora habría que buscar un perfil de estrategias de comportamiento (que Kuhn había dicho que eran equivalente a las mixtas). Las estrategias de comportamiento son una distribución de probabilidad sobre cada conjunto de información del jugador.

Como lo que se quiere es partir el juego en pedazos: en ese pedazo del juego tiene que haber un equilibrio en Nash: ya sea en puras o en mixtas. Para eso sirve la afirmación de Kuhn, para hacer la separación en juegos.

Una modificación a la batalla de los sexos: ahora Alex puede decidir si juega o no. Si decide no jugar, el juego se acaba y cada jugador recibe 1.5. Lo demás pagos se mantienen como en el juego simultáneo. Determine:

1. Juego en forma extensiva



Conjuntos de información:

$$\begin{aligned} |h_A| =& 2 \\ h_A^0 =& \{x_0\} \wedge h_A^1 = \{x_1\} \\ |h_C| =& 1 \\ h_C^1 =& \{x_3, x_4\} \end{aligned}$$

Acciones:

$$\begin{aligned} A_A(h_A^0) =& \{J, S\} \wedge A_A(h_A^1) = \{O, F\} \\ A_C(h_2^1) =& \{o, f\} \end{aligned}$$

Estrategias puras:

$$\begin{aligned} |S_A| =& 2 \cdot 2 = 4 \\ S_A =& A_A(h_A^0) \times A_A(h_A^1) = \{J, S\} \times \{O, F\} = \{JO, JF, SO, SF\} \\ |S_C| =& 2 \\ S_C =& \{o, f\} \end{aligned}$$

Estrategias mixtas:

Estrategias de comportamiento:

$$\begin{aligned}\Delta S_C =& \{(\sigma_C(o), \sigma_C(f)), \dots\}\\ \Delta A_C(h_C^1) =& \{(\sigma_C(o), \sigma_C(f)), \dots\}\end{aligned}$$

2. Juego en forma matricial

$$\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{P_2} \\
 & & \multicolumn{1}{c}{o} & \multicolumn{1}{c}{f} \\ \cline{3-4}
 & JO & \underline{2}, \underline{1} & 0, 0 \\ \cline{3-4}
 & JF & 0, 0 & 1, \underline{2} \\ \cline{3-4}
P_1 & SO & 1.5, \underline{1.5} & \underline{1.5}, \underline{1.5} \\ \cline{3-4}
 & SF & 1.5, \underline{1.5} & \underline{1.5}, \underline{1.5} \\ \cline{3-4}
\end{array}$$

3. Equilibrios de Nash
4. Equilibrios de Nash perfectos en subjuegos

14.0.0.6 Juego del cienpiés

15. Juegos en etapas

Hoy toca arrancar con el tema juegos en etapas. Los juegos en etapas tienen la particularidd de los jugadores pueden condicionar los resultados futuros al comportamiento del pasado, por lo tanto se puede jugar en varios momentos.

El concepto central de los juegos multietápicos: los juegos de varias etapas se presentan cuando los jugadores pueden condicionar el comportamiento futuro a los resultados pasados, lo que conduce a un conjunto más rico de resultados.

Definición 15.1 Un juego en etapas es una secuencia finita de juegos de forma normal, en los que cada etapa del juego es independiente, bien definida, de información completa pero impefecta (un juego de movimientos simultáneos).

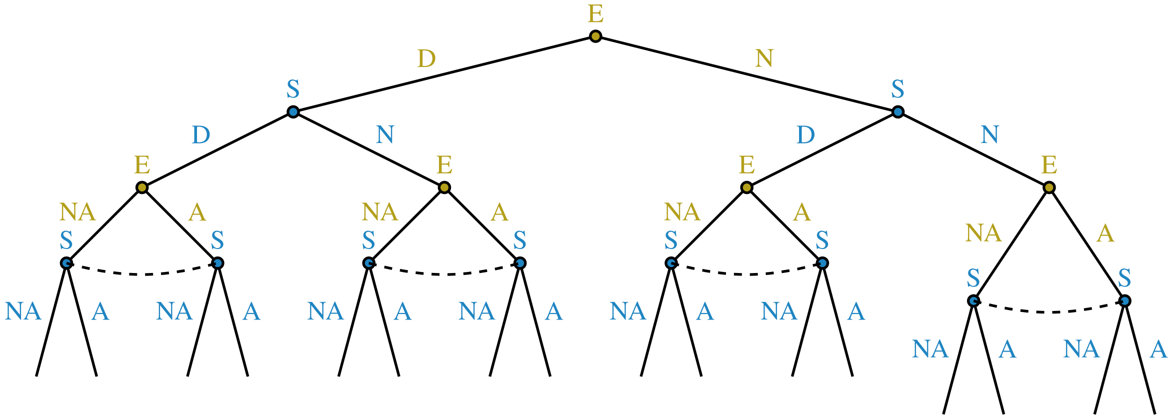
Cada juego se juega en un período distinto, tal que el juego 1 se juega en el período $t = 1$, el juego 2 en el período $t = 2$, y así sucesivamente, hasta el período $t = T$, que será la última etapa en el juego.

Como hay movimientos simultáneos, se toman decisiones en distintos tiempos. En cada etapa se juegan juegos simultáneos pero independientes.

Los juegos en etapas:

- Se juegan en forma secuencial por los mismos jugadores.
- Los resultados finales se evalúan considerando la secuencia completa del juego
- La historia del juego en $t-1$ es de conocimiento común
- Cada juego tiene un conjunto de acciones que lleva a los resultados del juego

■ **Ejemplo 15.1 — Comisión .** de evaluación Se tenía este juego en donde Elena y Sofía son llevadas a la comisión de evaluación por haber plagiado en un examen, pero luego les quedan más cursos que pueden llevar juntas. Entonces, si plagiaron en Juegos, luego llegan a Crecimiento.



Este juego tiene dos etapas: una en Juegos y luego otra en Crecimiento. Las estrategias se plantean antes de que comience el juego $\rightarrow$ cuando son varias etapas, las estrategias igualmente se plantean antes de las dos etapas.

Entonces, si para ellas mantener la amistad les genera mayor pago que no mantenerla, ellas lo que podrían pensar es que para ser amigos en $t=2$ (Crecimiento), en $t=1$ (Juegos) no se traicionarían, pues sería lo mejor. Pero, en el primer juego pasa lo del dilema del prisionero, no hay incentivos para no delatar, entonces se delatan ambos.

Entonces la pregunta es, ¿de qué depende de que una de ellas prefiera recibir el pago en $t=1$ que en $t=2$? $\rightarrow$ **el factor de descuento**. Un juego en etapas es un juego en el cual cada etapa se juega un juego simultáneo, y este es independiente de la etapa anterior, lo cual significaría que se sabe a dónde llegó en el período anterior.

Este juego tiene 5 subjuegos. Es un juego simultáneo.

Hay 16 nodos terminales, y de cada uno nacería otro subjuego en una etapa adicional. Luego 21 y así sucesivamente. Los subjuegos tienen las siguientes características:

- Juegan los mismos jugadores
- Los resultados finales se evalúan considerando la secuencia completa del juego

■

Se van a manejar factores de descuento que no cambian en el tiempo, si no que son constantes.

- $\delta = 0$ presente
- $\delta = 1$ futuro

$$d_s^{t=1} > d_s^{t=3}$$

Esto significa que un $\delta = 0$ valora más el presenta y un $\delta = 1$ significa que valora más el futuro. Es lo opuesto a β, que es la probabilidad de que un pago se realice en el futuro, y por ende es más paciente.

$$v_1 = v_1^{t=1} + \delta v_1^{t=2} + \delta^2 v_1^{t=3}$$

Los pagos van en los nodos terminales, entonces el pago del nodo terminal número 15 sería:

$$\begin{aligned} v_1(\cdot) &= -1 + \delta(-2) \\ J_1 \text{ en } t = 1 \quad & D \\ J_2 \text{ en } t = 1 \quad & D \\ J_1 \text{ en } t = 2 \quad & NA \\ J_2 \text{ en } t = 2 \quad & NA \end{aligned}$$

Entonces los pagos se evalúan tomando en cuenta la secuencia completa. La historia del juego en $t-1$, es de conocimiento común.

■ **Ejemplo 15.2 — El dilema del prisionero- la venganza.** Este nuevo se llama así. Un juego en dos etapas:

Encuentre:

- Equilibrio de Nash en el juego de la primera etapa

Etapa 1: $t = 1$ el juego tradicional del dilema del prisionero

J_1 \ J_2	m	f
M	$4,4$	$-1,\underline{5}$
F	$\underline{5},-1$	$\underline{1},\underline{1}$

Los equilibrios de Nash en estrategias puras de la primera etapa es (F,f).

$$S^{N1} = (F, f)$$

Con eso quedaría cubierta la primera etapa, ahora hay que pasar a la siguiente etapa.

– Equilibrio de Nash en el juego de la segunda etapa
Etapa 2: $t = 2$ una vez tomada la decisión en la etapa 1, los individuos deciden si se unen o no a una pandilla

J_1 \ J_2	l	g
L	$\underline{0},\underline{0}$	$-4,-1$
G	$-1,-4$	$\underline{-3},\underline{-3}$

Los equilibrios de Nash en la segunda etapa son los siguientes:

$$S^{N2} = \{(L,l),(G,g)\}$$

La idea de los juegos en etapas es que se puede condicionar lo que se hace en el presente por lo que va a pasar en el futuro. Se puede condicionar lo que se hace en el futuro por lo que pasa en el futuro. Cuando se juega una única vez no hay un incentivo a cambiar la decisión. Pero cuando se introduce una segunda etapa y en esa segunda etapa hay varios equilibrios de Nash, sí podría haber incentivos a desviarse dado que los equilibrios que son diferentes.

Entonces en este caso (L,l) es preferible a (G,g) porque sus pagos son mayores. Se pueden jugar cualquiera de los dos porque ambos son equilibrios de Nash. Entonces, como se jugaría (L,l) en la segunda, en la primera se podría jugar (M,m), que tiene mayores pagos, aunque no es equilibrio de Nash en esa etapa, sí lo es en el juego. ■

La idea es condicionar lo que se hace antes por lo que sucede en el futuro. Así, entonces en la primera etapa ahora hay un incentivo para callar, callar ambos jugadores, porque saben que en la segunda etapa jugarían (L,l) y no se unen a una pandilla. Con esto, si alguno de los dos se desvía en la primera etapa y traiciona al otro jugando G o g, el otro en el segundo juego jugaría unirse a una pandilla en venganza.

Esa es la idea de condicionamiento que se introduce con las etapas. Entonces, observe que en la primera etapa si se traiciona, se gana 1, porque pasa de 4 a 5. En la segunda etapa si se traiciona se pasa de 0 a -1 originalmente, pero como traicionó en la primera etapa, el otro jugador lo traiciona en la segunda y pasa de 0 a -3, por lo que el resultado neto es que sale perdiendo.

Eso sería ignorando el δ, porque la segunda traición está ocurriendo en la segunda etapa. Se tiene que jugar un equilibrio de Nash porque es la mejor respuesta, pero con la segunda etapa se puede condicionar la primera etapa también.

Entonces para evaluar el comportamiento de desviarse o no, hay que considerar los resultados netos al cambiar de una a otra estrategia, pero además habría que tomar en consideración el factor de descuento y ya con eso se puede evaluar la decisión.

Aquí siempre se tiene que jugar Nash, sí o sí, porque es la mejor respuesta que se puede jugar, por lo tanto siempre tiene que jugarse un Nash. Ahora, cuando hay etapas, sí o sí, en la última etapa se tiene que jugar Nash, y entonces en consecuencia, así se puede alterar el comportamiento en las etapas anteriores.

Aquí es importante que en la segunda etapa hay dos equilibrios de Nash: uno es mejor que el otro. Si en la segunda etapa no hay al menos dos Nash no se tiene como condicionar el comportamiento, solo hay un camino y no se puede cambiar nada, por lo que el factor de descuento no tendría incidencia.

El tener más de un Nash hace que entonces surja un premio y un castigo con los cuales se puede condicionar el comportamiento en las primeras etapas.

Equilibrio de Nash en estrategias mixtas en la segunda etapa

Se hacen igual que siempre. *No se resuelve en clase.

¿Qué se puede decir de los equilibrios de la segunda etapa?

Ahora hay que pasar a ver la evaluación de los pagos cuando hay varias etapas.

15.1 Función de pagos

Para la determinación de los pagos es necesario considerar el valor del dinero en el tiempo.

- El factor de descuento (δ) estará entre 0 y 1
- δ cercano a 1 implica que el jugador valora las ganancias futuras
- δ cercano a 0 implica que el jugador valora las ganancias actuales

Es decir, δ es cuánto se valoran los pagos futuros. $\delta = 1$ significa que se es indiferente entre recibir un pago hoy y mañana. $\delta = 0$ significa que el presente es más valorado que el futuro. En este curso solo se va a manejar un δ, que no cambia en el tiempo, pero eso no es realista, lo realista es que δ sea variable.

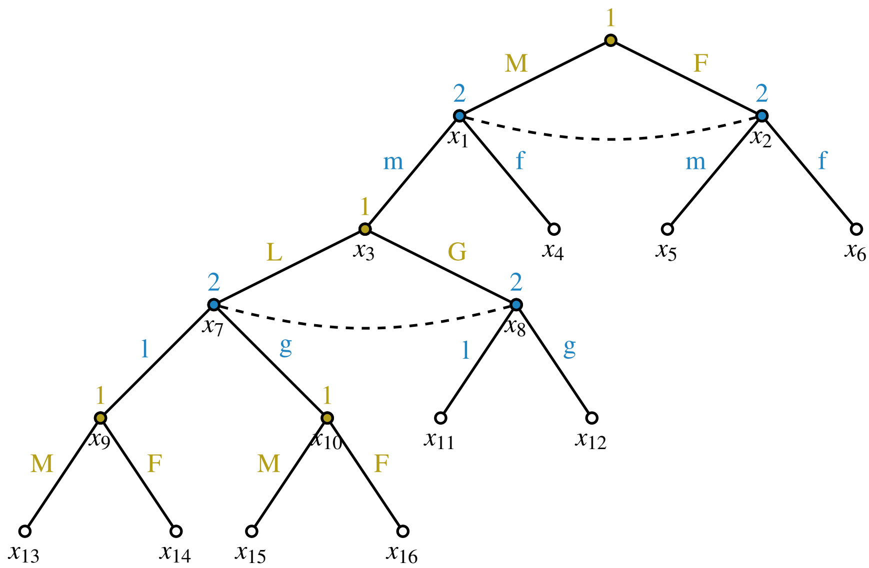
Se necesita establecer los pagos de los jugadores dependiendo de las etapas que se tengan y descontando por cada uno. En el primero no se descuento, en la segunda una vez y así sucesivamente.

Los pagos totales se determinan como

$$v_i = v_i^1 + \delta v_i^2 + \delta^2 v_i^3 + \cdots + \delta^{T-1} v_i^T = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} v_i^t$$

■ **Ejemplo 15.3** Establezca el juego en forma extensiva. Recuerde que cada etapa del juego es simultáneo. La etapa 1 y 2 son secuenciales. En la etapa 2 el juego de nuevo es simultáneo. Determine los pagos esperados en los nodos terminales considerando las estrategias en la etapa 1 y las de la etapa 2.

La forma extensiva es la siguiente:



En cada uno de los nodos terminales de la etapa 1 se repite el juego. Si juegan (M,m) los jugadores reciben

$$\begin{aligned}
\{x_{16}\} = v_1(s_1,s_2) &= \underset{MM}{4} + \delta \underset{LL}{0} \\
v_2(s_1,s_2) &= 4 + \delta 0 \\
\{x_{17}\} = v_1(s_1,s_2) &= \underset{mm}{4} + \delta \underset{ll}{(-4)} \\
v_2(s_1,s_2) &= 4 + \delta(-1)
\end{aligned}$$

No se han definido las estrategias todavía. Las estrategias tienen que evaluarse por inducción hacia atrás, y para esto se ocupan los pagos, para así evaluar los equilibrios perfectos en subjuegos y con esto seguir el equilibrio dentro y fuera de la ruta, así, no se puede saltar ninguno de los pagos.

La siguiente clase empieza viendo el tema de las estrategias.

*Recomendación: hacer este ejercicio completo del Tadellis, porque lo importante es el proceso de la construcción. ■

15.2 Estrategias

La formulación de estrategias dependen de la combinación de posibles acciones que puede tomar el jugador i en cada uno de los juegos condicionado a lo que hizo el jugador j.

El número de conjuntos de información en cualquier etapa t debe ser igual al número de resultados posibles de los juegos de etapa jugados anteriormente $1, 2, \ldots, t-1$.

Ejercicio 15.1 — Ejercicio 9.1. Considere el siguiente juego de movimiento simultáneo que se juega dos veces (los jugadores observan el primer período antes del segundo período de juego):

		J_2		
		L	C	R
	T	10, 10	2, 12	0, 13
J_1	M	12, 2	5, 5	0, 0
	B	13, 0	0, 0	1, 1

- Encuentre el equilibrio perfecto en subjuegos sin descuento ($\delta = 1$)
- Para cada equilibrio que encuentre, determine el factor de descuento más pequeño que lo apoya

■

16. Juegos repetidos

Un juego repetido es un juego de varias etapas en el que se juega el mismo juego en cada etapa. Son interesantes porque:

- Representan una considerable cantidad de juegos en la vida real
- La repetición permite encontrar una estructura matemática

Definición 16.1 Dado un juego en etapas G, $G(T,\delta)$ representa un juego repetido finito si el juego G se repite T veces en forma consecutiva y δ es un facot de descuento común.

Definición 16.2 — Equilibrio en juegos repetidos finitos. Si un juego repetido finito tiene un único equilibrio de Nash (S^N), entonces el juego repetido finito tiene un único equilibrio perfecto en subjuego (S^{SP}).

■ **Ejemplo 16.1 — El dilema del prisionero repetido.** Imagine el dileman del prisionero repetido 200 veces. La preguntamental es: ¿Tienen incentivo los jugadores para cambiar el juego cooperativo? $\rightarrow$. Dada la respuesta anterior: ¿es posible mantener un equilibrio perfecto en subjuegos donde los jugadores pueden cooperar y desviarse al final?

J_1 \ J_2	m	f
M	$4,4$	$-1,5$
F	$5,-1$	$1,1$

Considere un juego repetido dos veces con un factor de descuento de δ, con la siguiente tabla de pagos:

J_1 \ J_2	m	f	r
M	$4,4$	$-1,5$	$0,0$
F	$5,-1$	$1,1$	$0,0$
R	$0,0$	$0,0$	$0,0$

- Determine los equilibrios de Nash
- ¿Se presenta una estrategia tipo castigo y una tipo recompensa?
- Determina cuál es la mejor estrategia a seguir en la segunda etapa para el jugador $i(s_i^2(h_i))$.
- ¿Cuál es el factor de descuento que hace que sea indiferente entre desviarse y no desviarse?
- Construya la matriz de pagos para la toma de decisiones en la etapa 1, considerando $\delta = 1$.

■

IV Juegos estáticos con información incompleta

17. Conceptos básicos: Juegos Bayesianos)

Hasta ahora:

- El juego es de conocimiento común
- Se ha asumido que los jugadores son conscientes de:
  - Quiénes juegan y cuán le toca jugar a cada jugador
  - Cuáles son las posibles acciones de cada jugador y
  - Cómo los resultados se traducen en recompensas
- Se supone:
  - Que la historia del juego es es de conocimiento común
  - Racionalidad, conocimiento común de la racionalidad, creencias, creencias correctas y racionalmente secuenciales
- Estos supuestos permiten establecer como conceptos de solución:
  - Estrategias estrictamente dominantes
  - Eliminación iterada de estrategias dominadas
  - La racionalización
  - El equilibrio de Nash
  - Equilibrio perfecto en subjuegos

Harsanyi (1960) determinó la similitud entre las creencias sobre las acciones de un jugador y sus otras características, como los costos y las preferencias. Desarrolló una forma operativa para captar la idea de que las creencias sobre las características de otros jugadores, **sus tipos**, pueden integrarse en el marco de la teoría de juegos.

17.1 Juegos con información incompleta

Son aquellos juegos en los que los jugadores pueden ser de diferentes tipos.

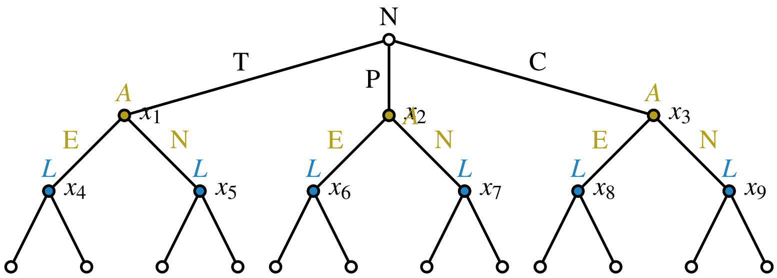
El concepto de solución requiere que los jugadores tengan conjeturas sobre las características de sus oponentes y sus acciones, y además, requieren que estas conjeturas sean coherentes o correctas.

Se requieren supuestos sólidos sobre el conocimiento de los jugadores: se asume que el conocimiento común priva sobre las características posibles de los jugadores y sobre la posibilidad de que cada tipo de jugador sea parte del juego.

En lugar de tener una función de pago única para cada jugador, que mapea perfiles de acciones en pagos. Los juegos de información incompleta permiten a los jugadores tener una de muchas funciones de pago posibles.

Cada una de las posibles funciones de pago de un jugador se asocian con un tipo de jugador.

Harsanyi estableció que si la naturaleza elige aleatoriamente entre muchos juegos posibles, entonces debe haber una distribución de probabilidad bien definida entre los diferentes juegos.



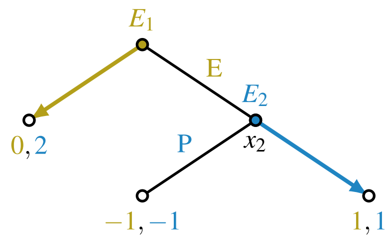
■ **Ejemplo 17.1 — Juego de entrada al mercado.** Una firma debe decidir si entra o no al mercado. Si E_1 entra al mercado E_2 debe decidir cómo reaccionar: pelea o acepta.

- Si E_1 decide entrar al mercado y E_2 decide pelear ambas obtienen -1.
- Si E_1 decide no entrar al mercado E_1 obtiene 0 y E_2 obtiene 2.
- Si E_1 decide entrar al mercado y E_2 decide aceptar la entrada: E_1 obtiene 1 y E_2 obtiene 1

A partir de la información:

- Determina el juego en forma normal
- Determine el juego en forma extensiva con información completa
- Encuentre los equilibrios de Nash y los equilibrios perfectos en subjuegos

Cada escenario es un juego. Las distribuciones de cada evento tienen que ser independientes.

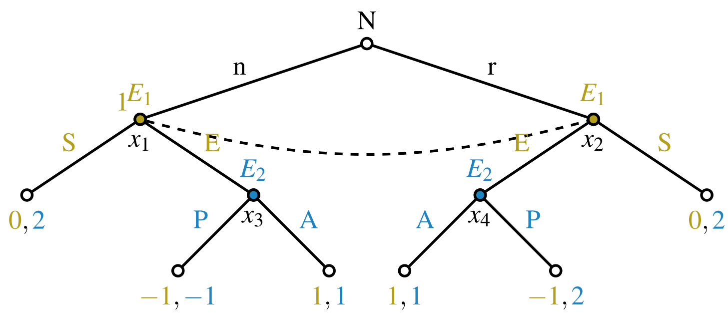


Ahora considere que la E_2:

- Puede ser "normal" o tener un comportamiento "loco"
- Si la E_2 tiene un comportamiento "loco", su utilidad crece cuando se enfrenta a su oponente, si pelea cuando la E_1 entra al mercado, obtiene un pago de 2.
- Los demás pagos se mantienen como en el pago anterior

A partir de la información:

- Determine el juego en forma normal
- Determine el juego en forma extensiva, considere que juegan de forma secuencial



- Se sabe que p es la probabilidad de que E_2 sea racional $\rightarrow$ Establezca la matriz de pagos

$\phi = p(1-p)$ es la distribución *a priori* ■

17.2 Supuestos necesarios

Uno de los mayores aportes de Harsanyi fue considerar que:

- Cada jugador conoce sus preferencias y tipos

- Cada jugador desconoce el tipo exacto de los otros jugadores
- La probabilidad de que J_i sea de un tipo particular θ_{ik} es de conocimiento común

Entonces un juego de información incompleta se convierte en un juego de información imperfecta. Por lo tanto, es posible alcanzar el equilibrio de la forma que se ha hecho hasta ahora.

Esta distribución de probabilidad se conoce como *a priori*; los jugadores están de acuerdo con la forma en que evoluciona el juego (la naturaleza realiza la distribución entre tipos).

17.2.1 Proceso en Juegos Bayesianos

1. La Naturaleza juega y define los tipos $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$
2. Cada jugador i sabe su propio tipo (θ_i) que es información privada y la utiliza para definir su conjetura o *a priori* (ϕ_i) que utiliza para generar la *a posteriori*.
3. Los jugadores eligen simultáneamente las acciones $a_i \in A_i$, $i \in N$ (juego estático)
4. Dada las acciones de los jugadores $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ los pagos para cada jugador $i \in N$ son $v_i(a; \theta_i)$.

Considere el juego Bayesiano estático:

$$\langle N, \{A_i\}_{i=1}^n, \{\Theta_i\}_{i=1}^n, \{v_i(\cdot;\theta_i), \theta_i \in \Theta_i\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n \rangle$$

Definición 17.1 Un perfil de estrategias $s^* = (s_1^*(\cdot), s_2^*(\cdot), \ldots, s_n^*(\cdot))$ es un equilibrio Bayesiano de Nash en estrategias puras, si, para cada jugador i, para tipo del jugador i, $\theta_i \in \Theta_i$, y para cada $a_i \in A$, $s_i^*(\cdot)$ de forma:

$$\sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \phi_i(\theta_{-i}|\theta_i)\, v_i(s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i}; \theta_i) \geq \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \phi_i(\theta_{-i}|\theta_i)\, v_i(a_i, s_i^*(\theta_{-i}), \theta_i)$$

17.2.2 Aplicación: El juego de la gallina bayesiano

■ **Ejemplo 17.2 — El juego de la gallina bayesiano.**

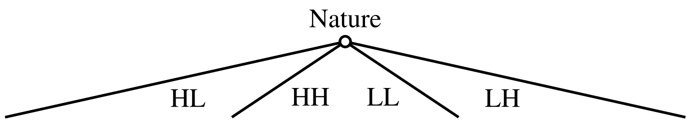
- Si ambos jugadores se desvían se consideran gallina (C) y obtienen un pago de 0
- Si J_i continúa manejando (D) y J_j no, con $i \neq j$, $v_i = R$ y $v_j = 0$
- Si ambos continúan manejando (D), y sufren un accidente no moral, tienen pagos por $v_i = \dfrac{R}{2} - k$, siendo k la pérdida personal por estar involucrado en un accidente
  - Los padres pueden ser seveores (H) o indulgentes (L) con igual probabilidad y se distribuyen de forma independiente
  - Si los padres son severos tendrán un costo elevado
  - Si los padres son indulgentes tendrá un costo menor (L)
  - Donde $k = L < H$
- Cada conductor sabe el tipo de padres que tiene pero desconoce el tipo de padres de su oponente
- La distribución de probabilidad del tipo de padres de los jugadores es de conocimiento común.

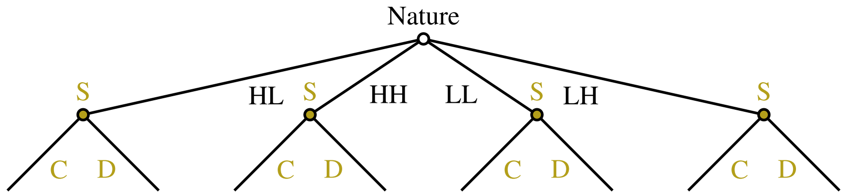
Describa el juego en forma normal y extensiva. Considere que:

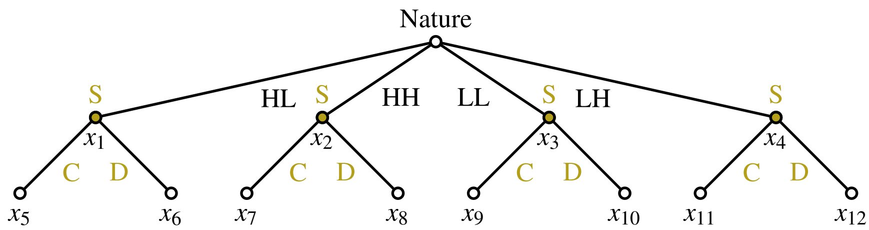
- Hay dos jugadores, cada jugador tiene su tipo de padres
- Las acciones de los individuos dependen del tipo de padres. Por lo tanto, cuando la naturaleza juega dos veces, sobre los padres de J_1 y sobre los padres de J_2, eso implica que se pueden construir probabilidades conjuntas.
- La combinación de tipos de padres en este juego pueden ser: LL, LH,HL,HH (LH implica que los padres de J_1 son indulgentes y los padres de J_2 son severos). Cada probabilidad es igual a $\frac{1}{4}$.
- J_1 sabe de qué tipo son sus padres pero no de qué tipo los de J_2 y viceversa.

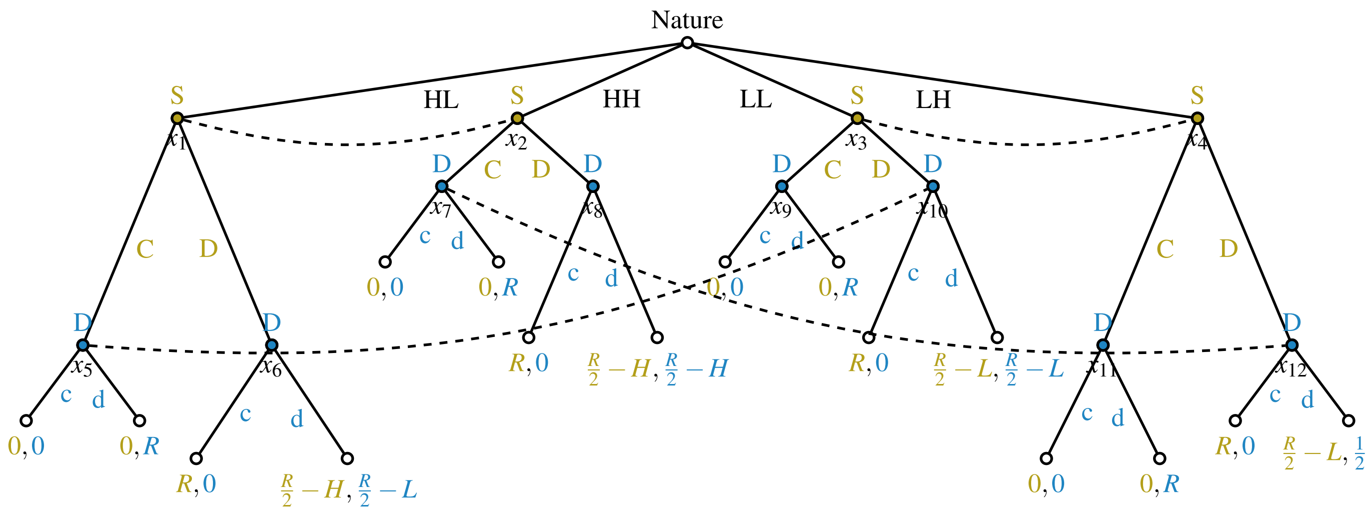
$\langle N, \{A_i\}_{i=1}^n, \{\Theta_i\}_{i=1}^n, \{v_i(\cdot;\theta_i), \theta_i \in \Theta_i\}_{i=1}^n, \{\phi_i\}_{i=1}^n \rangle$

- $N = \{1,2\}$ donde 1 es el primer jugadore y 2 el segundo
- $A_i = \{G, NG\}$ donde G es ser gallina y NG no ser gallina
- $\Theta_i = \{L, H\}$ donde L es tener padres indulgentes y H tener padres severos
- $S_i(\Theta_i) = \{GG, GNG, NGG, NGNG\}_{LH} \forall i \in N$
- $\phi(\theta_{-i}|\theta_i) = \frac{1}{4}$
- $v_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})|\theta_i)$
  $Ev_i(\cdot) = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} [v_i(s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})|\theta_i)\phi_i(\theta_{-i}|\theta_i)]$









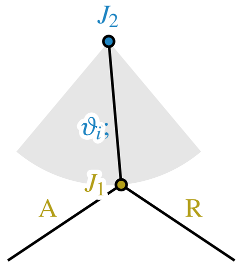
La forma normal:
$S_2(\theta_2) = \{CC, CD, DC, DD\}_{LH}$
Estime los pagos:

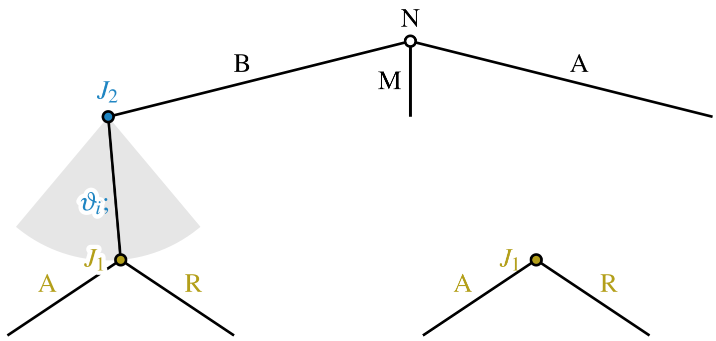
$$E_{v_1}(CD, dd) =$$

$$\frac{1}{4} \cdot v_1(C, d|L) + \frac{1}{4}(C, d|L) + \frac{1}{4}v_1(D, d|H) + \frac{1}{4}v_1(D, d|H)$$

■

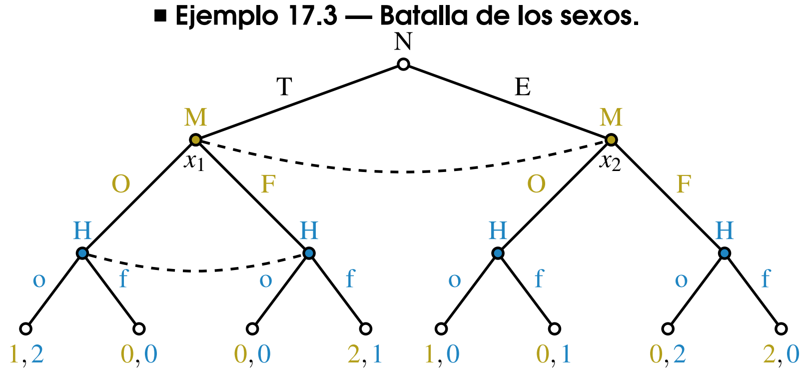
17.2.3 Negociación ineficiente y Selección adversa (Akerlof 1970)





$$
\begin{aligned}
E[v_2] =& 14\left(\frac{1}{3}\right) + 24\left(\frac{1}{3}\right) + 34\left(\frac{1}{3}\right)\\
=& 24\\
E[v_2] =& 14\left(\frac{1}{2}\right) + 24\left(\frac{1}{2}\right)\\
=& 19\\
E[v_2] =& 14(1)\\
=& 14
\end{aligned}
$$

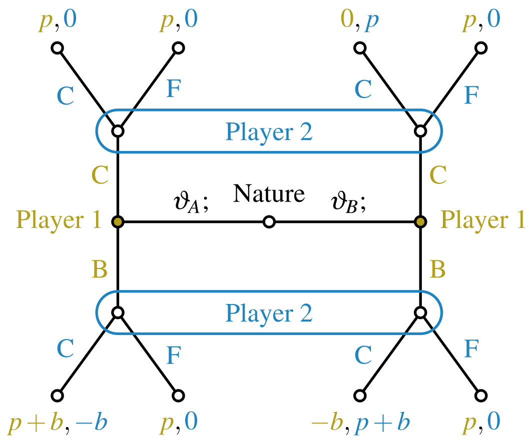
■ Ejemplo 17.3 — Batalla de los sexos.

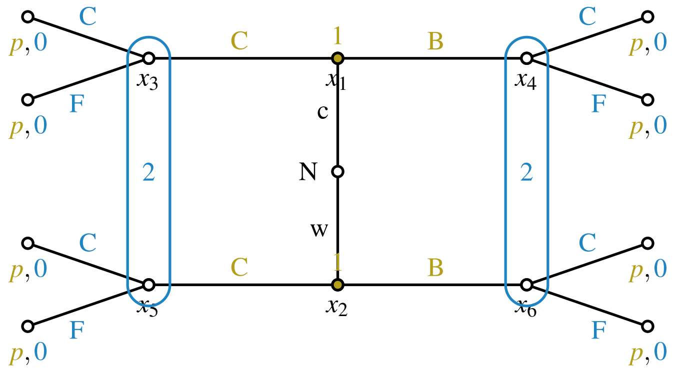


$$
MR_H(s_M) = \begin{cases} o & si \quad s_M = O \\ f & si \quad s_M = F \end{cases}
$$

		P_2			
		of	of	fo	ff
P_1	O	$1,1$	$\frac{1}{2},\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2},0$	$0,\frac{1}{2}$
	F	$0,1$	$1,0$	$1,1$	$2,\frac{1}{2}$

∎





17.2.3.1 Cournot con información asimétrica

V Juegos dinámicos con información incompleta

18. Perfección en subjuegos en juegos bayesianos

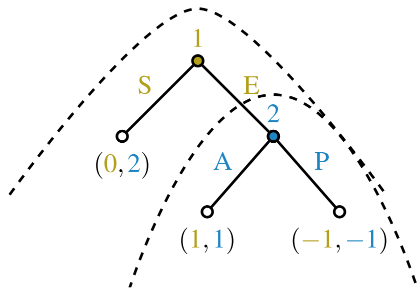
Dado que los juegos bayesianos normalmente tienen como único subjuego el juego completo, se dificulta la aplicación del concepto de perfección en subjuegos como un concepto solución que garantice la racionalidad secuencial.

■ Ejemplo 18.1 — Juego de entrada al mercado.

- J_1 está valorando ingresar al mercado
- J_2 es actualmente monopolista
- Si J_1 no entra al mercado (S) obtiene 0 y J_2 gana 2
- Si J_1 entra al mercado (E) obtiene 1 y J_2 gana 1 si acepta la entrada al mercado (A) y si J_2 decide pelear (P) cada jugador gana -1.

Determine:

1. El juego en forma extensiva



2. La matriz de pagos

P_1 \ P_2	A	P
S	$0,2$	$0,2$
E	$1,1$	$-1,-1$

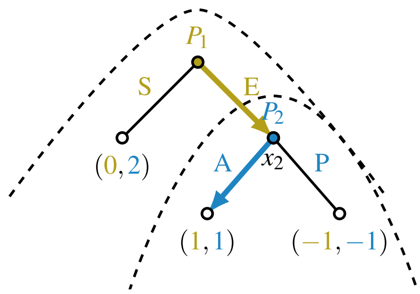
3. Los equilibrios de Nash

P_1 \ P_2	A	P
S	$0,\underline{2}$	$\underline{0},\underline{2}$
E	$\underline{1},\underline{1}$	$-1,-1$

Siguiendo la matriz de pagos se tienen dos equilibrios de Nash en estrategias puras:

$$\therefore S^N = \{(E,A),(S,P)\}$$

4. El equilibrio perfecto en subjuegos



Siguiendo la forma extensiva, se tienen dos subjuegos, el primero inicia en el nodo x_2 y el segundo inicia en x_0 que es el juego completo. En x_2 la empresa 2 tiene un mayor pago cuando acepta porque $1 > -1$, mientras que en x_0 la empresa 1 elige entrar porque le reporta mayores pagos $0 < 1$.

$$\therefore S^{PSJ} = \{(E,A)\}$$

Ahora considere una variante que incluya información incompleta. Imagine que J_1 puede tener una tecnología tan buena (C con probabilidad p) como la de J_2, en cuyo caso el juego anterior describe los beneficios. J_1 también puede tener una tecnología inferior (W) en cuyo caso no ganaría ingresando (pago de -1 si J_2 no pelea y -2 si J_2 pelea) y J_2 perdería menos si ocurriera la lucha. Determine:

1. Jugadores

$N = \{1,2\}$ donde 1 es la empresa entrante y 2 la empresa monopolista

2. Acciones

$A_1 = \{S,E\}$ donde S es salir y E entrar al mercado

$A_2 = \{P,A\}$ donde P es pelear y A aceptar la entrada de la empresa 1

3. Tipos

$\Theta_1 = \{c,w\}$ donde c es tener costos competitivos y w costos altos (competidor débil)

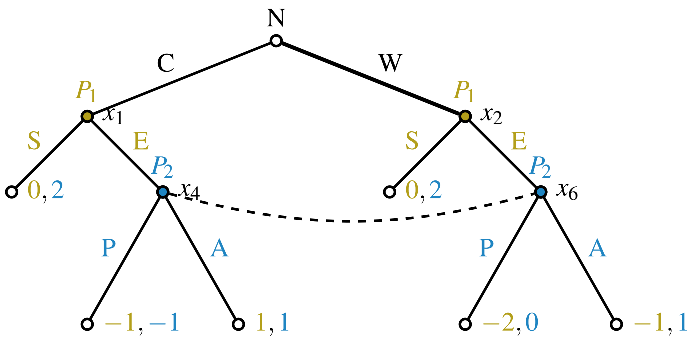
Empresa 2 solo tiene un tipo

4. Estrategias

$S_1(\Theta_1) = \{SS,SE,ES,EE\}_{cw}$ (xy) x es lo que hace si es compet

$S_2 = \{P,A\}$ donde P es pelear y A aceptar la entrada de la empresa 1

5. El juego en forma extensiva



El sistema de creencias sería:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \{(p, 1-p); \text{ donde } p = Pr\{\theta_1 = c\} \text{ y } 1-p = Pr\{\theta_1 = w\}\} \\ \sigma_1(\theta_1) &= \{(\sigma_c, 1-\sigma_c), (\sigma_w, 1-\sigma_w); \text{ donde } \sigma_c = Pr\{E|\theta_1 = c\} \text{ y } \sigma_w = Pr\{E\theta_1 = w\}\} \\ \mu_2(x) &= \{(\mu_2(x_4), \mu_2(x_6); \text{ donde } \mu_2(x_4) = Pr\{\theta_1 = c|E\} \text{ y } \mu_2(x_6) = Pr\{\theta_1 = w|E\}\}\end{aligned}$$

6. La matriz de pagos

P_1 \ P_2	P	A
SS	$0,2$	$0,2$
SE	$2p-2, 2p$	$p-1, 1+p$
ES	$-p, 2-3p$	$p, 2-p$
EE	$p-2, -p$	$2-p, 1$

Suponga $p = \frac{1}{2}$

P_1 \ P_2	P	A
SS	$0,2$	$0,2$
SE	$-1,1$	$-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
ES	$\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
EE	$\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}$	$0,1$

$$\therefore S^N = \{(SS, P), (ES, A)\}$$

7. Cantidad de subjuegos

Pero la estrategia (SS,P) implica un comportamiento no creíble del jugador 2, que no sería secuencialmente racional.

Dada la definición de equilibrio perfecto en subjuegos, las estrategias que llevan al Equilibrio bayesiano de Nash corresponden a equilibrios perfectos en subjuegos, sin embargo, ya se estableción que (SS,P) no es creíble.

El problema es que el concepto de equilibrio perfecto en subjuebos restringe la atención a las mejores respuestas dentro de los subjuegos, pero cuando hay información incompleta, la información inducida sobre los tipos de otros jugadores hace que el único subjuego adecuado sea el juego completo.

■

Dado el problema en la definición del equilibrio perfecto en subjuegos en juegos Bayesianos, es necesaria la racionalidad secuencial del J_2 dentro de cada conjunto de información, incluso cuando no es el primer nodo de un subjuego definido adecuadamente.

Pregunta clave: ¿En el conjunto de información el J_2 está jugando la mejor respuesta?

- Sí $\Rightarrow$ sigue un comporamiento racionalmente secuencial
- No $\Rightarrow$ no sigue un comporamiento racionalmente secuencial

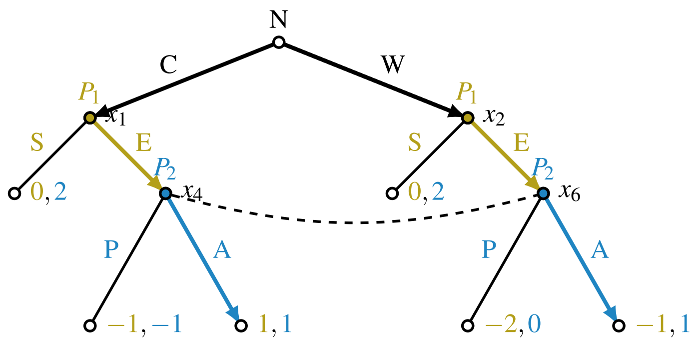
Deben incluirse las creencias de los jugadores en cada conjunto de información:
- Aquellos que se alcanzan con probabilidad positiva
- Aquellos que no se alcanzan nunca

Definición 18.1 — Ruta de equilibrio. Sea $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ un perfil de estrategias de equilibrio bayesiano de Nash en un juego de información incompleta.

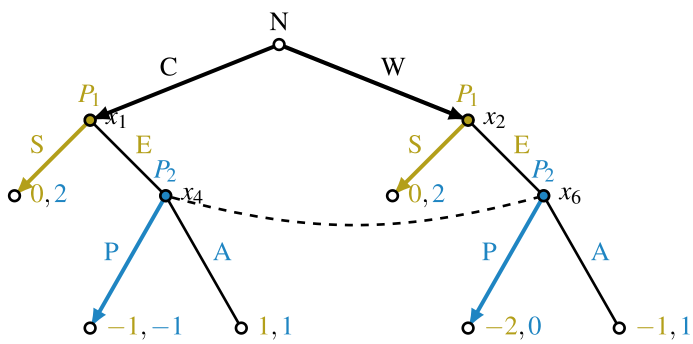
Se dice que un conjunto de información está en la ruta de equilibrio si dada σ^* y dada la distribución de los tipos, se alcanza con probabilidad positiva.

Se dice que un conjunto de información está fuera de la ruta de equilibrio si dada σ^* y la distribución de tipos, se alcanza con una probabilidad cero.

En el ejemplo anterior, el equilibrio bayesiano de Nash que implica que J_1 elige (ES):
- Elige entrar al mercado cuando es competitivo
- Elige no entrar al mercado cuando es débil
- Bajo esta estrategia, todos los conjuntos de información se alcanzan con probabilidad positiva



El equilibrio bayesiano de Nash que implica que J_1 elige (SS):
- No ingresa cuando es competitivo
- Elige no entrar al mercado cuando es débil
- En este caso el conjunto de información de J_2 no se alcanza con probabilidad positiva



Las acciones del jugador con información privada tendrán un efecto sobre qué conjuntos de información del jugador no informado se alcanzan con probabilidad positiva.

Definición 18.2 — Sistema de creencias. Un sistema de creencias μ de un juego de forma extensiva asigna una distribución de probabilidad sobre los nodos de decisión a cada conjunto de información.

Es decir, para cada conjunto de información $h \in H$ y cada nodo de decisión $x \in h$, $\mu(x) \in [0,1]$ es la probabilidad de que el jugador i que se mueve en el conjunto de información h elija estar en x, donde $\sum_{x \in h} \mu(x) = 1$ para todo $h \in H$.

En el caso del juego de entrada al mercado J_2 debe establecer creencias sobre el nodo en el que se encuentra cuando le toca decidir.

J_2 debe tomar la decisión sobre los nodos x_4 y x_6. El sistema de creencias se establece como:

$$0 \leq \mu(x_4) \leq 1$$
$$0 \leq \mu(x_6) \leq 1$$
$$\mu(x_4) + \mu(x_6) = 1$$

18.1 Requisitos

1. Sistema de creencias
2. Regla de Bayes
3. $0 \leq \mu \leq 1$
4. Racionalidad secuencial

18.1.1 Sistema de creencias

Cada jugador tendrá una creencia bien definida sobre dónde se encuentra en cada uno de sus conjuntos de información. Las creencias tienen dos restricciones:

- Endógena: el comportamiento de los jugadores está determinado por las estrategias que tiene y que son controladas por cada jugador
- Exógena: la naturaleza juega y define los tipos de los jugadores, esto no puede ser controlado por los jugadores

Las creencias de J_2 formalmente se definen como:

- $\mu(x_3) = Pr\{J_1 \text{ es competitivo}|E\}$
- $\mu(x_4) = 1 - \mu(x_3) = Pr\{J_1 \text{ es débil } |E\}$

¿Cuál sería la creencia razonable de J_2 ante la estrategia de (ES) de J_1?

¿Qué pasa con J_1?

- Si $\theta_1 = c$ entonces J_1 juega E con probabilidad σ_c y S con probabilidad $1 - \sigma_c$
- Si $\theta_1 = w$ entonces J_1 juega E con probabilidad σ_w y S con probabilidad $1 - \sigma_w$

Como la naturaleza juega y define si es C con probabilidad p y W con probabilidad $1 - p$:

$$\begin{aligned}
\mu(x_3) =& Pr\{\text{ es competitivo y entra}\} \\
=& \frac{Pr\{\text{ es competitivo y entra}\}}{Pr\{\text{ es competitivo y entra}\} + Pr\{\text{ es débil y entra}\}} \\
=& \frac{\sigma_c(p)}{\sigma_c(p) + \sigma_w(1-p)}
\end{aligned}$$

18.1.2 Regla de Bayes

Sea $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ un perfil de estrategias de equilibrio bayesiano de Nash. Se requiere que, en todos los conjuntos de información, las creencias que están en la ruta de equilibrio sean consistentes con la regla de Bayes.

18.1.3 $0 \leq \mu \leq 1$

En los conjuntos de información que están fuera de la ruta de equilibrio se puede asignar cualquiera creencia, sobre la que no se aplique la regla de Bayes.

18.1.4 Racionalidad secuencial

Dadas sus creencias, las estrategias de los jugadores deben ser secuencialmente racionales. En cada conjunto de información, los jugadores jugarán una mejor respuesta a sus creencias:

$$E\left[v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}, \theta_i | h, \mu)\right] \geq E\left[v_i(s_i', \sigma_{-i}, \theta_i | h, \mu)\right] \forall s_i' \in S_i$$

Definición 18.3 — Equilibrio Bayesiano de Nash. Si un perfil de estrategias (probablemente mixtas) $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ es un equilibrio bayesiano de Nash de un juego bayesiano Γ, y si σ^* induce a que todos los conjuntos de información se alcancen con probabilidad positiva, entonces σ^*, con con el sistema de creencias μ^* derivado directamente de σ^* y la distribución de tipos, constituye un equilibrio bayesiano perfecto para Γ.

Definición 18.4 — Equilibrio Bayesiano Perfecto Débil. Note que el requisito 3 no impone ninguna restricción a las estrategias fuera de la ruta de equilibrio, por eso se puede encontrar en la literatura como Equilibrio Bayesiano Perfecto Débil.

Definición 18.5 — Equilibrio secuencial. Un perfil de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$, junto con un sistema de creencias μ^*, es consistente si existe una secuencia de estrategias mixtas no degeneradas, $\{\sigma^k\}_k^\infty = 1$, y una secuencia de creencias que se derivan de cada σ^k según la regla de Bayes $\{\mu^k\}_k^\infty = 1$ tal que $\lim_{k\to\infty}(\sigma^k, \mu^k) = (\sigma^*, \mu^*)$.

Definición 18.6 — Equilibrio Bayesiano Perfecto y Consistente. Un perfil de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$, junto con un sistema de creencias μ^* es un equilibrio secuencial si (σ^*, μ^*) es un equilibrio bayesiano perfecto y consistente.

Definición 18.7 — Equilibrio Bayesiano Perfecto Fuerte. El equilibrio bayesiano perfecto y consistente se considera que es un Equilibrio Bayesiano Fuerte.

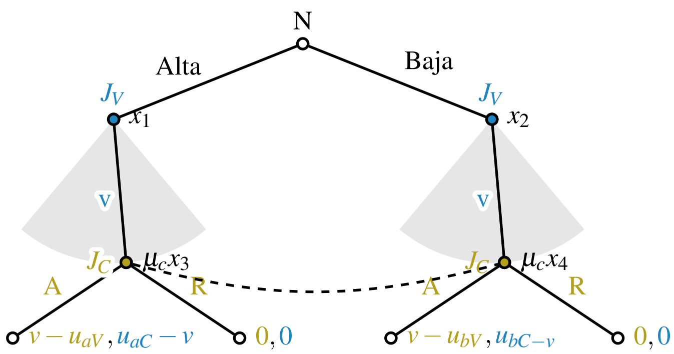
■ **Ejemplo 18.2 — Akerlof: el mercado de limones.** El análisis de la compra de un carro usado es un juego clásico que forma parte de la base del modelo de Akerlof: Mercado de Limones de 1970. En este juego, una potencial vendedora de un carro usado, María, hace una oferta de venta a un potencial comprador, José. La oferta es un número v entre 0 y 1. Al recibir la oferta v José debe decidir entre aceptarla (A) o rechazarla (R).

La calidad del carro, que puede ser alta (C_a) o baja (C_b), es información privada de la vendedora, y el comprador solo tiene una estimación de la probabilidad *a priori*, según la cual, la probabilidad de que el carro sea del tipo C_a es q.

Suponga que el valor de un carro de calidad alta para la vendedora es u_{aV} y para el comprador u_{aC} siendo $0 < u_{aV} < u_{aC} < 1$ y los valores correspondientes a un carro de calidad baja son $u_{bV} \wedge u_{bC} \wedge 0 < u_{bV} < u_{bC} < 1$. Como es de esperar, ambos valoran más un carro de alta calidad que uno de baja calidad.

Además, se sabe que el valor esperado, *a priori*, por el comprador está dado por $E_{v1}(q) = q \cdot u_{aC} + (1-q) \cdot u_{bC}$.

1. Establezca la forma extensiva



2. Formula la forma normal

$$\Gamma : \langle N, \{A_i\}_{i=1}^\infty, \{\Theta\}_{i=1}^\infty, \{S_i(\Theta_{ik})\}_{i=1}^\infty, \{v_i(\cdot|\theta_i)\forall\theta_i \in \Theta_i\}_{i=1}^\infty, \{\phi_i\}_{i=1}^\infty, \{\mu_i(x_i)\}_{i=1}^\infty\rangle$$

- $N = \{V, C\}$ donde V es la vendedora y C es el comprador
-

3. Encuentre los equilibrios bayesianos de Nash.
4. Encuentre los equilibrios perfectos bayesianos, débiles y fuerte.

∎

19. Juegos de Señalización

Index