CRECIMIENTO Y CICLOS

DARIEL AMADOR

Índice general

Introducción

El curso está estructurado para que la gente estudiada y que rinde, pase. El trabajo de uno es estudiar, llevar la materia al día, leer los libros, artículos y hacer los ejercicios. Los artículos son referencias, ella se centra en los libros. La consulta está abierta, cada quien la puede usar o no.

1. 1848 $\rightarrow$ John Stuart Mill: Principios de Economía Política
2. 1842 $\rightarrow$ John Stuart Mill: Un sistema de lógica inductiva y deductiva
3. Auguste Comte $\rightarrow$ 1798 - 1857: Padre del positivismo. El positivismo es inductivista. Se observa cosas en el mundo y a partir de esa observación me planteo una pregunta. La observación me genera preguntas. Y ante esa pregunta me planteo una hipótesis: la que yo creo que es la respuesta a la duda que yo tenía.

1. Método científico

- Observación
- Planteo una pregunta
- Hipótesis
- Experimento (condiciones controladas → Principio de falsación (Karl Popper)
  - Busca refutar la hipótesis → rechaza o no rechaza → si se rechaza entonces se plantea una hipótesis alternativa
  - Tiene que tener un elemento de replicablidad.
- Teoría

Pero solo la economía experimental usa este método. 1898 → Thorstein Veblen y la economía experimental. Este método también es el método de la biología. Fuera de la economía experimental, no puedo aplicar este método; las personas son seres demasiado complejos y ¿cómo podría hacer para estudiar los fenómenos bajo las condiciones controladas del método científico? → no puedo.

1.1 Método deductivo concreto

Este sí ya es el método usado en Economía.

- Se parte de una pregunta → La pregunta que trata de responder este curso es ***¿Cómo se explica la riqueza de una nación?*** Esta es la pregunta del curso y que se hicieron los clásicos.
- Hay una serie de axiomas
- Se usan reglas de conexión → nos las proponen los matemáticos
- Se plantean teoremas

Esto es lo que hacemos en Economía. Posteriormente, Karl Popper a este método sugiere una **etapa de verificación**.

Todo esto es lo que se va a trabajar de aquí al final del semestre.

Por eso en economía trabajamos con modelos porque la complejidad es excesiva en los fenómenos que queremos estudiar. Se simplifican al máximo, son explicaciones simplificadas de la realidad, de lo que queremos estudiar.

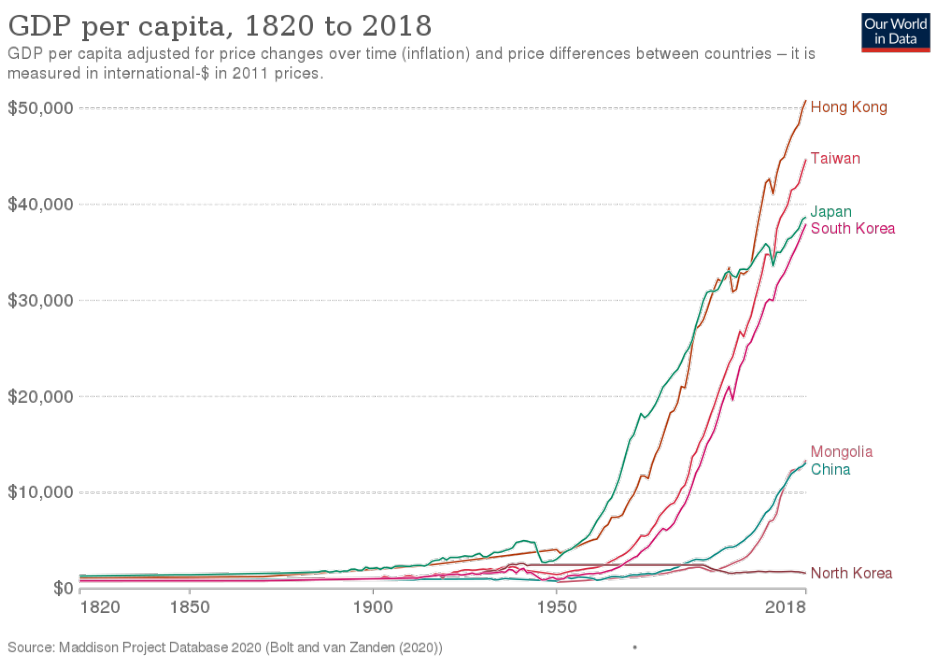
Hay un objetivo central en el curso además de los contenidos: la formalización. Para esto hay que entender el método que usamos.

2. Riqueza de las Naciones

Libro I:

- L
- K
- tierra
- A (tecnología)
- H
- G

$Y = Y(L, K, tierra, institucionalidad, A, H) \rightarrow$ todo el curso



$$\text{tasa de crecimiento de x} = \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t}$$

II Modelo de Solow y Swan

Este modelo refuta el modelo de Harrod-Domar y Keynesianismo. Los determinantes de la tasa de crecimiento según Solow-Swan:

- Cambio tecnológico
- Cambio poblacional
- Ahorro

Se determina el **crecimiento por unidad de trabajo**.

2.1 Debilidades del modelo

- Se supone un crecimiento tecnológico exógeno. Esto quiere decir que no se va a explicar el crecimiento tecnológico.
- Es un modelo de economía cerrada.
- No hay gobierno, se abstrae del gobierno.

Vamos a ver una economía cerrada.

2.2 Producción

La producción es totalmente neoclásica.

$$Y_t = Y_t(L_t, A_t, K_t)$$

- $Y_L > 0$
- $Y_{LL} < 0$
- $Y(0, A_t, K_t) = 0$
- $Y_K > 0$
- $Y_{KK} < 0$
- $Y(L_t, A_t, 0) = 0$

***Función de producción homogénea**

- Productividades marginales decrecientes
- Rendimientos constantes a escala: sea $k \in \mathbb{N}$, la función $g : \mathbb{R}^{k+2} \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado m en $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$ si y solo si $g(\lambda x, \lambda y, z) = \lambda^m(x, y, z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{R}^k$.

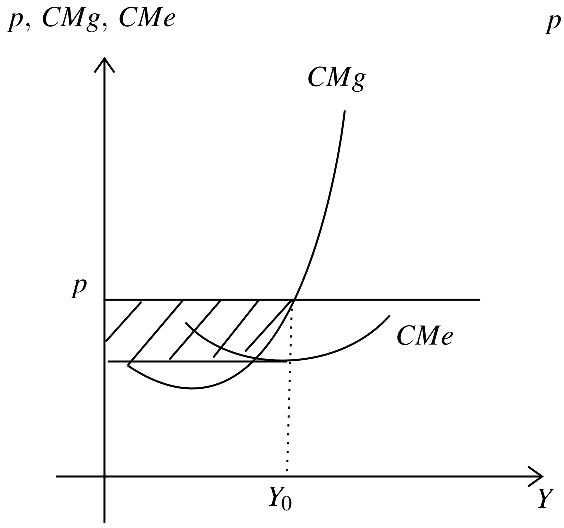
m$\lambda^{m-1} g(x,y,z) = g_x x + g_y y$

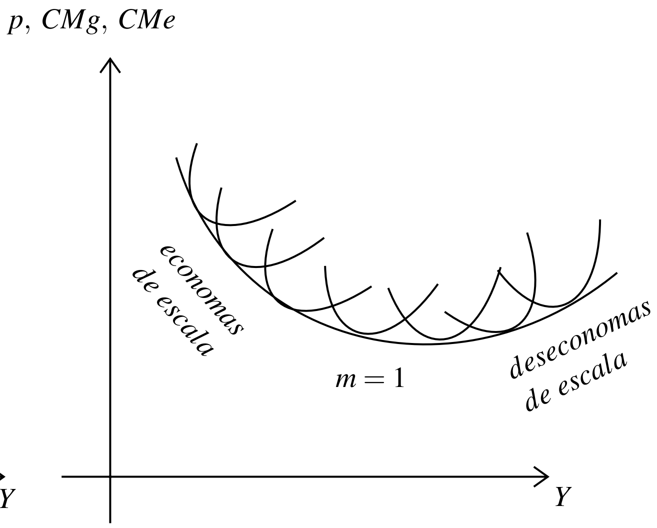
m = 1

g(x,y,z) = $g_x x + g_y y$

La función de producción tiene que ser homogénea de grado 1 porque, en el largo plazo, cuando todos los factores de la producción son ajustables y no fijos, ahí es en donde no se va a tener incentivo en cambiar la cantidad producida, porque antes de ese tramo de $m = 1$ hay economías de escala y posterior a eso hay deseconomías de escala porque crecí demasiado, soy muy burocrático, tengo muchos costos, etc. En el largo plazo, cuando puedo modificar todos mis factores productivos, voy a trabajar en esa zona de mayor eficiencia.

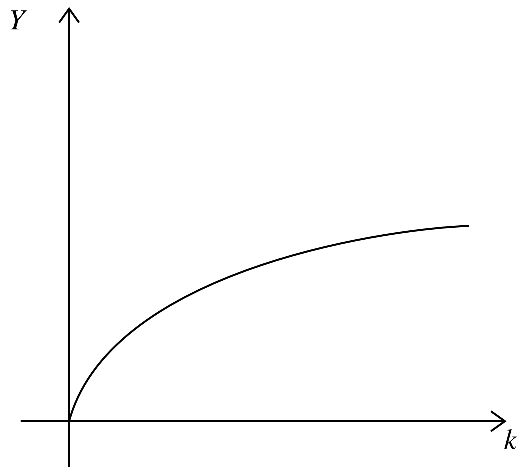
- Continua
- Diferenciable dos veces
- Productividades marginales positivas pero decrecientes





2.3 Condiciones de Inada

- $\text{lím}_{k\to 0} Y_k = +\infty$
- $\text{lím}_{k\to \infty} Y_k = 0$
- $\text{lím}_{L\to 0 Y_L} = +\infty$
- $\text{lím}_{L\to \infty} Y_L = 0$



$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L \partial K} > 0 \rightarrow \text{Factores complementarios} \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial L \partial K} < 0 \rightarrow \text{Factores sustitutos}$$

2.4 Supuestos

- Pleno empleo
- El bien Y definido en la función de producción está normalizado y por eso hay precios normalizados (reales)
- Tierra y recursos naturales irrelevantes
- El mercado laboral es flexible; el salario va a ajustar para que la gente pueda estar empleada porque es largo plazo
- Empresas tomadores de precios

$$\max_{(K_t, L_t)} \quad F(K_t, A_t, L_t) - wL_t - rK_t$$

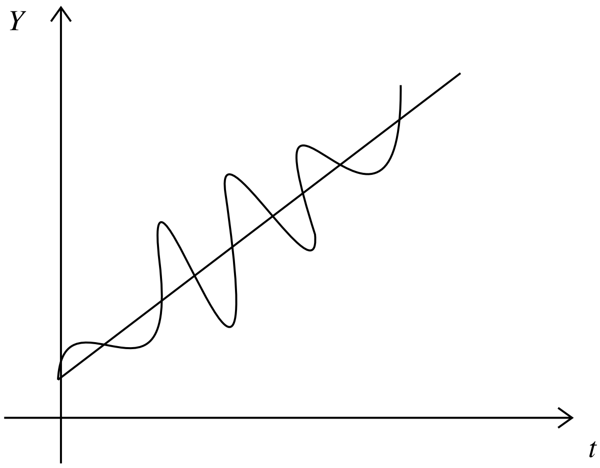
Condiciones de primer orden:

$$F_K(K_t, A_t, L_t) = r$$
$$F_L(K_t, A_t, L_t) = w$$

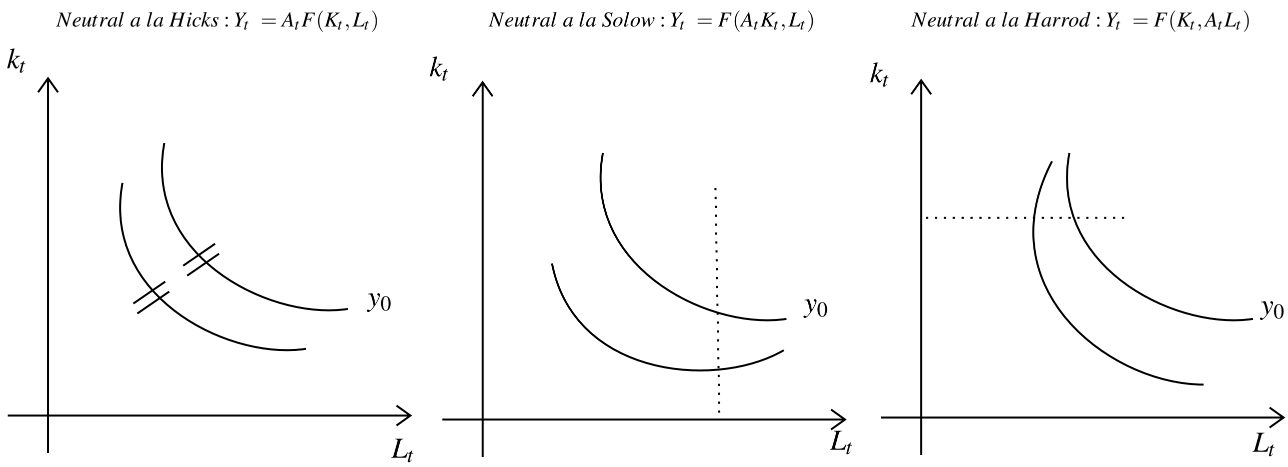
$$\boxed{Y_t = Y_L \cdot L + Y_K \cdot K} \rightarrow \text{ por ser función homogénea de grado 1}$$

$\boxed{Y_t = w \cdot L + r \cdot K} \rightarrow$ El PIB o el producto es igual a la descomposición del producto por el pago de los factores. El PIB lo puedo descomponer por el pago a los factores.

¿Qué hace que el producto de un país crezca a lo largo del tiempo? $\rightarrow$ esto trata de responder el modelo de Solow. Es un problema dinámico. Nos interesa la tendencia a largo plazo y no las fluctuaciones, que son los ciclos económicos.



Hay tres tipos de tecnología:



En la realidad la tecnología neutral a la Harrod está más cercano a lo que realmente pasa. Para poder comparar justamente entre países, hay que normalizar por unidad efeciva de consumo. Ahora hay que suponer una tasa de depreciación. El capital se deprecia a una tasa delta: $\delta \in [0,1]$. Es el gasto que sufre el capital por el uso y el paso del tiempo. Además, la tecnología es un bien público:

- No escluyente: no puedo impedir que otras personas lo usen.
- No rival en el consumo: mi uso no limita que otros lo usen.

Además, la tecnología es exógena.

$$A_{t+1} = (1+g)A_t$$
$$A_{t+1} = A_t + gA_t$$
$$A_{t+1} - A_t = gA_t$$
$$\boxed{\frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = g}$$
$$A_{t+1} = (1+g)A_t$$
$$A_t = (1+g)A_{t-1}$$
$$A_{t-1} = (1+g)A_{t-2} \Rightarrow A_t = (1+g)[(1+g)A_{t-2}] \Rightarrow A_t = (1+g)^2 A_{t-2}$$
$$\vdots$$
$$\boxed{\mathrm{A}_t = (1+g)^t A_0}$$
$$L_{t+1} = (1+n)L_t \Rightarrow \boxed{\mathrm{L}_t = (1+n)^t L_0}$$

Ya sabemos cómo crece la población y la tecnología, sólo nos falta saber cómo crece el capital para saber cómo crece el producto o el ingreso. $Y_t = F(A_t L_t, \underbrace{K_t}_{\text{vamos a centrar cómo crece}}$

)

- La economía es cerrada
- No hay gobierno
- Agente representativo (un agente particular representa a la economía)
- La oferta es neoclásica y la demanda es keynesiana.

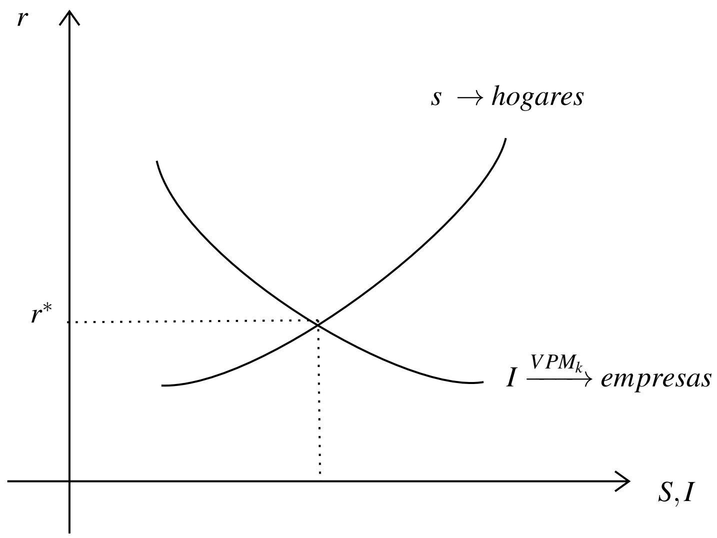
Lo que se hace es plantear todos los supuestos neoclásicos del lado de la oferta porque es lo que interesa. La oferta es lo que va a ser determinante para entender el crecimiento. Pero del lado de la demanda suponemos una demanda keynesiana.Que la demanda sea keynesiana quiere decir que se consume una fracción constante del producto. La crítica de los modelos keynesianos es que no tienen microfundamentos. Solow le gana el debate a los keynesianos. Una de las debilidades de este modelo es asumir demanda keynesiana y que no hay microfundamentos.
En una economía cerrada el ingreso se consume o se ahorra. En el mercado de fondos prestables el ahorro se convierte en inversión.

$$S_t = sY_t$$
$$C_t = (1-s)Y_t$$

$$\boxed{\mathrm{K}_{t+1} - K_t = sF(A_t L_t, K_t) - \delta K_t} \rightarrow \text{Ecuación básica}$$
$$K_{t+1} = sF(A_t L_t, K_t) + K_t - \delta K_t$$
$$K_{t+1} = sF(A_t L_t, K_t) + (1-\delta)K_t$$

En esta clase hablamos de inversión neta. El capital es un stock; acervo en un tiempo determinado. Una variable stock cambia por medio de una variable flujo: la inversión. A nosotros lo que nos interesa es el capital productivo. Ahorro es ingreso que no se consume. El ahorro NO es igual que la inversión, no son lo mismo: son decisiones diferentes. Pero, en equilibrio del mercado de fondos prestables, una tasa de interés fija una cantidad igual de ahorro e inversión.

Con el consumo que recibe una persona, en una economía cerrada, solo se pueden hacer dos cosas: consumir y ahorrar. Ese ahorro se lleva al mercado de fondos prestables y se convierte en inversión. El ahorro es el ingreso que no se consume, y se quiere consumir después, se pospone el consumo de ese ingreso. Como el ingreso es un stock, y el ahorro es la variable flujo que permite aumentar la riqueza. El ahorro como tal no es riqueza sino hasta que se transforma en producción. La inversión es una decisión de las empresas y el ahorro es una decisión de los hogares que normalmente vendría de resolver un problema de optimización que aquí no estamos incluyendo. Pero en el equilibrio del mercado de fondos prestables se fija una tasa de interés tal que el monto del ahorro es igual al monto de la inversión: cantidad ahorrada es igual a cantidad invertida.



$$K_{t+1} - K_t = sF(K_t, \underbrace{A_t L_t}_{\substack{\text{unidad}\\\text{efectiva}\\\text{de}\\\text{trabajo}}}) - \delta K_t$$

Ahora, para poder ver el efecto que tiene el capital, es necesario normalizar, porque de momento se tienen muchas cosas cambiando al mismo tiempo y por ende debo aislar el efecto del capital, por lo que voy a normalizar por unidad efectiva de trabajo. (Metáfora de la piscina con los tres tubos).

$$\Leftrightarrow \frac{K_{t+1}}{A_tL_t} - \frac{K_t}{A_tL_t} = \frac{sF(K_t, A_tL_t)}{A_tL_t} - \frac{\delta K_t}{A_tL_t}$$

$$\text{*Sea } k_t^E = \frac{K_t}{A_tL_t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{K_{t+1}}{A_tL_t} - k_t^E = sF\left(\frac{K_t}{A_tL_t}, \frac{A_tL_t}{A_tL_t}\right) - \delta k_t \qquad *\lambda F(x,y,z) = F(\lambda x, \lambda y, z)$$

$$\boxed{A_{t+1} = (1+g)A_t}$$

$$\boxed{L_{t+1} = (1+n)L_t}$$

$$\Rightarrow A_{t+1}L_{t+1} = (1+g)(1+n)A_tL_t \Leftrightarrow \frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_tL_t} = (1+g)(1+n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} \cdot \frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_tL_t} - k_t^E = sF(k_t^E, 1) - \delta k_t^E$$

$$\Leftrightarrow k_{t+1}^E(1+g)(1+n) - k_t^E = sf(k_t^E) - \delta k_t^E \qquad \text{*Sea } (1+z) = (1+n)(1+g)$$

$$\Leftrightarrow k_{t+1}^E(1+z) - k_t^E - zk_t^E = sf(k_t^E) - \delta k_t^E - zk_t^E \Rightarrow (1+z)(k_{t+1} - k_t) = sf(k_t^E) - (z+\delta)k_t^E$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \underbrace{k_{t+1}^E - k_t^E}_{\substack{\text{inversion}\\ \text{neta}}} = \frac{1}{1+z}\underbrace{\left[sf(k_t^E) - \underbrace{(z+\delta)k_t^E}_{\substack{\text{costos}\\ \text{reposición}}}\right]}_{\substack{\text{ahorro}\\ \text{neto}}}}$$

$zk_t^E \longrightarrow$ lo que invierta para mantener el mismo nivel de capital por unidad de trabajo. Es el costo de mantener el mismo promedio de capital.

$\delta k_t^E \longrightarrow$ costo de depreciación de capital.

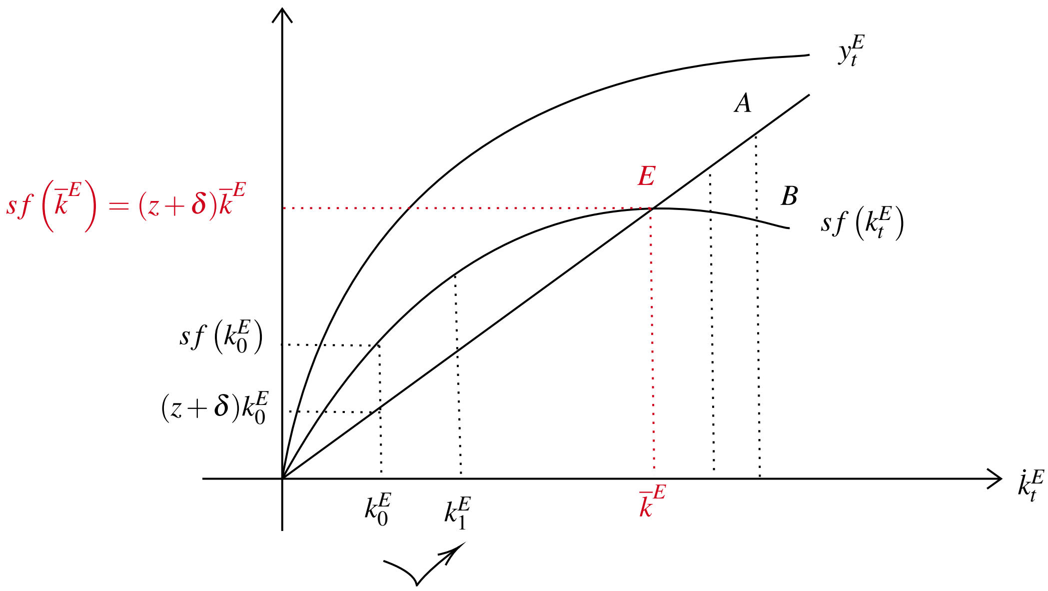
$k_{t+1}^E - k_t^E \longrightarrow$ inversión neta.

3. Tiempo continuo

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$$
$$A(t) = e^{gt}A(0)$$
$$L(t) = e^{nt}L(0)$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta) - x(t)}{x(t)} = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$$
$$\dot{K}(t) = sF(K(t), A(t)L(t)) - \delta K(t)$$
$$\text{Sea } k^E(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$$
$$\dot{k}^E(t) = \frac{\dot{K}(t)\,[A(t)L(t)] - K(t)\,\left[\dot{A}(t)L(t) + A(t)\dot{L}(t)\right]}{(A(t)L(t))^2}$$

Dividiendo todo por $\dot{k}^E(t) = \dfrac{K(t)}{A(t)L(t)}$, o sea, multiplicando por $\dfrac{1}{k^E(t)} = \dfrac{A(t)L(t)}{K(t)}$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{k}^E(t)}{k^E(t)} = \frac{\dot{K}(t)\,[A(t)L(t)]}{(A(t)L(t))^2} \cdot \frac{A(t)L(t)}{K(t)} - \frac{K(t)\,\left[\dot{A}(t)L(t) + A(t)\dot{L}(t)\right]}{(A(t)L(t))^2} \cdot \frac{A(t)L(t)}{K(t)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\dot{k}^E(t)}{k^E} = \frac{\dot{K}(t)\,[A(t)L(t)]}{(A(t)L(t))^2} \cdot \frac{A(t)L(t)}{K(t)} - \frac{K(t)\dot{A}(t)L(t)}{(A(t)L(t))^2} \cdot \frac{A(t)L(t)}{K(t)} - \frac{K(t)A(t)\dot{L}(t)}{(A(t)L(t))^2} \cdot \frac{A(t)L(t)}{K(t)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\dot{k}^E(t)}{k^E} = \frac{\dot{K}(t)\left[\cancel{A(t)}\cancel{L(t)}\right]}{(\cancel{A(t)}\cancel{L(t)})^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{A(t)}\cancel{L(t)}}{K(t)} - \frac{\cancel{K(t)}\dot{A}(t)\cancel{L(t)}}{(A(t)\cancel{L(t)})^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{A(t)}\cancel{L(t)}}{K(t)} - \frac{\cancel{K(t)}\cancel{A(t)}\dot{L}(t)}{(\cancel{A(t)}L(t))^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{A(t)}\cancel{L(t)}}{\cancel{K(t)}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\dot{k}^E(t)}{k^E} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \Rightarrow \left[(g+n) + \frac{\dot{k}^E(t)}{k^E(t)}\right] K(t) = \dot{K}(t)$$
$$\Leftrightarrow \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\left[(g+n) + \frac{\dot{k}^E(t)}{k^E(t)}\right] = \frac{sF(K(t), A(t)L(t)) - \delta K(t)}{A(t)L(t)}$$
$$\Leftrightarrow k^E(t)\left[(g+n) + \frac{\dot{k}^E(t)}{k^E(t)}\right] = sF\left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}, 1\right) - \frac{\delta K^E(t)}{A(t)L(t)}$$
$$\Leftrightarrow (g+n)k^E(t) + \dot{k}^E(t) = sf(k^E(t)) - \delta k^E(t)$$
$$\Leftrightarrow \dot{k}^E(t) = sf(k^E(t)) - (z+\delta)k^E(t) \qquad \text{*Sea } g+n = z$$



Las curvas se cruzan solamente dos veces: en el origen y en el estado estacionario: $x = f(x)$. El estado estacionario es único y además tiene que ser estable y convergente. El consumo sería igual a la diferencia entre el ahorro y el producto.
El estado estacionario define una senda de asignación y precios de equilibrio. Para una secuencia de $\{L_t, A_t\}_{t+0}^{+\infty}$ y un capital inicial K_0, una senda de equilibrio es una secuencia de stock de capital, ingreso, consumo, salarios y precios de renta $\{K_t, Y_t, c_t, w_t, R_t\}_{t+0}^{+\infty}$

- $k_{t+1}^E - k_t^E = \dfrac{1}{1+z}\left[sf(k_t^E) - (z+\delta)k_t^E\right]$
- $y_t^E = f(K_t^E)$
- $c_t^E = (1-s)f(k_t^E)$
- $w_t = F_L(K_t, A_t L_t)$
- $R_t = F_K(K_t, A_t L_t)$

$$*k_{t+1}^E = k_t^E = k_{t-1}^E = \bar{k}^E$$

$$\begin{aligned} k_{t+1}^E - k_t^E &= \frac{1}{1+z}\left[sf(k_t^E) - (z+\delta)k_t^E\right] \\ \Leftrightarrow \bar{k}^E - \bar{k}^E &= \frac{1}{1+z}\left[sf(k_t^E) - (z+\delta)k_t^E\right] \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{1}{1+z}\left[sf(k_t^E) - (z+\delta)k_t^E\right] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 = sf(k_t^E) - (z+\delta)k_t^E \qquad \bar{k}^E = sf(k^E(t)) - (z+\delta)k_t^E$$

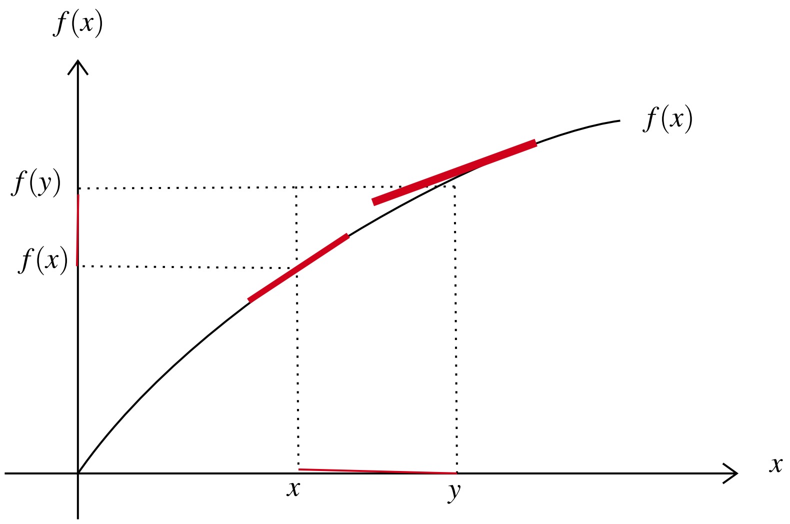
$$\Leftrightarrow \boxed{\underbrace{(z+\delta)k_t^E}_{\text{costo de reposición del capital}} = sf(k_t^E)}$$

Estábamos viendo las características del estado estacionario: existe y es único. Si $x_t, a, b \in \mathbb{R}$, si $|a| < 1$, entonces el único estado estacionario de la ecuación en diferencia $\underbrace{x_{t+1} = dx_t + b}_{\text{ecuación diferencial lineal}}$ es globalmente (asintóticamente) estable si $\bar{x}_t = \bar{x} = \dfrac{b}{1-a}$. Estado estacionario es cuando no me cambia la variable.

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= ax_t + b \\ \Leftrightarrow \bar{x} &= a\bar{x} + b \\ \Leftrightarrow \bar{x} - a\bar{x} &= b \\ \Leftrightarrow \bar{x}(1-a) &= b \\ \boxed{\Leftrightarrow \bar{x} = \tfrac{b}{1-a}} &\to \text{estabilidad: } |a| < 1 \end{aligned}$$

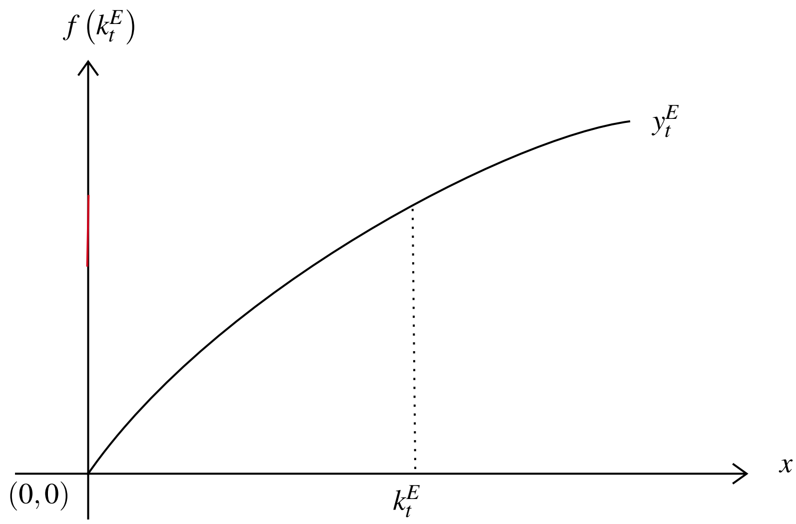
Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el vecindario del estado estacionario $\bar{x}$ definido por $g(x) = \bar{x}$ y con $|g'(x)| < 1$, entonces el estado estacionario de la ecuación en diferencia no lineal $x_{t+1} = g(x_t)$ es localmente (asintóticamente) estable.

$$\begin{aligned} K_{t+1}^E - K_t^E = \Delta K_t^E &= \frac{1}{1+z}\left[sf(k_t^E) + (\delta + z)k_t^E\right] \\ K_{t+1}^E &= \frac{1}{1+z}\left[sf(k_t^E) + (1-\delta)k_t^E\right] \\ \frac{\delta K_{t+1}^E}{\delta K_t^E} &= \frac{1}{1+z}\left[sf'(k_t^E) + (1-\delta)\right] > 0 \end{aligned}$$



Una función f es cóncava en x si y solo si $\forall x, y \in$, se cumple que:

$$f(g) - f(x) \leq f'(x)(y-x) \forall x < y \Rightarrow f(g) - f(x) > f(y)(y-x)$$



$$f(k_t^E) - f(0) > f'(k_t^E)(k_t^E - 0)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \frac{f(k_t^E)}{k_t^E} > f'(k_t^E)} \rightarrow \text{productividad media} > \text{productividad marginal}$$

$$\Leftrightarrow \frac{sf(k_t^E)}{k_t^E} > sf'(k_t^E)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+z}\left[\frac{sf(k_t^E)}{k_t^E} + (1-\delta)\right] > \frac{1}{1+z}\left[sf'(k_t^E) + (1-\delta)\right]$$

Evaluando en el estado estacionario:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+z}\left[\frac{sf(\overline{k^E})}{k_t^E} + (1-\delta)\right] > \frac{1}{1+z}\left[sf'(\overline{k^E}) + (1-\delta)\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+z}[(z+\delta) + (1-\delta)] > \frac{1}{1+z}\left[sf'(\overline{k^E}) + (1-\delta)\right]$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{1}{1+z}\left[sf'(\overline{k^E}) + (1-\delta)\right]$$

$$*sf(\overline{k^E}) = (z+\delta)\overline{k^E} \Leftrightarrow \frac{sf(\overline{k^E})}{\overline{k^E}}$$

Los corolarios 1 y 2 sirven para demostrar la estabilidad del estado estacionario. Falta ver la convergencia del estado estacionario. [**Teorema Fundamental del Cálculo**] $\forall$f:$[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ existe una función diferenciable $F : [a.b] \rightarrow \mathbb{R}$ en el intervalo $[a,b]$ tal que $F'(x) = f(x) \forall x \in [a,b]$ y:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$F \leftarrow k_{t+1}^E = \frac{1}{1+z}\left[sf(k_t^E) + (1-\delta)k_t^E\right]$$

$$f(\cdot) \leftarrow \frac{\delta k_{t+1}^E}{\delta k_t^E} = \frac{1}{1+z}\left[sf'(k_t^E) + (1-\delta)\right] > 0$$

En el estado estacionario:

$$\boxed{\text{sf}(\overline{k^E}) = (z+\delta)\overline{k^E}}$$

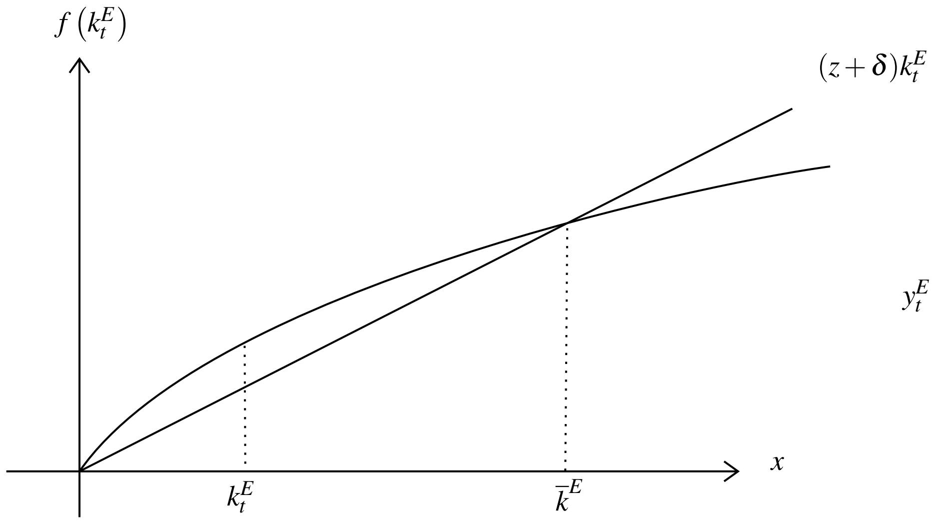
$$k_{t+1}^E = \frac{1}{1+z}\left[(z+\delta)\overline{k^E} + (1-\delta)\overline{k^E}\right]$$

$$\Leftrightarrow k_{t+1}^E = \frac{1}{1+z}\left[\overline{k^E}(1+z)\right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{k}_{t+1}^E = \overline{k^E}}$$

Entonces, hay dos casos:

- Si $k_t^E < \overline{k^E}$



$$\int_{k_{t+1}^E}^{\overline{k^E}} k_{t+1}^{E\,\prime} \quad \delta k_t^E = \overline{k^E} - k_{t+1}^E$$

$$k_{t+1}^E - \overline{k^E} = \underbrace{-\underbrace{\int_{k_{t+1}^E}^{\overline{k^E}} \underbrace{k_{t+1}^{E\,\prime} \quad \delta k_t^E}_{+}}_{+}}_{-}$$

$$k_{t+1}^E < \overline{k^E}$$

$$\frac{1}{1+z}\left[\frac{sf(k_t^E)}{k_t^E} - (z+\delta)\right] > \frac{1}{1+z}\left[\frac{sf(\overline{k^E})}{\overline{k^E}} - (z+\delta)\right]$$

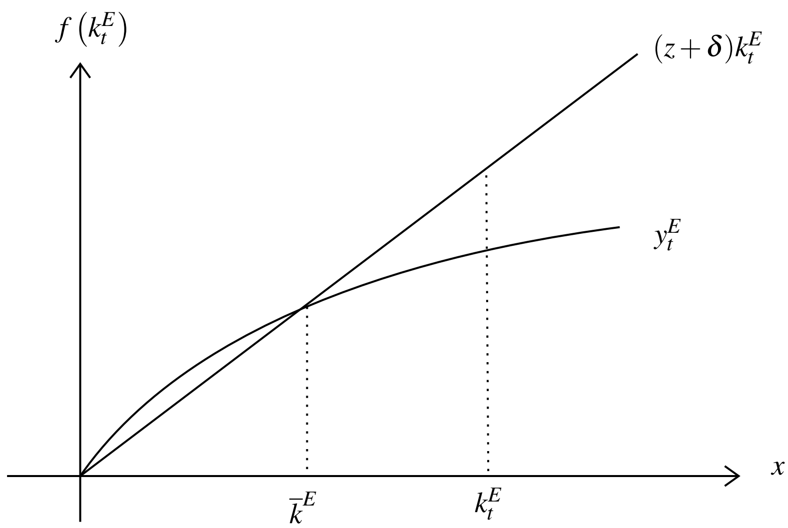
En el estado estacionario: $sf(\overline{k^E}) = (z+\delta)\overline{k^E} \Leftrightarrow \dfrac{sf(\overline{k^E})}{\overline{k^E}} = z+\delta$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+z}\left[\frac{sf(k_t^E)}{k_t^E} - (z+\delta)\right] > 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta k_t^E = \frac{1}{1+z}\left[sf(k_t^E) - k_t^E(z+\delta)\right] > 0*$$

Cuando el nivel de capital inicial es inferior al estado estacionario la inversión es positiva.

- Si $k_t^E > \overline{k^E}$



$$
\begin{aligned}
0 < \int_{\overline{k^E}}^{k_{t+1}^E} k_{t+1}^{E}{}' \quad \delta k_t^E &= k_{t+1}^E - \overline{k^E} \\
0 &< k_{t+1}^E - \overline{k^E} \\
\overline{k^E} &< k_{t+1}^E \\
\frac{f(k_t^E)}{k_t^E} &< \frac{f(\overline{k^E})}{\overline{k^E}} \\
\Leftrightarrow \frac{sf(k_t^E)}{k_t^E} &< \frac{sf(\overline{k^E})}{\overline{k^E}} \\
\Leftrightarrow \frac{sf(k_t^E)}{k_t^E} - (z+\delta) &< \frac{sf(\overline{k^E})}{\overline{k^E}} - (z+\delta) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{1+z}\left[\frac{sf(k_t^E)}{k_t^E} - (z+\delta)\right] &< \frac{1}{1+z}\left[\underbrace{\frac{sf(\overline{k^E})}{\overline{k^E}}}_{=(z+\delta)} - (z+\delta)\right] \\
\Leftrightarrow \cancel{k_t^E}\frac{1}{1+z}\left[\frac{sf(k_t^E)}{\cancel{k_t^E}} - (z+\delta)\right] &< 0 \cdot k_t^E \\
\Leftrightarrow \Delta k_t^E = \frac{1}{1+z}\left[sf(k_t^E) - k_t^E(z+\delta)\right] &< 0*
\end{aligned}
$$

Cuando el nivel de capital inicial es mayor al estado estacionario la inversión es negativa.

Que el individuo esté en estado estacionario no significa que la economía no esté creciendo; sí está creciendo la economía porque hay crecimiento económico.

3.1 Condiciones de Uzawa

$$
\begin{aligned}
L_{t+1} = (1+n)L_t \Rightarrow L_t &= (1+n)^{t-T}L_T \\
Y_{t+1} = (1+g_y)Y_t \Rightarrow Y_t &= (1+g_y)^{t-T}Y_T \\
K_{t+1} = (1+g_K)K_t \Rightarrow K_t &= (1+g_K)^{t-T}K_T \\
C_{t+1} = (1+g_c)C_t \Rightarrow C_t &= (1+g_c)^{t-T}C_T \\
A_{t+1} = (1+g)A_t \Rightarrow A_t &= (1+g)^{t-T}A_T \\
\Delta k_t^E &= sY_t - \delta k_t^E \\
\underbrace{(1+g_K)K_t}_{K_{t+1}} - k_t^E &= sY_t - \delta k_t^E \\
\Leftrightarrow (g_K+\delta)k_t^E = sY_t \qquad &\text{Inversión se financia con el ahorro} \\
\Leftrightarrow (g_K+\delta)\left[(1+g_K)^{t-T}K_T\right] &= s\left[(1+g_y)^{t-T}Y_T\right] \\
\Leftrightarrow \ln(g_K+\delta) + (t-T)\ln(1+g_K) &= \ln s + (t-T)\ln(1+g_y) + \ln Y_T \\
&\text{Derivando respecto al tiempo t} \\
\Leftrightarrow \ln(1+g_K) &= \ln(1+g_y) \\
\Leftrightarrow 1+g_K &= 1+g_Y \\
\Leftrightarrow g_K &= g_Y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(g_K+\delta)K_t &= sY_t\\
\Leftrightarrow (g_K+\delta)K_t &= Y_t - C_t\\
\Leftrightarrow (g_K+\delta)(1+g_K)^{t-T}K_t &= (1+g_y)^{t-T}Y_t - (1+g_c)^{t-T}C_t\\
\Leftrightarrow (g_K+\delta)K_t &= \underbrace{\frac{\cancel{(1+g_y)^{t-T}}Y_t}{\cancel{(1+g_K)^{t-T}}}}_{g_y=g_K} - \frac{(1+g_c)^{t-T}C_t}{(1+g_K)^{t-T}}\\
\Leftrightarrow (g_K+\delta)K_t &= Y_t - \frac{(1+g_c)^{t-T}C_t}{(1+g_K)^{t-T}}\\
\Leftrightarrow \frac{(1+g_c)^{t-T}C_t}{(1+g_K)^{t-T}} &= Y_t-(g_K+\delta)K_t\\
\Leftrightarrow (t-T)\left[\ln(1+g_c)-\ln(1+g_K)\right]+\ln C_T &= \ln\left[Y_T-(g_K+\delta)K_T\right]\\
\text{Derivando respecto al tiempo t:}\\
\Leftrightarrow \ln(1+g_c)-\ln(1+g_K) &= 0\\
\Leftrightarrow \ln(1+g_c) &= \ln(1+g_K)\\
\Leftrightarrow 1+g_c &= 1+g_K\\
\Leftrightarrow g_c &= g_K\\
\Leftrightarrow g_c &= g_K = g_y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_t &= F(K_t, A_tL_t)\\
\Leftrightarrow (1+g_y)^{t-T}Y_t &= F((1+g_K)^{t-T}K_T,(1+g)^{t-T}A_T(1+n)^{t-T}L_T)\\
\Leftrightarrow (1+g_K)^{t-T}Y_t &= F((1+g_K)^{t-T}K_T,(1+g)^{t-T}A_T(1+n)^{t-T}L_T)\\
\Rightarrow (1+g_K)^{t-T} &= (1+z)^{t-T}\\
\Leftrightarrow 1+g_K &= 1+z\\
\Leftrightarrow g_K = z \Rightarrow \boxed{g_K=g_y=g_c=z} &\rightarrow \text{tasa de crecimiento de las unidades efectivas de trabajo}
\end{aligned}
$$

$$\overline{k^E} = \overline{Y}^E$$

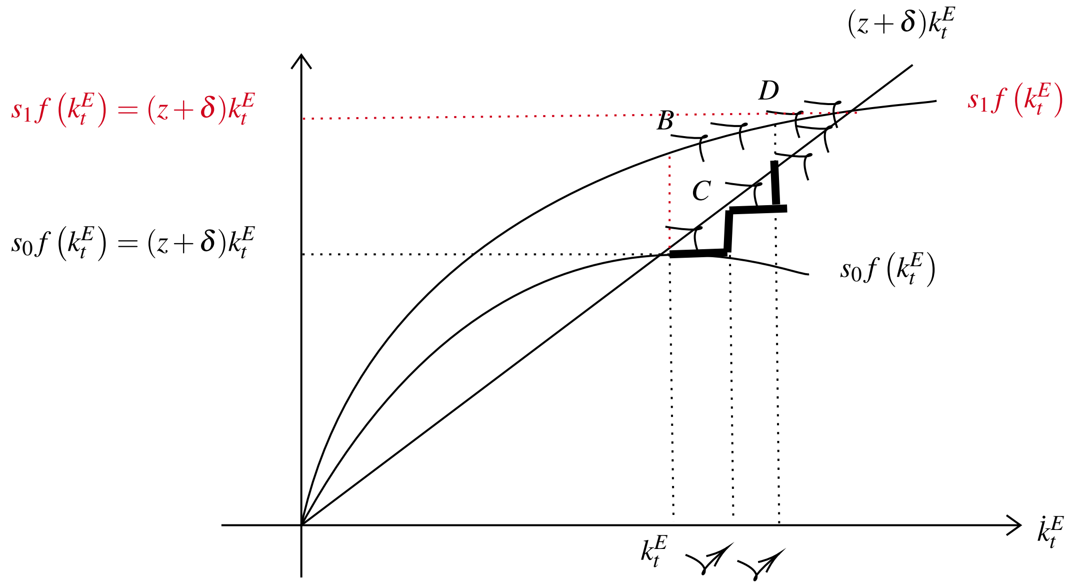
$$\frac{\Delta Y}{y} = z$$

$$\frac{\Delta Y}{y} = g \rightarrow \text{demostrar!}$$

3.2 Perturbaciones (*shocks*) del modelo

1. Analizar cuál es el shock
2. Proceso de ajuste que me lleva a nuevo estado estacionario

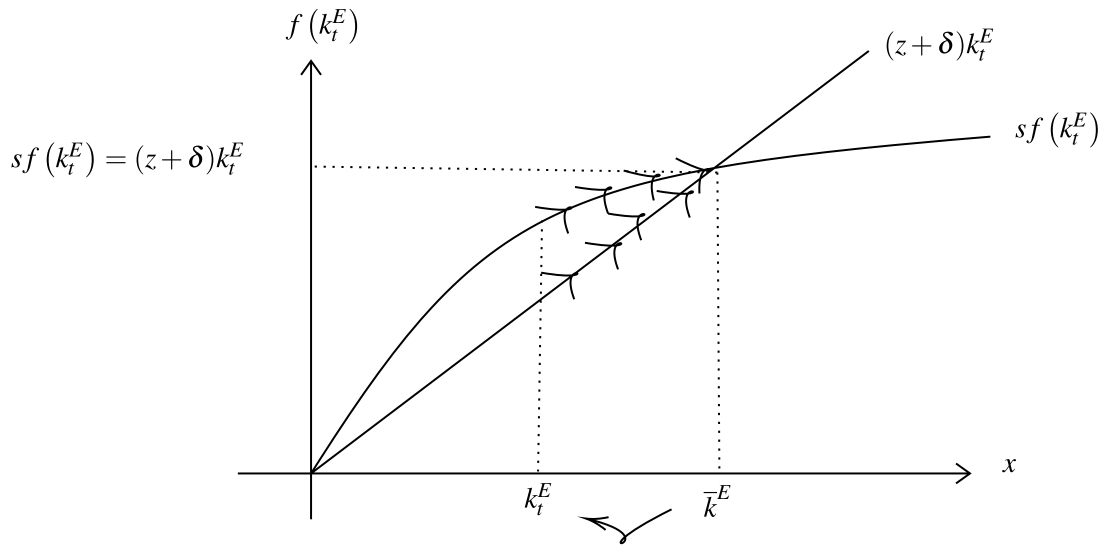
- Aumenta ahorro: $s_1 > s_0$



$S_t = sY_t$

El ahorro afecta la inversión, e inversión afecta el nivel de capital del período siguiente. El nuevo nivel de capital afecta la producción y los costos de reposición. El ahorro también afecta el consumo y con ello el producto, y esto aumenta el ahorro. $C_t = (1-s)Y_t$.

- Destrucción de capital



La destrucción del capital provoca una disminución en la producción, y esto disminuye los costos de reposición.

3.3 Consulta

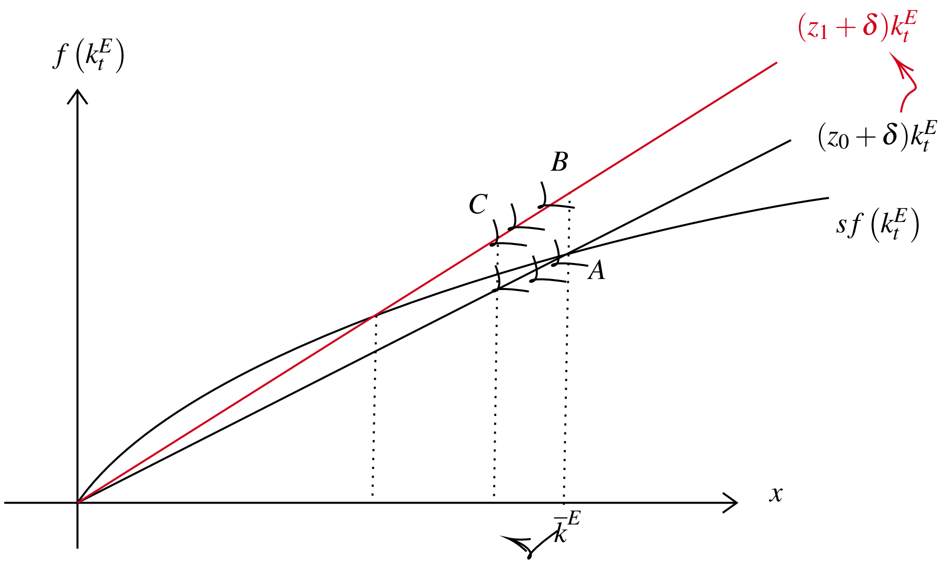
En estado estacionario:

$$\Delta k^E = 0$$

$$\Rightarrow sf(\overline{k^E}) = (z+\delta)\overline{k^E}$$

■ **Ejemplo 3.1 —** $\uparrow n$ **.** Shock: aumenta n. Podría ser una inmigración permanente o que se eliminen los métodos anticonceptivos. Tiene que ser tasas reproductivas, solo decir inmigración no

necesariamente puede ser que las personas se queden.
Si aumenta n, aumenta z: $(1+z) = (1+n)(1+g)$. La curva se expande.



Para cada nivel de capital se tiene asociado un costo mayor. ¿Qué pasa? Al nivel inicial de capital aumentaron los costos de reposición. Con esto hay menos inversión porque la inversión sería negativa. La inversión sería negativa porque: se comparan los costos de reposición nuevos con el ahorro porque esto es lo que determina la inversión. Así, hay mayores costos de reposición versus el ahorro inicial, por lo que se determina una inversión negativa **hoy** y esto cambia el capital de **mañana** (esto iría antes de decir que la inversión es negativa; esto es la explicación de que la inversión sea negativa y esto a su vez incide en el capital). Se reduce el capital. ¿Qué pasa con la reducción del capital? Se reduce la producción y los costos de resposición. El nuevo capital está asociado con un menor costo de reposición y un menor producto. El menor producto produce una reducción en el ahorro y en el consumo. La relación entre estos dos es que el ahorro disminuye menos que los costos y los costos siguen siendo mayores al ahorro y la inversión sigue siendo negativo. Al período siguiente se sigue teniendo un nivel de capital menor: se está en un proceso de desinversión.
n afecta la función de costos de reposición. Los costos de reposición determinan otra variable únicamente: la inversión. La inversión depende de la relación entre los costos de reposición y la inversión. La inversión determina el capital y el capital determina la producción y los costos de reposición. El producto determina el ahorro y el consumo.

Se aprueba una ley que le traslada a la Caja Costarricense de Seguro Social los fondos del segundo pilar de la Ley de Protección al Trabajador (i.e., el régimen de pensión complementario obligatorio) con el propósito de aliviar la crisis en el pilar de reparto. Yo creería que el shock es que baja el ahorro. $\downarrow S$

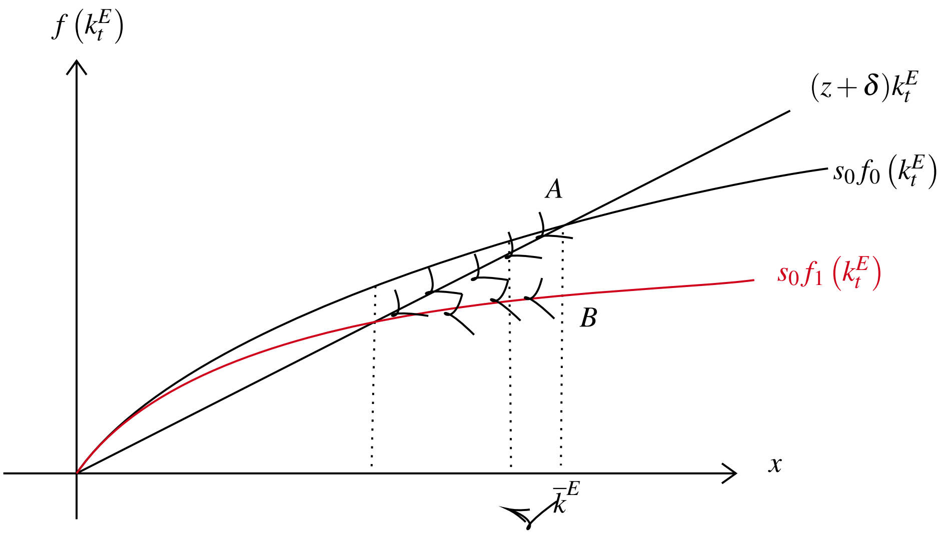
Se aprueba una reforma tributaria que reduce el déficit fiscal en 1 %. $\uparrow A_{pb} \Rightarrow \uparrow S$

$$\boxed{\text{T - G = A}_{pb}}$$

$$A_{pb} = \begin{cases} supervit \quad \text{si } T > G \\ balance \quad presupuestario \qquad \text{si } T = G \\ dficit \quad \text{si } T < G \end{cases}$$

■

■ **Ejemplo 3.2 — $\downarrow F$.** La administración es exitosa en implementar la neutralidad del carbono gracias a la clausura de industrias que producen dióxido de carbono. $\downarrow F$. Aquí el capital baja luego como parte del ajuste, pero no directamente como consecuencia del shock, porque el shock está haciendo más costoso producir. Entonces se le está limitando a las empresas en cuánto a cómo puede producir, entonces se está limitando la producción. Le están diciendo que no puede usar técnicas que contaminan pero son las más eficientes, entonces hay un cambio en cómo se produce.



Entonces s no cambia, cambia f y se contrae la curva. Ahora, al nivel de capital inicial (A) disminuye la producción (empezar a analizar los efectos desde donde empieza el shock). Con esta menor producción hay menos consumo y menos ahorro. Ese ahorro está cayendo pero los costos de reposición no, y por ende son mayores que el nivel del ahorro. Entonces hay una brecha negativa entre el ahorro y los costos de reposición: al ahorro resto los costos de reposición. Por ende hay una inversión negativa y con ello hay una disminución del capital empleado al período siguiente y se va a producir menor y también bajan los costos de reposición y como bajó la producción baja también el consumo y el ahorro pero bajan de tal manera que la brecha sigue siendo negativa y esta no se cierra entre ahorro y costos de inversión y por ende hay un proceso de desinversión.

La administración es exitosa en implementar la neutralidad del carbono gracias a un aumento en la inversión extranjera directa en formas de producción limpias y el desarrollo de investigación y desarrollo que acelera la producción de nuevas fuentes de energía. Aquí hay dos shocks: nuevas formas de producción y más eficientes $\uparrow F$ y por el otro lado aumenta la tasa de crecimiento de la tecnología $\uparrow g$. g y n afectan z. En este caso las dos curvas al mismo tiempo están creciendo. ■

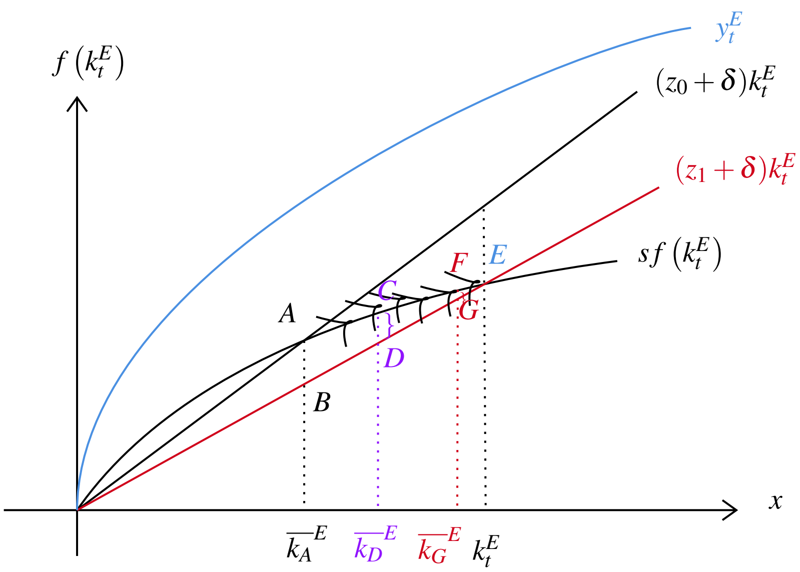
La vez pasada habíamos visto el ajuste cuando teníamos un shock en el ahorro. Como se tienen efectos marginales decreciente, el efecto del aumento del ahorro sobre el producto, no es infinito. La relación entre los costos marginales lineales constantes y las productividades marginales decrecientes es lo que hace que haya convergencia al estado estacionario. La curva de ahorro reproduce las propiedades de la función de producción.
Las productividades marginales decrecientes están representadas en el ahorro. El cambio en el ahorro tiene un efecto infinito. Entonces para encontrarlo lo que hay que hacer es encontrar derivar el producto del estado estacionario a partir del cambio en el ahorro.

Por una cuestión de comodidad, se suele calcular como una elasticidad:

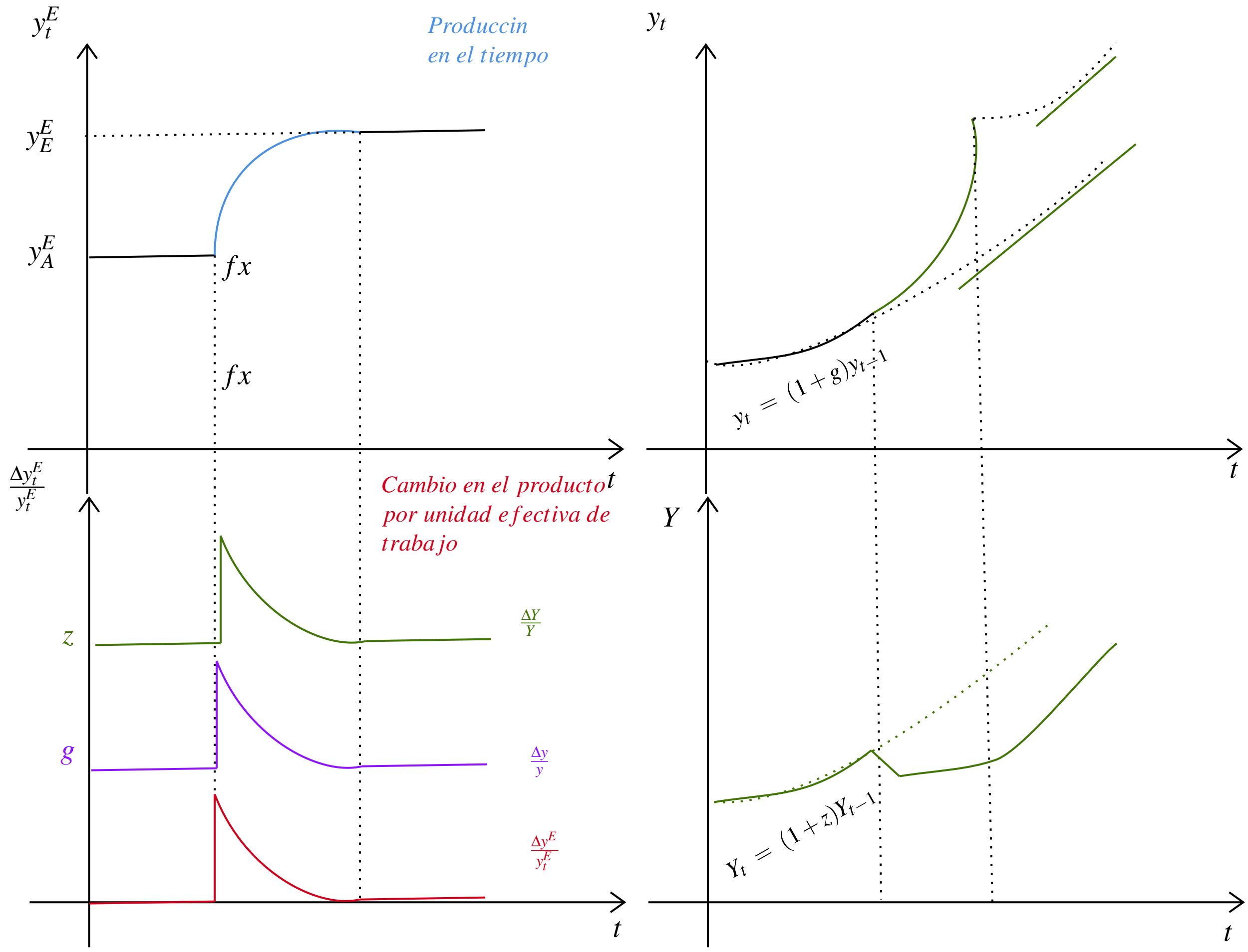
$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta \overline{y}^E}{\Delta s}\cdot\frac{s}{\overline{y}^E}& \\
y^E &= f(k_t^E, 1) \\
y &= f(\overline{k^E}_t) \\
\overline{k^E} = \overline{k^E}(s,\delta,z) &\Rightarrow f(\overline{k^E}(s,\delta,z)) \\
\frac{\delta \overline{y}^E}{\delta s} &= f'(\overline{k^E})\cdot\frac{\delta \overline{k^E}}{\delta s} \\
\text{En e.e:}\quad s f(\overline{k^E}) &= (z+\delta)\overline{k^E} \\
f(\overline{k^E}) + s f'(\overline{k^E})\frac{\delta k^E}{\delta s} &= (z+\delta)\overline{k^E} \\
\frac{f(\overline{k^E})}{(z+\delta) - s f'(\overline{k^E})} &= \frac{\delta \overline{k^E}}{\delta s} \\
\frac{\delta \overline{y}^E s}{\delta s \overline{y}^E} &= \frac{s f'(\overline{k^E}) f(\overline{k^E})}{f(\overline{k}^E)\left[(z+\delta) - s f'(\overline{k^E})\right]} \\
s f(\overline{k^E}) = (z+\delta)\overline{k^E} \Rightarrow s &= \frac{(z+)\overline{k^E}}{f(\overline{k^E})} \\
\frac{\delta \overline{y}^E}{\delta s}\cdot\frac{s}{\overline{y}^E} &= \frac{\frac{(z+\delta)\overline{k^E}}{f(\overline{k^E})} f'(\overline{k^E}) f(\overline{k^E})}{f(\overline{k^E})\left[(z+\delta) - \frac{(z+\delta)\overline{k^E} f'(\overline{k^E})}{f(\overline{k^E})}\right]} \\
\frac{f'(\overline{k^E})\overline{k^E}}{f(\overline{k^E})} = \frac{\partial f(\overline{k^E})}{\partial \overline{k^E}}\cdot\frac{\overline{k^E}}{f(\overline{k^E})} &= \alpha_k(\overline{k^E}) \\
\frac{f'(\overline{y}^E)}{\delta s}\cdot\frac{s}{\overline{y}^E} &= \frac{(z+\delta)\overline{k^E}^E f'(\overline{k^E})}{f(\overline{k^E})(z+\delta)\left[1-\alpha_k(\overline{k^E})\right]} \\
\frac{\partial \overline{y}^E}{\partial s}\cdot\frac{s}{\overline{y}^E} &= \frac{\alpha_k(\overline{k^E})}{1-\alpha_k(\overline{k^E})}
\end{aligned}
$$

4. Shocks

- $\downarrow n$



Hay convergencia por rendimientos decrecientes (función decrecientes) y los costos marginales lineales (crecientes). Estas condiciones son de los supuestos y son las que garantizan que haya convergencia.
Los cambios en la función de producción son cada vez más pequenos pero en los costos el tamano de los cambios son constantes.
A cualquier nivel de capital inicial, ahora los costos de reposición son mayores. La inversión se ve afectada: el ahorro es mayor a los costos de reposición y hay una brecha positivay hay inversión positiva. Aumenta la contratación del stock de capital y con ello aumenta la producción. Aumenta el ingreso y el consumo.
Ahora queremos ver tres niveles diferentes para analizar qué pasa en el estado estacionario: queremos ver las tasas de crecimiento y los niveles.
Si yo estoy en estado estacionario, a lo largo del tiempo el ingreso no está cambiando, es igual en todos los períodos. Pero luego viene la perturbación y qué pasa? $\rightarrow$ termino en otro estado estacionario mayor.



Es la condición que me maximiza el consumo dado que estoy en el estado estacionario.

5. Regla de oro

Una de las críticas al modelo de Solow es que no se puede ver nada sobre el bienestar. El modelo tiene esa deficiencia: no tiene fundamentos y por ende no se puede hablar de bienestar, no hay funciones de utilidad en el modelo. La manera de responder a esta crítica, es mediante la regla de Solow. En la ecuación fundamental del modelo, se va a sustituir el ahorro por el consumo.

$$k_{t+1}^E - k_t^E = \frac{1}{1+z}\left[sf(k_t^E) - (z+\delta)k_t^E\right]$$

$$\Delta k_t^E = \frac{1}{1+z}\left[f(k_t^E) - c_t^E - (z+\delta)k_t^E\right]$$

En e.e:

$$c_t^E = f(k_t^E) - (z+\delta)k_t^E$$

$$0 = f'(k_t^E) - (z+\delta)$$

$$\boxed{\text{f'}(\text{k}_t^E) = (z+\delta)}$$

* Regla de oro: condición que garantiza que maximicé el consumo dado que estoy en e.e

Lo que dice es que estando en el estado estacionario, se puede maximizar el consumo cumpliendo con la condición.

6. Polinomio de Taylor

Nos interesa calcular la tasa de convergencia al estado estacionario.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$P_1 = \frac{1}{1+z} \cdot \frac{\left[sf(\overline{k^E}) - (z+\delta)\overline{k^E}\right]}{0!}(k_t^E - \overline{k^E})^0 + \frac{1}{1+z} \cdot \frac{\left[sf(\overline{k^E}) - (z+\delta)\overline{k^E}\right]}{1!}(k_t^E - \overline{k^E})^1$$

$$\Delta k_t^E \approx \frac{1}{1+z}\left[sf'(\overline{k^E}) - (z+\delta)\overline{k^E}\right](k_t^E - \overline{k^E})$$

$$\text{En e.e:} \quad sf(\overline{k^E}) = (z+\delta)\overline{k^E}$$

$$s = \frac{(z+\delta)\overline{k^E})}{f(\overline{k^E})}$$

$$\Leftrightarrow \Delta k_t^E \approx \frac{1}{1+z}\left[\frac{(z+\delta)\overline{k^E})}{f(\overline{k^E})} - (z+\delta)\right](k_t^E - \overline{k^E})$$

$$\Leftrightarrow \Delta k_t^E \approx \underbrace{\frac{(z+\delta)\left[\alpha_k(\overline{k^E} - 1)\right]}{1+z}}_{\text{(-)}}(k_t^E - \overline{k^E})$$

$$\boxed{\Delta k_t^E = \mu(k_t^E - \overline{k^E})}$$

Shock	Dirección
Ahorro	+
n	-
g	x
δ	-

Habíamos quedado discutiendo las lecturas de aplicaciones del modelo de Solow.

$$g_y = \underbrace{\frac{F_A \cdot A}{y} \cdot g_A}_{\substack{\text{solo el} \\ \text{primer elemento} \\ \text{no sale de} \\ \text{cuentas nacionales}}} + \frac{F_L \cdot L}{y} \cdot g_L + \frac{F_K \cdot K}{y} \cdot g_K$$

$$\underbrace{\alpha_A g_A}_{\substack{\text{residuo de}\\ \text{Solow}}} = g_y - \alpha_L \cdot n - \alpha_K g_K$$

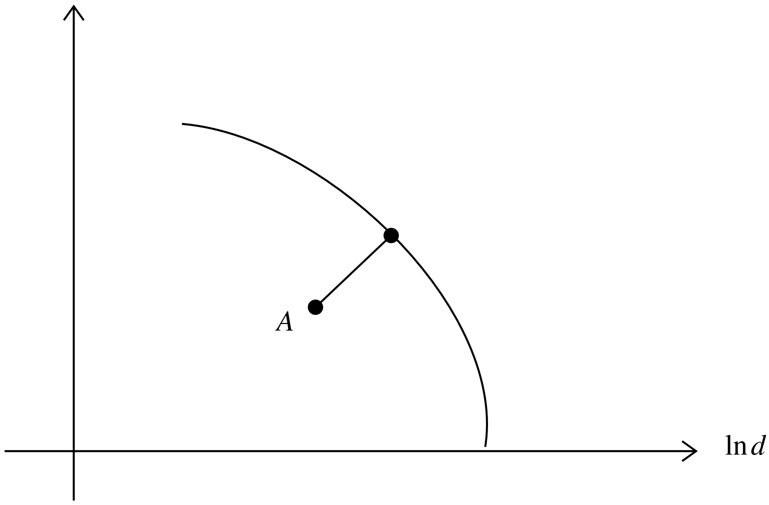
Shock	Dirección
Ahorro	+
n	-
g	x
δ	-
s	$\frac{\Delta k}{y}$
$\mathscr{H}$	
y_{1960}	
Migración	

7. Discusión de lecturas

$\beta \rightarrow$ qué tan rápido se cierra mi brecha a mí estado estacionario.
$\sigma \rightarrow$ qué rápido se cierra la brecha entre países (es una medida de dispersión entre países).
$\beta \rightarrow$ es lento 2 % para USA y Europa.
$\sigma \rightarrow$ se encuentra que varía en el tiempo y parece haber una mayor convergencia.
El capital humano es un factor productivo no contemplada en el modelo original $\rightarrow$ la variable proxy para cuantificarlo son las tasas de matricula y tasa de analfabetismo.

7.1 Lecturas de Costa Rica

En 1848 fue la primera exportación de café a Londres. El modelo teórico o principio detrás del modelo agroexportador es el modelo Ricardiano que dice que hay que explotar las ventajas comparativas.
50's $\rightarrow$ modelo de sustitución de importaciones: la industria genera productos de más valor. El valor de los bienes industriales frente a las materias primas crece cada vez más, ganando valor en el tiempo. Detrás del modelo de sustitución de importaciones es el movimiento de CEPAL de Raúl Prebisch. Detrás está la teoría de la dependencia: tengo que abastecerme de lo que necesito. Se implementan medidas proteccionistas para crear un mercado nacional. Algunas cosas se importaban, otras tenían aranceles y otras tenían cuotas. Hay un período de protección de las industrias.
72-73 $\rightarrow$ crisis del petróleo. Costa Rica fue el primer país en caer en impago, el segundo fue Brasil pero se estudia más a Brasil por ser un país más grande; se agotó el modelo. Qué hace que colapse el modelo de sustitución de importaciones? $\rightarrow$ Costa Rica llegó a la frontera de acumulación de capital.



Hay empresas que están en una .etapa infantil".
Qué estaba pasando con el bienestar de la población en ese momento? → Qué hizo Trejos, Figueres? El AyA, Oduber: reforma educativa de Udislao Gómez. La riqueza de esa época se explica por la acumulación de capital que hubo. La otra forma de crecer es con la productividad total de los factores. Cuando se habla de aumentar la productividad lo que se hace es aumentar la frontera de posibilidades de producción mediante la productividad total de los factores. → a esto se refiere que el modelo se agotó. Aún sin crisis del petróleo, eventualmente el modelo se hubiera agotado. Pero también hubo políticas que no fueron las mejores.
Luego del modelo de sustitución de importaciones hay promoción de exportaciones, pero de los productos con ventaja comparativa. hay una idea de comercio internacional. La base es el modelo Herscher-O'llein y David Riccardo. Se quitan los aranceles y se buscan tratados de libre comercio. Hay industrias ganadoras y perdedoras. En este período el crecimiento sí funciona el modelo.
El siguiente modelo es el de inversión extranjera directa. La inversión extranjera directa es parte de la promoción de importaciones. Genera empleos y hay transferencia de tecnología y aumenta el capital. Hay un gran énfasis en la globalización. Cordero y Pauss dicen que las empresas vienen por nuestro capital humano y beneficios de las zonas francas. Sobre la inversión pública lo que dicen es que por falta de inversión en capital físico y humano este modelo también se va a agotar. El modelo de inversión extranjera directa tiene un problema estructural y ver por qué Alfaro y Vindas no pueden calibrar el modelo.
Consulta:

Modelo de Solow: capital humano

Hoy empezamos a ver capital humano.
El capital: ¿qué es? $\rightarrow$ es un factor de producción. Es un stock que sólo es alterado por una variable flujo: la inversión. No es parte del producto, pero se usa en el proceso de producción. Hay varios tipos: fijo, humano, etc.
El capital humano son los conocimientos y habilidades adquiridas por las personas a través del tiempo.

$$Y = F(A, L, K, \mathscr{H})$$

El capital humano es inseparable de la persona. Los derechos de propiedad están dados. Es muy abstracto y está ligado a la persona. El mérito de darle la importancia al capital humano es de Becker y luego Mintzer.
Hay un nivel óptimo de capital humano:

$$\sum_{t=0}^{n-1} MP_t \left(\frac{1}{1+r}\right)^t = \sum_{t=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t w_t \rightarrow \text{Cond.equilibrio}$$

k: costo

$$MP_0 + \sum_{t=1}^{n-1} MP_t \left(\frac{1}{1+r}\right)^t = k + w_0 + \sum_{t=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t w_t$$

$$* \text{ Sea } G = \sum_{t=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t (MP_t - w_t)$$

$$MP_0 + \sum_{t=1}^{n-1} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t (MP_t - w_t) = k + w_0$$

$$MP_0 + G = k + w_0$$

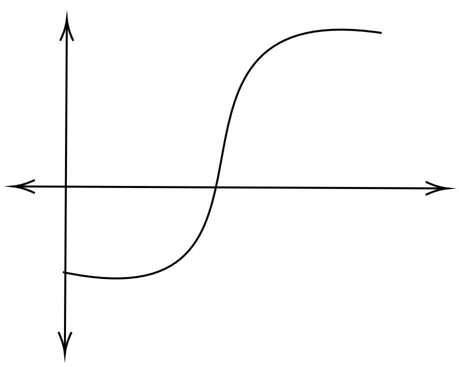
$$MP_0' + MP_0 + G = k + w_0 + MP_0'$$

$$C = \underbrace{MP_0'}_{\text{si no lo capacita}} - \underbrace{MP_0}_{capacitado} + k$$

$$\Leftrightarrow MP_0' + G = MP_0' - MP_0 + k + w_0$$

$$\Leftrightarrow MP_0' + G = C + w_0$$

$$\Leftrightarrow G - C = w_0 - MP_0'$$



$$G = 0$$

$$-C = w_0 - MP_0'$$

$$MP_0 - MP_0' - k = w_0 - MP_0'$$

$\boxed{\text{MP}_0 - k = w_0}$ $\rightarrow$ trabajador asume el costo marginal (capacitación general)

$$
\begin{aligned}
w_0 &= MP_0' \\
\Leftrightarrow G - C &= w_0 - w_0 \\
\Leftrightarrow G - C &= 0 \\
\Leftrightarrow G &= C
\end{aligned}
$$

$$G = aG'' \qquad G = aG'' = aC$$

$$\underbrace{G''}_{\substack{\text{ganancias}\\ \text{totales}}} = \underbrace{G}_{\textit{empresa}} + \underbrace{G'}_{\textit{persona}}$$

$$G' = C$$

$$
\begin{aligned}
G - C &= w_0 - MP_0' \\
aC - C &= w_0 - MP_0'
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathrm{w}_0 = MP_0'(1-a)C}$$

El capital humano, como cualquier otro capital, obedece a un proceso de inversión.

8. Modelo de Capital Humano

Vamos a ver el modelo de Solow con capital humano.

$$Y_t = K_t^{\alpha} \mathscr{H}_t^{\phi} (A_t L_t)^{1-\alpha-\phi}$$

$$K_{t+1} - K_t = s_t K_t^{\alpha} \mathscr{H}_t^{\phi} (A_t L_t)^{1-\alpha-\phi} - \delta K_t$$

$$\mathscr{H}_{t+1} - \mathscr{H}_t = s_t K_t^{\alpha} \mathscr{H}_t^{\phi} (A_t L_t)^{1-\alpha-\phi} - \delta \mathscr{H}_t$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathscr{H}_{t+1}}{A_t L_t} - \frac{\mathscr{H}_t}{A_t L_t} = \frac{s_t K_t^{\alpha} \mathscr{H}_t^{\phi} (A_t L_t)^{1-\alpha-\phi}}{A_t L_t} - \frac{\delta \mathscr{H}_t}{A_t L_t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathscr{H}_{t+1}}{A_t L_t} - \frac{\mathscr{H}_t}{A_t L_t} = s_t \left(\frac{K_t^{\alpha}}{A_t L_t}\right) \left(\frac{\mathscr{H}_t^{\phi}}{A_t L_t}\right) \left(\frac{(A_t L_t)^{1-\alpha-\phi}}{A_t L_t}\right) - \frac{\delta \mathscr{H}_t}{A_t L_t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_{t+1} L_{t+1}}{A_{t+1} L_{t+1}} \cdot \frac{\mathscr{H}_{t+1}}{A_t L_t} - \frac{\mathscr{H}_t}{A_t L_t} = s_t \left(\frac{K_t^{\alpha}}{A_t L_t}\right) \left(\frac{\mathscr{H}_t^{\phi}}{A_t L_t}\right) \left(\frac{(A_t L_t)^{1-\alpha-\phi}}{A_t L_t}\right) - \frac{\delta \mathscr{H}_t}{A_t L_t} \cdot \frac{A_{t+1} L_{t+1}}{A_{t+1} L_{t+1}}$$

$$\Leftrightarrow -z h_t^E + h_{t+1}^E (1+z) - h_t^E = s_t k_t^{E\,\alpha} h_t^{E\,\phi} - \delta h_t^E - z h_t^E$$

$$*\Delta \mathscr{H}_t^E = \frac{1}{1+z} \left[s_t k_t^{E\,\alpha} \mathscr{H}_t^{E\,\phi} - (z+\delta) \mathscr{H}_t^E \right]$$

$$\text{En e.e:} \mathscr{H}_t^E = 0 \Rightarrow s_t k_t^{E\,\alpha} \mathscr{H}_t^{E\,\phi} = (z+\delta) \mathscr{H}_t^E$$

$$**\Delta k_t^E = \frac{1}{1+z} \left[s_t k_t^{E\,\alpha} \mathscr{H}_t^{\phi} - (z+\delta) k_t^E \right]$$

$$\text{En e.e:} k_t^E = 0 \Rightarrow s_t k_t^{E\,\alpha} \mathscr{H}^{\phi} = (z+\delta) k_t^E$$

Mankiw-Romer-Weil: encuentran que el capital humano es cercano a un $1/3$. El capital humano es igual de importante que el capital físico para explicar el crecimiento económico.

$$\frac{\partial Y^2}{\partial K \partial \mathscr{H}} > 0 \Rightarrow \text{Capital físico y humano son complementarios}$$

La presencia del capital humano aumenta el aporte del capital físico al producto.
Alfaro y Vindas no pueden calibrar el modelo en Costa Rica porque se invierte desproporcionadamente en capital físico y no en el humano. El sector servicios en Costa Rica es demasiado heterogéneo. Es el problema fundamental en Costa Rica. El sector servicios absorbe ese montón de gente incapacitada.

IV

Modelo Neoclásico de inversión

Queremos ver o entender cómo es el proceso de inversión en capital humano. Hay un proceso de decisión en las empresas que determina cuánto es el capital a invertir.El modelo de Solow determina el crecimiento económico a través del tiempo. Todo proviene de un proceso de maximización. Para este modelo, hay que suponer que hay dos tipos empresas: una produce bienes finales, y todos los insumos los contrata en el mercado (paga un salario por el trabajo y una tasa por usar el capital) y empresas que tienen el capital y se lo dan en arrendamiento a empresas que producen bienes finales. Vamos a ver el problema neo-clásico de las empresas que producen bienes finales:

$$Y = (\underbrace{L}_{n}, \underbrace{A}_{g}, K)$$

Ahora falta ver los determinantes del crecimiento del capital. Es una función de producción neo-clásica, o sea que cumple con las siguientes características:

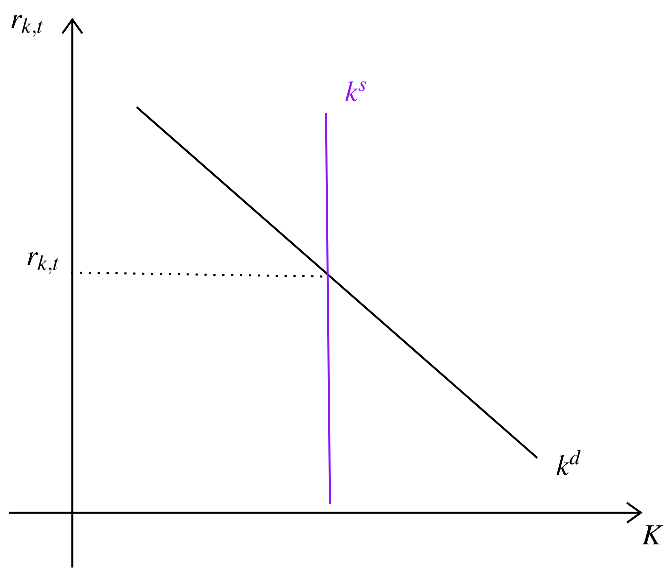
- $Y_L > 0$
- $Y_{LL} < 0$
- $F(0, A_t, K_t) = 0$
- $Y_K > 0$
- $Y_{KK} < 0$
- $F(L_t, A_t, 0) = 0$

$$\pi^Y = P \cdot F(A_t, K_t, L_t) - w_t L_t - r_{k,t} K_t$$

$$\boxed{\mathrm{P}_Y \cdot F_L(A_t, K_t, L_t) - w_t = 0 \Leftrightarrow P \cdot F_L(A_t, K_t, L_t) = w_t}$$

$$\boxed{\mathrm{P}_Y \cdot F_K(A_t, K_t, L_t) - r_{k,t} = 0 \Leftrightarrow P \cdot F_K(A_t, K_t, L_t) = r_{k,t}}$$

En un momento dado, estático, el stock de capital es un acervo, no cambia. El capital lo ofrece la empresa que arrienda el capital y lo demanda la productora de bienes y servicios.



La oferta de capital es perfectamente inelástica porque en un momendo dado es un stock fijo. La única manera en la que el capital pueda variar a lo largo del tiempo es por medio de la inversión. **Este es un modelo estático**. Qué podría cambiarme la demanda por capital? $\rightarrow$ Un cambio sobre la productividad marginal del capital, el precio del capital, un cambio sobre A, un cambio L porque si aumenta la relación capital trabajo estaría cambiando, por ejemplo si entraran un montón de personas inmigrantes al país, dado el stock de capital disponible actualmente, habría demandada de capital por dotar a estas personas de capital y se desplazaría la demanda a la derecha. Lo mismo con la tecnología, si aumenta la tecnología también demandaría más capital. Si tengo más tecnología

soy más productiva, entonces a cualquier nivel de capital produzco más, entonces para optimizar mis beneficios debería igualar el nivel de capital al nivel de tecnología actual.
Ahora vamos a ver el comportamiento de la demanda del capital:

$$P \cdot F_{KK}(A_t, K_t, L_t)\frac{\partial K_t}{\partial r_{k,t}} = 1$$
$$\frac{\partial K_t}{\partial r_{k,t}} = \frac{1}{P \cdot F_{KK}(A_t, K_t, L_t)} < 0$$

La función de demanda tiene pendiente negativa. Ante movimientos hacia arriba o abajo de la demanda por capital, lo que me va a ajustar es la tasa $r_{k,t}$. El ajuste en un momento dado, está dado por la intersección entre las líneas de la oferta y la demanda.
¿Qué pasa con las empresas dueñas del capital? → son las oferentes del capital. Las empresas siempre están maximizando. Vamos a ver los beneficios de la empresa arrendadora:

$$\pi^K = \underbrace{r_{K,t}K_t}_{ingresos} - \underbrace{(r + \delta - \frac{\Delta P_{K,t}}{P_{K,t}})}_{costos}$$

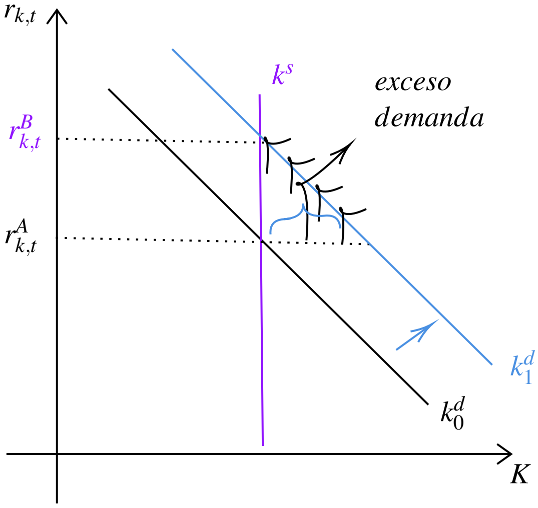
El ingreso sería los edificios que alquile, por la cantidad de tasa de interés que le paguen por alquilarlos. Luego los costos incluyen la tasa de interés que es el costo de oportunidad si más bien invirtiera en otra cosa: certificados de depósito en el banco, invertir en otra empresa, comprar acciones de otra empresa, etc., luego también está la depreciación, también es un costo por asumir y hay un costo por pérdidas o ganancia de capital: la pérdida de capital es un costo, pero la ganancia es un costo negativo, o sea un ingreso. Como la fórmula está restando, digo que es una pérdida de capital.
Ahora veamos las condiciones de primer orden de esta empresa:

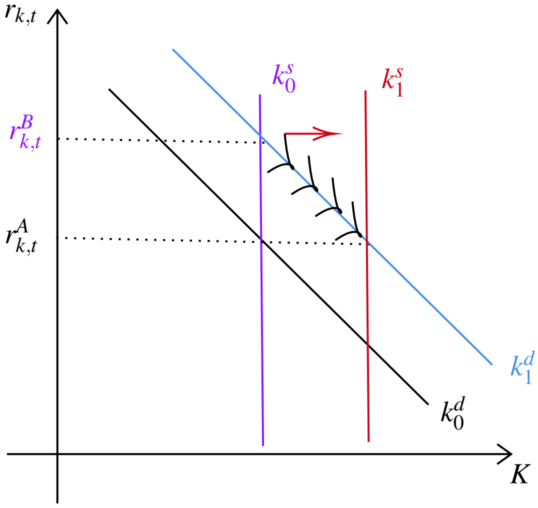
$$r_{K,t} = (r + \delta - \frac{\Delta P_{K,t}}{P_{K,t}})P_{K,t}$$

Esta condición de primer orden me dice cuándo invierto y cuándo no. La función inversión está determinada por la diferencia entre esas dos cosas: si el ingreso del capital es mayor a los costos marginales del capital, hay un incentivo para invertir. Si el ingreso marginal es menor a todo lo demás hay inversión negativa para desinstalar capital.

$$I = I\left[r_{K,t} - (r + \delta - \frac{\Delta P_{K,t}}{P_{K,t}})P_{K,t}\right]$$
$$\boxed{\mathrm{Pf}_K(A_t, K_t, L_t) = r_{K,t} = (r + \delta - \tfrac{\Delta P_{K,t}}{P_{K,t}})P_{K,t}}$$

Suponga un shock (positivo) donde aumenta la demanda de capital. La demanda se desplaza para la derecha. Al nivel de de la tasa inicial $r^A_{k,t}$ hay un exceso de demanda y aumentan los precios: hay un montón de gente demandando alquilar edificios y yo no les puedo alquilar a tantos. A la tasa inicial hay un exceso de demanda → aumenta el precio (dado que la oferta es inelástica, solo hay un aumento del precio), es decir, el precio aumenta de $r^A_{k,t}$ a $r^B_{k,t}$. Aumentó P_Y, el ingreso marginal es mayor al costo marginal porque el precio aumentó, pero se terminó contratando el mismo nivel de capital a un precio mayor. En la nueva tasa, es mayor y por ende hay un incentivo a inventar, la inversión es positiva: voy a invertir hasta que r vuelva a ser igual. Esto le permite a las empresas contratar capital hasta que vuelva a haber igualdad. Como hubo inversión, mañana hay una oferta nueva. Hay que ser una inversión tal que le permita restaurar la ecuación. Dada la demanda de inversión nueva, ¿cuál es el nivel de inversión que requiero para que vuelva a haber igualdad? El precio está cayendo hasta que la igualdad se reestablece.


$r_{k,t}$
k^s
exceso demanda
$r^B_{k,t}$
$r^A_{k,t}$
k^d_1
k^d_0
K


$r_{k,t}$
k^s_0
k^s_1
$r^B_{k,t}$
$r^A_{k,t}$
k^d_1
k^d_0
K

V Modelo Clásico de inversión: q de Tobin

En los modelos neoclásicos, el ajuste de un período a otro, es automático. La inversión es la variable flujo que ajusta a la variable stock (el capital) para el siguiente período. El modelo de inversión neoclásico es un modelo neoclásico: el ajuste es automático de un período a otro. Parte de un supuesto muy fuerte de que no hay costos de ajuste.

9. Q de Tobin

El modelo de Q de Tobin ya plantea costos de inversión y es más realista. La función de producción cumple con todos los supuestos neoclásicos. Hay pleno empleo en el mercado laboral y la depreciación es de 0. Hay costos de instalación de capital que dependen de la inversión y del propio capital: dependen positivamente de la inversión. El costo marginal es un costo creciente y por ende la segunda derivada es mayor a cero también. El costo marginal se mueve en la misma dirección del capital pero es creciente, indistintamente de si la inversión es creciente o no. Pero el costo marginal es negativo respecto del capital, y como es negativo, es un ingreso; también es un costo negativo creciente. Como sería un costo negativo creciente? $\rightarrow$ un ingreso creciente. La contribución marginal del capital va a disminuir los costos de instalación.

$$Y_t = A_t F(K_t, L_t)$$

$$\begin{aligned} \rho &= 1 \\ \delta &= 0 \\ C&(I,K) \\ C_I &> 0 \\ C_{II} &> 0 \\ C_K &< 0 \end{aligned}$$

$C_{KK} > 0 \rightarrow$ Se comporta como un ingreso creciente

Entre más capital tengo instalado, más fácil es hacer nuevas instalaciones.

$$\pi = A_t F(K_t, L_t) - C(I_t, K_t) - w_t L_t \qquad s.a \qquad I_t = K_{t+1} - K_t$$

$$\max_{K_{t+1}, I_t, L_t} \quad \pi_t = \sum_{s=t}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t} \left[A_s F(K_s, L_s) - C(I_s, K_s) - I_s - w_s L_s + q_s(I_s - K_{s+1} + K_s)\right]$$

$$\max_{K_{t+1}, I_t, L_t} \quad \pi_t = A_t F(K_t, L_t) - C(I_t, K_t) - I_t - w_t L_t + q_t(I_t - K_{t+1} + K_t)$$

$$+\left(\frac{1}{1+r}\right)\left[A_{t+1} F(K_{t+1}, L_{t+1}) - C(I_{t+1}, K_{t+1}) - I_{t+1} - w_{t+1} L_{t+1} + q_{t+1}(I_{t+1} - K_{t+2} + K_{t+1})\right]$$

$$+\left(\frac{1}{1+r}\right)\left[A_{t+2} F(K_{t+2}, L_{t+2}) - C(I_{t+2}, K_{t+2}) - I_{t+2} - w_{t+2} L_{t+2} + q_{t+2}(I_{t+2} - K_{t+3} + K_{t+2})\right]$$

$$+\ldots$$

$$L_t : A_t F_L(K_t, L_t) - w_t = 0 \Leftrightarrow A_t F_L(K_t, L_t) = w_t$$
$$I_t : -C_I(I_t, K_t) - 1 + q_t = 0 \Leftrightarrow q_t = 1 + C_I(I_t, K_t)$$

La q es el costo de instalar capital. Cuál es el costo marginal? $\rightarrow$ una unidad adicional que estoy haciendo más el costo marginal de la instalación del capital: es el costo total que tengo por hacer esa inversión marginal.

$$K_{t+1} : -q_t + \left(\frac{1}{1+r}\right)[A_{t+1}F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - C_K(I_{t+1}, K_{t+1}) + q_{t+1}] = 0$$

$$\Leftrightarrow q_t = \left(\frac{1}{1+r}\right)[A_{t+1}F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - C_K(I_{t+1}, K_{t+1}) + q_{t+1}]$$
$$\Leftrightarrow q_t = \left(\frac{1}{1+r}\right)[A_{t+1}F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - C_K(I_{t+1}, K_{t+1})] + \left(\frac{1}{1+r}\right)q_{t+1}$$

$$(*)q_{t+1} - q_t = rq_t - (A_{t+1}F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - C_K(I_{t+1}, K_{t+1})$$

Resumiendo:

$$q_{t+1} = \left(\frac{1}{1+r}\right)[A_{t+2}F_K(K_{t+2}, L_{t+2}) - C_K(I_{t+2}, K_{t+2})] + \left(\frac{1}{1+r}\right)q_{t+2}$$
$$q_{t+2} = \left(\frac{1}{1+r}\right)[A_{t+3}F_K(K_{t+3}, L_{t+3}) - C_K(I_{t+3}, K_{t+3})] + \left(\frac{1}{1+r}\right)q_{t+3}$$

$$\vdots$$

$$q_{t+T-1} = \left(\frac{1}{1+r}\right)[A_{t+T}F_K(K_{t+T}, L_{t+T}) - C_K(I_{t+T}, K_{t+T})] + \left(\frac{1}{1+r}\right)q_{t+T}$$

$$q_t = \left(\frac{1}{1+r}\right)[A_{t+1}F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - C_K(I_{t+1}, K_{t+1})]$$

$$+\left(\frac{1}{1+r}\right)^2[A_{t+2}F_K(K_{t+2}, L_{t+2}) - C_K(I_{t+2}, K_{t+2})]$$

$$+\left(\frac{1}{1+r}\right)^3[A_{t+3}F_K(K_{t+3}, L_{t+3}) - C_K(I_{t+3}, K_{t+3})]$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{1+r}\right)^T[A_{t+T}F_K(K_{t+T}, L_{t+T}) - C_K(I_{t+T}, K_{t+T})]$$

$$+\left(\frac{1}{1+r}\right)^T q_{t+T}$$

$$q_t = \sum_{s=T}^{+\infty}[A_{s+1}F_K(K_{s+1}, L_{s+1}) - C_K(K_{s+1}, L_{s+1})] + \left(\frac{1}{1+r}\right)^T q_{t+T}$$

q_t es igual a la suma del valor presente de los ingresos marginales. Si:

- $\lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^T q_{t+T} > 0 \Rightarrow q < 1 \Rightarrow IMg < CMg \Rightarrow$ desinvierte

$$\sum_{s=T}^{+\infty}[A_{s+1}F_K(K_{s+1},L_{s+1})-C_K(K_{s+1},L_{s+1})]+\left(\frac{1}{1+r}\right)^T q_{t+T}$$
$$>\sum_{s=T}^{+\infty}[A_{s+1}F_K(K_{s+1},L_{s+1})-C_K(K_{s+1},L_{s+1})]$$

$$1+C_I(I_t,K_t)>\sum_{s=T}^{+\infty}[A_{s+1}F_K(K_{s+1},L_{s+1})-C_K(K_{s+1},L_{s+1})]$$

- $\lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^T q_{t+T} < 0 \Rightarrow q > 1 \Rightarrow IMg > CMg \Rightarrow$ invierte

$$\sum_{s=T}^{+\infty}[A_{s+1}F_K(K_{s+1},L_{s+1})-C_K(K_{s+1},L_{s+1})]+\left(\frac{1}{1+r}\right)^T q_{t+T}$$
$$<\sum_{s=T}^{+\infty}[A_{s+1}F_K(K_{s+1},L_{s+1})-C_K(K_{s+1},L_{s+1})]$$

$$1+C_I(I_t,K_t)<\sum_{s=T}^{+\infty}[A_{s+1}F_K(K_{s+1},L_{s+1})-C_K(K_{s+1},L_{s+1})]$$

- $\lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^T q_{t+T} = 0 \Rightarrow q = 1 \Rightarrow IMg = CMg \Rightarrow$ equilibrio

$$\sum_{s=T}^{+\infty}[A_{s+1}F_K(K_{s+1},L_{s+1})-C_K(K_{s+1},L_{s+1})]+\left(\frac{1}{1+r}\right)^T q_{t+T}$$
$$=\sum_{s=T}^{+\infty}[A_{s+1}F_K(K_{s+1},L_{s+1})-C_K(K_{s+1},L_{s+1})]$$

$$1+C_I(I_t,K_t)=\sum_{s=T}^{+\infty}[A_{s+1}F_K(K_{s+1},L_{s+1})-C_K(K_{s+1},L_{s+1})]$$

Estamos imponiendo que el límite sea cero, pero eso es por economía y no matemática. La lógica es que el q_t es un precio sombra, un precio que no es de mercado pero da información sobre las relaciones que estoy observando. En equilibrio esa razón vale 1 porque el costo marginal sería el valor presente al flujo de esos ingresos marginales que produjo. El costo marginal de una unidad adicional de inversión, generaría todo el numerador como ingresos marginales.

$$q_t=\frac{\sum_{s=T}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s+1-T}[A_{s+1}F_K(K_{s+1}.L_{s+1}-C_K(I_{s+1},K_{s+1}))]}{1+C_I(I_t,K_t)}$$

*En equilibrio:

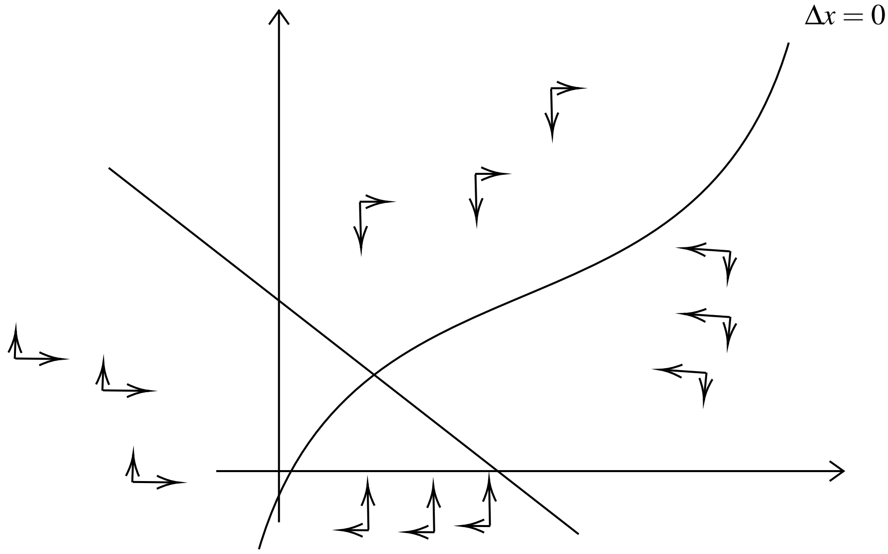
$$q=1\Rightarrow IMg=CMg$$
$$q>1\Rightarrow IMg>CMg\Rightarrow invierte$$
$$q<1\Rightarrow IMg<CMg\Rightarrow desinvierte$$

Un $q>1$ significa que el valor presente de los ingresos marginales que genera una unidad adicional de inversión es mayor que el costo de instalar esa unidad de inversión: una señal para invertir porque genera más que lo que cuesta invertirlo. Un $q<1$ significa que el costo

marginal es mayor al valor presente de los ingresos marginales y por ende voy a desinvertir. Es un precio sombra implícito, no lo estoy viendo.

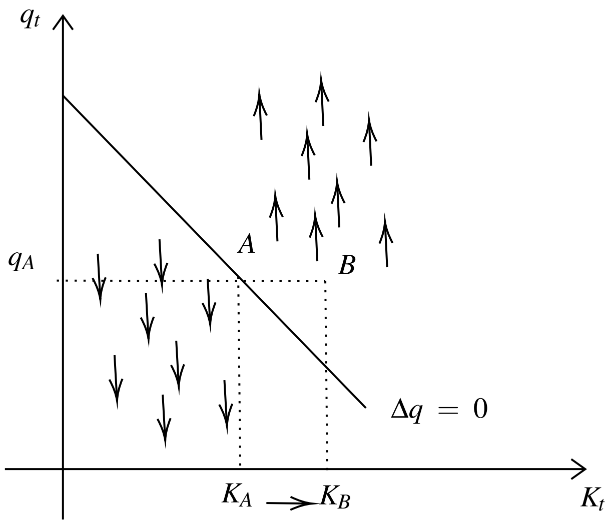
$$\boxed{\Delta q_t : q_{t+1} - q_t = rq_t - (A_{t+1}F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - C_K(I_{t+1}, K_{t+1}))}$$

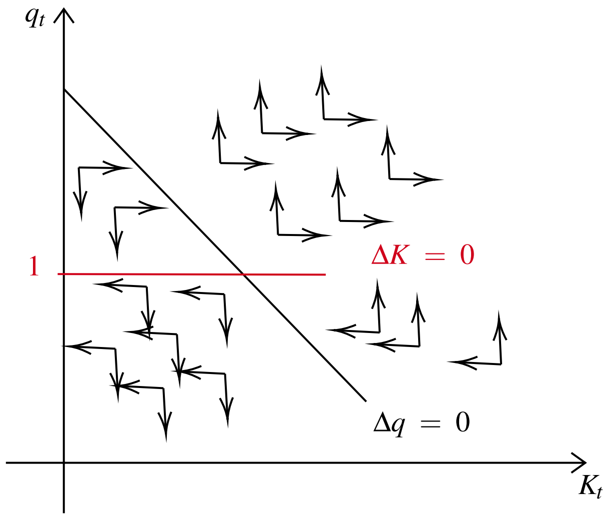
$$\boxed{\Delta K : q_t = 1 + C_I(I_t, K_t)}$$

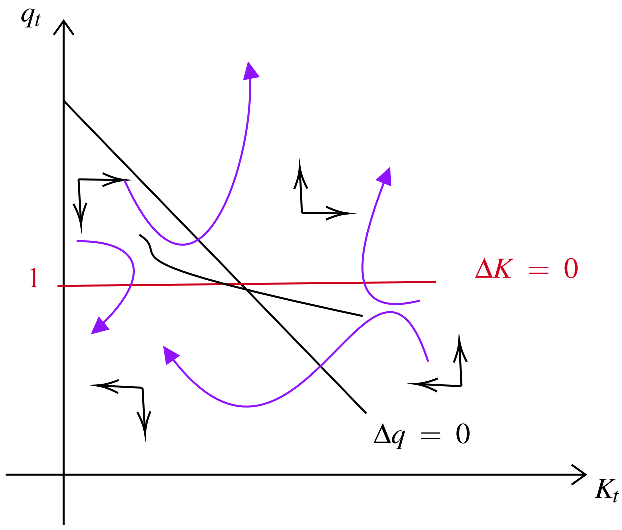


q se va a asociar con el valor de una acción en el mercado, si estuviera indexada. q dice cuánto vale el activo: si lo que produce es más de lo que cuesta tenerlo, vale mucho y uno esperaría que en el mercado se cotice mucho y su precio suba. Si produce muy poquito respecto de lo que cuesta, esperaría un precio bajo. Es un precio sombra, pero se puede asociar con el precio del activo en el mercado. q sería como el precio o valor de K que yo tengo (viéndolo como si graficara una oferta y demanda).
Para ver cómo se comportan las funciones, voy a sacar las ecuacionces de cambio ($\Delta q = 0$ y $\Delta K = 0$).

$$\Delta q = 0 \Rightarrow q_t = \frac{A_{t+1}F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - C_K(I_{t+1}, K_{t+1})}{r}$$







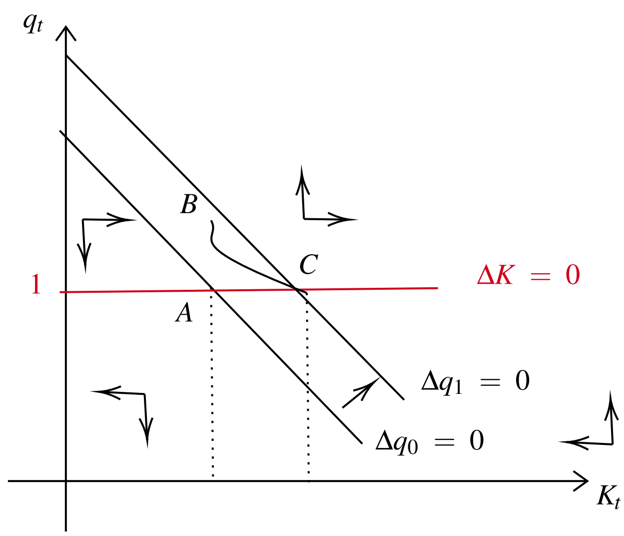
9.1 Cambio permanente e inesperado

Shock: un aumento en el ingreso; un shock sobre F, sobre la función de producción. $\Delta Y_t \uparrow$. Un cambio permanente e inesperado. Está afectando $F(K_t)$: a cualquier nivel de capital ahora soy más productivo; a cualquier nivel de K voy a tener un q mayor, por eso la curva se desplaza a la derecha. Hay que fijarse en las ecuaciones de cambio igualadas a cero. Si la función de producción aumenta, está aumentando la productividad marginal.

Suponga que inicialmente está en equilibrio, entonces se está en A, con $q = 1$ a un nivel de capital K_A. Es un cambio inesperado, por lo que al volverse más productivo, el valor presente de los ingresos marginales es mayor, y la valoración del activo es mayor, por lo que q aumenta, y como estaba en 1, ahora q en B, es más alto a 1. Si $q > 1$ significa que el valor presente de los ingresos marginales es mayor que el costo de instalar una unidad adicional de capital por lo que hay un incentivo para invertir; hay que aprovechar y va a haber inversión positiva. Al haber inversión positiva, eso me cambia el capital. Hay incentivo a que haya inversión positiva. El shock es un shock positivo sobre la producción, de productividad positiva. Esa mayor productividad del capital se ve reflejada en una mayor valoración del activo, porque es más productivo que antes y eso se ve reflejado en la valoración del activo, en q.

En este gráfico se tiene el precio (q) y el capital. El capital es un stock, y un stock solo puede cambiar a través de una variable flujo, y en este modelo siempre va a reaccionar primero el precio; los precios son información, relaciones y dan información. El precio siempre va a reaccionar

primero: va a transmitir esa productividad más alta por medio de un precio más alto.
Al invertir acumulo capital, y la acumulación de capital hace que q baje porque se tienen productividades marginales son decrecientes (en el numerador) al aumentar el capital esa productividad marginal está bajando y si quiero hacer más inversión el costo de invertir más estaría aumentando: el numerador baja, y el denominador sube → q baja, aunque sigue estando por encima de uno, lo que implica que el valor presente del flujo de los ingresos marginales es mayor al costo asociado a hacer inversión en una unidad adicional de capital, y vuelvo a invertir. Esa inversión, al período siguiente y ese capital está asociado a productividades marginales decrecientes y costos crecientes, y estoy en un proceso de inversión mientras sea mayor a 1. Me estoy moviendo en una senda de inversión hasta que llegue a un nuevo estado estacionario en C.
Cuando llego al punto C se tiene un mayor nivel de capital pero en estado estacionario, el capital ya no cambia, la inversión es cero, se alcanza el estado estacionario con un nivel de capital K_C. q volvió a ser igual a 1 donde el valor presente del flujo de los ingresos marginales vuelve a ser igual al costo marginal de invertir en una unidad adicional. Se llega a un nuevo equilibrio $q = 1$ con un nuevo nivel de capital.

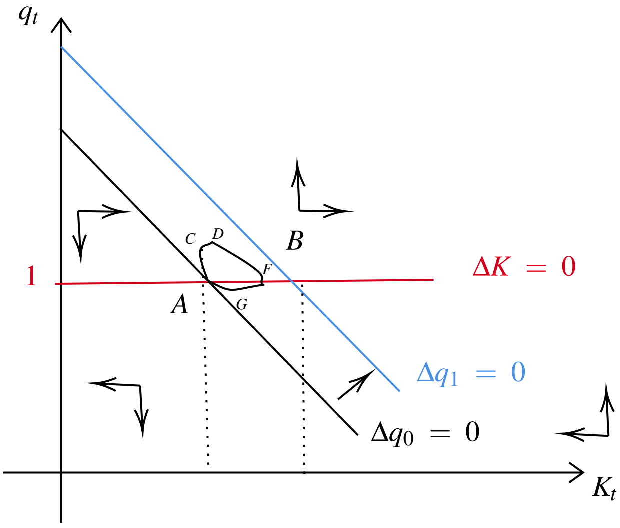


$$\Delta q_t = q_{t+1} - q_t = rq_t - [A_{t+1}F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - C_K(I_{t+1}, K_{t+1})]$$
$$\Delta q_t = 0 \Leftrightarrow q_t = \frac{1}{r} \cdot [A_{t+1}F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - C_K(I_{t+1}, K_{t+1})]$$
$$\Delta K \Rightarrow q_t = 1 + C_I(I_t, K_t)$$

La vez pasada habíamos visto un shock permanente inesperado y permanente. No es lo mismo que un shock sea transitorio porque si es transitorio se hace un cambio por un período de tiempo y se vuelve a la condición inicial.

9.2 Cambio esperado y transitorio

Shock: $\Delta Y_t \uparrow$, igual que la vez pasada para poder comparar. Originalmente la gente me está dando información, yo siempre reacciono a la información que me dan. Me están diciendo que en el futuro vamos a tener una mayor productividad asociada a la producción.

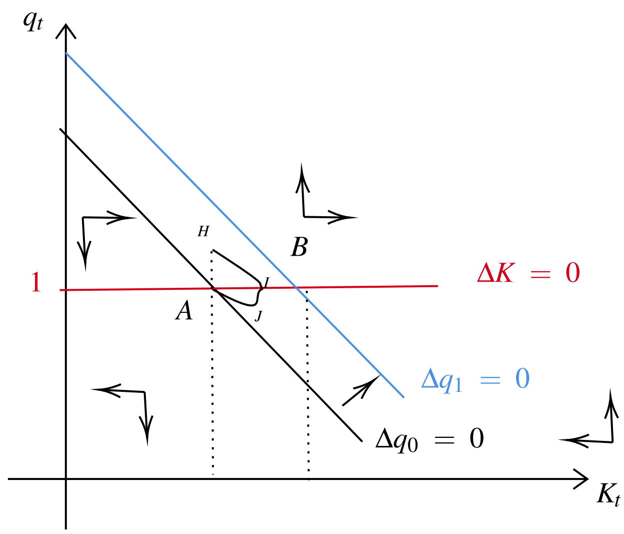


El activo está siendo más valorado porque me están diciendo que va a ser más productivo, por lo que, para el nivel de capital inicial se asociado una mayor valor del activo; el stock de capital no ha cambiado, y subo a C, al mismo nivel de capital inicial. Ahí, $q > 1$ y con ello el valor presente de los flujos de ingresos marginales son mayores que los costos de instalación de capital, por lo que hay incentivos para invertir.
En C, estoy arriba de las dos curvas y sigo las flechas de arriba a la izquierda y me voy a la derecha. Conforme invierto, hay acumulación de capital y aumenta q por las expectativas de que va a haber mayor productividad en el futuro, porque se sabe que el valor del activo va a aumentar en el tiempo. q sigue siendo mayor a 1 y por ende se sigue invirtiendo.
Ocurre la perturbación y se la línea de cambio en q $\Delta q = 0$ se desplaza hacia la derecha. Ahora estoy debajo de la curva $\Delta q_1 = 0$ pero por arriba de $\Delta K = 0$. En esta segunda trayectoria hay inversión positiva porque $q > 1$ y con esto hay acumulación de capital, por lo que aumenta el capital. q ahora más bien baja porque estamos por debajo de la línea nueva de $\Delta q_1 = 0$.
Como el cambio es esperado, primero hay expectativas y ya hasta después, propiamente ocurre el shock. Al subir q por encima de 1, en C, el flujo del valor presente de los ingresos marginales es mayor a los costos marginales, y hay inversión positiva que aumenta el capital de mañana. Predomina la expectativa porque el shock es esperado, y predomina sobre la fórmula. El diagrama de fase me permite leer las direcciones. Las expectativas me llevan a D tras el aumento en q. El paso de A a C por las expectativas del shock (antes del propio shock), luego de C a D, es la inversión a raíz de las expectativas.
Ocurre el shock, pero ahora estoy por debajo de $\Delta q_1 = 0$, por lo que ahora me muevo hacia abajo en q, hasta F. Luego de D, ya es propiamente por el shock real.
La inversión me depende del valor de q. La inversión es positiva o negativa dependiendo del valor en q. La inversión me determina el nivel de capital al período siguiente. Las expectativas explican desde A hasta C y hasta D. La inversión es desde hasta D.
De C hasta D también aumenta q. Las expectativas jalan el precio (q) para arriba dado que aún no pasa el shock. Luego al aumentar el nivel de capital en D, ocurre el shock y ahí sí, al aumentar el nivel de capital y estar por debajo de la nueva curva de $\Delta q_1 = 0$ ahí sí empiezo a bajar q pero sigue aumentado el nivel de capital. El aumento del capital hace que los costos crezcan y el mayor nivel de capital, debido a las productividades marginales de decrecientes, es cada vez menos productivo. Los ingresos van disminuyendo y los costos aumentando: el resultado neto es que baja q.
La curva de Δq se mueve hasta que se da el cambio, y cuando el shock es sorpresivo, se mueve de una vez.
En F ya $\Delta K = 0$ y no hay inversión, es cero, pero q sigue bajando por las flechas y hacia la izquierda porque se baja de la curva de $\Delta K = 0$ y así se llega de G hasta A. En G, $q < 1$ y los costos marginales

son mayores al flujo del valor presente de los ingresos marginales, con lo que hay un incentivo en disminuir el nivel de capital instalado para el siguiente período, y con ello se pasa hacia la izquierda.
De $G \to A$ lo que pasa es que en G $q < 1$ y con ello los costos marginales serían mayores al flujo de valor presente de los ingresos marginales, con lo cual hay incentivo a disminuir en el nivel de capital empleado, con lo cual al siguiente período se disminuye el nivel de capital y se desplaza hacia la izquierda hasta llegar nuevamente al punto A. El movimiento de capital siempre se explica por inversión, ya sea positiva o negativa.

9.3 Cambio sorpresivo y transitorio

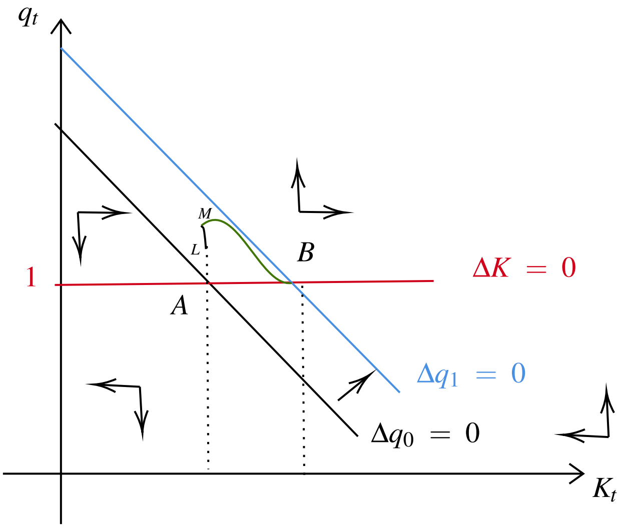
En un cambio sorpresivo no hay tiempo para estarse preparando. No me anuncian las cosas. Si me avisan las cosas me preparo, pero aquí me agarran de sorpresa.



Lo que pasa entonces es que en el momento inicial el q sube hasta H y $q > 1$. La curva de $\Delta q = 0$ se desplaza de inmediato. En H estoy por encima de $\Delta K = 0$ pero por debajo de la nueva curva de $\Delta q = 0 \to$ me muevo hacia la izquierda y hacia abajo y llego a I. En H, como $q > 1$ el flujo de valor presente de los ingresos marginales es mayor a los costos marginales, y hay incentivos en invertir en capital y con esto aumenta la acumulación de capital, y al tener más capital aumentan los costos y este es cada vez menos productivo, el ingreso marginal es decreciente, y aumenta el denominador y baja el numerador y como resultado baja q. Llego a I. En I, como se sigue por debajo de la curva de $\Delta q = 0$, q sigue bajando, y se va hacia la izquierda y hacia abajo en J. Como $q < 1$, los costos marginales son mayores al flujo del valor presente de ingresos marginales y hay un incentivo a disminuir la inversión y esto disminuye el nivel de capital y con ello bajan los costos y aumenta la productividad marginal; hay expectativas de menores productividades futuras y ambas q y K disminuyen y me devuelvo .

9.4 Cambio esperado y permanente

Shock: $\Delta Y_t \uparrow$. Esta vez se le avisa a la gente. Cuando a la gente se le avisa, aumentan las expectativas y la q sube a L, dado que se está esperando que el capital sea más productivo. En L se está por arriba de ambas curvas y se mueve a la derecha y arriba hasta M. Al ser $q > 1$ el flujo de valor presente de los ingresos marginales es mayor a los costos marginales y hay un incentivo a aumentar la inversión, con lo cual al siguiente período aumenta el nivel de capital. Aumentar el capital significa que aumentan los costos pero también que la productividad marginal disminuye. De L a M el aumento en q se explica por las expectativas dado que se espera que sea más productivo el capital. Como q sigue aumentanto, sigo haciendo inversión. Luego ya ocurre la perturbación y se mueve $\Delta q = 0$ a la derecha y se queda ahí. Ahora se está por arriba de $\Delta K = 0$ pero por abajo de la nueva $\Delta q = 0$ y se llega hasta B. Este movimiento de M a B: el q en M es mayor a 1, y por ende se invierte más, hay inversión positiva y aumenta el capital, por lo cual q empieza a bajar dado que los costos están subiendo y hay un mayor capital que implica que el ingreso marginal disminuye porque es decreciente respecto al capital, entonces q está bajando pero sigue siendo mayor y sigo invirtiendo hasta llegar a B, estado estacionario en donde $\Delta K = 0$ y $\Delta q = 0$.



VI

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

La crítica principal del modelo de Solow es que carecía de microfundamentos. Entonces ahora vamos a ver cómo introducirle microfundamentos a ese modelo de Solow. Vamos a empezar con el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans. Del lado de la oferta mantenemos los supuestos neoclásicos. Dos veces diferenciable, continua, productividades marginales decrecientes, funciones homogéneas de grado 1, mercados perfecto y el mercado laboral ajusta perfectamente.

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$$

$$A(t) = e^{gt}A(0)$$

$$\delta = 0$$

Supuestos neoclásicos de producción

Se supone que la depreciación es igual a cero por conveniencia. Se toma un agente representativo homogéneo.

Supuesto: familias viven infinitamente, hay altruismo

Las familias viven infinitamente, y crecen en el tiempo. Las familias crecen en el tiempo, pero el número de familias no cambia. Hay altruismo $\rightarrow$ las personas se preocupan por otras personas. No se crean nuevas familias, solo aumenta el tamaño de la familia con las generaciones.

$$L(t) = e^{nt}L(0)$$

Las familias son dueñas del capital y del trabajo. El supuesto fuerte es que las familias son altruistas.
La novedad con respecto a Solow es que incorporamos los microfundamentos del lado de la demanda (los hogares). Las familias tienen un problema de maximización. Los hogares maximizan:

$$\begin{aligned} &\max_{C(t)} u_t = L(t)\int_t^{+\infty} e^{-(\rho-n)t}u(C(t))dt \\ \text{sujeto a} \quad &\dot{K}(t) = F(K(t), A(t)L(t)) - C(t) - \delta K(t) \end{aligned}$$

Se tiene una utilidad para un momento, la cual depende del consumo, pero eso se suma en el tiempo y se introduce un factor de descuento: las personas tienen una preferencia intertemporal. Ese factor de descuento será ρ. Pero como las familias son altruistas, ese factor no sólo se descuenta en el tiempo, sino también por el crecimiento poblacional, porque como hay altruismo importa la cantidad de gente que haya. Entonces el factor de descuento termina siendo $\rho - n$
La integral es una sumatoria de las utilidades instantáneas en cada momento, la cual está siendo descontada por el tiempo y el crecimiento poblacional. Está elevado a menos porque se está trayendo a valor presente. Tiene que ser que $\rho - n < 1$. Eso puede ser una CES, logaritmo, Cobb-Douglas, etc.
Se divide para normalizar por unidades efectivas de trabajo:

$$\begin{aligned} &\max_{C(t)} u_t = L(t)\int_t^{+\infty} e^{-(\rho-n)t}u(C(t))dt \\ \text{sujeto a} \quad &\frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} = \frac{F(K(t), A(t)L(t))}{A(t)L(t)} - \frac{C(t)}{A(t)L(t)} - \frac{\delta K(t)}{A(t)L(t)} \end{aligned}$$

*En Solow: sea $k^E(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$

$$\dot{K}(t) = \left[\frac{\dot{k}^E(t)}{k^E(t)} + \underbrace{g+n}_{z}\right]K(t)$$

Se va a replantear la función de utilidad en términos de las unidades efectivas de trabajo. Ahora que el problema se replantea en términos de las unidades efectivas de trabajo, el descuento ya no sería por n sino por z más bien.

$$
\begin{aligned}
&\max_{C(t)} u_t = L(t)\int_t^{+\infty} e^{-(\rho-n)t}u(C(t))dt\\
\text{sujeto a}\quad &\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\left[\frac{\dot{k^E}(t)}{k^E(t)}+g+n\right] = f(k^E(t)) - c^E(t) - \delta k^E(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max_{C(t)} u_t = L(t)\int_t^{+\infty} e^{-(\rho-z)t}u(C(t))dt\\
\text{sujeto a}\quad &\underbrace{\dot{k^E}(t) = f(k^E(t)) - c^E(t) - (z+\delta)k^E(t)}_{\text{ecuación de estado}}
\end{aligned}
$$

*Repasar control óptimo. Los problemas recurrentes se resuelven con control óptimo u optimización dinámica.

> Programación dinámica: *ver documento en EcoAula. Lo que dice el principio de máximo es que se escriben las condiciones necesarias para optimizar un problema de control. Cuáles son las variables que se necesitan? Una variable de estado (está asociada a una ecuación de estado; ecuación que describe a partir de un punto qué es lo que va a pasar, usualmente es la variable asociada con el puntito, la evolución en el tiempo, una derivada en el tiempo) y una variable de control. Se tiene un problema que tiene una forma particular. Es un problema de optimización entonces se busca el máximo respecto a una variable de control y. Es un juego recurrente en el tiempo. Se suma una condición terminal o inicial.
>
> $$
\begin{aligned}
&\max_{y(t)} \int_0^T F(x(t),y(t),t)dt + S(x(t))\\
&\quad\text{sujeto a}\quad \dot{x}(t) = f(x(t),y(t),t)
\end{aligned}
$$
>
> Hay que usar control óptimo. Cómo se resuelve un problema de esta forma? $\rightarrow$ Hamiltoniano. Es una función de las variables de estado, control, del tiempo y de un $\lambda(t)$ que depende de t. Esos λ en economía tienden a ser un precio sombra. Qué es ese Hamiltoniano? Es la función que está dentro de la integral (un solo juego, no la suma de todo el juego; en un momento dado) más el multiplicador $\lambda(t)$ multiplicado por lo que tenga en la ecuación de estado, pero solo de un lado de la ecuación, sin lo del puntito.

Sea el hamiltoniano:

$$H(x(t),y(t),t,\lambda(t)) = F(x(t),y(t),t) + \lambda(x(t),y(t),t)$$

Esa función (Hamiltoniano) va a ser un óptimo si cumple con las siguientes condiciones. Condiciones:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t),y(t),t)\\
\dot{\lambda}(t) &= -H_x\\
H(x^*(t),y^*(t),\lambda^*(t),t) &\geq H(x^*(t),u(t),\lambda^*(t),t)
\end{aligned}
$$

El Hamiltoniano es un máximo si se cumplen esas condiciones. Eso dice cómo encontrar el resultado al problema planteado de control óptimo, un problema dinámico que se resuelve una vez y otra en el tiempo. La variable estado sería $\dot{k^E}(t)$ la que define la ecuación de estado, la variable que tiene asociado el puntito. La variable de control es la variable que controlo para maximizar el problema,

que en este caso sería el consumo. Puede ser posible que haya más de una variable de control. La ecuación de estado sería $f(k^E(t)) - c^E(t) - (z+\delta)k^E(t)$.
Si le dicen plantee el Hamiltoniano:

$$H(k^E(t), c^E(t), \lambda(t), t) = e^{-(\rho-z)t}u(c^E(t)) + \lambda(t)\left[f(k^E(t)) - c^E(t) - (z+\delta)k^E(t))\right]$$

Restricción para garantizar que eso tenga un máximo es una condición de transversalidad. Condición de transversalidad: $\lim_{t\to+\infty} e^{-(\rho-z)t} = 0$ Dado eso, cómo puedo resolver el problema? $\to$ el principio del máximo me dice cómo hacerlo. Se está maximizando respecto al consumo.

$$\max_{c^E(t)} H : e^{-(\rho-z)t}u'(c^E(t)) - \lambda(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-(\rho-z)t}u'(c^E(t)) = \lambda(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -(\rho-z)e^{-(\rho-z)t}u''(c^E(t)) + e^{-(\rho-z)t}u'(c^E(t))\dot{c}^E(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -H_{k^E}$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda(t)\left[f'(k^E(t) - (z+\delta))\right]$$

$$\Leftrightarrow -\lambda(t)\left[f'(k^E(t) - (z+\delta))\right] = -(\rho-z)e^{-(\rho-z)t}u'(c^E(t)) + e^{-(\rho-z)t}u''(c^E(t))\dot{c}^E(t)$$

$$\Leftrightarrow -(e^{-(\rho-z)t}u'(c^E(t)))\left[f'(k^E(t) - (z+\delta))\right] = -(\rho-z)e^{-(\rho-z)t}u'(c^E(t)) + e^{-(\rho-z)t}u''(c^E(t))\dot{c}^E(t)$$

$$\Leftrightarrow -u''(c^E(t))\dot{c}^E(t) = \left[f'(k^E(t) - -z - \delta - \rho - z\right]u'c^E(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-u''(c^E(t))\dot{c}^E(t)}{u'c^E(t)} = \left[\left[f'(k^E(t) - (z+\rho))\right]\right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{-u''(c^E(t))\dot{c}^E(t)}{u'c^E(t)} = f'(k^E(t) - (z+\rho))$$

$$\Leftrightarrow \frac{-u''(c^E(t))\dot{c}^E(t)c^E(t)}{u'c^E(t)c^E(t)} = f'(k^E(t) - (\delta+\rho)$$

*

$$\frac{-\partial\left[u'(c^E(t))\right]}{\partial c^E(t)}\frac{c^E(t)}{u'(c^E(t))} = \varepsilon_{u'(c^E(t))}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{c}^E(t)}{c^E(t)} = \frac{1}{\varepsilon_{u'(c^E(t))}}\left[f'(k^E(t) - (\delta+\rho)\right]$$

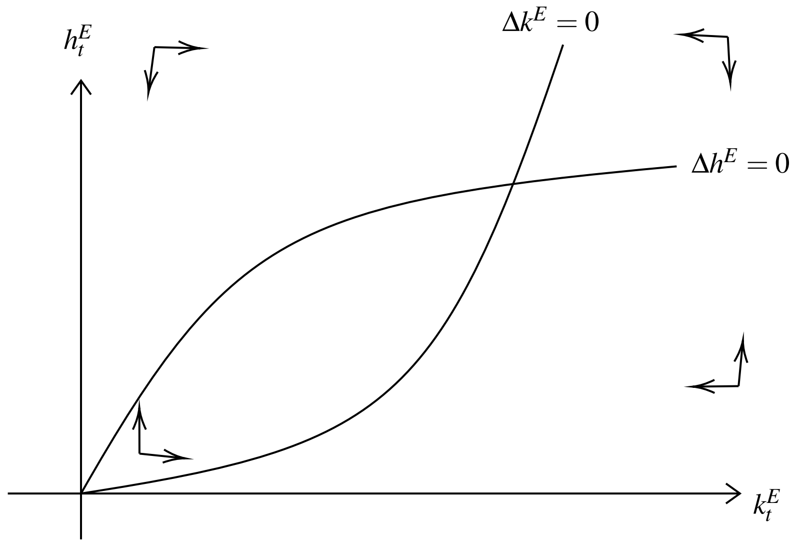
La tasa de crecimiento del consumo es igual a 1 entre la elasticidad por la productividad marginal menos ρ ($@\delta = 0$) que es el factor de descuento. En un equilibrio el valor de la productividad marginal es igual a la tasa del costo del uso del capital.

$$\begin{cases} \dot{k^E}(t) = f(k^E(t)) - c^E(t) - (z+\delta)k^E(t) \\ \dfrac{\dot{c}^E(t)}{c^E(t)} = \dfrac{1}{\varepsilon_{u'(c^E(t))}}\left[f'(k^E(t) - (\delta+\rho)\right] \end{cases}$$

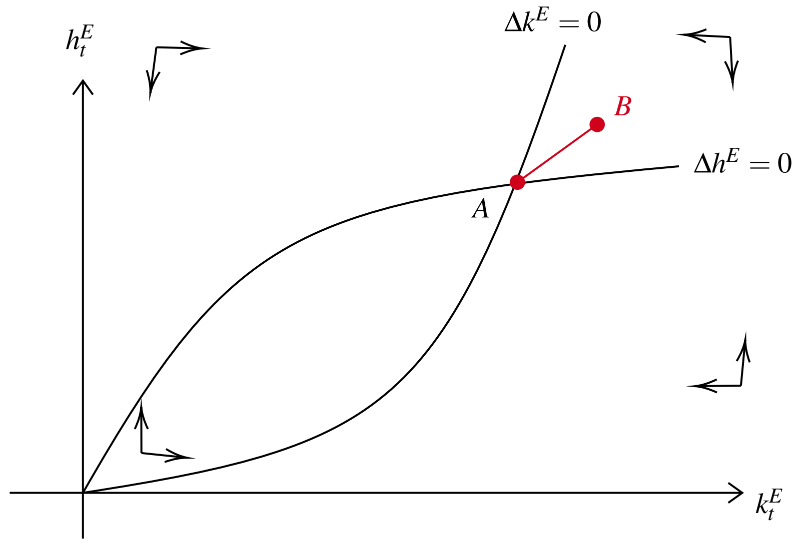
Estas dos ecuaciones son las que resuelven el problema de optimización que tienen las familias. La ecuación de estado me da el cambio o evolución del capital. Y por otro lado se tiene una ecuación para el cambio en el consumo. Son las ecuaciones que resuelven el sistema. La primera ecuación dice que la inversión, en equilibrio, es financiada por el ahorro neto de los costos de reposición. La otra es la tasa de crecimiento del consumo. Como son dos ecuaciones de cambio, lo que sigue es un diagrama de fase.

9.4.1 Consulta

Diagrama de fase capital humano:



- Considere la economía de capital humano de Mankiw-Romer-Weil (1992). Suponga que la economía está en estado estacionario. Identifique la perturbación, analice el proceso de ajuste, encuentre el nuevo nivel de estado estacionario para el capital y producto por unidad efectiva de trabajo y explique qué ocurre con el ingreso per capita y el ingreso de la economía en el nuevo equilibrio en cada uno de los siguientes escenarios: **b) Se da una entrada significativa de familias venezolanas de clase media y alta que traen consigo capital humano y físico superior al de la economía que les otorga el asilo.**
  En el diagrama de capital humano, el capital humano y el capital físico son complementos, y cualquier cosa lo va a tirar al estado estacionario, sin importar el punto donde esté.
  Shock: $\uparrow h_t^E \wedge \uparrow k_t^E$
  Tengo más capital físico y más capital humano, entonces doy un salto al otro punto B. El shock es sobre el stock promedio que hay en la economía, sobre la población: de un momento a otro entró más gente: $\uparrow L$. Pero también aumentó el capital físico y humano, más que el promedio que había en la economía, entonces en promedio hay más capital físico y humano en promedio, sin embargo, sólo está cambiando los stocks de los tipos de capital, no cambió ninguno de los parámetros.
  La lógica de la mecánica del ajuste es igual al modelo de Solow básico, nada más que aquí hay una variable adicional.



No cambió ningún parámetro, solo los stocks del capital físico y el capital humano que se tenía en ese momento. ¿Qué pasa en B? $\rightarrow$ empieza a disminuir. Las dos variables estarían disminuyendo hasta que vuelva al estado original que tenía, porque no está cambiando ninguno de los parámetros. El movimiento de A a B es la perturbación. Hay que explicar ese proceso de ajuste. ¿Cómo se explica el movimiento de A a B? Hay que dar la interpretación económica $\rightarrow$ es el modelo de Solow. Aumenta el stock de capital que se tenía inicialmente: aumentan los costos de reposición y también el producto, con lo cual aumentan el consumo y el ahorro para ambos tipos de capital. Sin embargo, los costos de reposición para ambos tipos de capital aumentan más que el ahorro, así que hay una brecha negativa entre el ahorro para ambos tipos de capital y los costos de reposición, y por ende hay un incentivo a desinvertir. Hay inversión negativa, y al siguiente período hay un menor nivel de capital físico y humano instalado.

De las ecuaciones de cambio igual a cero, se despeja h_t^E y se inspecciona para ver qué forma tienen. De ambas se despejan h_t^E porque se están graficando h_t^E en las abscisas, como variable dependiente.

$$Y_t = K^{\alpha}\mathscr{H}^{\phi}(A_tL_t)^{1-\alpha-\phi}$$

$$\Delta k^E = 0 \Rightarrow s_k k_t^{E\,\alpha} h_t^{E\,\phi} = (z+\delta)k_t^E$$

$$\Leftrightarrow h_t^E = \left[\frac{(z+d)k_t^E}{s_k k_t^{E\,\alpha}}\right]^{\frac{1}{\phi}}$$

$$\Leftrightarrow h_t^E = \left[\frac{(z+d)k_t^{E\,1-\alpha}}{s_k}\right]^{\frac{1}{\phi}}$$

$$\Leftrightarrow h_t^E = \underbrace{\left[\frac{(z+d)}{s_k}\right]^{\frac{1}{\phi}}}_{\mu} k_t^{E\,\frac{1-\alpha}{\phi}}$$

$$\Leftrightarrow h_t^E = \mu k_t^{E\,\frac{1-\alpha}{\phi}}$$

$$\frac{\partial h_t^E}{\partial k_t^E} = \frac{1-\alpha}{\phi}\mu k_t^{E\,\frac{1-\alpha}{\phi}-1} > 0$$

$$\frac{\partial^2 h_t^E}{\partial k_t^{E\,2}} = \left(\frac{1-\alpha-\phi}{\phi}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\phi}\right)\mu k_t^{E\,\frac{1-\alpha-\phi}{\phi}-1} > 0$$

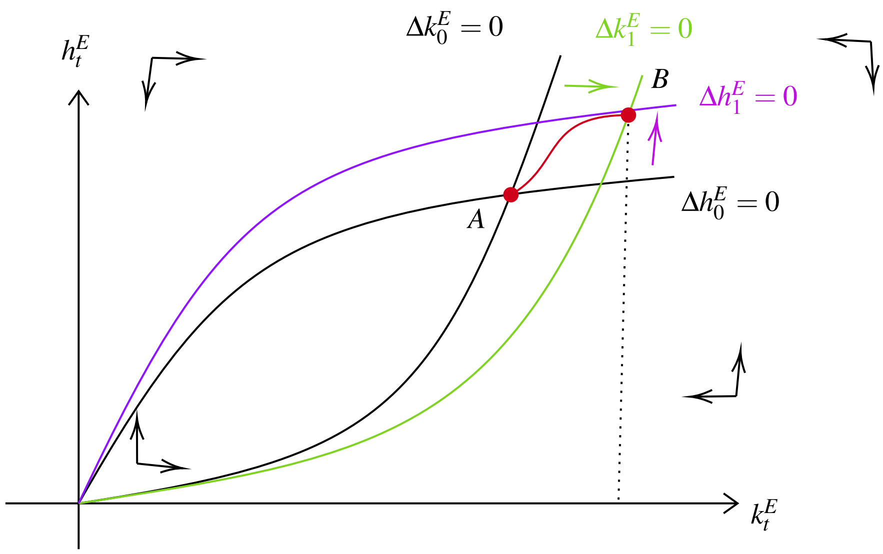
Y por ende la curva $\Delta k_t^E = 0$ es cóncava (cóncava hacia arriba).

$$
\begin{aligned}
\Delta h_t^E = 0 \Rightarrow s_h k_t^{E\,\alpha} h_t^{E\,\phi} &= (z+\delta) h_t^E \\
\Leftrightarrow h_t^{E\,\phi-1} &= \left[\frac{(z+d)}{s_h k_t^{E\,\alpha}}\right] \\
\Leftrightarrow h_t^E &= \left[\frac{(z+d)}{s_h k_t^{E\,\alpha}}\right]^{\frac{1}{\phi-1}} \\
\Leftrightarrow h_t^E &= \left[\frac{s_h k_t^{E\,\alpha}}{(z+d)}\right]^{\frac{1}{1-\phi}} \\
\Leftrightarrow h_t^E = \underbrace{\left[\frac{s_h}{(z+d)}\right]^{\frac{1}{1-\phi}}}_{\eta} &k_t^{E\,\frac{\alpha}{1-\phi}} \\
\Leftrightarrow h_t^E &= \eta k_t^{E\,\frac{\alpha}{1-\phi}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h_t^E}{\partial k_t^E} &= \frac{\alpha}{1-\phi}\eta k_t^{E\,\frac{\alpha}{1-\phi}-1} > 0 \\
\frac{\partial^2 h_t^E}{\partial k_t^{E\,2}} = \eta\left(\frac{\alpha}{1-\phi}\right)&\left(\frac{\alpha-(1-\phi)}{1-\phi}\right) k_t^{E\,\frac{\alpha}{1-\phi}-2} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial^2 h_t^E}{\partial k_t^{E\,2}} = \eta\left(\frac{\alpha}{1-\phi}\right)&\left(\frac{\alpha-1+\phi}{1-\phi}\right) k_t^{E\,\frac{\alpha}{1-\phi}-2} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial^2 h_t^E}{\partial k_t^{E\,2}} = \eta\left(\frac{\alpha}{1-\phi}\right)&\left(\frac{-(1-\alpha-\phi)}{1-\phi}\right) k_t^{E\,\frac{\alpha}{1-\phi}-2} < 0
\end{aligned}
$$

Y por ende la curva $\Delta h_t^E = 0$ es convexa (cóncava hacia abajo).

- Solow Capital humano: $\uparrow \alpha$



Un aumento en α está asociado con la productividad marginal del capital: relativo al capital: la mano de obra es menos productiva, porque el capital se volvió más productivo, en términos relativos. A cualquier nivel de capital, se tiene un h menor. Aumenta α, por lo tanto, aumenta la producción. Aumentan los costos de reposición y también aumentan el consumo y el ahorro para ambos tipos de capital. Ahora el ahorro tanto del capital físico como del capital humano. El ahorro del capital físico es mayor que los costos de reposición del capital físico y hay un incentivo a invertir en capital físico. El ahorro en capital humano también aumentó, pero es menor que los costos de reposición, y hay brecha negativa, por lo tanto hay incentivo a desinvertir. Hay inversión positiva en capital físico e inversión negativa en capital humano. Por lo tanto, al siguiente período hay más capital físico instalado y menos capital humano instalado.

- $$\text{máx}\, O(t) = L(t)\int_{t_0}^{+\infty} e^{-(\rho-n)t}u(c(t))dt$$

sujeto a $\quad \dot{K}(t) = F(K(t), A(t)L(t)) - C(t) - \delta K(t)$

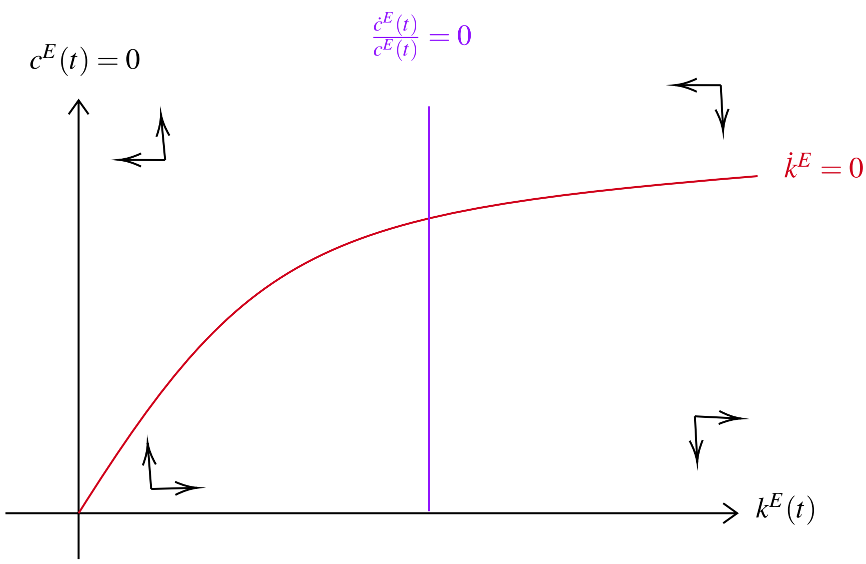
$$\dot{k^E} = f(k^E(t)) - c^E(t) - (z+\delta)k_t^E$$

$$\frac{\dot{c}^E(t)}{c^E(t)} = \frac{1}{\varepsilon_{u'(c^E(t))}}\left[f'(k^E(t) - (\delta+\rho)\right]$$

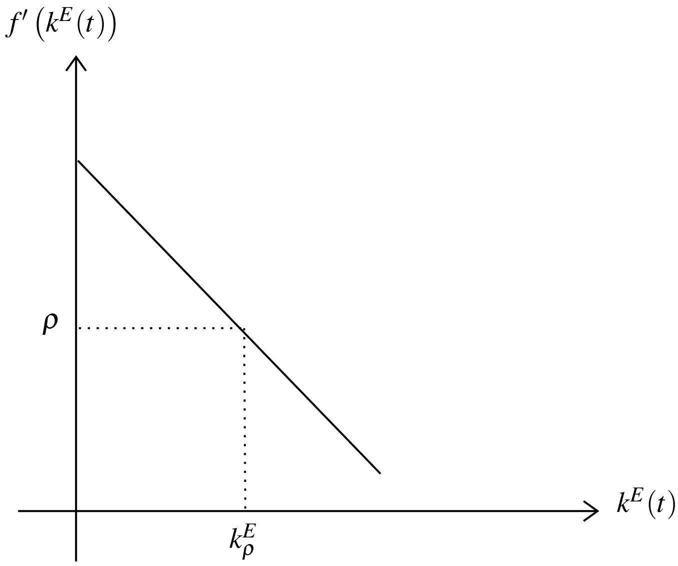
10. Shocks

$$\dot{k}_t^E = 0 \Rightarrow c^E(t) = f(k^E(t)) - zk^E(t)$$

$$\frac{\partial c^E(t)}{\partial k^E(t)} = f'(k^E(t)) - z \quad \frac{\partial^2 c^E(t)}{\partial k^E(t)^2} = \underbrace{f''(k^E(t))}_{(-)}$$



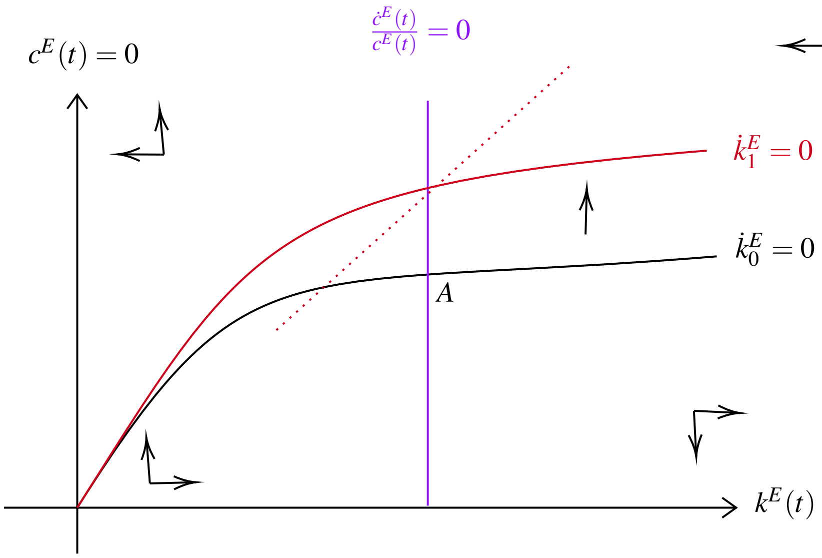
$$\frac{\dot{c}^E(t)}{c^E(t)} = 0 \Rightarrow f'(k_t^E) = \rho$$



- Disminuye la tasa de crecimiento de la población $\downarrow n$

$$\dot{k_t^E} = 0 \Rightarrow \uparrow c^E(t) = f(k^E(t)) - \downarrow zk^E(t)$$

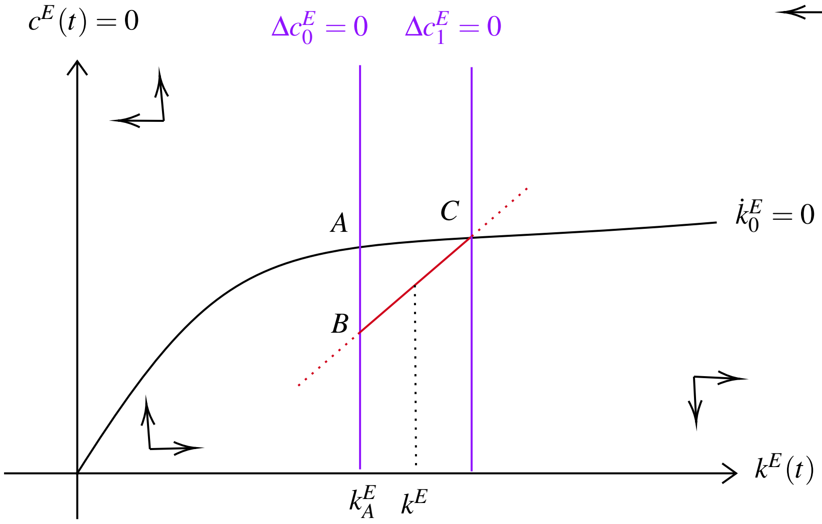
Qué pasaría aquí? Me voy a las curvas de cambio igual a cero. A dónde tengo n? Está en la curva de $\Delta\dot{k}^E = 0$ pero no en $\Delta\dot{c}^E = 0$, y por ende esta curva no cambia. Está en z particularmente, y bajan los costos de reposición, y por ende el ahorro va a ser mayor a los costos de reposición. Por ende, a cualquier nivel de capital ahora se tiene una curva más alta, el nivel de ahorro asociado es mayor para cualquier nivel de capital. Estaba en un estado estacionario inicial con una primera senda, ahora hay una nueva que pasa por Ñ. Qué está pasando? Al nivel de capital inicial disminuyó n, y por ende disminuyó los costos de reposición. Estoy en A, y como solo puedo moverme en las sendas de expansión, y paso de A a Ñ. En Ñ aumentó estoy sobre la curva de $\Delta\dot{c}^E = 0$ y $\Delta\dot{k}^E = 0$, por lo que estoy en un estado estacionario. Brinqué de un estado estacionario a otro, ¿qué pasó? El flujo de las unidades efectivas de trabajo está disminuyendo, y uno de los supuestos de este modelo es que había altruísmo intergeneracional, y por ende preocupa dotar de recursos a las próximas generaciones, y como ese flujo de entradas de familias está disminuyendo, esos recursos que estaba destinando a la reposición del capital, ahora me están sobrando, esa disminución de los costos de reposición era lo que estaba ahorrando para las otras personas, pero esas personas ahora no van a existir y lo consumo yo, por lo que estoy aumentando mi consumo. Estoy disminuyendo mi ahorro en el mismo monto en que me disminuyeron mis costos de reposición, lo cual me permite aumentar mi consumo. Por lo tanto, estoy recomponiendo la decisión entre ahorro y consumo porque ya no hay tanta presión de los costos de reposición. No hay un punto intermedio porque en este modelo se resolvió el problema de maximizar una utilidad. La diferencia entre resultados con el modelo de Solow se debe al supuesto del altruismo, así que lo siguiente es quitar el supuesto del modelo de Solow. Aquí el cambio fue inmedito.



- Aumenta la paciencia $\downarrow \rho$

$$\downarrow f'(\uparrow k^E(t)) = \rho \downarrow$$

La explicación es exactamente la misma que es discreto, el movimiento de la curva es igual. La diferencia es cómo cambia β y ρ en cada una.



11. Equivalente en tiempo discreto

$$
\begin{aligned}
&\max U(t) = L_t \sum_{s=t}^{+\infty} \beta^{s-t}(1+n)^{s-t} u(c_s) \\
\text{sujeto a} \quad & K_{t+1} - K_t = F(K_t, A_t L_t) - C_t - \delta K_t
\end{aligned}
$$

Dividiendo por las unidades efectivas de trabajo:

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \frac{K_{t+1}}{A_t L_t} - \frac{K_t}{A_t L_t} &= \frac{F(K_t, A_t L_t)}{A_t L_t} - \frac{C_t}{A_t L_t} - \frac{\delta K_t}{A_t L_t} \\
\Leftrightarrow \frac{K_{t+1}}{A_t L_t} \frac{A_{t+1} L_{t+1}}{A_{t+1} L_{t+1}} - k_t^E &= f(k_t^E) - c^E(t) - \delta k_t^E \\
\Leftrightarrow k_{t+1}^E (1+z) - k_t^E - z k_t^E &= f(k_t^E) - c^E(t) - \delta k_t^E - z k_t^E \\
\Leftrightarrow k_{t+1}^E - k_t^E &= \frac{1}{1+z} \left[f(k_t^E) - c^E(t) - (z+\delta) k_t^E \right]
\end{aligned}
$$

Se normaliza para controlar por unas variables para que tener solo una variable que se pueda observar, de lo contrario se tienen muchas variables a la vez. Se normalizar por unidades efectivas de trabajo porque es la unidad más pequeña que se tiene. Se quiere separar el efecto de todo lo otro. Se aisla el efecto del crecimiento poblacional y el efecto del crecimiento tecnológico.
Así, se replantea el problema:

$$
\begin{aligned}
&\max_{k_{t+1}^E} U(t) = L_t \sum_{s=t}^{+\infty} \beta^{s-t}(1+z)^{s-t} u(c_s) \\
\text{sujeto a} \quad & k_{t+1}^E - k_t^E = \frac{1}{1+z} \left[f(k_t^E) - c^E(t) - (z+\delta) k_t^E \right]
\end{aligned}
$$

De esto, se puede deducir que:

$$
c_t^E = f(k_t^E) - (z+\delta) k_t^E - (1+z) \left[k_{t+1}^E - k_t^E \right]
$$

Y así, sustituyendo:

$$
\max_{k_{t+1}^E} U(t) = L_t \sum_{s=t}^{+\infty} \beta^{s-t}(1+n)^{s-t} u\left(f(k_t^E) - (z+\delta) k_t^E - (1+z)(k_{t+1}^E - k_t^E) \right)
$$

Primero hay que ver cuando $s=t$ y tengo k_{t+1}^E en $(1+z)(k_{t+1}^E-k_t^E)$. Luego cuando $s=t+1$ sería $\beta(1+z)u'(c_{t+1}^E)(f'(k_{t+1}^E-z-\delta+1+z)$

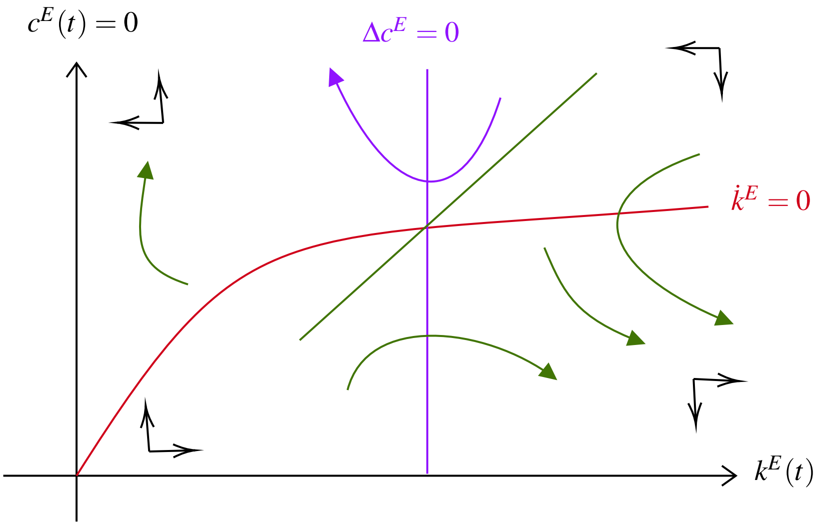
$$L_t\left[-(1+z)\cancel{u'(c_t^E)}+\beta\cancel{(1+z)}u'(c_{t+1}^E)(f'(k_{t+1}^E)+(-\delta-z+1+z))\right]=0$$

$$\beta u'(c_{t+1}^E)(f'(k_{t+1}^E)+1-\delta)=u'(c_t^E)$$

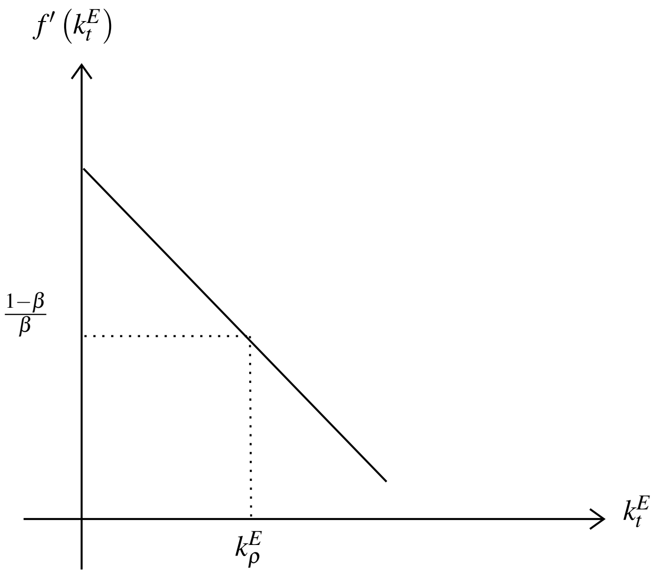
$$\Leftrightarrow \frac{u'(c_{t+1}^E)}{u'(c_t^E)}=\frac{1}{\beta\left[1+f'(k_{t+1}^E)-\underbrace{\delta}_{=0}\right]}$$

$$\Delta k_t^E=\frac{1}{1+z}\left[f(k_t^E)-c_t^E-(z+\delta)k_t^E\right]$$

11.1 Shocks



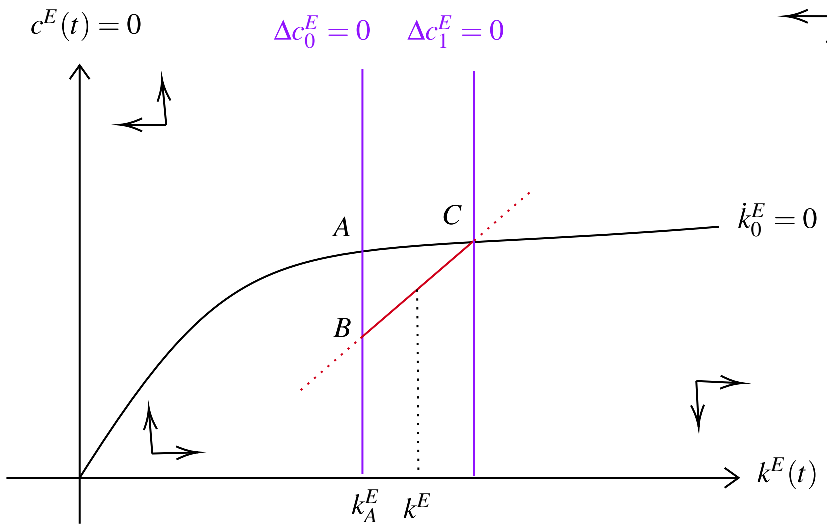
$$\Delta c^E=0\Rightarrow \beta-\beta f'(k_{t+1}^E)=1$$
$$\Leftrightarrow \beta(1-f'(k_{t+1}^E))=1$$
$$\Leftrightarrow f'(k_{t+1}^E))=\frac{1-\beta}{\beta}$$



- Aumenta la paciencia $\uparrow \beta$

$$\downarrow f'(k_{t+1}^E)) = \frac{1-\beta\uparrow}{\beta\uparrow}$$

En dónde está β? $\rightarrow$ está en $\Delta c^E = 0$. Si soy más paciente *beta* aumenta. El shock hace que A disminuya hasta B, y para lograr la igualdad tiene que aumentar el capital. Entonces, qué pasa con la curva de $\Delta c^E = 0$? Qué pasó inicialmente? Estaba en equilibrio en A, luego aumentó la paciencia y eso quiere decir que ahorro más, dado el nivel de capital que se tiene y como el ingreso es el mismo, al ser más paciente cambia la decisión de ahorrar más, y por otro lado consumo menos. Entonces al nivel k_A^E se tiene un cierto nivel de ingreso, eso no ha cambiado, lo que pasa es que sí cambió la preferencia en el tiempo asociada al consumo, entonces con el mismo nivel de ingreso estoy decidiendo reducir mi consumo presente para ahorrar más. Entonces al mismo nivel de capital inicial, el consumo está bajando de A a B, y estoy ahorrando más. Qué pasa con las demás variables? Como el consumo presente disminuyó, el ahorro aumentó, y ahora el ahorro es mayor a los costos de reposición entonces la inversión es positiva, y al período siguiente aumenta el capital. Entonces, al haber inversión positiva se acumuló capital y aumentó; al mayor nivel de capital hay un mayor ingreso, y con esto aumenta el consumo y aumenta también el ahorro, solo que ahora no sabemos si cambian en la misma proporción a diferencia de Solow. Pero también aumentaron los costos de reposición con el aumento del nivel de capital. Pero con el mayor capital el ahorro sigue siendo mayor que los costos de reposición y sigue habiendo inversión positiva y vuelve a aumentar el nivel de capital. Sigo la senda de crecimiento siguiendo las flechas y que lleva a C. En C estoy en estado estacionario en donde estoy en $\Delta\dot{k}^E = 0$ y $\Delta c^E = 0$. Aquí el ajuste se da a lo largo de muchos muchos periodos. Aquí no habría crecimiento, sólo habría desplazamiento entre la proporción del ingreso que es consumida y la que es ahorrada.



$\beta \rightarrow$ paciencia
$\rho \rightarrow$ impaciencia

VII

Modelo de Generaciones Traslapadas

La debilidad del modelo Ramsey-Cass-Koopmans es el supuesto del altruismo. Por eso vamos a eliminar ese supuesto.
En este modelo se cambian los supuestos de los hogares, los demás se mantienen.
Supuestos:

- $g = 0$
- $\delta = 0$
- Hay agentes heterogéneos y egoístas
- Las familias viven infinitamente
- Función de producción neoclásica
- Todas las empresas son representativas
- El mercado es perfectamente competitivo

Se cambian los supuestos relacionados a los hogares y el consumo de los hogares. En el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans se tienen familias que van creciendo de tamano y se preocupa de las futuras generaciones. Aquí las familias no crecen, pero sí crece el número de familias, y como hay nuevas familias, no me interesan las otras familias y no hay altruismo. Aquí los agentes son heterogéneos y hay que construir un agente representativo. En los anteriores modelos, los agentes eran homogéneos, y no importaba a quién tomara, eran todos iguales.
Entonces, para construir ese agente representativo, se va a hacer un promedio ponderado.
Aquí lo que interesa es analizar el consumo interpoblacional. En el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, cuando cambiaba n, el resultado es que se mantiene en el mismo nivel de capital inicial y solo cambia la decisión de ahorro y consumo, pero esto no coincide con el modelo original de Solow. Ahora queremos ver qué pasa con los shocks sobre n, al haber quitado el supuesto del altruismo.
Lo que sí hay son mercados, y las familias son duenas de los factores de la producción. Lo que pasa es que todas las personas deben maximizar una función de utilidad, y v serán las distintas generaciones que se tengan. Hay una función de utilidad instantánea y se suman en el tiempo.

$$U_t^v = \sum_{s=t}^{+\infty} \beta^{s-t} u(c_s^v) \quad s.a \quad k_{t+1}^v - k_t^v = rk_t^v + w_t - c_t^v$$

$$c_t^v = rk_t^v + w_t - (k_{t+1}^v - k_t^v)$$

$$\max_{k_{t+1}^v} U_t^v = \sum_{s=t}^{+\infty} \beta^{s-t} u(rk_t^v + w_t - (k_{t+1}^v - k_t^v))$$

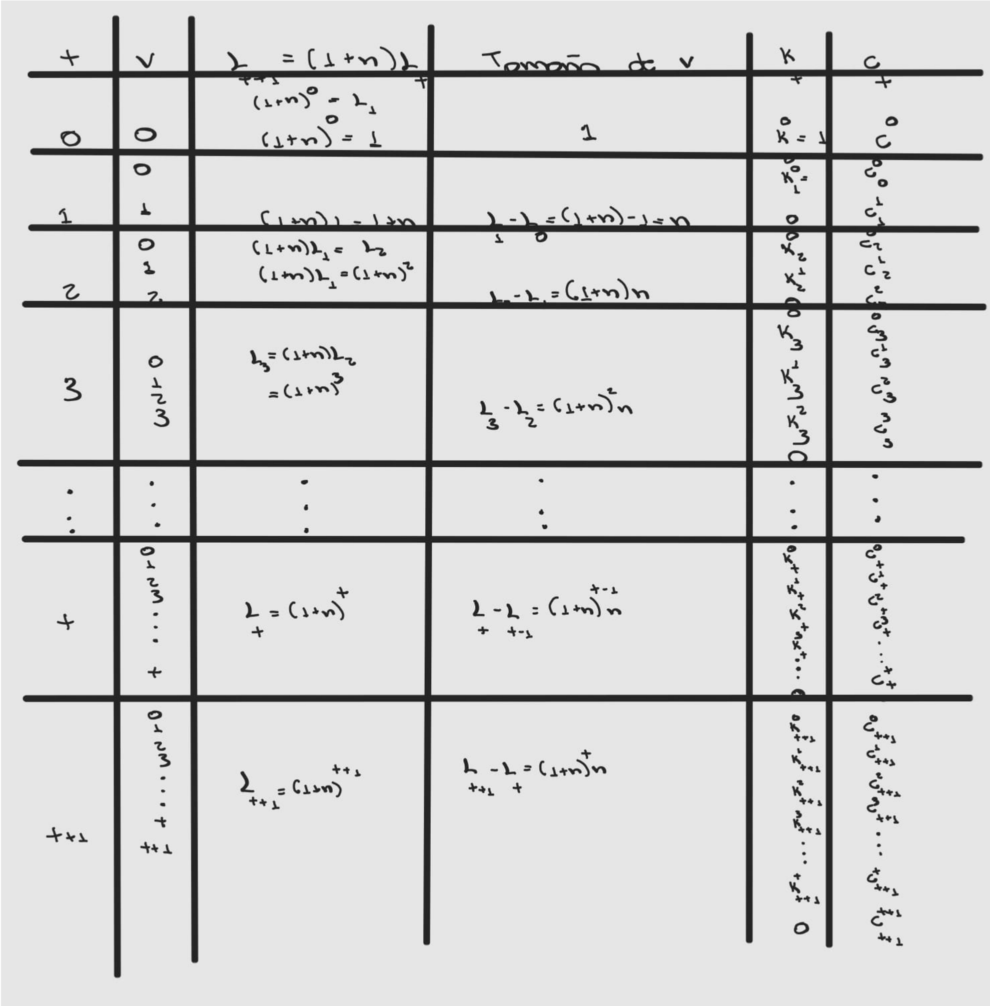
$$\frac{-\delta u(c_t^v)}{\delta c_t^v} + \frac{\beta \delta u(c_{t+1}^v)}{\delta u(c_{t+1}^v)}(1+r_t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{u'(c_{t+1}^v)}{u'(c_t^v)} = \frac{1}{\beta(1+r_t)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{u'(c_{t+1}^v)}{u'(c_t^v)} = \dfrac{1}{\beta(1+r_t)} \\ k_{t+1}^v - k_t^v = r_t k_t^v + w_t - c_t^v \to \text{sustituyendo lo de abajo:} (1+n)k_{t+1} - k_t = r_t k_t + w_t - c_t \end{cases}$$

Se usa el tamaño de las generaciones como ponderador para sacar el promedio ponderado del capital:

$$k_t = \frac{k_t^0 + nk_t^1 + n(1+n)k_t^2 + n(1+n)^2 k_t^3 + \cdots + n(1+n)^{t-2} k_t^{t-1} + n(1+n)^{t-1} k_t^t}{(1+n)^t}$$



$$(1+n)k_{t+1} = \frac{k_{t+1}^0 + nk_{t+1}^1 + n(1+n)k_{t+1}^2 + n(1+n)^2k_{t+1}^3 + \cdots + n(1+n)^{t+1}k_{t+1}^t + n(1+n)^t k_{t+1}^{t+1}}{(1+n)^{t+\cancel{1}}}$$

$$c_t = \frac{c_t^0 + nc_t^1 + n(1+n)c_t^2 + \cdots + n(1+n)^{t-1}c_t^t}{(1+n)^t}$$

$$c_{t+1} = \frac{c_{t+1}^0 + nc_{t+1}^1 + n(1+n)c_{t+1}^2 + \cdots + n(1+n)^{t-1}c_{t+1}^t + n(1+n)^t c_{t+1}^{t+1}}{(1+n)^{t+1}}$$

$$(1+n)k_{t+1} - k_t = r_t k_t + w_t - c_t$$
$$\Leftrightarrow (1+n)k_{t+1} - k_t - nk_t = r_t k_t + w_t - c_t - nk_t$$
$$\Leftrightarrow k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}[r_t k_t + w_t - c_t - nk_t]$$
$$\Leftrightarrow k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}[f(k_{t+1}) + w_t - c_t - nk_t] \rightarrow \text{esta incluye las ponderaciones}$$

$$(1+n)\left[c_{t+1} - \frac{n}{n+1}c_{t+1}^{t+1}\right] =$$
$$(1+n)\left[\frac{c_{t+1}^0 + nc_{t+1}^1 + n(1+n)c_{t+1}^2 + \cdots + n(1+n)^{t-1}c_{t+1}^t + n(1+n)^t c_{t+1}^{t+1}}{(1+n)^{t+1}} - \frac{n}{n+1}c_{t+1}^{t+1}\right]$$

$$
\begin{aligned}
(1+n)\left[c_{t+1}-\frac{n}{n+1}c_{t+1}^{t+1}\right] &= \beta(1+r_{t+1})c_t \\
c_{t+1}+nc_{t+1}-nc_{t+1}^{t+1} &= \beta(1+r_{t+1})c_t \\
c_{t+1} &= \beta(1+r_{t+1})c_t-n\left[c_{t+1}-c_{t+1}^{t+1}\right] \\
Supuesto*: c_{t+1}-c_{t+1}^{t+1} &= (1-\beta)(1+r_{t+1})k_{t+1} \\
c_{t+1} &= \beta(1+r_{t+1})c_t-n(1-\beta)(1+r_{t+1})k_{t+1} \\
c_{t+1}-c_t &= \beta(1+r_{t+1})c_t-n(1-\beta)(1+r_{t+1})c_t-n(1-\beta)(1+r_{t+1})k_{t+1}-c_t \\
c_{t+1}-c_t &= (1+f'(k_{t+1})\left[\beta c_t-n(1-\beta)k_{t+1}\right]-c_t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{t+1}-c_{t+1}^{t+1} &= (1-\beta)(1+r_{t+1})k_{t+1} \\
c_{t+1} &= (1-\beta)\left[(1+r_{t+1})k_{t+1}+w_t\right] \\
c_{t+1}^{t+1} &= (1-\beta)w_t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{t+1}-c_t = (1+f'(k_{t+1})\left[\beta c_t-n(1-\beta)k_{t+1}\right]-c_t &= \left[\beta(1+f'(k_t)-1\right]c_t-n(1-\beta)(1+f'(k_{t+1}))k_{t+1} \\
k_{t+1}-k_t &= \frac{1}{1+n}\left[f(k_{t+1}-c_t-nk_t\right]
\end{aligned}
$$

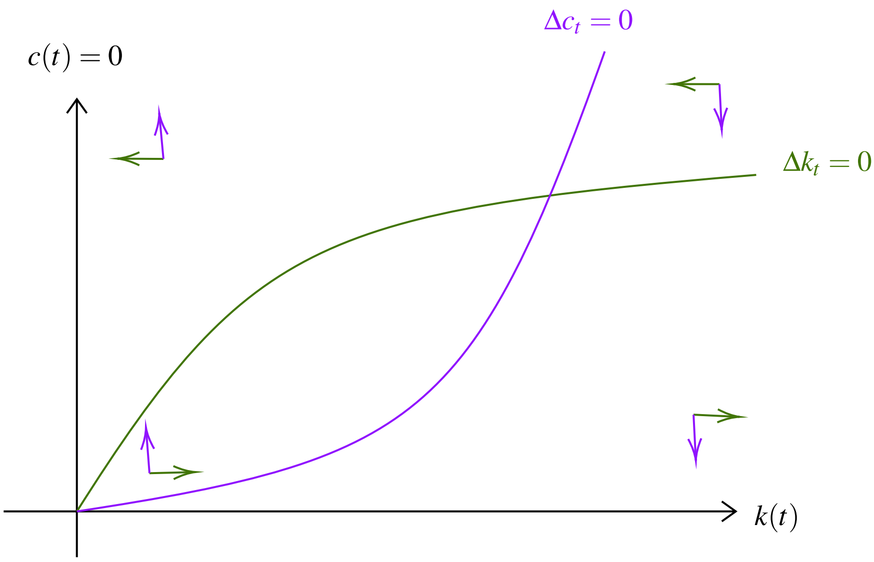
12. Diagrama de fase

$$c_{t+1} - c_t = (1 + f'(k_{t+1}) \left[\beta c_t - n(1-\beta)k_{t+1}\right] - c_t$$
$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}\left[f(k_{t+1} - c_t - nk_t\right]$$

$$\begin{aligned}
\Delta c_t = 0 \Rightarrow c_t &= (1+f'(k_{t+1})\beta c_t - (1+f'(k_{t+1})n(1-\beta)k_{t+1} \\
\Leftrightarrow c_t - (1+f'(k_{t+1})\beta c_t &= -(1+f'(k_{t+1})n(1-\beta)k_{t+1} \\
\Leftrightarrow -c_t\left[(1+f'(k_{t+1}))\beta - 1\right] &= -(1+f'(k_{t+1})n(1-\beta)k_{t+1} \\
\Leftrightarrow c_t &= \frac{(1+f'(k_{t+1})n(1-\beta)k_{t+1}}{(1+f'(k_{t+1}))\beta - 1}
\end{aligned}$$

$$\Delta k_t = 0 : \Rightarrow c_t = f(k_t) - nk_t$$

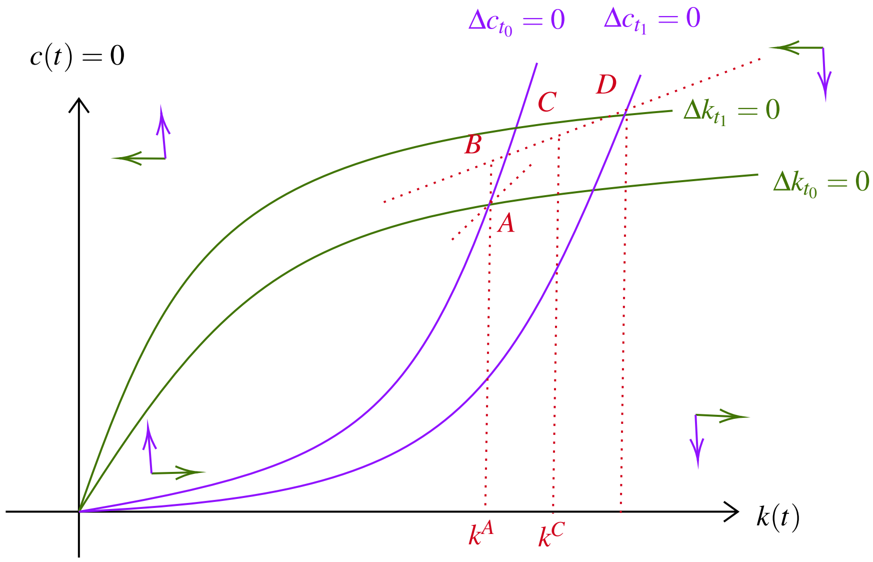
13. Shocks:



- $\downarrow n$

$$\Delta k_t = 0 : \Rightarrow \uparrow c_t = f(k_t) - \downarrow n k_t$$

$$\Delta c_t = 0 \Rightarrow \Leftrightarrow \downarrow c_t = \frac{(1+f'(k_{t+1})\downarrow n(1-\beta)k_{t+1}}{(1+f'(k_{t+1}))\beta - 1}$$



Veo las curvas de cambio igual a cero. La curva morada se contrae. En este caso, a cualquier nivel de preimagen, la imagen es menor $\rightarrow$ **a cualquier nivel de capital, el consumo es menor**. En la curva verde más bien la curva se está expandiendo $\rightarrow$ **para cualquier nivel de capital, el consumo es mayor.** Inicialmente estaba en A, y por ahí pasaba una senda; estaba en un nivel de estado estacionario inicial. Por el estado estacionario final pasará otra senda de expansión. Al mismo nivel de capital inicial, me coloco sobre la nueva senda de expansión, en B. Lo que se tiene es un agente representativo, así que se tiene lo que en promedio está pasando. Además, como se maximiza utilidad entonces el ahorro es endógeno y se puede ajustar la decisión de ahorro.
Al mismo nivel de capital, se tiene el mismo ingreso; disminuyen los costos de reposición, entonces se ocupa menos ahorro para afrontar esos costos de reposición, lo cual permite aumentar el consumo, lo cual se observa del punto A al punto B. El shock hace que cambie el ritmo de crecimiento poblacional, por lo que el nivel de capital en A hace que los costos de reposición disminuyan, y se crea una brecha positiva entre el ahorro y los costos de reposición, por lo que habría un incentivo a invertir. Hay inversión positiva. A pesar del aumento en el consumo, el ahorro seguiría siendo mayor a los costos de reposición y se puede invertir. Esto hace que al período siguiente aumente el nivel de capital instalado, lo cual hace que aumente el ingreso, con lo cual aumentan el consumo y el ahorro, pero también aumentaron los costos de reposición. En B aumentó el consumo y hubo inversión positiva. Y así sucesivamente me voy moviendo a lo largo de la senda.
La lógica del ajuste no cambia mucho respecto del de Solow, lo único que ha variado es que el ahorro es endógeno ahora, y la gente ahorra y consumo en función de maximizar su utilidad y ahí se tienen los microfundamentos. Las ecuaciones de cambio salen de maximizar la utilidad. Donde se determina el consumo dado el ingreso, inmediatamente se está determinando el ahorro también. El ahorro es endógeno porque es una decisión cuando maximizo mi utilidad, mientras que en Solow me lo imponían. Esa es la crítica más importante al modelo de Solow.

VIII

Modelo endógeno: Acumulación de capital

En los modelos que hemos venido viendo la debilidad es que la tecnología es exógena. El problema de esto es el residuo de Solow: una parte de crecimiento es por razón del crecimiento tecnológico. Los modelos de crecimiento endógeno tratan de plantear un modelo donde el crecimiento se potencia por cosas internas del modelo. Vamos a ver dos modelos de Solow: el de acumulación de capital y el de innovación y desarrollo.
En este primer modelo queremos explicar cómo es posible que una economía pueda crecer indefinidamente, es decir, no vamos a tener estados estacionarios. Cómo crece una economía en el tiempo? Ya no buscamos un estado estacionario sino una tasa de crecimiento constante a lo largo del tiempo. Este modelo se conoce como AK.
Se incorpora el aprendizaje y las externalidades dentro del proceso productivo. En el modelo de innovación se introduce un mercado de innovación tecnológica y cómo se define g.
En el modelo de acumulación de capital lo que se tiene es la idea de la industrialización, cómo profundización del capital explica el crecimiento sostenido de las economías en el tiempo. Se va a obviar la mano de obra y se supone que se produce sólo a partir del capital. Se puede explicar que se tiene crecimiento ilimitado en el tiempo aún en ausencia de crecimiento tecnológico solo por profundización de capital. Ahora se van a empezar a introducir imperfecciones en el mercado: las externalidades. Ignorar el crecimiento tecnológico es una debilidad.
No me interesa la población: sólo la profundización del capital puede ser una fuente del crecimiento; dejamos de lado a la gente. El agente económico vive infinitamente y preferencias intertemporales. El crecimiento no viene por crecimiento de la población sino del capital.

$$L_{t+1} = L_t = L$$

Se plantea una función intertemporal CES. Sujeto a la restricción de que el cambio en el capital (la inversión) en una economía cerrada tiene que estar financiada por el ingreso, y el ingreso es todo multiplicado por el capital, menos el consumo. Se maximiza con respecto al c_t y k_{t+1}.

$$\max_{c_t,k_{t+1}} U_t = \max_{c_t,k_{t+1}} \sum_{s=t}^{+\infty} \beta^{s-t} \frac{c_s^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} \quad \sigma > 0 \qquad s.a \quad k_{t+1} - k_t = r_t k_t - c_t$$

$$\Leftrightarrow c_t = r_t k_t - (k_{t+1} - k_t)$$

$$\Leftrightarrow \max_{k_{t+1}} U_t = \max_{k_{t+1}} \sum_{s=t}^{+\infty} \beta^{s-t} \frac{[r_s k_s - (k_{s+1} - k_s)]^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

Al sustituir el consumo, queda un problema con respecto a una única variable explicativa.
La elasticidad de sustitución intertemporal es constante. Entonces el ritmo al cual se cambia el consumo en el tiempo, es constante. Eso significa que se va a tener tasas de crecimiento del consumo, constantes en el tiempo.
Se deriva con respecto a k_{t+1}.
Condición de primer orden:

$$\frac{-(1-\frac{1}{\sigma})c_t^{\frac{-1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} + \frac{\beta(1-\frac{1}{\sigma})c_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}(1+r_{t+1})}{(1-\frac{1}{\sigma})} = 0 \Leftrightarrow \beta(1+r_{t+1})\left(\frac{1}{c_{t+1}}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \left(\frac{1}{c_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$\Leftrightarrow \beta^{\sigma}(1+r_{t+1})^{\sigma} = \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+r_{t+1} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$y_t^j = A{K_t^j}^{\alpha} K_t^{1-\alpha}$$

El conocimiento es un bien público: no excluyente ni rival en el consumo. Las empresas ganan algo de estar con las otras empresas. El aprendizaje está asociado al conocimiento.

El capital de hoy está dado, lo que se puede maximizar es el capital de mañana. Las empresas maximizan sus utilidades.

$$\max_{K^j_{t+1}} \pi^j = \max_{K^j_{t+1}} \left[A {K^j_t}^{\alpha} K_t^{1-\alpha} - r_{t+1} K^j_{t+1} \right]$$

Condición de primer orden:

$$\begin{aligned} \alpha A {K^j_{t+1}}^{\alpha-1} K_{t+1}^{1-\alpha} &= r_{t+1} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha A}{r_{t+1}} K_{t+1}^{1-\alpha} &= {K^j_{t+1}}^{1-\alpha} \\ \Leftrightarrow K^j_{t+1} &= \left(\frac{\alpha A}{r_{t+1}} K_{t+1}^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow K^j_{t+1} = \left(\frac{\alpha A}{r_{t+1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} K_{t+1}}$$

$$\begin{aligned} K^1_{t+1} &= \left(\frac{\alpha A}{r_{t+1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} K_{t+1} \\ K^2_{t+1} &= \left(\frac{\alpha A}{r_{t+1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} K_{t+1} \\ K^3_{t+1} &= \left(\frac{\alpha A}{r_{t+1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} K_{t+1} \\ &\vdots \\ \underline{K^j_{t+1}} &\underline{= \left(\frac{\alpha A}{r_{t+1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} K_{t+1}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} K^j_{t+1} = K_{t+1}$$

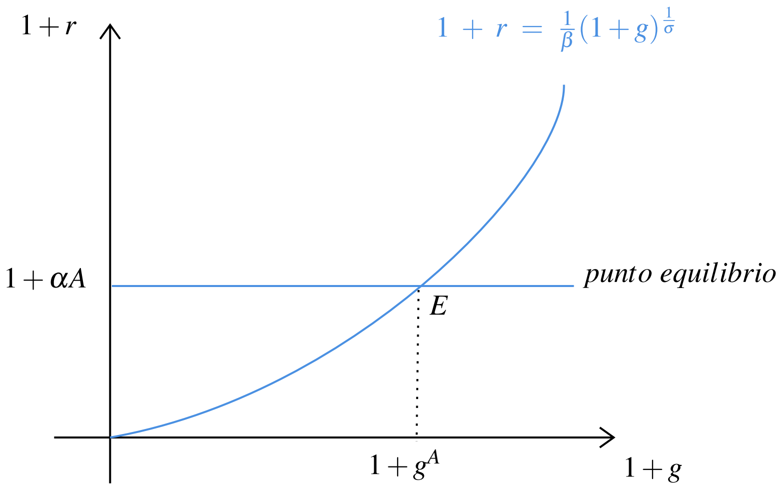
$$\Rightarrow \cancel{K_{t+1}} = \left(\frac{\alpha A}{r_{t+1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cancel{K_{t+1}} \Rightarrow 1 = \left(\frac{\alpha A}{r_{t+1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$1^{1-\alpha} = \left(\frac{\alpha A}{r_{t+1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha} \cdot 1-\alpha} \Rightarrow 1 = \left(\frac{\alpha A}{r_{t+1}} \right) \Rightarrow \boxed{\mathrm{r}_{t+1} = \alpha A}$$

En equilibrio:

$$\begin{aligned} 1 + \alpha A &= \frac{1}{\beta} \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\ \Leftrightarrow 1 + \alpha A &= \frac{1}{\beta} (1 + \underbrace{g}_{\substack{tasa de \\ \text{crecimiento} \\ \text{del consumo}}})^{\frac{1}{\sigma}} \end{aligned}$$

*Sea $g = g_y = g_c$.
g sería la tasa de crecimiento del consumo que es constante, no es la tasa de crecimiento de la tecnología.



Ya no hay un estado estacionario. Hay un punto de equilibrio donde g es constante en el tiempo. Se tiene una economía que está creciendo a un ritmo constante a lo largo del tiempo. Esto deriva del proceso de optimización realizado. Qué pasaría si yo tuviera un planificador benevolente? → entonces esa función de producción sería:

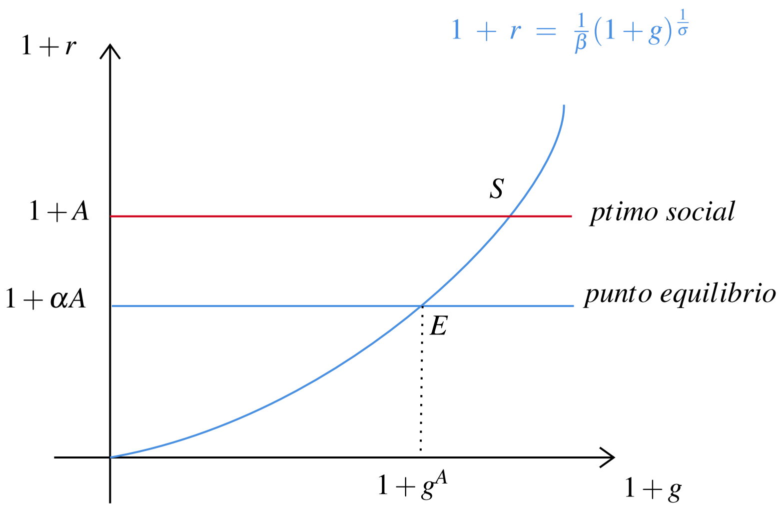
$$y_t^i = A(K_{t+1})^\alpha K_{t+1}^{1-\alpha}$$

Esta persona sabría que $K_{t+1}^j = K_{t+1}$. El problema de maximización sería:

$$\max_{K_{t+1}} \pi = \max_{K_{t+1}} A(K_{t+1}) - r_{t+1}K_{t+1}$$

Y entonces la condición de primer orden sería:

$$r_{t+1} = A$$



Entonces, el nivel óptimo sería mayor al nivel de equilibrio. Una manera de subsanar esa diferencia provocada por la externalidad, sería por medio de un subsidio por ejemplo, y se replantearía el problema de la empresa tomando en cuenta el subsidio, o si fuera una externalidad negativa sería un impuesto. En el óptimo social, la tasa de crecimiento es mayor.
La idea del crecimiento endóngeno es que se pueda crecer indefinidamente en el tiempo. La fuente es la externalidad porque ya no se tienen las productividades marginales decrecientes, las cuales son el freno en el modelo de Solow, las cuales hacen que se vaya frenando.

A partir de esa condición, cuál sería la condición que se necesita para tener una tasa de crecimiento positiva en el tiempo? $\rightarrow 1+g>1 \Leftrightarrow g>0 \wedge \beta>\frac{1}{1+\alpha A}$: si eso ocurre entonces lo que va a pasar es que se va a tener un crecimiento positivo a lo largo del tiempo, se va a crecer indefinidamente. Si fuera menor que uno esa expresión, se empezaría a decaer y decaer. Solo se podría tener un estado estacionario si $\beta=\frac{1}{1+\alpha A}$. Se puede tener crecimiento indefinido en el tiempo aún sin crecimiento poblacional ni crecimiento tecnológico; la fuente del crecimiento estaría asociado a las externalidades positivas asociadas al conocimiento. Aquí, como hay externalidades positivas, ya no hay mercados perfectos y habría espacio para políticas públicas. Habría que hacer política pública que permita alcanzar ese punto óptimo.
Para llegar a una tasa más alta tendría que tener un shock tecnológico, un aumento en A o un aumento en β que mueva la curva.
¿Qué va a hacer Romer? $\rightarrow$ ¿Qué pasa cuando no sólo tengo externalidades positivas asociadas al conocimiento? Entonces ahora se va a tener un mercado de innovaciones tecnológicas, un modelo donde todo va a ser endógeno.

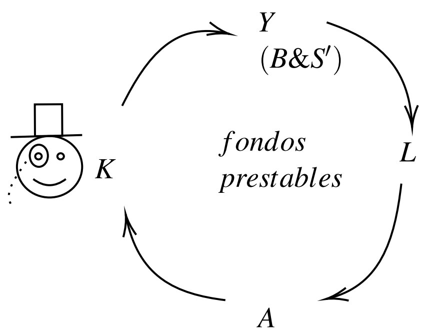
IX

Modelo endógeno: Innovación y desarrollo

Se van a tener 5 mercados, y según Walras habría que equilibrar 4. Vamos a ir equilibrando cada mercdo *ceteris paribus*: cuando voy viendo un mercado, todos los demás están constantes, porque si no, no se puede. Entonces se va a tener 5 mercados. Los hogares son los dueños del capital.

1. Mercado de bienes y servicios finales. Nivel de producto Y que es un agregado. Estos bienes y servicios finales son demandados por los hogares y los ofrecen las empresas.
2. Mercado laboral. La mano de obra es ofrecida por los hogares y las empresas demandan para producir.
3. Mercado de innovación y desarrollo. La innovación la producen la gente. La innovación la produce la gente. Para poder innovar se ocupa contratar más gente. En el mercado laboral se contrata gente que va a ir a trabajar al mercado de innovación y desarrollo generando patentes, conocimiento, etc. Para producir innovación y desarrollo se necesita gente y conocimiento.
4. Mercado de capital. Supuesto: toda la innovación está orientada a generar capitales productivos nuevos. Es un mercado particular: la innovación tiene un problema $\rightarrow$ es un mercado imperfecto. Tiene una externalidad positiva por las externalidades asociadas al conocimiento. Entonces se sabe que se va a producir en un nivel subóptimo si se deja al mercado. Entonces se generan patentes, que sería la segunda imperfección.
   - Externalidades positivas
   - Patentes

   Se tendría entonces un monopolio, porque al dar patentes para corregir la externalidad positiva, y esto lo que hace es crear un monopolio legal. Entonces con la patente sola esa entidad puede producir ese tipo de capital.
5. Mercado de fondos prestables. Une todos los mercados restantes. Las familias demandan bienes y servicios finales, pero se necesita mano de obra y capital (de los cuales las familias son dueñas.



Entonces el monopolio hace una invención que es un capital nuevo, se va a un mercado de subastas de patentes, el cual es perfecto, y esa persona que gana la subasta se convierte en un monopolista y solo esa empresa puede producir ese tipo de capital. Ese monopolista ofrece el capital a las empresas productoras de bienes y servicios finales, quien, en conjunto con la mano de obra, producen los bienes y servicios finales que demandan los hogares.
Entonces en el mercado de capital, toda la oferta es de empresas monopolísticas. Fondos prestables el mercado que conecta todo, el que permite circular todo. Entonces se van a equilibrar cuatro mercados y el quinto es el que ajusta por detrás, el que conecta todo.
Vamos a ir planteando los supuestos para cada uno de los mercados pero se va a empezar ajustando otro mercado.
Función de producción de bienes y servicios finales: función de producción neoclásica.

$$Y_t = L_t^{1-\alpha} \sum_{j+1}^{A_t} K_{j,t}^{\alpha}$$

j se refiere a los distintos tipos de capital: la rueda, el fuego, la polea, motor de plasma, etc.
El mercado laboral tiene pleno empleo (todo mundo está trabajando), es perfectamente competitivo.

La clase pasada se introdujo el modelo de innovación y desarrollo. Introdujimos la función de producción. Con respecto al trabajo se tienen productividades marginales positivas y decrecientes. Vamos a ver con respecto al capital.

$$Y_t = L_{y,t}^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{n} K_{j,t}^{\alpha}$$
$$Y_K = \alpha K_{j,t}^{\alpha-1} L_{y,t}^{1-\alpha} > 0$$
$$Y_{K,K} = -\alpha(1-\alpha) K_{j,t}^{\alpha-2} L_{y,t}^{1-\alpha} < 0$$
$$\boxed{\mathrm{Y}_K\big|_{K_j=0} = \alpha(\frac{L_{y,t}}{\underbrace{K_{j,t}}_{0}})^{1-\alpha} = +\infty}$$

Este va a ser el incentivo para contratar gente que innove y así tener capitales nuevos. Cuando no se tiene un capital y se crea uno nuevo, la productividad marginal de ese capital va a tender hacia infinito, entonces las empresas que usan esos capitales para producir, van a tener un incentivo a contratarlo porque su productividad le aporta a la producción.
Si al productor le ofrecen un insumo con alta productividad, lo va a contratar, pues le aportaría, relativamente, mucho a su producción.
Ahora pasamos al sector de innovación y desarrollo. Se tiene una función de producción de la innovación; innovación es el cambio en la tecnología. El cambio en el stock tecnológico está dado por:

$$\underbrace{\underbrace{A_{t+1} - A_t}_{\substack{\text{innovación}\\ \text{tecnológica}}} = \overbrace{\underset{\substack{\text{factor de}\\ \text{productividad}}}{\theta}} \quad A_t L_{A,t}}_{\text{función de producción de empresas que innovan}}$$

No ocupa capital. El conocimiento es libre; se ocupan personas pero la tecnología no es libre. Ahora voy a estudiar la productividad marginal del trabajo o mano de obra.

$$\frac{\delta(A_{t+1} - A_t)}{\delta L_{A,t}} = \theta A_t$$
$$\frac{\delta^2(A_{t+1} - A_t)}{\delta L_{A,t}^2} = 0 \Rightarrow \text{productividades marginales constantes}$$

La productividad marginal es constante. Ya no se tiene una función de producción neoclásica.
Como la tecnología está creciendo en el tiempo, porque la innovación es el cambio tecnológico, para mantener un ritmo de innovación constante habría que disminuir el lado derecho de la ecuación, porque conforme más tecnología se tiene, más se abarata la innovación.
Se genera la innovación, se patenta y se subasta. Los productores de bienes intermedios (los capitalistas) van y compran la patente y con la patente, pueden empezar a producir, pueden empezar a vender el capital.
Por simplicidad se va a suponer que la depreciación va a ser igual a 1, entonces lo que se usa para producir se gasta.
Esto es para que los modelos no sean dinámicos, entonces cada vez habría que volver a generar.

- $\delta = 1$

Vamos a empezar a resolver el problema para cada uno de los mercados, 5 mercados pero resuelvo solo para 4. Vamos a empezar por el monopolio, el de bienes intermedios, ya que no es competitivo. Se compra la patente y es un costo hundido, no entra en el problema de optimización. Se produce el capital hoy y se vende mañana. Así, mis ingresos serían los precios de cada capital. Como se

produce hoy y se vende mañana, se tiene que traer a valor presente.
Problema del monopolista:

$$\max_{K_{j,t}} \pi^K = \max_{K_{j,t}} \left[\frac{\overbrace{P_j(K_{j,t})}^{?} K_{j,t}}{1+r} - K_{j,t} \right]$$

Dado que es un monopolio, no es tomador de precios, tiene que incorporar en los ingresos el precio que depende de la cantidad que ofrezca, entonces hay que obtener la demanda a la que se enfrenta al monopolio, para así incorporarla en sus ingresos. Entonces hay que ir a la empresa de bienes finales. *Hay que resolver el problema de la empresa de bienes finales; es la que demanda el capital. Así, resolviendo su problema la puedo evaluar en el monopolio. **Es decir, queremos estimar la función de demanda por capital que tiene la empresa de bienes y servicios finales.** El problema de la empresa de bienes finales es el siguiente:

$$\max_{K_j, L_{y,t}} \pi^y = \max_{K_j, L_{y,t}} L_{y,t}^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{A_t} K_{j,t}^{\alpha} - w_t L_{y,t} - \sum_{j=1}^{A_t} P_{j,t} K_{j,t}$$

$$\frac{\delta \pi^y}{\delta K_{j,t}} = \alpha \left(\frac{L_{y,t}}{K_{j,t}} \right)^{1-\alpha} - P_{j,t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha L_{y,t}^{1-\alpha} K_{j,t}^{\alpha-1} = P_{j,t}}$$

$$\frac{\delta \pi^y}{\delta K_{j,t}} = \alpha \left(\frac{L_{y,t}}{K_{j,t}} \right)^{1-\alpha} = P_{j,t}$$

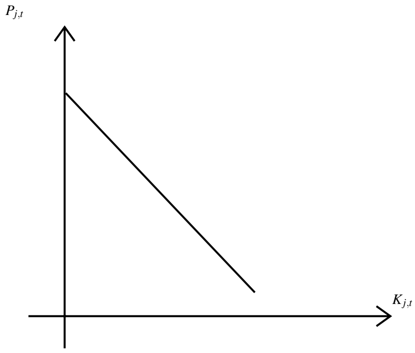
$$\frac{\partial P_{j,t}}{\partial K_{j,t}} = -\alpha(1-\alpha) L_{y,t}^{1-\alpha} K_{j,t}^{\alpha-2}$$

$$\frac{\partial P_{j,t}}{\partial K_{j,t}} = \frac{-\alpha(1-\alpha) L_{y,t}^{1-\alpha} K_{j,t}^{\alpha-2} K_{j,t}}{\alpha L_{y,t}^{1-\alpha} K_{j,t}^{\alpha-1}}$$

$$\frac{\partial P_{j,t}}{\partial K_{j,t}} \frac{K_{j,t}}{P_{j,t}} = -(1-\alpha)$$

$$\frac{\partial P_{j,t}}{\partial K_{j,t}} \frac{P_{j,t}}{K_{j,t}} = \frac{-1}{(1-\alpha)}$$

El signo negativo quiere decir que la demanda tiene precio negativo; se comporta normalmente. Si el precio aumenta, la demanda disminuye. Es una elasticidad para una demanda que se comporta normalmente. Es una relación inversa entre la cantidad demandada y el precio.



Otra vez, volviendo al problema del monopolio:

$$\max_{K_{j,t}} \pi^K = \max_{K_{j,t}} \left[\frac{P_j(K_{j,t})K_{j,t}}{1+r} - K_{j,t} \right]$$

$$\Leftrightarrow \max_{K_{j,t}} \pi^K = \max_{K_{j,t}} \frac{\alpha L_{y,t}^{1-\alpha} K_{j,t}^{\alpha-1} K_{j,t}}{1+r} - K_{j,t}$$

Condición de primer orden:

$$\frac{\alpha^2 L_{y,t}^{1-\alpha}}{1+r} K_{j,t}^{\alpha-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 L_{y,t}^{1-\alpha}}{(1+r)K_{j,t}^{1-\alpha}} = 1$$

$$\boxed{\mathrm{K}_{j,t} = \left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{y,t}}$$

Ese $K_{j,t}$ luego se introduce en $P_{j,t}$ del problema de la empresa de bienes y servicios finales porque se quiere resolver para el precio. El precio resulta de la interacción de la oferta y la demanda en el mercado. Dada esa demanda de capital, el monopolio decide una oferta particular que deja un único precio de equilibrio.
Así:

$$P_{j,t} = \alpha L_{y,t}^{1-\alpha} \left[\left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{y,t}^{1-\alpha} \right]^{-(1-\alpha)}$$

$$P_{j,t} = \alpha L_{y,t}^{1-\alpha-1+\alpha} \frac{1+r}{\alpha^2}$$

$$P_{j,t} = \frac{1+r}{\alpha}$$

$*\frac{1}{\alpha}$ es un *mark up*. Dado que es mayor que $1+r$ entonces es un precio mayor dado que no estamos en un mercado competitivo. Por ende, las ganancias de ese monopolio son positivas y no son cero. Ahora, podemos volver a retomar los beneficios del monopolio.

$$\pi^K = \left[\frac{\alpha}{1+r} \left(\frac{L_{y,t}}{K_{j,t}}\right)^{1-\alpha} - 1 \right] K_{j,t}$$

$$\pi^K = \left[\frac{\alpha}{1+r} \frac{L_{y,t}}{\left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} L_{y,t}^{1-\alpha}} - 1 \right] \left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{y,t}$$

$$\pi^K = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{y,t} > 0$$

Las utilidades del monopolio son positivas a lo largo del período iguales a ese monto. Es, por ende, rentable producir K_j, y van a ver capitalistas que se van a presentar a la subasta porque

tienen una oportunidad de generar ganancias. Así, renovar es entonces rentable.
Entonces en el mercado de capitales, del monopolio, ya tengo precio, cantidad de equilibrio y las utilidades del monopolio.
Sabiendo el monto de las utilidades del monopolio, ya se puede proceder a averiguar el precio de la patente.

$$K_{j,t} = \left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{y,t}$$

$$P_{j,t} = \frac{1+r}{\alpha}$$

$$\pi^K = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{y,t}$$

Ahora toca seguir al mercado de innovación y desarrollo para ver como se comporta. Es una subasta; un mercado competitivo. ¿Cuál sería el precio de esa patente? Sería la suma traída a valor presente.

$$P_A = \sum_{j=t}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t}\pi^k = \pi^k \sum_{j=t}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t}$$

$$\sum_{j=t}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t} = 1+\frac{1}{1+r}+\left(\frac{1}{1+r}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{1+r}\right)^T$$

$$-r\left(\frac{1}{1+r}\right)^T-(1+r)$$

$$\sum_{j=t}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{s-t} = \lim_{T\to+\infty}\left[\frac{1+r}{r}-\left(\frac{1}{1+r}\right)^T\cdot\frac{1}{r}\right] = \frac{1+r}{r}$$

Ahora nos interesa saber la tasa de crecimiento de la tecnología. Teníamos una función de la innovación. Asumiendo *ceteris paribus*, si estuviese dado, estaríamos obteniendo una tasa de crecimiento constante, es una función de producción con rendimientos marginales constantes. Entonces estamos diciendo que la innovación está aumentando la tecnología a un ritmo constante. A esa tasa de crecimiento le vamos a llamar g. Esa g

$$A_{t+1}-A_t = \theta A_t L_{A,t}$$

$$\frac{A_{t+1}-A_t}{A_t} = \theta L_{A,t} = g$$

g es constante. Ya se tiene el precio, y la cantidad sería la tasa de crecimiento del stock de tecnología, igual que en el modelo de acumulación de capital. Entonces lo interesante cuando se ve el equilibrio, será la tasa bruta de interés y la tasa bruta de crecimiento.
Lo interesante de este modelo es que la tasa de crecimiento de la tecnología, está siendo explicado en este modelo. La tasa de crecimiento de la tecnología está siendo determinada de manera endógena; es el aporte del modelo. Está siendo explicada por el comportamiento de este mercado, el de innovación.
Ahora toca ir al mercado laboral y luego al mercado de bienes finales. Hay una población fija que puede ir a trabajar al mercado de innovación o al mercado de bienes y servicios finales. Las familias son las que ofrecen en el mercado laboral y demandan las empresas de innovación y la de bienes y servicios finales.

$$\overline{L} = L_{A,t}+L_{y,t}$$

Para equilibrar este mercado hay que ver cuánto quiere contratar cada una de estas empresas.

Problema de las empresas productoras de bienes finales (para ver cuánto trabajo demandan) Ya habíamos resuelto
para el capital, entonces vamos a derivar solo con respecto a la mano de obra. Como ya sabemos $K_{j,t}$, y para un
momento dado se tienen hasta A_t por una cantidad fija, digamos $\overline{K}$.

$$\begin{aligned}
\max_{L_{y,y}} \pi^y &= \max_{L_{y,y}} L_{y,t}^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{A_t} K_j^{\alpha} - w_t L_{y,t} - \sum_{j=1}^{A_t} P_j K_{j,t} \\
\Leftrightarrow \max_{L_{y,y}} \pi^y &= \max_{L_{y,y}} L_{y,t}^{1-\alpha} A_t \overline{K}^{\alpha} - w_t L_{y,t} - \sum_{j=1}^{A_t} P_j K_{j,t} \\
&\text{Condición de primer orden:} \\
&(1-\alpha) L_{y,t}^{-\alpha} A_t \overline{K}^{\alpha} - w_{y,t} = 0 \\
&(1-\alpha) L_{y,t}^{-\alpha} A_t \overline{K}^{\alpha} = w_{y,t}
\end{aligned}$$

El valor del producto marginal del trabajo es igual al salario que paguen.

Se busca igualar los salarios de los dos sectores, para que en el mercado laboral haya un solo salario y no se den movimientos de sectores debido a diferencias de precios; estamos buscando la condición de arbitraje en el salario para el mercado laboral.

Me sigue faltando la demanda de trabajo del mercado de patentes. Problema de empresas que producen innova

$$\begin{aligned}
\max_{L_{A,t}} \pi^A &= \max_{L_{A,t}} P_A \theta A_t L_{A,t} - w_{A,t} L_{A,t} \\
&\text{Condición de primer orden:} \\
P_A \theta A_t &= w_{A,t} \\
* \; &\boxed{w_{y,t} = w_{A,t}} \\
\Leftrightarrow (1-\alpha) L_{y,t}^{-\alpha} A_t \left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} L_{y,t}^{\alpha} &= \left(\frac{1+r}{r}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{A,t} \theta A_t \\
\Leftrightarrow 1 &= \left(\frac{1+r}{r}\right)\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} \theta L_{y,t} \\
\Leftrightarrow \frac{r}{\alpha\theta} &= L_{y,t}
\end{aligned}$$

Hay pleno empleo: las personas que no trabajan en un sector trabajan en otro. $L_{A,t} = \overline{L} - L_{y,t}$. Así, el salario será:

$$w = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot A_t$$

$$K_{j,t} = \left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{y,t}$$

$$P_{j,t} = \frac{1+r}{\alpha}$$

$$\pi^K = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{y,t}$$

$$P_A = \left(\frac{1+r}{r}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L_{y,t}$$

$$g = \theta L_{A,t}$$

Queda faltando el mercado de fondos prestables (está en el fondo ajustando) y no se va a equilibrar. Queda pendiente el mercado de bienes y servicios. Estamos buscando algo. En particular, hemos ido sustituyendo cosas. Habíamos encontrado anteriormente g.

$$g = \theta L_{A,t}$$
$$g = \theta\left(\overline{L} - \frac{r}{\alpha\theta}\right) = \theta\overline{L} - \frac{r}{\alpha}$$

Quiero hacer como en el modelo de acumulación de capital: buscar las tasas brutas de interés y crecimiento. Voy a sumar 1 para que quede en términos de tasa bruta de crecimiento. Lo mismo para la tasa bruta de interés.

$$1+g = \theta\overline{L} - \frac{r}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$$
$$1+g = \theta\overline{L} - \frac{(1+r)}{\alpha} + \frac{(1+\alpha)}{\alpha}$$
$$1+r = \alpha\theta\overline{L} - \alpha(1+g) + (1+\alpha)$$
$$\frac{\delta(1+r)}{\delta(1+g)} = -\alpha$$

Ahora la tasa de interés ya no es constante, sino que tiene una relación negativa con el $1+g$. Esto quiere decir que conforme tengo tasas de crecimiento más altas, la tasa de interés bruta (que es el costo del capital) se abarata el capital. Este modelo entonces sugiere que al ser endógena la innovación y ver que esta es la fuente del crecimiento económico, al tener tasas de crecimiento tecnológico más alta, el resultado es que el capital se abarata.
Entonces la condición tecnológica será:

$$1+r = \alpha\theta\overline{L} - \alpha(1+g) + 1 + \alpha \tag{13.1}$$

$$K_{j,t}=\left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}L_{y,t}$$

$$P_{j,t}=\frac{1+r}{\alpha}$$

$$\pi^K=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}L_{y,t}$$

$$P_A=\left(\frac{1+r}{r}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha^2}{1+r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}L_{y,t}$$

$$g=\theta L_{A,t}$$

$$1+r=\alpha\theta\overline{L}-\alpha(1+g)+(1+\alpha)$$

$$1+g=\theta\overline{L}-\frac{(1+r)}{\alpha}+\frac{(1+\alpha)}{\alpha}$$

Finalmente, vamos a terminar con el mercado de bienes y servicios finales para ver cómo se comportan los hogares y así obtener el equilibrio general.

$$U_t=\sum_{s=t}^{+\infty}\beta^{s-t}\frac{c_s^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\sigma}\qquad s.a\quad k_{t+1}-k_t=rk_t+w_t-c_t$$

$$\Leftrightarrow c_t=rk_t+w_t-(k_{t+1}-k_t)$$

$$\max_{k_{t+1}}U_t=\max_{k_{t+1}}\sum_{s=t}^{+\infty}\beta^{s-t}\frac{[rk_t+w_t-(k_{t+1}-k_t)]^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\sigma}$$

Condición de primer orden:

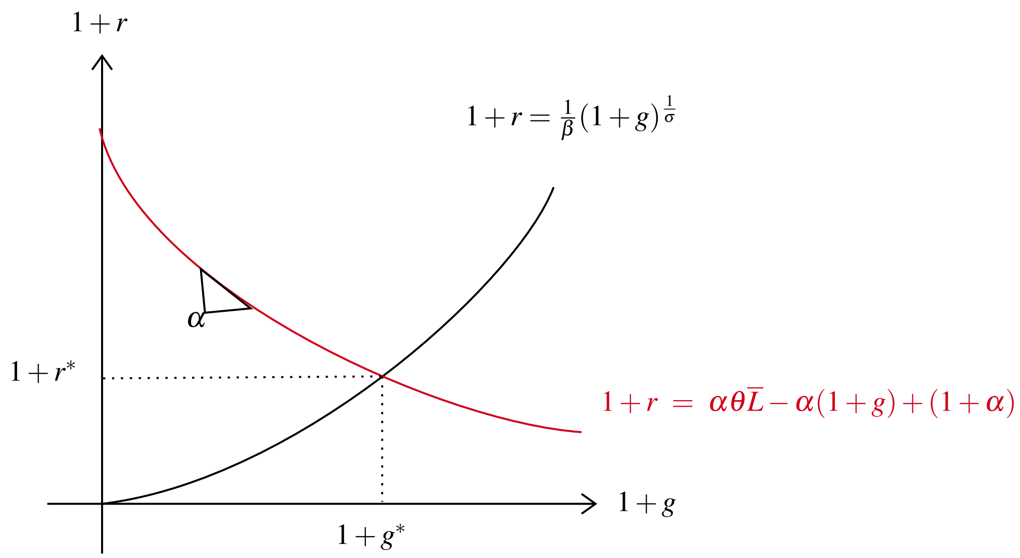
$$-c_t^{-\frac{1}{\sigma}}+\beta c_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}(1+r_{t+1})=0$$

$$\beta^\sigma(1+r_{t+1})^\sigma=\frac{c_{t+1}}{c_t}=1+g$$

$$1+r_{t+1}=\frac{1}{\beta}(1+g)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$\boxed{\text{1+r = 1+ r}}\rightarrow\text{Equilibrio general}$$

$$\Leftrightarrow\boxed{\alpha\theta\overline{L}-\alpha(1+g)+(1+\alpha)=\tfrac{1}{\beta}(1+g)^{\frac{1}{\sigma}}}$$



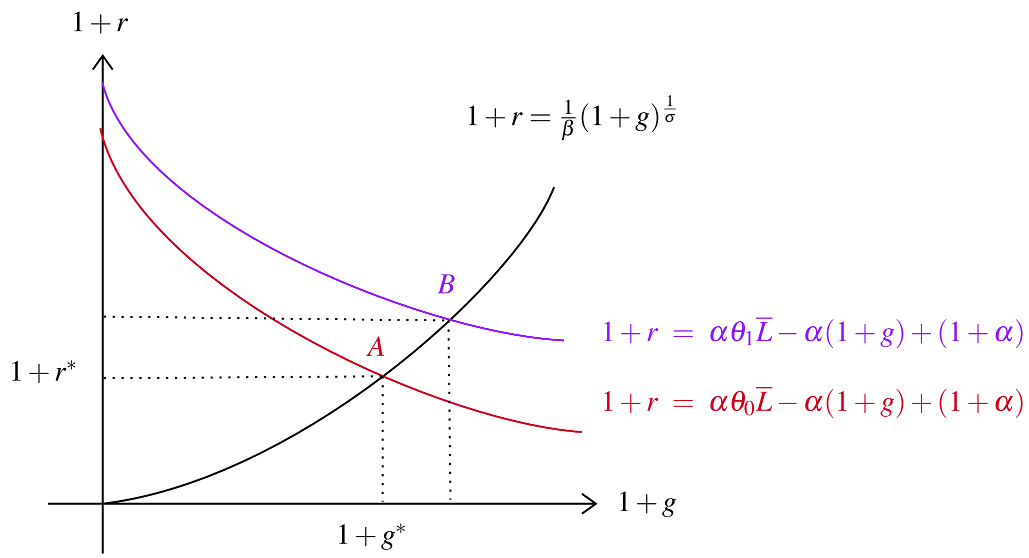
El modelo me demuestra que no hay un estado estacionario, sino más bien que se puede alcanzar una tasa de crecimiento que permita un crecimiento indefinido en el tiempo.
Vamos a hacer el supuesto $@\delta = 1$ para poder encontrar el punto de equilibrio y analizarlo.:

$$g = \frac{\alpha\beta\theta\overline{L}-(1-\beta)}{1+\alpha\beta} \Rightarrow g > 0 \Leftrightarrow \alpha\beta\theta\overline{L} > (1-\beta)$$

$$\theta\overline{L} > \frac{(1-\beta)}{\alpha\beta}$$

$$r = \frac{\alpha(1-\beta+\theta\overline{L})}{1+\alpha\beta}$$

θ es un parámetro de eficiencia. $1-\beta$ es la impaciencia y β es la paciencia y α está asociado a la producitivdad del capital.
Una de las críticas que le hacen al modelo es que como no hay mercados laborales segmentados entonces la tasa de crecimiento va a depender del tamaño total de la población. $\overline{L}$ define g y no $L_{A,t}$.
Según el modelo, países como China o India deberían generar más innovación porque tienen más gente, pero eso no necesariamente es así porque hay mercados laborales segmentados.
Los determinantes del crecimiento serían θ y α.
¿Qué pasaría si tuviera un shock sobre θ? $\uparrow\theta$

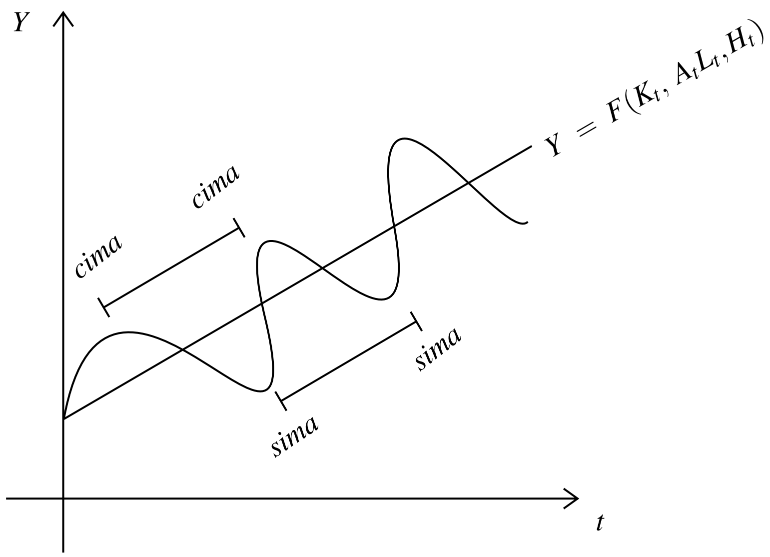


La curva se desplazaría hacia arriba. Lo que estaría pasando es que estaría aumentando g; está aumentando la cantidad de patentes. Está aumentando la productividad de la innovación. Hay incentivos para innovar. Las empresas que producen patentes van a querer producir más y van a contratar más mano de obra, y va aumentar $L_{A,t}$ y para esto van a aumentar el salario para contratar más gente en este sector, pero mientras, $L_{y,t}$ va a disminuir porque la gente se va a cambiar de sector.
Al haber menos gente, va a aumentar la productividad marginal y los salarios se igualarían: hubo un aumento de salarios. Pero lo hubo porque hubo una redistribución de la mano de obra del sector de bienes finales al sector de patentes. Se producen más patentes, aumenta g. Aumentó K; en el sector intermedio hay más bienes de capital, y la cantidad de los K_j que se contratan está disminuyendo, pero se contratan más tipos de capital, la cantidad aumenta. Hay más variedad de los insumos empleados pero menos de cada uno.

X

Ciclos económicos

Examen final queda para el 19 de julio en el aula de las clases.
John Maynard Keynes es un economista inglés. La Gran Depresión fue de 1929-1933. Keynes está en algo llamado el Círculo de Bloomsbury, que son un grupo de intelectuales alrededor de Cambridge, que generan pensamiento en varias áreas; son personas de clase alta, una élite intelectual. Antes ser académico era ser de una clase social más alta.
Durante el curso se han buscado explicaciones para la tendencia del crecimiento. Los ciclos son desviaciones de la tendencia $\rightarrow$ expansiones y contracciones. El problema son las contracciones. La mayor preocupación es el desempleo. Hay varios autores: información, inversión, información e inversión, Kondraties.
El libro de Keynes es de 1936, período entre guerras. Él era una economista, estuvo ligado al gobierno. Tiene un texto que se llama *Tratado sobre la paz*. Él era el ministro de finanzas cuando se firma el Tratado de Versalles: donde se concilia que Alemania debía pagar a los aliados por la guerra. Pero Keynes nunca estuvo de acuerdo y ahí sale del gobierno.
Keynes rompió y creyó que esas sanciones no iban a llevar a la paz. Luego en los 1930's le tocó ir a Estados Unidos y ver la Gran Depresión y las políticas del New Deal que implementó Franklin Delano Roosevelt.
El *New Deal* implicó mucha inversión pública, políticas fiscales, empleando a la gente mediante la construcción de infraestructura pública, etc. Luego, también estuvo con la salida del Patrón Oro. El libro es muy ambicioso: *Teoría General sobre el empleo, la tasa de interés y el dinero*. Hay una ruptura entre lo que él propone y lo que había antes: y los denota como los clásicos. Algunos son anteriores a él y otros inclusos contemporáneos. Él trata de explicar la relación entre esas tres cosas.
La Gran Depresión se propaga a otros países porque ya había más integración de los mercados internacionales. No habían antecedentes de otro evento tan grande como este. Interesa entender el por qué para saber las causas y así diseñar las políticas para mitigar o evitar el fenómeno. Esa es la inspiración para estudiar los ciclos económicos.



A partir de aquí se empieza a hablar de microeconomía y macroeconomía. Este libro es un punto de quiebre a raíz del problema de la Gran Depresión. Las autoridades monetarias miden los ciclos económicos. En Costa Rica es el Banco Central y en Estados Unidos la Reserva Federal.
Recesión es una contracción del producto (estamos hablando de niveles, no tasa de crecimiento) por más de dos trimestres consecutivos, y cuando son tres trimestres ya se considera una depresión. Por efectos psicológicos, las autoridades tienen mucho cuidado para no definir depresiones. Ese es el caso de la Gran Recesión de 2008, que duró más de un año.
Hay variables que se mueven con el producto (procíclicas) como el consumo de bienes duraderos,

el ahorro, la inversión y el empleo. Hay variables que se mueven en dirección contraria al producto (contracíclicas) como el consumo de bienes no duraderos, los cambios en inventarios y el desempleo. También hay variables acícilicas, que no se mueven con el ciclo económico, como el gasto público y las exportaciones netas.

En una esquina está Keynes y en la otra está Friedman. Son visiones totalmente opuestas.

Sobre la sobreinversión, Keynes dice que el término es ambiguo. Entonces Keynes dice que la sobreinversión en sentido estricto hablando sería cuando esa unidad adicional de capital en la que se invierte no es suficiente para cubrir su costo. Lo que no calza es la rentabilidad. Se tiene un proyecto de inversión. El **valor actual neto** sería:

$$VAN = \sum_{t=0}^{n} \left(\frac{1}{1+4} \right)^{t} X_t$$

$$VAN \begin{cases} > 0 & \text{invierte} \\ < 0 & \text{no invierte} \end{cases}$$

Entonces lo que se hace es ver cuál es la tasa de interés que hacer que sea cero, y esa sería la **tasa de interés de retorno**. Así, la TIR indica cuál es el retorno de un proyecto de inversión. Se compara la TIR con la tasa de interés de mercado.

$$0 = \left(\frac{1}{1+4} \right)^{t} X_0$$

$$TIR \begin{cases} > \\ = & r? \\ < \end{cases}$$

Si la TIR es mayor que la tasa de interés, ese proyecto de inversión va a rendir más que cualquier otro proyecto de inversión que hay en el mercado, y entonces invierto.

Cuando hay un colapso de la eficiencia marginal del capital, las expectativas cambian y hay un sobregiro, por eso los espíritus animales serían esa falta de racionalidad de las personas.

El colapso de la eficiencia marginal del capital sería la causa de las fluctuaciones. Hay un aumento de la preferencia por liquidez. Colapsa la inversión, hay una baja en la propensión marginal del consumo, y un aumento en la preferencia por la liquidez y entonces las empresas reaccionan sin contratar tanta gente ni tanto capital. Hay desempleo, baja el ingreso de las personas y sigue bajando la demanda agregada, es una demanda agregada.

La discusión de cómo salir empieza con el objetivo: quiero permanecer en un estado de aumento permanente de bienestar. ¿Cuál es la importancia del pleno empleo? $\rightarrow$ generalmente los gobiernos lo que han hecho es disminuir las tasas de interés. Hay una relación inversa entre la tasa de interés y el precio de los activos porque se refleja la rentabilidad del activo financiero).

Cuando sube la tasa de interés es más caro financiarse. La pregunta es como salir de ahí. Keynes propone bajar las tasas de interés para incentivar la inversión. Otra política es la redistribución de ingresos, porque la gente de ingresos menores tienen una propensión marginal a consumir mayor que la de las personas con ingresos mayores.

Keynes lo que quiere es llegar a pleno empleo; nadie se ha atrevido a eso. Las expectativas juegan con la gente, y entonces lo ordinario es llegar al cuasi auge y que así la caída no sea tan fuerte, pero Keynes quiere ir más allá. Ninguna economía ha logrado escaparse del ciclo pero nadie ha hecho eso que Keynes propuso.

Keynes hizo mucho énfasis en las políticas redistributivas para incentivar la demanda agregada. También (la idea más atrevida) fue lo de las tasas de interés.

Lo que ella quiere con estas lecturas es entender lo que dicen los diferentes autores y dónde se ubican. Aprendir a discernir a los autores y escuelas económicas. La historia no es lineal;

hubo discusiones, conflictos, distintas escuelas de pensamiento.
Friedman y Schwartz tienen una visión totalmente opuesta a Keynes sobre el mismo problema.

Vamos a ver dos modelos de Macroeconomía I.

14. Modelo Ciclo Puro de inventarios

$$Y_t = Y_c + \underbrace{Y_{inv}}_{\substack{\text{producto}\\ \text{para}\\ \text{inventarios}}} + I_K$$

En los modelos Keynesianos se tienen **expectativas adaptativas**: lo que yo espero del futuro son expectativas basadas en la historia, históricas, con base en lo que pasó ayer. Lo que yo pienso que se va a a vender es lo que efectivamente se vendió ayer. Entonces lo que se va a producir para la venta es lo que se vendió el período anterior. Los inventarios van cambiando conforme se vayan descalzando las ventas efectivas con las ventas esperadas.

$$C_{t-1} = bY_{t-1}$$

Ventas efectivas $>$ Compras planeadas $\rightarrow$ Desacumulación de inventarios

$$\Delta inv = C_{t-2} - C_{t-1}$$

$$Y_{inv} = -\Delta inv_{t-1} = C_{t-1} - C_{t-2}$$

El objetivo del modelo es mantener los inventarios. Las empresas tienen una idea de cuánto venden, y tienen un inventario óptimo, así que se quiere mantener el inventario constante. Si hay cambios en el inventario tengo que reponer ese inventario para mantener el nivel que yo quiero.

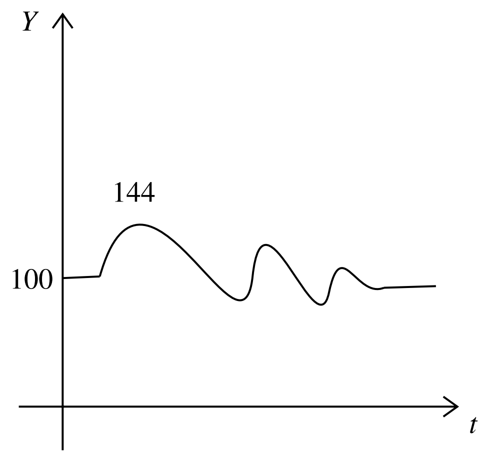
$$Y_t = bY_{t-1} + bY_{t-1} - bY_{t-2} + \underbrace{I_k}_{\substack{\text{inversión en}\\ \text{capital}}}$$

Inversión en capital responde a los espíritus animales; componente aleatorio de la ecuación

Shocks entran por aquí; por la eficiencia marginal del capital que depende de las expectativas

$$\Leftrightarrow Y_t = 2bY_{t-1} - bY_{t-2} + I_K$$

t	$Y_c = 0,8Y_{t-1}$	$Y_{inv} = 0,8(Y_{t-1} - Y_{t-2})$	I_K	Y	$Ventas = 0,8Y_t$	$\Delta Inv = C_{t-2} - C_{t-1}$	Inv
0	80	0	20	100	80	0	20
1	80	0	20	100	80	0	20
2	80	0	30	110	88	-8	12
3	88	8	30	126	100,8	-12,8	7,2
4	100,8	12,8	30	143,6	114,9	-14,1	5,9
5	114,9	14,1	30	159,0	127,2	-12,3	7,7
6	127,2	12,3	30	169,5	139,2	-8,8	11,6
7	135,6	8,4	30	174,0	139,2	-3,6	16,4
8	139,2	3,6	30	172,8	138,2	+1	21
9	138,2	-1	30	167,2	133,8	4,4	24,4



No hay una ecuación que defina I_K, por eso por ahí entran los shocks.
Este modelo es sencillo y explica las fluctuaciones en el producto. El problema de este modelo es que las empresas están manteniendo un nivel constante o ideal de inventarios, en lugar de maximizar ganancias.
No hay una explicación microfundamentada de por qué la empresa quisiera mantener un nivel óptimo de inventarios en lugar de maximizar las utilidades. La ecuación autoregresiva representa como la gente va a ajustando para el futuro con base en la información que tengo del pasado, y nunca voy a poder a ajustar exactamente, y eso es lo que genera las fluctuaciones.
Ahora vamos a ver el otro modelo.

15. Modelo multiplicador-acelerador

El producto es igual a la demanda agregada: consumo + inversión. Ahora sí vamos a tener una función para la inversión.

$$Y_t = C_t + I_t$$
$$C_t = Y_{t-1}$$

$$I_t = \underbrace{b}_{\substack{\text{tasa que}\\\text{determina}\\\text{la inversión}}} (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \underbrace{I_0}_{\substack{\text{factor exógeno}\\\text{espíritus animales}\\\text{por aquí entran}\\\text{los shocks}}}$$

Estamos modelando la decisión de inversión. Así, la inversión depende de cómo vea la gente que fluctúa el producto. Entonces la inversión depende de un factor b, exógeno, sobre la fluctuación o variación del producto. Si la variación del producto es positiva entonces hay incentivo a invertir. Además hay un factor exógeno que corresponde a los espíritus animales y por ahí entrarían los shocks.
Esto es una interpretación muy simplista sobre las expectativas desde el keynesianismo, de los textos que vimos la semana pasada.
Se tiene una función de producción autoregresiva, y por ende se va a tener un comportamiento de fluctuaciones.

$$Y_t = cY_{t-1} + b(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + I_0$$
$$Y_t = (c+b)Y_{t-1} - bY_{t-2} + I_0$$

Milton Friedman y Schwartz son de la Escuela de Chicago, los Monetaristas. El objetivo de la lectura es ver si los cambios en la oferta monetaria (políticas monetarias) efectivamente afectan el producto; si el dinero y las variables monetarias tienen un efecto sobre las variables reales.
¿Por qué a ellos les interesa estudiar esto? $\rightarrow$ es 1963 y el Keynesianismo está en auge, quien promovía que el gobierno tenía espacio para intervenir, y eso hizo mucho ruido, sobretodo en el contexto de la Guerra Fría.
La propuesta Keynesiana permite la interveción estatal, pero otro grupo hizo una propuesta de un gobierno que no interviniera, en el otro espectro de la discusión. Friedman juega un papel muy importante haciendo propaganda en defensa del libre mercado, mercados libres de intervención, entonces era una voz académica e ideológica.

Entonces para debatir al Keynesiansismo, sometieron a prueba sus ideas empíricamente. Este estudio está respondiendo la pregunta de si se cumple la dicotomía clásica, si se cumple la neutralidad del dinero: entonces las variables monetarias no serían efectivas y no se debería intervenir. Ese es el estudio.
Los resultados les da una cierta evidencia en contra de lo que ellos querían buscar. La pregunta fundamental es si las variables monetarias tienen efecto sobre las variables reales y en consecuencia si vale la pena estar interviniendo con políticas monetarias.
Entonces los resultados importantes que encuentran son que:

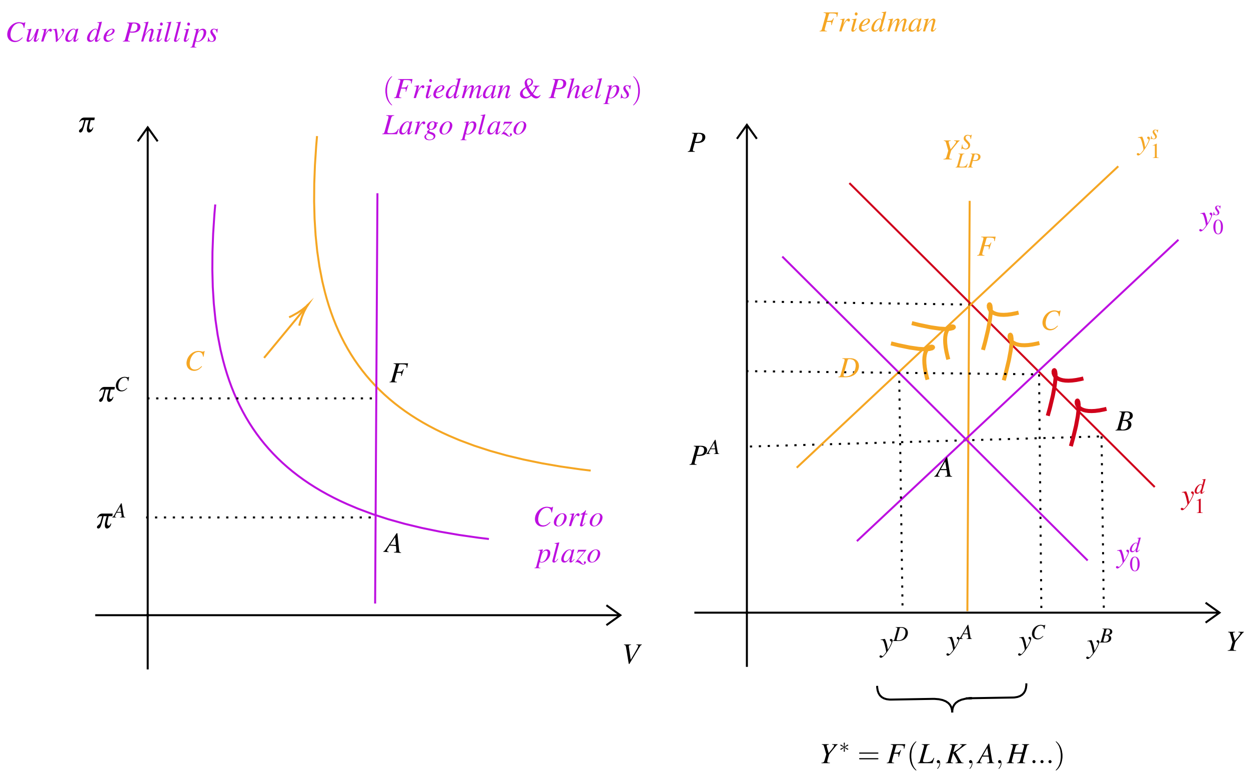
- Cambios en la oferta monetaria se asocian con variaciones en el producto. $\rightarrow$ hay que ver que está pasando porque esto contradice lo que se esperaba desde un esquema clásico. Hay evidencia en contra de esa posición clásica.
- La relación entre las variables es estable.
- Los cambios en la oferta monetaria son exógenas. $\rightarrow$ variables monetarias afectan las reales pero no al revés.

Estos resultados les permite concluir que los efectos son en una vía $\rightarrow$ están analizando las relaciones en un período que va desde 1864 hasta 1963 o algo así, casi un siglo de historia económica. Se permite establecer una cierta causalidad. Están estudiando el efecto de las variables monetarias sobre las variables reales. La respuesta es que sí existe esa relación entre esas variables monetarias y el producto, ellos observan esa relación a lo largo de un siglo, y es estable; se le puede detectar una causalidad: las variables monetarias afectan las variables reales pero las variables reales no afectan las monetarias.
Ellos analizan 6 crisis, ¿qué patrones encuentran? $\rightarrow$ los puntos donde la oferta monetaria han estado en sus puntos más bajo, ha coincidido con las distintas crisis y cuando hay estabilidad en el producto también hay estabilidad en el stock de la oferta monetario.
Entonces ellos lo que dicen es que **cuando hay fluctuaciones en el producto las está causando el stock de la oferta monetaria**. $\rightarrow$ el gobierno está presionando las fluctuaciones. Ellos son los que no deberían intervenir. Culpan a la Reserva Federal por el manejo de la política monetaria. Cuando ellos intentan calibrar las cosas, provocan las fluctuaciones. Durante gran parte del período que ellos estudian, no existía la Reserva Federal, y esta se creó hasta 1913, pero durante finales del siglo XIX e inicios del siglo XX fue uno de los períodos donde hubo estabilidad económica.
Luego el patrón oro es cuando los países respaldaban su dinero en oro, y así el tipo de cambio dependía de la cantidad de oro disponible. Inicialmente el dinero era emitido por entes privados. El patrón oro significaba que el dinero estaba respaldado en oro: se podía cambiar por oro. Así, la oferta monetaria estaba determinada por el stock de oro. Cuando el producto crecía mucho, no hay dinero suficiente.

$$M^s \cdot V = P \cdot Y \Leftrightarrow \underbrace{\frac{M^s}{P}}_{\substack{\text{saldos} \\ \text{monetarios} \\ \text{reales}}} = \underbrace{\frac{1}{V}}_{\substack{\text{preferencia} \\ \text{por liquidez}}} Y \Leftrightarrow \underbrace{\frac{M^s}{P}}_{\substack{\text{variables} \\ \text{nominales}}} = \underbrace{KY}_{\substack{\text{variables} \\ \text{reales}}}$$

Esta es la ecuación cuantitativa del dinero. La oferta monetaria por la velocidad de circulación es igual al producto. Esa sería la dicotomía clásica. Si se tienen cambios sobre la oferta monetaria, se esperaría que se transmita por los precios y las variables reales no se afecten; eso es lo que ellos están monitoreando: viendo si también se transmite al producto.
La velocidad de circulación es qué tan rápido circulan las monedas entre las personas para permitir las transacciones necesarias que están detrás del producto. Eso debería ser igual al valor de la producción.
El costo de oportunidad de un colón es lo que usted pueda comprar con ese colón: si una canasta vale P, el costo de oportunidad sería $\frac{1}{P}$. Los saldos monetarios ya son una variable real, así se expresa todo en términos de las variables reales.
Si hay una perturbación de la oferta monetaria, habría una dicotomía clásica, si dicha perturbación

se transmite solo por los precios y no hubiera variación del producto. Friedman y Schwartz dicen que **esa dicotomía no siempre se cumple; se puede observar en la historia se observa que se rompe cuando hay fluctuaciones de la oferta monetaria**. → La oferta monetaria cambia y luego cambia el producto, pero no al revés, no hay cambios en el producto que afecten la oferta monetaria y ahí encuentran su relación de causalidad.
Entonces ellos van a ver cómo eliminar esas fluctuaciones entonces. Así, las relaciones que están diciendo los Keynesianos sí se observan, pero esas fluctuaciones son causadas por la intervención monetaria; los datos dicen que sí pasa.
¿Qué pasaría si aumentara la oferta monetaria? → auementa la demanda agregada porque la gente tiene más dinero en la bolsa, baja la tasa de interés y aumenta la inversión. Se genera un exceso de demanda y eso provoca una presión al alza de los precios, y conforme suben los precios baja la cantidad demandada, mientras que la cantidad ofrecida aumenta. Los precios en un modelo keynesiano son rígidos, están dados. Por eso se pueden obtener mayores ganancias produciendo más, porque los costos de los insumos están rígidos pero los precios de venta sí aumentan, entonces se puede obtener una ganancia.
Se llega a C, con un nivel de precios más altos, en un equilibrio con precios más altos y más productos. Luego, en C, ajustan los precios de los insumos (los proveedores exigen precios más altos, el trabajador le pide un aumento, etc.) y por el aumento del costo de la mano de obra, al nivel de precios P^C hay un exceso de demanda, lo cual vuelve a presionar los precios al alza, y vuelve a bajar la cantidad demandada y sube la cantidad ofrecida, hasta llegar a F, con el mismo nivel de producto que el inicial pero con precios más altos.
Eso equivale a que la curva de Phillips de corto plazo se mueve, por razón de las expcectativas, porque la gente tendría expectativas de un nivel de precios mayor.



La curva de Phillips dice que hay una relación inversa entre desempleo e inversión. El modelo de Harrod-Dormar está atrapado en la curva de Phillips; esa era la incomodidad de Solow. Luego Friedman introduce la curva de oferta morada del cuadro izquierdo. Está refutando la teoría de la curva de Phillips; en el corto plazo sí se observa, pero en el largo plazo no se observa eso. Esa

curva implica que en el largo plazo sí se cumple la dicotomía clásica y sí hay neutralidad del dinero. En la lectura lo que él hace es ver cuando se rompe. Luego, a la derecha, que la curva de oferta sea vertical significa que sea inelástica: cambios en el precio no afectarían el output o producto.
Ese largo plazo surge a partir de la síntesis. La historia no fue lineal; se descubrió que en el corto plazo la dicotomía clásica sufre rompimientos. Inicialmente no se modeló el corto y largo plazo, sino que fue el estudio empírico que permitió verificar más adelante el largo plazo.
Friedman anula los resultados de los modelos keynesianos, dice que en el largo plazo se regresa a la dictomía clásica. El ingreso natural Y^* no depende de ninguna variable monetaria.
Dentro del liberalismo político la función esencial del gobierno es la seguridad, preservar la vida, el derecho de la propiedad y las libertades.
La Reserva Federal se establece en 1913/1914. Luego en 1933/1934 está el New Deal, pero dejan el patrón oro; toda unidad monetaria creada debía estar respaldada por una cantidad de oro. Luego cuando se quita el patrón oro, el dinero pasa a ser fiduciario. El dinero vale porque la gente le asigna valor; hay una ley que dice que esa moneda vale; se le da curso legal pero ya no tiene ningún respaldo. Ahora ya la oferta monetaria no está fija. Antes era problemático cuando el producto crecía mucho y no había suficiente oro para respaldar que hubiera más dinero para poder mover toda la cantidad de producto $\rightarrow$ Mago de Oz: las zapatillas de Dorothy son de plata, pero en la película son de rubí porque se veía mejor dado el technicolor.
Era originalmente una crítica respecto a la política monetaria: trata el tema de bimetalismo. En el siglo XIX el dinero pasó a ser respaldado tanto por oro y plata, dado que no había suficiente stock de oro que respaldara la cantidad de producción. Mago de Oz es una discución política entre los cambios sociales, la industrialización y la agricultura, el bimetalismo (por eso ella va del este al oeste) sobre un camino de oro con zapatos de plata.
El presidente Hoover fue el presidente de Estados Unidos durante la Gran Recesión y no hizo nada, porque la idea era que los mercados solos se iban a estabilizar y se le hicieron las *Hoovervilles*.
Antes de la Reserva Federal el mercado bancario era competitivo, pero entre 1913-1934 se establece la Reserva Federal se establece como un monopolio, y las crisis antes y después de la Reserva Federal son distintas. Antes del monoplio:

- Menos crisis
- Crisis más leves
- Crisis menos frecuentes

Hay una crítica de la estructura del mercado también. Es una crítica implícita. Friedman está diciendo que los datos muestran que hay rompimiento de la dicotomía clásica, no siempre se está trabajando en los escenarios de los modelos de largo plazo, pero, la Reserva Federal no ha generado ninguna ganancia. **Pregunta del examen: ¿Cuál es la tiradera de Friedman a la Reserva Federal durante la Gran Depresión?** $\rightarrow$ Cuando interviene, hay crisis. **Revisar la crítica a la Reserva Federal y las políticas que tomaron durante la Gran Depresión**.
Entonces, efectivamente la economía no se puede calibrar, y cuando se intenta calibrar, se empeora la economía. Efectivamente la dicotomía clásica se rompe, se pueden tener efectos de la política monetaria en la economía real, pero esa intervención únicamente genera fluctuaciones que generan interrupciones de los mercados: saque la mano del mercado! Deje que el mercado funcione.
Los modelos de Friedman reestablecen los equilibrios de largo plazo de la economía clásica.

15.1 Consulta

1. Asuma una economía cerrada, que cumple con todos los supuestos del modelo de RCK. Dicha economía se encuentra en equilibrio. A partir de esto la economía podría enfrentarse a alguno de los siguientes shocks. Explique qué ocurriría en la economía con el capital, producto, ahorro y consumo por unidad efectiva de trabajo después de que se alcanza un nuevo equilibrio. Explique detalladamente lo que ocurre con el shock, el proceso de ajuste y

el equilibrio en la economía. Relacione su respuesta con un gráfico, suponiendo que se parte de un punto donde no hay equilibrio. Las situaciones son las siguientes: Se logra descubrir un método para utilizar el germanio como sustituto del silicio que no sólo **brinda mayores facilidades a la hora de generar desarrollo tecnológico, sino que produce un cambio radical en la forma en que la economía producía los bienes, ya que permite que cada unidad adicional de capital sea más productiva**.
Shock: $\uparrow f'(k_t^E) \wedge \uparrow g$

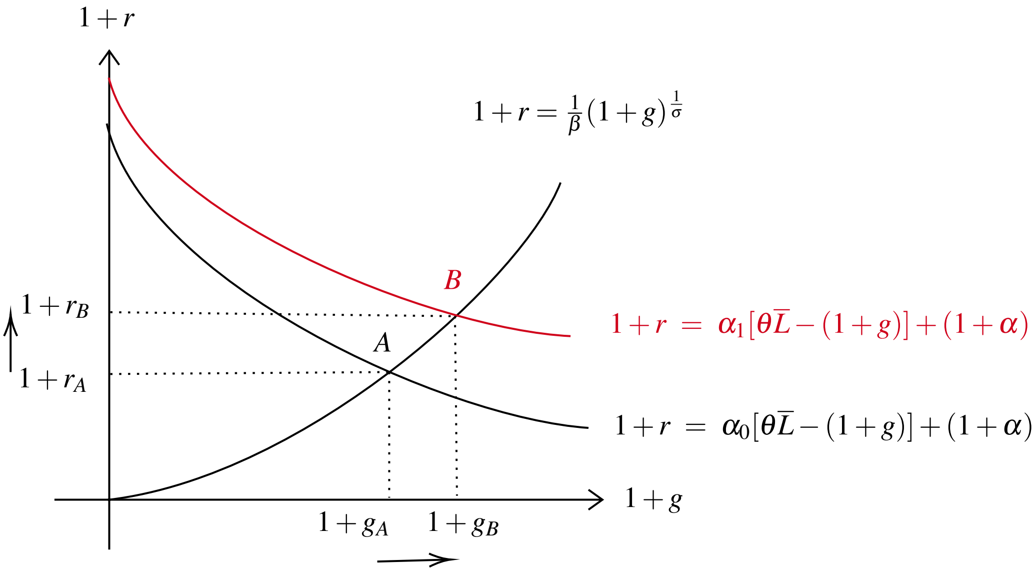
$$\dot{c}^E = 0 \Rightarrow c^E(t) = f(k^E(t)) - \uparrow z k^E(t)$$
$$\dot{k}^E = 0 \Rightarrow \uparrow f'(k_t^E) = \rho$$

Aumenta el ingreso pero también van a aumentar los costos de reposición del capital. Entonces se ve por casos:

a) $\big\uparrow f'(k_t^E) > \uparrow g$
b) $\uparrow f'(k_t^E) > \big\uparrow g$
c) $\uparrow f'(k_t^E) = \uparrow g$

En el caso de igualdad de efectos: se está ajustando para optimizar la función de utilidad. El costo de reposición aumentó lo suficiente para que se quiere disminuir el consumo, ahorrar más para hacerle frente a los costos de reposición. Hay una brecha positiva entre el ahorro y los costos de reposición, hay un incentivo a invertir y se da todo el ajuste de Solow. La inversión es positiva y se aumenta la contratación del nivel de capital. Aumenta la producción y con ello el consumo y el ahorro. También aumentan los costos de reposición pero sigue habiendo la brecha positiva.

2. En la economía empieza a escasear el silicio, factor importantísimo en la producción de micro procesadores. Las industrias deben, por tanto, buscar otras alternativas en la forma en que producen sus bienes para sustituir el uso de este factor. Esto a su vez provoca que las industrias de telecomunicaciones, electrónica, entre otras se vean en grandes aprietos para introducir nuevas innovaciones.
Shock: $\downarrow f'(k_t^E) \wedge \downarrow g$. Este es el opuesto al anterior.
3. Asuma una economía cerrada que cumple con todos los supuestos del modelo de crecimiento endógeno de innovación tecnológica. Dicha economía se encuentra en equilibrio. A partir de esto la economía podría enfrentarse a alguna de las siguientes perturbaciones. Explique qué ocurriría en la economía con el capital, producto, ahorro y consumo después de que se alcanza un nuevo equilibrio. Explique detalladamente lo que ocurre con la perturbación, el proceso de ajuste y el equilibrio en la economía. Relacione su respuesta con un gráfico. Las situaciones son las siguientes: **a) Se da un aumento de productividad del capital en la producción de bienes y servicios finales.**
Shock: $\uparrow \alpha$. Aumenta la productividad marginal, es un shock exógeno.



Voy a terminar con un $1+g_A > 1+g_B$. Ese $\theta\overline{L}$ siempre va a ser mayor que $1+g$ para poder ver los g positivos, es una condición que habíamos impuesto para que fueran los g positivos. De lo contrario se podrían tener g's positivos y significaría que la economía decrecería y decrecería infinitamente hasta que desaparezca... y no tiene mucho sentido. La curva se desplaza a la derecha, alcanzando una mayor taza de crecimiento y una tasa de interés bruta mayor. Ahora, lo que hay que hacer es explicar cómo llegar a ese resultado.

Aumentó $\uparrow \alpha$. ¿En cuál mercado o industria me afecta? $\rightarrow$ el mercado de bienes y servicios finales. Como aumenta la productividad marginal del capital, las empresas van a demandada más capital. K_j aumenta, porque hay un exceso de demanda, porque la productividad marginal del capital aumenta. Entonces, yo esperaría que el P_j sube, dado que hay un exceso de demanda por el capital, y ese precio refleja las productividad marginales del capital. Recordar que:

$$P_{j,t} = \frac{1+\uparrow r}{\uparrow \alpha}$$

Ahí lo que tengo que pensar es lo siguiente: **NO ME PUEDO FIJAR SOLO EN LAS ECUACIONES**. Las ecuaciones guían pero también hay que pensar económicamente: hay un mercado con exceso de demanda, porque el capital es más productivo y las empresas de bienes y servicios finales demandan más de estos bienes, entonces se forma un exceso de demanda.

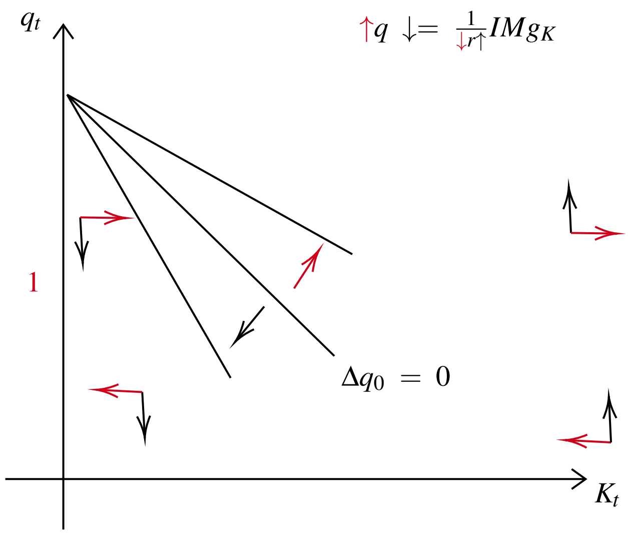
Los monopolistas tienen un precio más alto (efecto de las tasas de interés) y una mayor demanda (por la productividad marginal mayor) entonces van a querer más patentes, van a demandar más patentes.

¿Qué pasa con L_y? $\rightarrow$ está disminuyendo. Por un lado el capital es más productivo, y por el otro se estaría demandando más gente en el sector de patentes. Habría un exceso de demanda por las patentes pero también del otro lado están expulsando a la gente. Entonces, bajan los salarios del sector de bienes y servicios; así para que el otro sector los absorba, porque más bien en el sector de bienes y servicios finales se sustituye mano de obra por capital que es más productivo, entonces estoy desempleando la gente, y como hay pleno empleo, el otro sector los está absorbiendo, pero para poder contratar esta gente adicional, tiene que bajar sus salarios hasta que se igualen, alcanzando una condición de arbitraje.

A pesar de que hay una complementariedad entre los insumos, proporcionalmente se ocuparía más del factor más productivo, en este caso el capital, y así siempre habrá un efecto sustitución entre los insumos. Hubo mayor contratación en el sector de las patentes, igualando los salarios

porque el mercado laboral es uno y tiene que haber un salario único para todo el mercado. Al aumentar la cantidad de gente trabajando en el mercado de innovación, habría mucha más gente, exceso de oferta, y entonces disminuiría la productividad marginal.
En el mercado de patentes habría un aumento en la demanda de patentes por parte de las empresas que producen capital, pero la mayor cantidad de gente aumentaría la oferta de patentes, ¿cuál efecto peso más? $\rightarrow$ hay que ver cómo se define el precio de las patentes. Viendo la ecuación, el P_A está bajando, lo cual significaría que el efecto de la oferta es mayor que el efecto de la demanda.
Al final, crezco más rápido, porque hay más innovación y esa es la fuente del crecimiento, y en cuanto a la compensación de los factores de producción: hay mayor compensación por r (dado que el capital es más productivo) y bajan los salarios.
Al final siempre tengo que volver al gráfico inicial. Puedo ver un mayor crecimiento con una redistribución de la retribución de los factores de la producción. Hay una mayor tasa de interés dado que el capital sería mucho más productivo que la mano de obra. La brecha se va abriendo y se va abriendo.

4. Generaciones traslapadas: la planeación de consumo que maximiza la utilidad (tabla de una personas) $\rightarrow$ encontrar la condición de primer orden. A partir de ahí, determinar la planeación del consumo del agente representativo $\rightarrow$ sacar el promedio. Esa condición de primer orden que se obtuvo, se saca el promedio.
   Si en el examen dice: derive el modelo habría que sacarlo paso a paso, con todas las ecuaciones. Si dice analice el shock, se analiza el shock y no se tiene que derivar el modelo.
5. Puntos fijos de la ecuación serían los estados estacionarios, evalúo donde $x_t = x_{t+1} = x_{t+2} = \bar{x}$, entonces evalúo ahí y resuelvo. Encuentro los ceros de la ecuación.
6. RCK y Generaciones tienen una explicación tienen un mecanismo de ajuste cuya base es el modelo de Solow.
7. Q de Tobin: los cambios en r cambia la pendiente, pero, ¿cómo sería gráficamente?



Los clásicos son anteriores y contemporáneos a Keynes, pero que no sean Keynes.
¿Qué pasa con Hayek? $\rightarrow$ el pleito es Keynes vs Hayek. Lucas habla contra el keynesianismo (Hicks, Modigliani) y los pone a Hayek. A Lucas le molesta que el keynesianismo es que en su descripción de los agregados no hay microfundamentos. También le molesta que la teoría Keynesiana no parta del equilibrio general: el problema es completamente teórico; no se preocupan por hacer una teoría sobre los equilibrios generales, que es el última instancia el objetivo de la economía, ya que es una disciplina teórica. Lo que hacen los keynesianos es explicar casos particulares en lugar de proveer una teoría general que permita explicar los fenómenos.
La crítica fundamental es que no hacen una teoría clara de los equilibrios generales.¿Quién sí

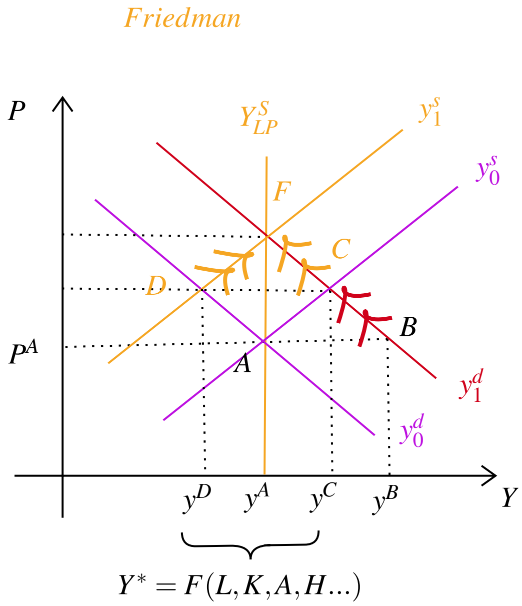
propone una teoría del equilibrio general? → **REVISAR ESTO**.
Lucas hace un llamado a los clásicos para que se retomen las ideas de Hayek sobre los equilibrios generales. Critica que los keynesianos usan mucho la econometría pero no están explicando teóricamente qué está pasando. Se pierden en la econometría: ¿por qué estudian esas variables? ¿Qué hay detrás de esas variables? → la econometría es un instrumento para calzar la teoría, pero se ocupa una teoría detrás.
Lucas considera que los keynesianos se perdieron en la econometría. En particular critica a un keynesiano. **REVISAR ESTO**.
Luego de la crítica al keynesianismo, ¿qué más dice el texto? → sobre las expectativas de la gente: deberían incorporarse expectativas racionales en los modelos, pero los modelos keynesianos usan expectativas adaptativas o históricas (se ve al pasado para ver qué va a pasar al futuro). Las expectativas racionales implican usar la información disponible que se tiene ahora (puede ser del pasado, del presento o si se tiene del futuro). Los agentes usan toda la información **disponible**. Se optimiza con la información que se tenga, la cual no es necesariamente toda.
Lucas propone una forma en la que uno puede modelar de tal manera que los parámetros incorporen la información histórica sino también la información presente. Cuando la gente recibe información nueva, la gente ajusta su comportamiento para esa información disponible, que no necesariamente es toda la información. Así, la estructura de los modelos estaría cambiando, y es lo que le termina ganando el Nobel a Lucas.
Sería entonces que los modelos de Keynes no tienen adaptabilidad a incorporar la información actual y se limitan a la información histórica. El aporte de Lucas es incorporar las expectativas racionales en la parte de la modelación. El concepto de las expectativas racionales lo toma de otro autor: **John Muth**.
Luego viene la parte del artículo que se centra en la parte que trata de explicar los ciclos económicos. Dice que los ciclos económicos se pueden generar por varios detonantes:

- Choques de oferta
- Choques de demanda
- Expectativas de los agentes
- Políticas → información imperfecta

La gente toma decisiones racionales dada la información que tienen disponible, y si esa información no está completa, puede no ser la mejor decisión, pero dada la información disponible, sí era el comportamiento racional pero no el óptimo.
Si el Banco Central aumentara la oferta monetaria y la gente tuviera más dinero, aumentaría el consumo, y los empresarios creerían que aumentaría la demanda por sus productos y los empleadores contratarían más trabajadores, para así reaccionaría todo el mundo, y eventualmente los proveedores también le cobrarían más, y no era un aumento de la demanda del bien, sino un aumento de la demanda agregada y eso explica como se puede desviar del producto natural.

$$Y_t = \overline{Y} + b(p - p^e)$$

Hubo una variación de un elemento de la demanda agregada y se desvía del producto natural produciendo más alto. Recordemos el gráfico de la sesión pasada.



En el largo plazo se ajustan los precios para que los precios esperados coincidan con los precios reales y así volver al producto natural. Lo mismo pasa con el desempleo en la curva de Phillips.

$$U_t = \overline{U} - \alpha(\pi - \pi^e)$$

Ahí se genera un dilema: los bancos centrales tienen que tener credibilidad, pero por otro lado la eficacia de una política del Banco Central depende de que sea inesperada para no darle margen a la gente de que ajuste. Por ende, es un dilema entre la sorpresa y la credibilidad y transparencia.
El Banco Central en Costa Rica tiene como objetivo la estabilidad de precios y tipo de cambio; no tiene objetivos sobre la producción que sería una variable real. Así que la discusión pareceria haberla ganado Friedman y Lucas. Ahí hay una idea de dicotomía clásica de fondo. Al Banco Central no le interesa calibrar la economía para generar más o menos empleo.
Ahora queda otro grupo: los neokeynesianos. Ya ellos son parte de la síntesis neoclásica y distinguen entre corto y largo plazo. Ellos se avocan al problema de explicar por qué los precios son rígidos: no del lado de la demanda, sino del lado de la oferta. Son modelos con imperfecciones de mercado, rigidez de precios, asociados a la oferta. ¿Qué puede generar precios rígidos? $\rightarrow$ porque hay que recordar que los modelos keynesianos no ajustan inmediatamente:

- Contratos laborales $\rightarrow$ se le fija un salario por un plazo de tiempo. Podría haber más o menos inflación pero no le ajustan el salario. Esto introduce rigideces en los mercados laborales.
- Salarios y precios desfasados: las empresas ajustan los precios en momentos diferentes. Eso abre un lapso de tiempo en que los precios están rígidos.
- Negociaciones colectivas: sindicatos negocian para sí mismos. A partir del monto negociado, no podría bajar el salario de ahí. Entonces se ajusta vía cantidad: despidiendo o contratando gente.
- Contratos implícitos: hipótesis extraña; supone que la gente es adversa al riesgo, pero las empresas son menos adversas al riesgo que las personas. Entonces las empresas respetan implíticamente el salario a las personas porque las personas asumirían el riesgo en una crisis, pero el riesgo para las personas serían que las despidan y no que le bajen el salario.
- Salarios mínimos: afecta solo si el salario mínimo está por encima del salario de equilibrio del mercado.
- Salarios de eficiencia: cuando se paga más para incentivar la productividad.
- Costos de menú: cuando cambian los precios hay que ajustar los precios de todo. Así que ante cambios en los precios, pueden quedarse en precios en un vecindario, y si lo hacen todas las empresas, sí habría un efecto agregado.

- Recesiones como fallas coordinadas: problemas de información. Si hay presión para subir precios, pero no sabe lo que va a hacer el competidor, me espero para ver lo que haga el otro, y surge un problema de señalización, previendo lo que hagan las empresas; o no se ajusta del todo, o no se ajusta como debería, haciendo que los precios sean rígidos porque no se estarían ajustando con la flexibilidad que deberían.

16. Modelo de Ciclos Reales

Es un modelo muy ortodoxo. A pesar de la evidencia, de lo que dicen Friedman y Schwartz y lo que dice Lucas, ellos no aceptan que la dicotomía clásica se pueda romper. Así, necesitan explicar el ciclo económico con base en variables reales dado que la dicotomía clásica estaría funcionando. Como características:

- Hay neutralidad del dinero
- Variaciones se explican por cambios en productividad
- Fuentes de los shocks serían a través de shocks tecnológicos

Hay una función de utilidad para un agente representativo. Pero hay una esperanza, una expectativa, sujeta a que la inversión es igual al ingreso laboral más el ingreso por capitales menos el consumo. Se maximiza respecto a K_{t+1}.

$$U_t = \underbrace{E_t}_{expectativas} \left\{ \sum_{s=t}^{+\infty} \beta^{s-t} \ln C_s \right\} \quad \text{s.a } C_t = w_t + r_t K_t - (K_{t+1} - K_t)$$

$$\max_{K_{t+1}} U_t = \max_{K_{t+1}} E_t \left\{ \sum_{s=t}^{+\infty} \beta^{s-t} \ln \left[w_t + r_t K_t - (K_{t+1} - K_t) \right] \right\}$$

Condición de primer orden:

$$\frac{-1}{C_t} + E_t \left\{ \beta \frac{1}{C_{t+1}} (\hat{r}_{t+1} + 1) \right\} = 0$$
$$\Leftrightarrow E_t \left\{ \beta \frac{C_t}{C_{t+1}} (\hat{r}_{t+1} + 1) \right\} = 1$$

Recordar que en $s = t$ conozco la información y por eso no habría esperanza, pero en $s = t + 1$ ya sí tengo que incorporar la expectativa.
Ahora vamos a ver el lado de las empresas.

- $L = 1$
- $n = 0$
- $\delta = 100\,\%$

La depreciación del 100 % es por simplicidad. Es una función de producción neoclásica.

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha}$$

Se optimiza en $t+1$ entonces traigo la función de producción a ese período. Hoy decido el capital de mañana.

$$\max_{K_{t+1}} \pi = \max_{K_{t+1}} A_{t+1}K_{t+1}^{\alpha} - (\overbrace{\delta}^{=1} + \hat{r}_{t+1})K_{t+1}$$

Condición de primer orden:

$$\begin{aligned} \alpha A_{t+1}K_{t+1}^{\alpha-1} - (1+\hat{r}_{t+1}) &= 0 \\ (1+\hat{r}_{t+1}) &= \alpha A_{t+1}K_{t+1}^{\alpha-1} \end{aligned}$$

En equilibrio:

$$E_t\left\{\beta \frac{C_t}{C_{t+1}} \alpha A_{t+1}K_{t+1}^{\alpha-1}\right\} = 1$$

Lo que se está diciendo es que, dado cualquier cambio, lo que va a ajustar son las productividades marginales para volver al equilibrio. Lo que siempre va ajustar son las productividades marginales. Para resolver por métodos numéricos, se ocupan valores iniciales para α y β. Entonces vamos a hcer un *educated guess*.
El consumo es una proporción del ingreso.

$$\begin{aligned} C_t &= \omega Y_t = \omega A_t K_t^{\alpha} \\ C_{t+1} &= \omega A_{t+1}K_{t+1}^{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_t\left\{\beta \frac{\omega A_t K_t^{\alpha}}{\omega A_{t+1}K_{t+1}^{\alpha}} \alpha A_{t+1}K_{t+1}^{\alpha-1}\right\} &= 1 \\ \Leftrightarrow E_t\left\{\alpha\beta \frac{A_t K_t^{\alpha}}{K_{t+1}}\right\} &= 1 \end{aligned} \tag{16.1}$$

Como yo decido K_{t+1} con la inversión de hoy, conozco ese término y lo puedo sacar de la esperanza, pero entonces también puedo sacar los otros valores de la esperanza porque las decido hoy para tener ese capital mañana.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow K_{t+1} &= \alpha\beta A_t K_t^{\alpha} \\ *\boxed{\mathrm{K}_{t+1} = Y_t - C_t} \\ \Leftrightarrow K_{t+1} &= A_t K_t^{\alpha} - \omega A_t K_t^{\alpha} \\ \Leftrightarrow K_{t+1} &= (1-\omega)A_t K_t^{\alpha} \\ *K_{t+1} &= K_{t+1} \\ \Leftrightarrow \alpha\beta A_t K_t^{\alpha} &= (1-\omega)A_t K_t^{\alpha} \\ \Leftrightarrow \omega &= 1-\alpha\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= \alpha\beta A_t K_t^{\alpha} \\ \Leftrightarrow K_{t+1} &= \alpha\beta Y_t \Rightarrow K_t = \alpha\beta Y_{t-1} \\ *Y_t &= A_t K_t^{\alpha} \\ Y_t &= A_t\left(\alpha\beta Y_{t-1}\right)^{\alpha} \\ \Leftrightarrow \ln Y_t &= \ln A_t + \alpha \ln \alpha\beta + \alpha \ln Y_{t-1} \end{aligned}$$

Sea:

$$\begin{aligned} y_t &= \ln Y_t \\ a_t &= \ln A_t \\ x_0 &= \alpha \ln \alpha\beta \end{aligned}$$

$$y_t = a_t + x_0 + \alpha y_{t-1} \qquad\qquad y_t = y_{t-1} = \overline{y}$$

$$\lim_{t\to+\infty} a_t = \overline{a}$$

En estado estacionario:

$$\begin{aligned}\overline{y} &= \overline{a} + x_0 + \alpha\overline{y}\\ \Leftrightarrow \overline{y} &= \frac{\overline{a}+x_0}{1-\alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_t - \overline{y} &= a_t + x_0 + \alpha y_{t-1} - (\overline{a} + x_0 + \alpha\overline{y})\\ \Leftrightarrow y_t - \overline{y} &= (a_t - \overline{a}) + \alpha(y_{t-1} - \overline{y})\\ \Leftrightarrow y_{t-1} - \overline{y} &= (a_{t-1} - \overline{a}) + \alpha(y_{t-2} - \overline{y})\\ \Leftrightarrow y_{t-2} - \overline{y} &= (a_{t-2} - \overline{a}) + \alpha(y_{t-3} - \overline{y})\\ &\vdots\\ \Leftrightarrow y_1 &= (a_1 - \overline{1}) + \alpha(y_0 - \overline{y})\\ y_0 &= y_0\end{aligned}$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned}y_t - \overline{y} &= (a_t - \overline{a}) + \alpha(y_{t-1} - \overline{y})\\ y_t - \overline{y} &= \alpha^0(a_t - \overline{a}) + \alpha^1(a_{t-1} - \overline{a}) + \alpha^2(y_{t-2} - \overline{y})\\ y_t - \overline{y} &= \alpha^0(a_t - \overline{a}) + \alpha^1(a_{t-1} - \overline{a}) + \alpha^2(a_{t-2} - \overline{a}) + \alpha^3(a_{t-3} - \overline{a}) + \cdots + \alpha^{t-1}(a_1 - \overline{a}) + \alpha^t(y_0 - \overline{y})\\ y_t - \overline{y} &= \alpha^t(y_0 - \overline{y}) + \sum_{s=1}^{t}\alpha^{t-s}(a_s - \overline{a})\end{aligned}$$

$$\overline{y} = \frac{\overline{a}+x_0}{1-\alpha}$$

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\overline{a}} = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\frac{\delta(y_t - \overline{y})}{\delta a_{t-1}} = \alpha$$

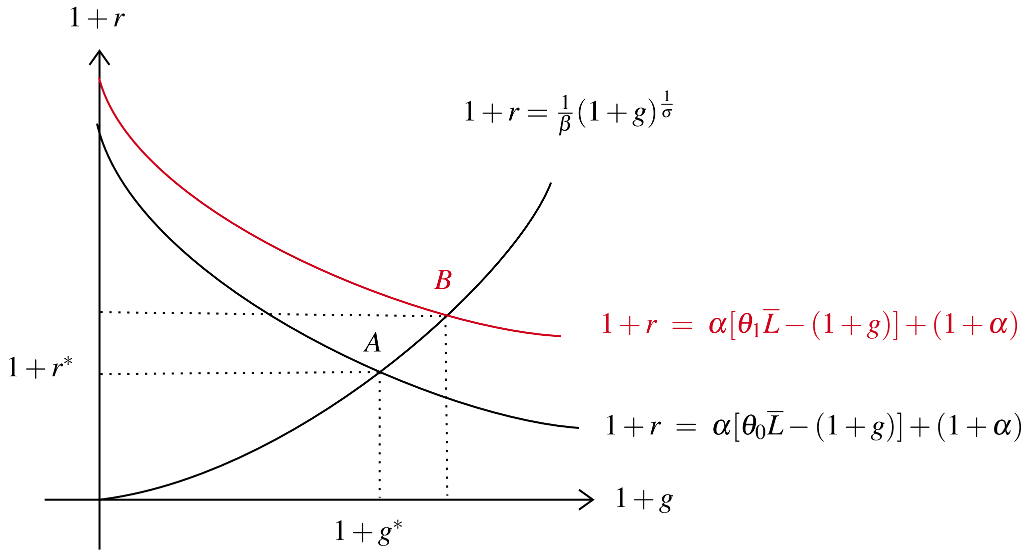
$$\frac{\delta(y_t - \overline{y})}{\delta a_{t-10}} = \alpha^{10}$$

$$\frac{\delta(y_t - \overline{y})}{\delta a_{t-50}} = \alpha^{50}$$

16.1 Consulta

*Ella va a dar las fórmulas.

- Asuma una economía cerrada que cumple con todos los supuestos del modelo de crecimiento endógeno de innovación tecnológica. Dicha economía se encuentra en equilibrio. A partir de esto la economía podría enfrentarse a alguna de las siguientes perturbaciones. Explique qué ocurriría en la economía con el capital, producto, ahorro y consumo después de que se alcanza un nuevo equilibrio. Explique detalladamente lo que ocurre con la perturbación, el proceso de ajuste y el equilibrio en la economía. Relacione su respuesta con un gráfico. Las situaciones son las siguientes: **c) El parámetro de cambio de productividad aumenta.**
  Shock: $\uparrow \theta$



El shock es en θ. La curva se desplaza a la derecha y se va a terminar con una tasa de crecimiento mayor. Va a haber un aumento en las patentes que se ofrecen, aumenta g. Se puede producir más tecnología, más innovación. ¿Qué pasa con ese mercado? Con el nivel de contratación de insumos que está generando ese mercado y la producción de ese mercado $\rightarrow$ Aumenta la producción de patentes porque la gente estaría siendo más productiva.
El shock es sobre la oferta de las patentes, no de la demanda de estas. Es un shock de oferta, la demanda luego se ajustará, pero es sobre la oferta. Ahora, si la empresa es más o menos productiva, hay que recordar que la empresa tiene como objetivo maximizar las utilidades o beneficios, no producir constantemente. Así, si un insumo se vuelve más productivo, buscaría contratarlo más para aprovecharme de esa productividad.
En ese mercado, la condición de optimalidad en este mercado es:

$$w_{A,t} = P_A \theta A_t$$

Pero el shock $\uparrow \theta$ provoca que:

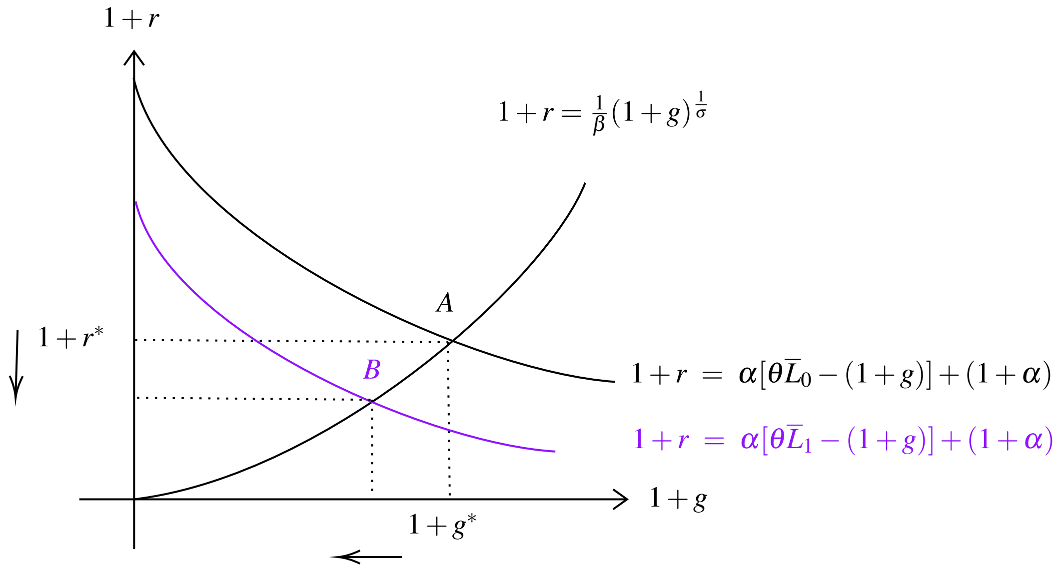
$$w_{A,t} < P_A \theta A_t$$
$$\uparrow w_{A,t} = P_A \theta A_t$$

Es decir, que el shock altera la condición de primer orden de ese mercado, a lo que entonces querríamos ajustar mediante el salario, lo cual atraería más gente a trabajar en ese sector.
Como el insumo es más productivo, voy a buscar contratarlo más; el valor del producto marginal es mayor al salario, así que sigo teniendo ganancias contratando más trabajadores atrayéndolos del otro sector subiendo los salarios.
Ahora, se están produciendo más patentes, ¿qué pasa en el mercado de patentes? $\rightarrow$ hay exceso de oferta y el precio de las patentes va a disminuir. Hay que explicar los procesos de decisión de las empresas mediante sus condiciones de primer orden que le permitan maximizar sus utilidades. Las empresas atraen a las personas mediante mayores salarios.
El exceso de oferta de patentes provoca una baja en los precios de las patentes $\downarrow P_{A,t}$. Ahora, puedo ir a ver qué pasa con el mercado laboral o el mercado de capital. Se puede ir a cualquiera de las dos. Por un lado, el cambio en el salario está afectando el mercado laboral y habrá que equilibrar ahí, pero en el mercado de capital habría un exceso de oferte de patentes. Voy al mercado laboral. Hay un desequilibrio porque $w_A > w_y$ y se están atrayendo personas hacia el sector de innovación. Así, $\downarrow L_{y,t}$ mientras que $\uparrow L_{A,t}$. Dado que el trabajo tiene productividades marginales son decrecientes, la productividad marginal de los trabajadores en el sector de bienes y servicios finales, aumenta $\uparrow w_{y,t}$. Hay una redistribución del mercado

laboral entre los dos sectores: más gente en el sector de innovación y menos gente en el sector de bienes y servicios; una recomposición entre los sectores. Ya el mercado laboral está equilibrado con una recomposición de la cantidad de gente que trabaja en cada sector.
Ahora hay que ir al sector intermedio: hubo un exceso de oferta de patentes y un precio menor, pero hay más tipos de capital disponible. **La productividad marginal de los capitales nuevos es decreciente, por lo que se debe contratar menos de cada uno de los capitales que ya se emplea, porque se ocuparía que la productividad marginal de los que ya se tenía sea igual a los otros, entonces se usa menos de cada tipo de capital pero se usan más tipos de capital.** Entonces como ahora uso nuevos tipos de capitales más productivos, dados las productividades marginales <u>decrecientes</u>, uso menos de los que ya usaba antes para que su productividad marginal se iguale con la productividad marginal de los capitales nuevos. Estoy disminuyendo del nivel de contratación de K_j pero tengo más $K_j's$, que van desde 1 hasta A_t pero ahora A_t es mayor. Hubo una recomposición de los tipos de capital que uso.
La oferta de patentes siempre va a afectar la proporción en la que se usa cada tipo de capital. Entonces, $1 \dots A_t$ aumentó, por lo que $\downarrow K_j$ y, dado que el precio refleja la productividad marginal del insumo, entonces $\uparrow P_j$, porque lo que está cambiando es la cantidad demandada, no la demanda; no es un desplazamiento de la demanda de insumos, sino una disminución de la cantidad demandada. Ya se tiene el precio y cantidad de equilibrio en este mercado.
Ahora queda el mercado de bienes y servicios finales. Se está sustituyendo mano de obra por capital más productivo, ¿cuál es el efecto sobre el producto? $\rightarrow$ aumenta la producción porque estoy contratando insumos más productivos entonces aumenta la producción de los bienes y servicios. Los hogares reciben mayores salarios y además mayores precios por los capitales que alquilan. Los ingresos totales aumentan y un hogar con más ingresos consume más. La producción y el consumo en la economía aumentan. La tasa de interés refleja la mayor productividad del capital y por eso subió y se equilibra un mayor r con un mayor g. r subió por la mayor productividad marginal del capital. **g viene de una mayor innovación que permitió una mayor innovación que permitió una mayor producción e ingreso en los hogares que le permite a los hogares consumir más**. g es igual a la tasa de crecimiento de la innovación, la tasa de crecimiento del producto y la tasa de crecimiento del consumo.
En Solow el secreto de mantener un crecimiento constante en el tiempo era desplazar las fronteras de posibilidades de producción: la clave del crecimiento económico era el desplazamiento de esa frontera, y ese frontera se puede desplazar con la innovación tecnológica.
Resumen: aumentó la productividad en la innovación, eso hace más rentable generar patentes, para generar más patentes ocupo más mano de obra, ya no se está optimizando dada la nueva productiva, pero se ocupa usar más intensivamente la mano de obra, para eso se suben los salarios, esa más gente produce un mayor volumen de patentes, ese mayor volumen de patentes genera exceso de oferta de patentes, ese salario mayor desequilibra el mercado laboral porque ahora ganan más que las personas en el sector de bienes y servicios, hay una transferencia de trabajadores de un sector al otro, y conforme disminuyen los trabajadores de bienes y servicios finales aumenta su productividad marginal y sus salarios suben hasta que se igualan con el otro sector y queda un único salario en el mercado laboral que equilibra el mercado laboral con una recomposición de los sectores, las patentes hace que hayan más monopolios produciendo tipos de capital diferentes, y esos capitales van a ser contratados por las empresas de bienes y servicios finales, y entonces esas empresas contratan más tipos de capital, disminuye la contratación de cada tipo de capital, y con eso aumenta el P_j que refleja la productividad mayor de cada uno de esos capitales, se contrata capital hasta el que costo de ese capital sea igual al valor de la productividad marginal , ahora P_j no es un valor dado, es un valor que decide el monopolio porque no es un mercado competitivo, la empresa

de bienes y servicios finales tiene capitales más productivos que le permiten producir más y aumenta la tasa de crecimiento del producto; los hogares reciben mayores salarios y mayores ingresos por el capital que es más productivo, aumenta el ingreso de los hogares, aumenta el consumo de los hogares y aumenta la tasa de interés que refleja la productividad del capital.

- **d) Una enfermedad acaba con el 20 % de la población.**
  Shock: $\downarrow \overline{L}$



En el mercado laboral están disminuyendo la cantidad de trabajadores en ambos sectores. La pregunta es si hay o no recomposición entre los sectores del mercado laboral. **Esta no la va a preguntar en el examen**.

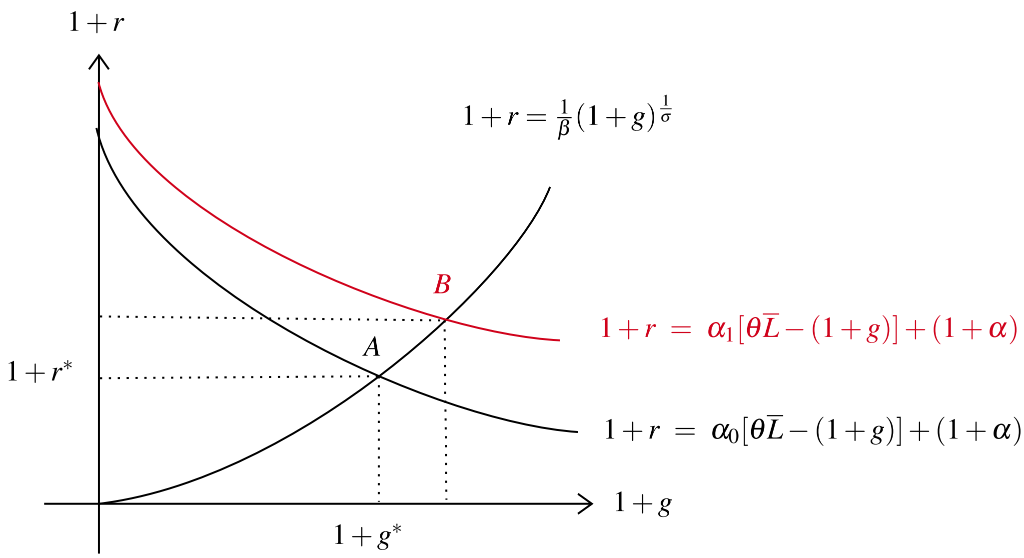
$$L_y = \frac{r}{\theta\alpha} \Rightarrow \Delta L_y = \frac{\Delta r}{\theta\alpha}$$
$$L_{A,t} = \overline{L} - L_y \Rightarrow \Delta L_{A,t} = \Delta\overline{L} - \frac{\Delta r}{\theta\alpha}$$
$$\text{Si } \Delta\overline{L} > \frac{\Delta r}{\theta\alpha} \Rightarrow \Delta L_{A,t} > L_y$$

La mano de obra en el sector de innovación estaría disminuyendo. Se producen menos patentes; disminuye g. Al producirse menos patentes, hay un exceso de demanda de patentes en el sector intermedio. Ya no se está supliendo al sector intermedio de la innovación que se tenía antes. Se producen menos capitales. $\uparrow K_j$ porque están dejando de llegar los nuevos capitales. Si K_j aumenta baja su productividad marginal y baja la tasa de interés (lo que se veía desde el gráfico). En el mercado laboral aumentan los salarios porque se tienen menos gente y la productividad marginal aumenta: hay una recomposición del ingreso de los dueños del capital hacia los dueños de la mano de obra. Las empresas de bienes y servicios, ahora que hay menos variedad de capitales, compran más de cada tipo de capital y aumenta K_j y disminuyó P_j y aumentaron los salarios.
En el mercado de bienes y servicios hay menos mano de obra contratada y hay más contratación del capital y el ritmo de producción de los bienes y servicios disminuyó, y por ende g está disminuyendo (como se ve en el gráfico) y la tasa de crecimiento del producto está disminuyendo, también la tasa de crecimiento del consumo.
El salario es endógeno y no puede ser el shock.

- **e) Aumenta la productividad de la mano de obra en la producción de bienes finales.** Aumenta la productividad marginal del trabajo en el mercado de bienes y servicios. Equivalente a la disminución en $\downarrow A$.

- En general, este modelo tiene dos fuentes de ineficiencias de los mercados que pueden justificar la existencia de una política pública. ¿En qué consisten estas dos fuentes de ineficiencia? Explique, ¿por qué podrían ser deseables o no? y, ¿cómo debería orientarse la política de Estado, según la teoría económica?
  - Externalidad positiva asociada al mercado de innovación, al conocimiento
  - Monopolio en el mercado de capitales

  El conocimiento es un bien público, y el equilibrio del mercado está por debajo del óptimo social. La política pública para responder a esto fue el establecer patentes, creando monopolios. Se corrige una imperfección con otra imperfección. Sí es deseable la figura del monopolio porque si no, no habría incentivo para innovar. Si no, no tendríamos el nivel de innovación que se ve en el modelo y esa es la fuente del crecimiento económico.
- Según Kristov (https://www.nytimes.com/2021/02/13/opinion/sunday/working-class-dignity.html), **las políticas a favor de las empresas y el debilitamiento del sindicalismo** a partir de los ochenta en Estados Unidos hizo que el salario semanal promedio de una persona trabajadora en la industria pasara de $902 (a precio de 2021) en diciembre de 1972 a $860 en diciembre de 2020. Utilice el modelo de innovación y crecimiento para explicar lo que ocurre con el ingreso promedio en esta economía. Analice qué ocurre en cada mercado y qué sucede con la relación de los ingresos de las personas dueñas de capital y trabajo en este escenario.



  Shock: $\uparrow PMg_K$

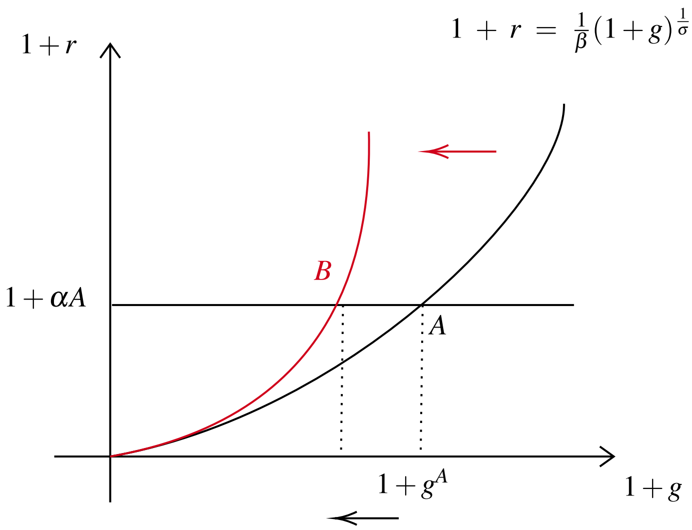
  No puede ser el shock en w_y porque es endógeno, es la consecuencia. Las políticas han aumentando la productividad marginal del capital y debilitar el de la mano de obra; hay una recomposición del ingreso a favor del capital. El resultado es que hoy hay un salario real menor que el que había décadas atrás. Si aumenta α el ingreso promedio, el crecimiento de los ingresos sube. La tasa del crecimiento del ingreso del país sube y los ingresos promedios están subiendo. Entonces hay un aumento del ingreso promedio del país pero los ingresos de los trabajadores disminuye porque lo que está aumentando mucho más aceleradamente es el ingreso de los capitales.

  En este modelo, al darse una recomposición en los mercados laborales hay una recomposición también en la remuneración a la mano de obra y al capital.

  α es la proporción de uso del capital.
- El 19 de julio el presidente Biden acusó a China de promover una red de subcontratistas para robar constantemente información sensible, tecnologías críticas y propiedad intelectual de empresas estadounidenses y europeas. Entre las empresas jaqueadas se encuentran Microsoft

y algunas contratistas militares. Aunque se denunció a algunos oficiales de inteligencia china, la administración no impuso ningún tipo de sanciones contra este país. A partir del modelo de crecimiento endógeno con innovación de Romer, explique detalladamente qué implicaciones tiene esta política china sobre el equilibrio de largo plazo de sus tasas brutas de crecimiento y costo del capital. Explique el proceso de ajuste, el encadenamiento entre los mercados, qué ocurre con la cantidad y precio de equilibrio en cada uno de ellos y con el equilibrio general de la economía. Utilice el diagrama del equilibrio general para justificar su respuesta.
Shock: $\uparrow \theta$.
Para China $\uparrow \theta$ pero para Estados Unidos no está cambiando nada, y sería como el primero que hicimos.

- Asuma una economía cerrada que cumple con todos los supuestos del modelo de acumulación de capital. Dicha economía se encuentra en equilibrio. A partir de esto la economía podría enfrentarse a alguno de las siguientes perturbaciones. Explique qué ocurriría en la economía con el capital, producto, ahorro y consumo después de que se alcanza un nuevo equilibrio. Explique detalladamente lo que ocurre con la perturbación, el proceso de ajuste y el equilibrio en la economía. Relacione su respuesta con un gráfico. Las situaciones son las siguientes: **Se observa un cambio en los patrones de consumo debido a que la generación Millenial ahorra menos que las generaciones pasadas.**
Shock: $\downarrow \beta$.



Los modelos de Romer ajustan de inmediato; entre un período y otro. Al disminuir $\downarrow \beta$ está aumentando el consumo de ese momento y disminuyendo los recursos para ahorrar. El ahorro afecta la inversión. En este modelo el crecimiento está explicado por la profundización del capital, y al disminuir el ahorro hay inversión, disminuye la profundización del capital. Y estaría cayendo el ritmo de crecimiento de la economía.
La explicación tiene que incluir:
1. Qué pasa con la tasa bruta de interés
2. Qué pasa con la tasa bruta de crecimiento
3. Explicar el shock
4. Asociar el shock a uno de los agentes (empresas u hogares) en este caso afectaba a los hogares y la decisión de consumo y ahorro,
5. Cómo el ahorro afecta la inversión
6. Cómo la inversión explica el crecimiento

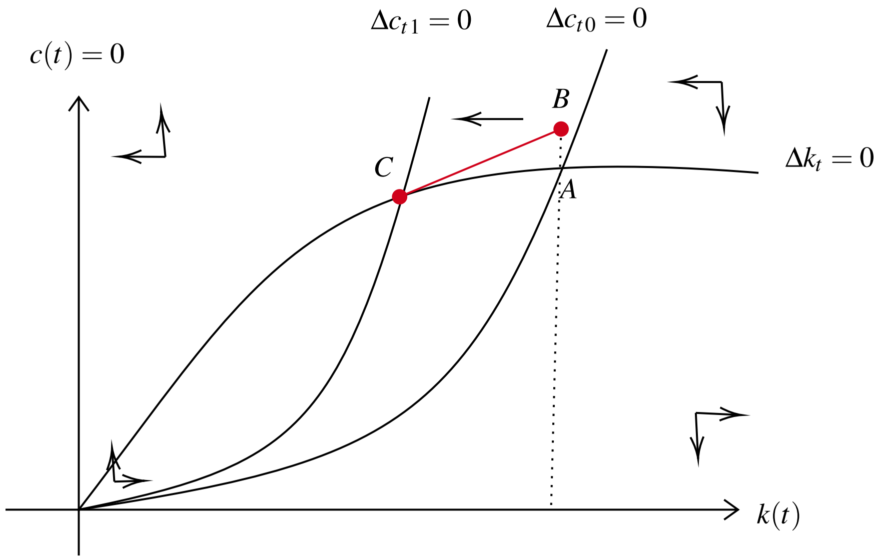
- **b) China realiza una donación al gobierno que incrementa la infraestructura pública en un 10 %.**

Shock: cambia la base a la que crece la economía pero no cambian las tasas.
Aquí no se afecta ninguno de los parámetros, y la determinación del crecimiento está dado por los parámetros.

- Asuma una economía cerrada que cumple con todos los supuestos del modelo de generaciones traslapadas. Dicha economía se encuentra en equilibrio. A partir de esto la economía podría enfrentarse a alguno de las siguientes perturbaciones. Explique qué ocurriría en la economía con el capital, producto, ahorro y consumo después de que se alcanza un nuevo equilibrio. Explique lo que ocurre con la perturbación, el proceso de ajuste y el equilibrio en la economía. Relacione su respuesta con un gráfico. Las situaciones son las siguientes: **d) La inequidad en el ingreso continúa acrecentándose, de forma tal que a las nuevas generaciones cada vez les cuesta más acumular capital.**
Shock: $\downarrow \beta$

$$\Delta c_t = 0$$

$$\uparrow c_t = \frac{(1+f'(k_{t+1}))n(1-\beta)k_{t+1}}{\downarrow \beta\,[1+f'(k_{t+1})]-1}$$

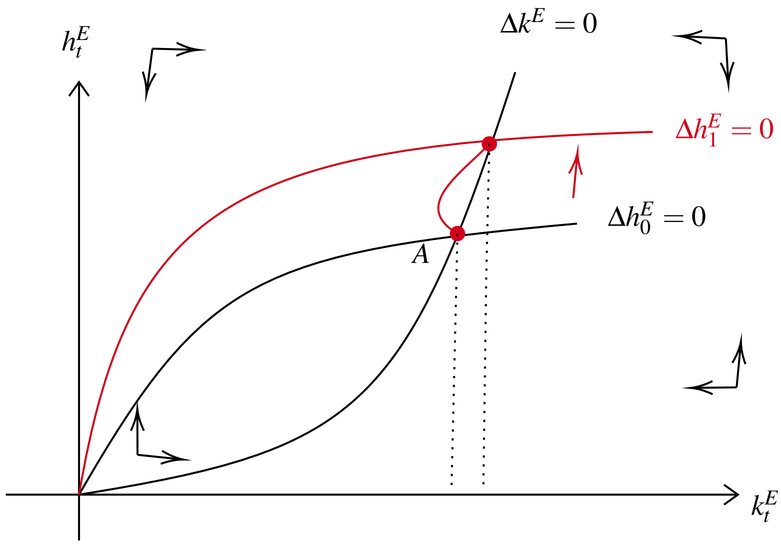


Disminuye el ahorro, el ahorro es menor a los costos de reposición, hay incentivo a desinvertir, hay inversión negativa, al siguiente período disminuye el nivel de capital instalado, disminuye el ingreso, disminuye el consumo y el ahorro pero también los costos de reposición, sigue habiendo brecha negativa porque los costos de reposición siguen siendo mayores al ahorro, se repite el proceso hasta que se cierra la brecha en C.

- ¿El P_j siempre va en la misma dirección que en r? $\rightarrow$ sí. ¿Se puede tomar el cambio de r como dado desde el puro principio? $\rightarrow$ sí.
- Considere la economía de capital humano de Mankiw-Romer-Weil (1992). Suponga que la economía está en estado estacionario. Identifique la perturbación, analice el proceso de ajuste, encuentre el nuevo nivel de estado estacionario para el capital y producto por unidad efectiva de trabajo y explique qué ocurre con el ingreso per capita y el ingreso de la economía en el nuevo equilibrio en cada uno de los siguientes escenarios: **e) El gobierno decide incrementar impuestos para financiar una reforma que aumente la inversión pública en capital humano.**
Shock: $\uparrow s_h$.

$$\Delta k^E = 0 \Rightarrow h_t^E = \left(\frac{z+\delta}{s_k}\right)^{\frac{1}{\phi}}$$

$$\Delta h^E = 0 \Rightarrow \left(\frac{\uparrow s_h}{z+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\phi}}$$



En A se está en estado estacionario. El shock me pasa de A $\rightarrow$ B. Ahora el ahorro para el capital humano es mayor que los costos de reposición y hay un incentivo a invertir. Hay inversión positiva y al siguiente período aumenta el nivel de capital instalado. Aumenta la producción y con ello aumentan los costos de reposición pero también el consumo y el ahorro, y el aumento en el ahorro significa que aumentan el ahorro destinado al capital humano, el ahorro es mayor a los costos de reposición, hay incentivo a invertir, hay inversión positiva, aumenta el nivel de capital humano instalado, sube el producto y aumentan los costos de reposición, también el consumo y el ahorro, pero aumentan ambos ahorros.

CRECIMIENTO Y CICLOS

Canva