02.11.2023

Cursul 5

Teorema lui PICARD pentru ecuații diferențiale scalare

Fie $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Fie $\Delta = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$. Dacă $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ verifică:

i) f continuă pe Δ

ii) f lipschitziană în raport cu x pe Δ, atunci problema Cauchy

$$(1)\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

care o soluție unică $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to [x_0 - b, x_0 + b]$, unde $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, iar $M > 0$ este un majorant pentru $|f|$ pe Δ ($|f(t, x)| \leq M, (\forall)(t, x) \in \Delta$).

Ideea de demonstrație: Asociem șirul aproximațiilor succesive

$$(2)\quad \begin{cases} x_0(t) = x_0 \\ x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\,ds, \ t \in [t_0-\delta, t_0+\delta],\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- se demonstrează prin inducție matematică:

$P(n): |x_n(t) - x_0| \le b, \ \forall\, t \in [t_0-\delta, t_0+\delta], (\forall) n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (t, x_n(t)) \in \Delta, (\forall) t \in [t_0-\delta, t_0+\delta], \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)$ bine definit

(pot calcula $f(s, x_{n-1}(s))$, deoarece f era definită doar pe Δ!)

- se arată că șirul (x_n) este convergent (uniform) la o soluție x a ecuației integrale $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds$, care este echivalentă cu problema Cauchy (1)

- se arată că soluția x este unică (prin reducere la absurd)

Evaluarea erorii:

$$|x_n(t) - x(t)| \le \frac{M}{L} \cdot \frac{(L\delta)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{L\delta}, (\forall) t \in [t_0-\delta, t_0+\delta], (\forall) n \in \mathbb{N}$$

termenul n din șirul aproximărilor succesive

soluție pentru pb Cauchy

$\frac{(L\delta)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow x_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} x(t),$

$(\forall) t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$

Exemplu: Să se afle un interval de existență și unicitate pentru soluția (PC): $\begin{cases} x' = t^2 + \frac{x^2}{t} \\ x(1) = 0 \end{cases}$

Să se scrie primii 3 termeni din șirul aproximărilor succesive.

Identific datele problemei: $t_0 = 1$

$x_0 = 0$

$f(t, x) = t^2 + \frac{x^2}{t}$, $t \ne 0$

Domeniul maxim de definiție pentru f:

$$f : \underset{t}{\mathbb{R}^*} \times \underset{x}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$$

Pentru ca $t \neq 0$ trebuie ca $a \in (0,1)$; $b > 0$ este oarecare.

$$\Delta = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b; x_0 + b]$$

Fie $a = \frac{1}{2}$, $b = 1 \Rightarrow \Delta = \left[1 - \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2}\right] \times [0-1, 0+1] = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \times [-1; 1]$

Verific ipotezele din Th. PICARD:

i) f continuă pe Δ (ca funcție rațională)

ii) f Lipschitz în raport cu x pe Δ

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 + 2 \cdot \frac{1}{t} x = \frac{2x}{t}$ $(\forall)(t,x) \in \Delta$; $\frac{\partial f}{\partial x}$ continuă pe Δ (funcție rațională) $\Rightarrow$ are loc ii)

$\overset{T.P}{\Longrightarrow}$ pb. Cauchy (PC) are o soluție unică $x : [\underset{1}{t_0} - \delta, \underset{1}{t_0} + \delta] \to [-1; 1]$,

unde $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{M}\right\}$

$$|f(t,x)| = \left|t^2 + \frac{x^2}{t}\right| = t^2 + \frac{x^2}{t} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{9}{4} + \frac{4}{2} = \frac{17}{4} = M, (\forall)(t,x) \in \Delta$$

$\Rightarrow \delta = \min\left\{\frac{1}{2}; \frac{4}{17}\right\} = \frac{4}{17}$

$$x : \left[1 - \frac{4}{17}; 1 + \frac{4}{17}\right] \to [-1; 1] \iff x : \left[\frac{13}{17}; \frac{21}{17}\right] \to [-1; 1]$$

Primii 3 termeni din șirul aproximațiilor succesive:

$x_0, x_1, x_2 : \left[\frac{13}{17}; \frac{21}{17}\right] \to [-1; 1]$

$x_0(t) = x_0 = 0$

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))\,ds = 0 + \int_1^t f(s,0)\,ds = \int_1^t s^2\,ds = \left.\frac{s^3}{3}\right|_1^t \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = \frac{t^3 - 1}{3}$

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))\,ds = \int_1^t f\left(s, \frac{s^3-1}{3}\right) ds = \int_1^t s^2 + \frac{1}{s} \cdot \frac{(s^3-1)^2}{9}\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \int_1^t \left(s^2 + \frac{1}{s}\cdot\frac{s^6+2s^3+1}{9}\right)ds = \int_1^t s^2 ds + \frac{1}{9}\int_1^t s^5+2s^2+\frac{1}{s}\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \frac{s^3}{3}\Big|_1^t + \frac{1}{9}\cdot\frac{s^6}{6}\Big|_1^t - \frac{2}{9}\cdot\frac{s^3}{3}\Big|_1^t + \frac{1}{9}\ln s\Big|_1^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \frac{t^3-1}{3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{s^6-1}{6} - \frac{2}{9}\cdot\frac{t^3-1}{3} + \frac{1}{9}\ln t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \frac{1}{9}\cdot\frac{t^6-1}{6} - \frac{7}{9}\cdot\frac{t^3-1}{3} + \frac{1}{9}\ln t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \frac{1}{9}\left((t^6-1)\frac{1}{6} - \frac{7}{3}(t^3-1) + \ln t\right)$$

Teorema lui PICARD pentru sisteme de ecuații diferențiale de ordinul I

Fie sistemul de ecuații diferențiale de ordinul I:

$$(\Delta)\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_1(t_0) = x_1^0 \\ x_2(t_0) = x_2^0 \\ \dots \\ x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases}$$

unde $t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0 \in \mathbb{R}$ date

Th. Picard: Fie $a, b > 0$. Fie paralelipipedul $(n+1)$ dimensional
$\Delta = \{(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / |t - t_0| \le a, |x_i(t) - x_i^0| \le b, (\forall) 1 \le i \le n\} =$
$= [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_1^0 - b, x_1^0 + b] \times [x_2^0 - b, x_2^0 + b] \times \dots \times [x_n^0 - b, x_n^0 + b] \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Fie $f_1, f_2, \dots, f_n : \Delta \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ care verifică:

i) $f_1, f_2, \dots, f_n$ continue pe Δ

ii) $f_1, f_2, \dots, f_n$ lipschitziene în raport cu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pe Δ, adică $(\exists) L > 0$ constant astfel încât:

$$|f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n) - f_j(t, y_1, y_2, \dots, y_n)| \le L \max(x_i - y_i),$$

$(\forall)(t, x_1, x_2, \dots, x_n), (t, y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Delta, (\forall) 1 \le j \le n, (\forall) 1 \le i \le n$

Atunci problema Cauchy (1) are o soluție unică $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, cu $x_j : [t_0-\delta, t_0+\delta] \to [x_j^0 - b ; x_j^0 + b]$, $1 \le j \le n$, unde $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, cu $M>0$ majorant pentru $\{|f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n)| \mid (t, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Delta, 1 \le j \le n\}$

Observație: O condiție suficientă ca să aibă loc ipoteza ii) este să $\exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $(\forall)\ 1 \le i, j \le n$ și toate aceste derivate să fie continue.

Ideea de demonstrație: Observăm că problema Cauchy (1) $\Leftrightarrow$ sistemul de ecuații integrale (2) $x_j(t) = x_j^0 + \int_{t_0}^{t} f_j(s, x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s))ds$, cu $1 \le j \le n$.

Introducem șirul aproximațiilor succesive:

$$(3)\begin{cases} x_j^0(t) = x_j^0 \\ x_j^k(t) = x_j^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1^{k-1}(s), x_2^{k-1}(s), \dots, x_n^{k-1}(s))ds, \ t \in [t_0-\delta, t_0+\delta] \end{cases}$$

$k \in \mathbb{N}^*$, $1 \le j \le n$.

Se arată că șirul aproximațiilor succesive e bine definit și că converge la o soluție a ecuațiilor integrale (2), despre care se arată că e unică.

Exemplu: Găsiți un interval de existență și unicitate a soluției pentru (PC) $\begin{cases} x_1' = 2tx_2 - x_1^2 \\ x_2' = tx_1 - 1 \\ x_1(0) = -2 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$. Scrieți primele 3 grupe de termeni din șirul aproximațiilor succesive.

Identific datele problemei: $t_0 = 0$

$x_1^0 = -2$, $x_2^0 = 1$

$f_1(t, x_1, x_2) = 2tx_2 - x_1^2$

$f_2(t, x_1, x_2) = tx_1 - 1$

Domeniul maxim de definiție pentru:

$f_1, f_2 : \underset{t}{\mathbb{R}} \times \underset{x_1}{\mathbb{R}} \times \underset{x_2}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ pot alege $(\forall)\, a, b > 0$. Fie $a = 1$, $b = 3$.

$\Delta = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_1^0 - b; x_1^0 + b] \times [x_2^0 - b; x_2^0 + b] = [-1; 1] \times [-5; 1] \times [-2; 4] \subset \mathbb{R}^3$

paralelipiped

Verific ipotezele Th PICARD: ~~i)~~

i) f_1, f_2 continue pe Δ (ca funcție polinomială)

ii) f_1, f_2 Lipschitz în (x_1, x_2) pe Δ

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, x_1, x_2) = -2x_1 \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(t, x_1, x_2) = 2t \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(t, x_1, x_2) = t \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(t, x_1, x_2) = 0
\end{array}\right\} \to \text{bine definite și continue pe } \Delta \Rightarrow \text{are loc ii}$$

$\overset{TP}{\Longrightarrow}$ problema Cauchy (PC) are o soluție unică (x_1, x_2):

$x_1 : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to [-5, 1]$, $x_2 : [t_0 - \delta; t_0 + \delta] \to [-2; 4]$

$\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\} = \min\{1; \frac{3}{M}\}$

$|f_1(t, x_1, x_2)| = |2tx_2 - x_1^2| \leq 2|t||x_2| + |x_1|^2 \leq 2 \cdot 1 \cdot 4 + 5^2 = 33, (\forall)(t, x_1, x_2) \in \Delta$

$|f_2(t, x_1, x_2)| = |tx_1 - 1| \leq |t||x_1| + 1 \leq 1 \cdot 5 + 1 = 6, (\forall)(t, x_1, x_2) \in \Delta$

$M = \max\{6; 33\} = 33 \Rightarrow \delta = \min\{1; \frac{1}{11}\} = \frac{1}{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_1, x_2) : [-\frac{1}{11}; +\frac{1}{11}] \to [-5, 1] \times [-2; 4]$

$$\begin{cases} x_1^0(t) = x_1^0 = -2 \\ x_2^0(t) = x_2^0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^1(t) = x_1^0 + \int_{t_0}^{t} f_1(s, x_1^0(s), x_2^0(s))ds = -2 + \int_0^t f_1(s,-2,1)ds = -2 + \int_0^t 2s - 4ds = -2 + s^2\Big|_0^t - 4s\Big|_0^t \Rightarrow \\ x_2^1(t) = x_2^0 + \int_{t_0}^{t} f_2(s; x_1^0(s); x_2^0(s))ds = 1 + \int_0^t f_2(s;-2;1)ds = 1 + \int_0^t s\cdot(-2) - 1ds = 1 - s^2\Big|_0^t - s\Big|_0^t \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^1(t) = t^2 - 4t - 2 \\ x_2^1(t) = 1 - t^2 - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^2(t) = x_1^0 + \int_{t_0}^{t} f_1(s, x_1^1(s); x_2^1(s))ds = -2 + \int_0^t f_1(s, -2+s^2-4s, 1-s^2-s)ds \Rightarrow \\ x_2^2(t) = x_2^0 + \int_{t_0}^{t} f_2(s; x_1^1(s), x_2^1(s))ds = 1 + \int_0^t f_2(s, -2+s^2-4s, 1-s^2-s)ds \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2(t) = -2 + \int_0^t [2s(1-s^2-s) - (-2+s^2-4s)^2]ds = -2 + \int_0^t [2s - 2s^3 - 2s^2 - (4 + s^4 + 12s^2 + 16s - 8s^3)]ds \\ x_2^2(t) = 1 + \int_0^t [s(-2+s^2-4s) - 1]ds = 1 + \int_0^t -2s + s^3 - 4s^2 - 1ds \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2(t) = -2 + \int_0^t (-s^4 + 6s^3 - 14s^2 - 14s - 4)ds = -2 - \frac{t^5}{5} + \frac{3}{2}t^4 - \frac{14}{3}t^3 - 7t^2 - 4t \\ x_2^2(t) = 1 - t^2 + \frac{t^4}{4} - 4\frac{t^3}{3} - t \end{cases}$$

$$(x_1^0, x_2^0), (x_1^1; x_2^1), (x_1^2, x_2^2) : \left[-\frac{1}{11}; \frac{1}{11}\right] \to [-5, 1] \times [-2; 4]$$

Observație: Problema Cauchy pentru sisteme diferențiale de ordinul I poate fi scrisă mai simplu în formă vectorială.

Pe $\mathbb{R}^n$ introducem norma: $\|y\| = \max|y_i|, (\forall) y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Spunem că o funcție vectorială $x : \underset{\text{interval}}{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ~~x(t) = (x1(t), x2(t), ...)~~ $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ (unde componentele $x_j : I \to \mathbb{R}, 1 \le j \le n$ sunt funcții scalare) are o proprietate P (continuitate, derivabilitate, integrabilitate) dacă fiecare componentă a sa are proprietatea P.

Derivata lui x în punctul $t \in I$: $x'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$

Integrala Riemann a lui x pe $[a,b] \subset I$: $\int_a^b x(t)\,dt = \left(\int_a^b x_1(t)dt, \dots, \int_a^b x_n(t)dt\right)$

Introducem notațiile:

$x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$f=(f_1, f_2, \dots, f_n): \Delta \to \mathbb{R}^n$

$x_0=(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

Cu aceste notații, problema Cauchy pentru sisteme diferențiale se rescrie (PC_v): $\begin{cases} x'(t)=f(t,x) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$, iar Th. Picard ia forma:

Th. Picard: Dacă $f: \Delta \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ este continuă pe Δ și lipschitziană în raport cu x pe Δ, atunci problema Cauchy (PC_v) are o soluție unică $x:[t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R}^n$, unde $\delta=\min\{a, \frac{b}{M}\}$, cu $M>0$ majorant pentru $\|f\|$ pe Δ (adică $\|f(t,x)\| \le M$, $(\forall)(t,x)\in\Delta$).

Th. PICARD pentru ecuații diferențiale de ordin superior

Fie $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$. Fie pb. Cauchy:

$$(1)\begin{cases} x^{(n)}=f(t,x,x',\dots,x^{(n-1)}) \\ x(t_0)=x_1^0, x'(t)=x_2^0, x''(t_0)=x_3^0, \dots, x^{(n-1)}(t_0)=x_n^0 \end{cases}$$ unde $t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0 \in \mathbb{R}$ date

Th Picard: Fie $a, b>0$. Fie paralelipipedul $(n+1)$-dimensional

$\Delta=\{(t,x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid |t-t_0|\le a, |x_j-x_j^0|\le b, (\forall) 1\le j\le n\}=$
$=[t_0-a, t_0+a]\times[x_1^0-b, x_1^0+b]\times\dots\times[x_n^0-b; x_n^0+b]$.

Fie $f:\Delta\subset\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$. Dacă

i) f continuă pe Δ

ii) $(\exists) L>0$ constant a.î. $|f(t,x_1,x_2,\dots,x_n)-f(t,y_1,y_2,\dots,y_n)|\le L\max|x_j-y_j|$

$(\forall)(t,x_1,\dots,x_n),(t,y_1,\dots,y_n)\in\Delta$, atunci problema Cauchy (1) are o soluție unică $x:[t_0-\delta, t_0+\delta]\to\mathbb{R}$, unde $\delta=\min\{a,\frac{b}{M}\}$, cu $M>0$ majorant pentru $\{|x_2|, |x_3|, \dots, |x_n|, |f(t,x_1,x_2,\dots,x_n)| \mid (t,x_1,x_2,\dots,x_n)\in\Delta\}$

Ideea de demonstrație:

Prin substituția $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ x_3 = x'' \\ \dots \\ x_{n-1} = x^{(n-2)} \\ x_n = x^{(n-1)} \end{cases}$, pb Cauchy (1) <=> (2) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \dots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases}$

Pt pb. Cauchy (2) se aplică Th Picard pentru sisteme.

Exemplu: Găsiți un interval de existență și unicitate pentru soluția pb. Cauchy $\begin{cases} x'' = (t+2)x' + t^2 + x \\ x(0) = 0, \; x'(0) = 1 \end{cases}$

Identific datele problemei:

$t_0 = 0$, $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 1$, $f(t, x_1, x_2) = (t+2)x_2 + t^2 + x_1$

Observ că $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ => pot alege $\forall a, b > 0$

Fie $a = 2, b = 3$

$\Delta = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_1^0 - b ; x_1^0 + b] \times [x_2^0 - b ; x_2^0 + b] = [-2;2] \times [-3;3] \times [-2,4]$

Verific ipotezele T. Picard:

i) f continuă pe Δ (funcție polinomială)

ii) f Lipschitz în (x_1, x_2) pe Δ.

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = t + 2$ bine definite și continue => are loc ii)

$\xRightarrow{T.P.}$ pb Cauchy (PC) are o soluție unică $x: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}$.

$\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\} = \min\{2; \frac{3}{M}\}$

M = majorant pentru $|x_2|$, $|f|$ pe Δ!

Scanat cu CamScanner

$|x_2| \le 4$, $(\forall)(t, x_1, x_2) \in \Delta$

$|f(t, x_1, x_2)| = |(t+2)x_2 + t^2 + x_1| \le (|t|+2)|x_2| + |t|^2 + |x_1| \le (2+2)4 + 2^2 + 3 = 23$

$M = \max\{4, 23\} = 23$

Deci $\delta = \min\{2, \frac{3}{23}\} = \frac{3}{23}$

Deci $x : [-\frac{3}{23}; \frac{3}{23}] \to \mathbb{R}$, $[-3; 3]$ intervalul lui x_1

2.11.2023

Seminarul 5

Ecuații de ordin superior reductibile la ecuații rezolvabile prin cuadraturi

(A) $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \ldots, x^{(n)}) = 0$ ecuații de ordin n

Facem substituția $x^{(k)} = y \Rightarrow F(t, y, y', \ldots, y^{(n-k)}) = 0$ ec. de ordin $n-k$

Aflu y, prin k integrări aflu x

(B) Ecuații autonome (nu depind explicit de timp)

$F(x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$ ec. de ordin n în $x = x(t)$

x

$x' = p$ (metoda parametrului)

$$x'' = (x')' = p' = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{x' = p} = p \cdot \frac{dp}{dx}$$

Astfel ajungem la o ecuație de ordin $(n-1)$ în $p = p(x)$

① $tx''+x'=4t,\ t>0$ Ⓐ $k=1$

② $2tx'x''=(x')^2-1$ Ⓐ $k=1$

③ $xx''=(x')^2$ Ⓑ

④ $\begin{cases} xx''=x'+(x')^2 \\ x(0)=x'(0)=1 \end{cases}$ Ⓑ

① $tx''+x'=4t,\ t>0$

Substituție: $x'=y \Rightarrow x''=(x')'=y'$

$ty'+y=4t \Rightarrow ty'=-y+4t \,/ : t>0 \Rightarrow y'=\underset{a(t)}{\left(-\frac{1}{t}\right)}y+\underset{b(t)}{4}$ (EL) cu $y=y(t)$

(FVC) $y(t)=y_0\, e^{\int_{t_0}^{t}a(s)ds}+\int_{t_0}^{t}e^{\int_s^t a(r)dr}\, b(s)\,ds$

$\int_{t_0}^{t}-\frac{1}{s}ds=-\ln s\Big|_{t_0}^{t}=-\ln t+\underbrace{\ln t_0}_{=0}\Rightarrow t_0=1$

$y(t)=y_0\, e^{-\ln t}+\int_1^t e^{-\ln t+\ln s}\cdot 4\,ds \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t)=y_0\cdot\frac{1}{t}+\int_1^t\frac{s}{t}\cdot 4\,ds \Rightarrow y(t)=y_0\cdot\frac{1}{t}+\frac{4}{t}\cdot\frac{s^2}{2}\Big|_1^t \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t)=y_0\cdot\frac{1}{t}+\frac{2}{t}(t^2-1)=2t+\frac{1}{t}\underbrace{(y_0-2)}_{c_1}=\frac{c_1}{t}+2t,\ (\forall)\, t>0$

$x'(t)=\frac{c_1}{t}+2t\ \Big/\int \Rightarrow x(t)=c_1\cdot\ln t+t^2+c_2,\ (\forall)\, t>0,\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$ const.

② $\left.\begin{array}{l} 2tx'x''=(x')^2-1 \\ x'=y\Rightarrow x''=y' \end{array}\right\}\Rightarrow 2ty\cdot y'=y^2-1$ (EVS) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2t\cdot y\frac{dy}{dt}=y^2-1 \,\Big/\cdot\frac{1}{(y^2-1)t},\ (y^2-1)\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2y}{y^2-1}dy=\frac{1}{t}dt \,\Big/\int \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\frac{2y}{y^2-1}dy=\int\frac{1}{t}dt \Rightarrow \ln|y^2-1|=\ln|t|+\underset{\ln k,\ k>0}{c} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|y^2-1|=\ln(k\cdot|t|)\Rightarrow |y^2-1|=k\cdot|t|\Rightarrow y^2-1=\pm k\cdot t\Rightarrow y^2=at+1\Rightarrow$

$\Rightarrow y=\pm\sqrt{at+1};\ at+1>0,\ a\in\mathbb{R}^*$

$x'(t) = \pm\sqrt{at+1} \,/\!/\int \Rightarrow x = \pm \frac{1}{a}\int a(at+1)^{1/2}dt \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{a}\left(\frac{at+1}{1+\frac{1}{2}}\right)^{1+\frac{1}{2}} + b \Rightarrow \cancel{x = \pm\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{3}\cdot(at+1)^{3/2} + b,\ at+1>0,\ a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}$

II $y^2-1=0 \Rightarrow y=\pm1 \Rightarrow x'(t)=\pm1 \Rightarrow x(t)=\pm t+b$

$\left.\begin{array}{l} m\cdot s = 2t - (\pm1)\cdot 0 = 0 \\ m\cdot d = (\pm1)^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m_s = m\cdot d,\ (\forall)\ t\in\mathbb{R}$

$x_{1,2}(t) = \pm\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{3}(at+1)^{3/2}+b,\ at+1>0,\ a\in\mathbb{R}^*,\ b\in\mathbb{R}$

$x_{3,4}(t) = \pm t + b$

③ $x x'' = (x')^2$

x stă

$x' = p$

$\Rightarrow x'' = p' = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{dp} = p\frac{dp}{dx}$

$x\cdot p\frac{dp}{dx} = p^2 \Rightarrow p\left(x\frac{dp}{dx} - p\right) = 0$ ecuație de ordin I în $p = p(x)$

I $p=0 \Leftrightarrow x'=0 \,/\!/\int dt \Rightarrow x(t) = b$, care verifică ③ pt. că $\begin{cases} m_s = b\cdot 0 \\ m_d = 0^2 \end{cases}$

II $x\frac{dp}{dx} = p$ (EVS) $\Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \,/\!/\int,\ p\neq0,\ x\neq0$ ($p=0,\ x=0$ intră la I)

$\Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \underbrace{b}_{=\ln k,\ k>0} \Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln k \Rightarrow$

$\Rightarrow |p| = |x|\cdot k \Rightarrow p = \pm kx = a\cdot x,\ a\in\mathbb{R}^*$

$x' = p \Rightarrow x' = a\cdot x$

$$x(t) = x_0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} + \int \ldots \cdot \underbrace{b(s)}_{0} ds \Rightarrow x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0\, e^{\int_0^t a\,ds} = x_0\, e^{a \cdot s|_0^t} = x_0\, e^{at}$$

④ $\begin{cases} x x'' = x' + (x')^2 \\ x(0) = x'(0) = 1 \end{cases}$

x sta

$x' = p$

$x'' = (x')' = p' = \frac{dp}{dt} = p\frac{dp}{dx}$

$x p \frac{dp}{dx} = p + p^2 \Rightarrow p\left(x\frac{dp}{dx} - 1 - p\right) = 0$

I $p = 0 \Rightarrow x' = 0 \,/\!/ \int dt \Rightarrow x(t) = c$, care verifică ④ pt. că $\begin{cases} m_s = c \cdot 0 \\ md = 0 + 0^2 \end{cases}$

II $x\frac{dp}{dx} - 1 - p = 0$

$x\frac{dp}{dx} = 1 + p$

$\frac{dp}{1+p} = \frac{dx}{x} \,/\!/ \int,\ p \neq -1,\ x \neq 0$

$\int \frac{dp}{1+p} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|1+p| = \ln|x| + \ln k \Rightarrow |1+p| = k|x| \Rightarrow$ ($k > 0$)

$\Rightarrow 1 + p = \pm k \cdot x = a x,\quad a \in \mathbb{R}^*$

$p = ax - 1$

$x' = ax - 1$

$\frac{dx}{dt} = ax - 1 \Rightarrow \frac{dx}{ax-1} = dt \,/\!/ \int \Rightarrow \frac{1}{a}\int \frac{a\,dx}{ax-1} = \int dt \Rightarrow \frac{1}{a}\ln|ax-1| = t + c_1 \,/ \cdot a \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|ax-1| = at + ac_1 \Rightarrow |ax - 1| = e^{at + ac_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow ax - 1 = \underbrace{\pm e^{ac_1}}_{b} \cdot e^{at} = b \cdot e^{at} \Rightarrow x_2(t) = \frac{b e^{at} + 1}{a},\quad a \in \mathbb{R}^*$

$b \in \mathbb{R}$

Scanat cu CamScanner

III $p = -1$

$x' = -1 \Rightarrow x(t) = -t + c_2$

$ms = (-t + c_2) \cdot 0 = 0$

$md = -1 + 1 = 0$

$\Rightarrow x_3(t) = -t + c_2$ soluție pentru ecuație

$x(0) = 1$

$x'(0) = 1$

$x_1(t) = c \Rightarrow x_1(0) = c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow x_1(t) = 1$

$x_1'(t) = 0 \Rightarrow x_1'(0) = 0 \neq 1$

$\Rightarrow x_1$ nu e soluție

$x_3(t) = -t + c_2 \Rightarrow x_3(0) = c_2 \Rightarrow c_2 = 1 \Rightarrow x_3(t) = -t + 1$

$x_3'(t) = -1 \Rightarrow x_3'(0) = -1 \neq 1$

$\Rightarrow x_3$ nu e soluție

$x_2(t) = \dfrac{b \cdot e^{at} + 1}{a} \Rightarrow x_2(0) = \dfrac{b+1}{a} \Rightarrow \dfrac{b+1}{a} = 1 \Rightarrow b + 1 = a$

$x_2'(t) = \dfrac{\cancel{a} \cdot b \cdot e^{at}}{\cancel{a}} = b e^{at} \Rightarrow x_2'(0) = b = 1 \Rightarrow a = 2$

$x_2(t) = \dfrac{e^{2t} + 1}{2}$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$

⑤ $(2e^{x} - t)x' = 1$

⑥ $x' = \sin(t - x)$

⑤ $x' = \dfrac{1}{2e^{x} - t}$ // nu seamănă cu niciunul din tipurile de ecuații cunoscute.

$(2e^{x} - t)\dfrac{dx}{dt} = 1 \Big/ \cdot \dfrac{dt}{dx} \left(= \dfrac{1}{x'}\right) \neq 0$ (dacă $x' = 0$, ec. devine $0 = 1$ (F))

$\dfrac{dt}{dx} = \overset{a(x)}{-1} t + \overset{b(x)}{2e^{x}}$ (EL) în $t = t(x)$

(FVC) $t(x) = t_0 \, e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds} + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{s}^{x} a(r)\,dr} \cdot b(s)\,ds$

$$\int_{x_0}^{x} -1\, ds = -x + \underbrace{x_0}_{=0}$$

$$t(x) = t_0\, e^{-x} + \int_0^x e^{-x+s} \cdot 2e^{s}\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(x) = t_0\, e^{-x} + e^{-x}\int_0^x 2e^{2s}\, ds = t_0 e^{-x} + e^{-x}\, e^{2s}\Big|_0^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(x) = t_0 \cdot e^{-x} + e^{-x}\left(e^{2x} - 1\right) \Rightarrow t(x) = e^{-x}\underbrace{(t_0 - 1)}_{\mathcal{C}\in\mathbb{R}} + e^{x} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t(x) = \mathcal{C} \cdot e^{-x} + e^{x} \Rightarrow \mathcal{C}\cdot e^{-x} + e^{x} = t$, $\mathcal{C}\in\mathbb{R}$ constant / soluție în formă implicită

⑥ $x' = \sin(t - x)$

Facem substituția $t - x = y \Rightarrow x = t - y \Rightarrow x' = 1 - y'$

$1 - y' = \sin y \Rightarrow y' = 1 - \sin y$ (EVS)

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \sin y \Rightarrow \frac{dy}{1 - \sin y} = dt \Big/ \int ; \ \sin y \neq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1 - \sin y} = \int dt \rightsquigarrow$$

I $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = u \Rightarrow \sin y = \frac{2u}{1+u^2}$, $y = 2\operatorname{arctg} u$; $dy = \frac{2}{1+u^2}\, du$

II amplific cu $1 + \sin y$

$$\int \frac{1 + \sin y}{1 - \sin^2 y}\, dy = t + \mathcal{C}, \ \mathcal{C}\in\mathbb{R} \text{ constant}$$

$$\int \frac{1 + \sin y}{\cos^2 y}\, dy = t + \mathcal{C} \Rightarrow \int \frac{1}{\cos^2 y}\, dy + \int -(\cos y)' \cdot (\cos y)^{-2}\, dy = t + \mathcal{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} y - \frac{(\cos y)^{-2+1}}{-2+1} = t + \mathcal{C} \Rightarrow \operatorname{tg} y + \frac{1}{\cos y} = t + \mathcal{C} \Big/ \cdot \cos y \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin y + 1 = (t + \mathcal{C})\cos y \Rightarrow \sin(t - x) + 1 = (t + \mathcal{C})\cos(t - x)$, $\mathcal{C}\in\mathbb{R}$ const.

II Dacă $\sin y = 1 \Rightarrow y = (-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$(\sin \frac{\pi}{2} = 1)$ $\quad x = t - y = t - (-1)^k \frac{\pi}{2} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ este soluție pentru ecuația inițială pentru că

$$\begin{cases} ms = x' = 1 \\ md = \sin\left[t - t + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} + k\pi\right] = 1 \end{cases}$$

Teorema lui Picard

Găsiți un interval ~~pentru~~ pe care există o soluție unică pentru pb Cauchy de mai jos; scrieți primele 3 aproximări succesive ale soluției:

a) $\begin{cases} x' = 1 - tx^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} x' = \frac{x}{t} + x^2 + 2 \\ x(1) = 0 \end{cases}$

a) Identificăm datele problemei:

$t_0 = 0$

$x_0 = 1$

$f(t, x) = 1 - tx^2$

Domeniul maxim de definiție pentru f: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\to$ pot alege $\forall a, b > 0$

Fie $a = 1, b = 2 \Rightarrow \Delta = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] = [-1, 1] \times [-1; 3]$

i) f continuă pe Δ

ii) f lipschitziană în raport cu x pe Δ

$\frac{\partial f}{\partial x} = -t2x = -2tx$, continuă

$\xrightarrow{T.P.}$ pb Cauchy are soluție unică $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to [-1; 3]$,

unde $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\} = \min\{1; \frac{2}{M}\}$, unde $M = \max |f|$ pe Δ

$|f(t,x)| = |1-tx^2| \le 1 + |t| \cdot |x|^2 \le 1 + 1 \cdot 9 = 10 \Rightarrow M = 10, (\forall)(t,x) \in \Delta$

$\delta = \min\left\{1, \frac{2}{10}\right\} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$x : \left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right] \to [-1;3]$

$x_0, x_1, x_2 : \left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right] \to [-1;3]$

$x_0(t) = 1$

$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))ds = 1 + \int_0^t f(s,1)\,ds \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1(t) = 1 + \int_0^t (1 - s \cdot 1^2)ds = 1 + \int_0^t (1-s)\,ds = 1 + s\Big|_0^t - \frac{s^2}{2}\Big|_0^t \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1(t) = 1 + t - \frac{t^2}{2}$

$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds = 1 + \int_0^t f\left(s, 1+s-\frac{s^2}{2}\right)ds \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2(t) = 1 + \int_0^t \left[1 - s\left(1+s-\frac{s^2}{2}\right)^2\right]ds = 1 + \int_0^t \left[1 + s\left(1^2+s^2+\frac{s^4}{4}+2s-1^2-s^3\right)\right]ds$

$\Rightarrow x_2(t) = 1 + \int_0^t 1 - s^2 - \frac{s^5}{4} - 2s^2 + s^4\,ds = 1 + t - \frac{t^3}{\cancel{3}} - \frac{t^6}{24} - \cancel{\ldots} + \frac{t^5}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2(t) = 1 + t - \cancel{t^3}\, t^3 - \frac{t^6}{24} + \frac{t^5}{5}$

b) $t_0 = 1$

$x_0 = 0$

$f(t,x) = \frac{x}{t} + x^2 + 2$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in (0,1)$, $b > 0$

Fie $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$

$\Delta = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b; x_0 + b] = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \times [-1;1]$

i) f continuă pe Δ (funcție elementară)

iii) f lipschitziană în raport cu x pe Δ

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{t} + 2x$ ∴ $\frac{\partial f}{\partial x}$ continuă (funcție rațională)

TP ⇒ pb Cauchy are soluție unică $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to [-1;1]$,
unde $\delta = \min \{a, \frac{b}{M}\} = \min \{\frac{1}{2}; \frac{1}{M}\}$, unde M maj $|f|$ pe Δ

$|f| = \left|\frac{x}{t} + x^2 + 2\right| \le \left|\frac{x}{t}\right| + x^2 + 2 = \frac{|x|}{t} + x^2 + 2 \le \frac{1}{\frac{1}{2}} + 1 + 2 = 5 = M$

$\delta = \min \{\frac{1}{2}; \frac{1}{5}\} = \frac{1}{5}$

$x : [1 - \frac{1}{5}; 1 + \frac{1}{5}] \to [-1;1] \Rightarrow x : [\frac{4}{5}; \frac{6}{5}] \to [-1;1]$

$x_0, x_1, x_2 : [\frac{4}{5}; \frac{6}{5}] \to [-1;1]$

$x_0(t) = x_0 = 0$

$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))ds \Rightarrow x_1(t) = \int_1^t f(s, 0)\, ds \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1(t) = \int_1^t 2\, ds = 2s \Big|_1^t = 2t - 2$

$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds = \int_1^t f(s; 2s-2)ds \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2(t) = \int_1^t \left[\frac{2s-2}{s} + 4s^2 - 8s + 4 + 2\right] ds = \int_1^t (2 - \frac{2}{s} + 4s^2 - 8s + 6) ds \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2(t) = 2 \ln s \Big|_1^t + 4 \frac{s^3}{3}\Big|_1^t - 4s^2 \Big|_1^t + 8s \Big|_1^t \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2(t) = 2 \ln t + 4\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} - 4t^2 + 4 + 8t - 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2(t) = 2 \ln t + 4 \frac{t^3}{3} - 4t^2 + 8t - \frac{16}{3}$

Scanat cu CamScanner