05.10.2023

Cursul 1: Ecuații diferențiale

Definiție: O ecuație diferențială este o relație între o funcție necunoscută, derivatele ei (ordinare obișnuite sau parțiale) până la un anumit ordin și variabila independentă (variabilele independente).

Ordinul maxim de derivare al funcției necunoscute în ecuație se va numi ORDINUL ECUAȚIEI.

Ecuații diferențiale: ~~ordinare~~

- ordinare → pe scurt "ecuații diferențiale", apar când funcția necunoscută depinde de o singură variabilă.
- cu derivate parțiale → pe scurt "ecuații cu derivate parțiale", funcția necunoscută depinde de mai multe variabile

Exemple:

① Legea a doua a lui Newton: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

(1) $m\, x''(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t))$ → legea de mișcare a unei particule materiale de masă m care se mișcă sub acțiunea forței F

t = timpul = variabila independentă

$x = x(t)$ = funcția necunoscută

(1) este o ecuație diferențială de ordinul al II-lea în necunoscuta $x = x(t)$

$x(t)$ = poziția

$\dot{x}(t)$ = viteza

$\ddot{x}(t)$ = accelerația

particulei la momentul t

Caz particular:

↳ dacă forța F este greutatea G, care se opune mișcării, atunci ecuația (1) devine: $m \cdot \ddot{x}(t) = -mg \,/ :m \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -g \,/ \int dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \int -g\,dt = -g\int dt = -gt + C_1;\ C_1 \in \mathbb{R} \,/ \int dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \int (-gt + C_1)\,dt = -g\int t\,dt + C_1 \int dt \Rightarrow$$

$$(2) \Rightarrow x(t) = -g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2;\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ t \geq 0$$

Pentru a individualiza o soluție din infinitatea de soluții (2) punem 2 condiții:

- presupunem cunoscute poziția inițială a punctului $x(0) = x_0$ și viteza inițială a punctului $\dot{x}(0) = v_0$

$\boxed{\text{pas 1}}$ Înlocuim $t = 0$ în (2)

$$x(0) = -g \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow x_0 = C_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}(t) = -gt + C_1 \\ t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{x}(0) = -g \cdot 0 + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0 = C_1$$

Soluția problemei $\begin{cases} \ddot{x}(t) = -g \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$ este unică și este $x(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0$, $t \geq 0$

Asta a fost o problemă Cauchy.

② Ecuația propagării căldurii într-un corp omogen Ω (asimilat unei mulțimi deschise $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1,2,3$):

$$(3)\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \omega^2 \Delta u(x,t) = f(x,t),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T)$$

$T > 0$ (fixat)

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ poziția

t - timpul

$u = u(x,t)$ = temperatura în punctul x al lui Ω la momentul $t \in (0,T)$ → funcția necunoscută

$\omega > 0$ constantă

$f = f(x,t)$ densitatea surselor generatoare de căldură din corp

$$\Delta u(x,t) = \Delta_x u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t)$$ laplaceanul în raport cu coordonatele spațiale

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \omega^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t) = f(x,t)$$

⟶ ecuație cu derivate parțiale de ordinul al II-lea în necunoscuta $u = u(x,t)$

- Dacă temperatura depinde de timp (cazul staționar): $u = u(x)$, atunci ecuația (3) ia forma:

$$(4)\quad \Delta u(x) = g(x) \quad \left(g(x) = -\frac{1}{\omega^2} f(x)\right) \text{ pentru } x \in \Omega$$

⟶ Ecuația lui Poisson

- Dacă, în plus, nu avem surse interne de căldură ($g \equiv 0$), ecuația (4) devine:

$$(5)\quad \Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega$$

⟶ Ecuația lui Laplace

(4) și (5) sunt ecuații cu derivate parțiale de ordinul al II-lea în necunoscuta $u = u(x)$

Observație: Dacă $u(x, t)$ reprezintă concentrația unui gaz în secțiunea x a unui tub $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, la momentul t și dacă coeficientul de difuzie este constant, atunci u verifică aceeași ecuație $\Rightarrow$ (3); de aceea (3) se mai numește și Ecuația difuziei

Ecuații diferențiale (ordinare)

Forma generală:

este o funcție dată necunoscută cu ultima variabilă

(1) $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$; $n \in \mathbb{N}^*$; $F: \Delta(F) \subset \mathbb{R}^{n+2}$

În anumite ipoteze putem scoate $x^{(n)}$ din (1) și obținem o ecuație diferențială de ordin n în forma normală

(2) $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$, unde $f: D(f) \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, o funcție dată

Pentru simplitate, în loc de $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t) \dots$ vom scrie doar $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots$

Definiția 1: Se numește soluție pentru ecuația diferențială de ordin n (1) o funcție $x: I_x \to \mathbb{R}$ (unde $I_x \subset \mathbb{R}$ este un interval cu interiorul nevid - adică $\mathring{I}_x \neq \emptyset$, I_x nu se reduce la un punct) care verifică:

a) $x \in C^n(I_x)$ (adică x este derivabilă de n ori pe I_x și $x^{(n)}$ continuă)

b) $(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) \in \Delta(F)$, $(\forall) t \in I_x$

c) $F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$, $(\forall) t \in I_x$

Definiția 2: Se numește soluție pentru ecuația diferențială de ordin n în forma normală (2) o funcție $x: I_x \to \mathbb{R}$ (unde $I_x \subset \mathbb{R}$ interval cu interiorul $\neq \emptyset$) care verifică:

a) $x \in C^n(I_x)$

b) $(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)) \in D(f), (\forall) t \in I_x$

c) $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)), (\forall) t \in I_x$

Dacă are soluții, o ecuație diferențială de ordin n care o infinitate de soluții, ce depind de n constante.

Definiția 3: Mulțimea soluțiilor unei ecuații diferențiale se numește soluția generală a ecuației.

Dacă dorim să extragem o soluție din soluția generală, trebuie să pun condiții suplimentare asupra ecuației.

Uneori modelele matematice se descriu prin sisteme de ecuații diferențiale.

$$(3) \begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul I în funcțiile necunoscute $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$

$f_1, f_2, \ldots, f_n : D_{deschis} \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ funcții necunoscute

Definiția 4: Se numește soluție a sistemului diferențial de ordin I (3) un n-uplu de funcții $x_1, x_2, \ldots, x_n : I_x \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică:

I_x interval cu interior $\neq \emptyset$

ordinul maxim de derivare din sistem

a) $x_1, x_2, \dots, x_n \in C^1(I_x)$ (derivabile, cu derivata continuă)

b) $(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \Delta$, $(\forall) t \in I_x$

c) $\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $(\forall) t \in I_x$, $1 \le i \le n$

Problema CAUCHY (PC)

Fie ecuația diferențială de ordin I în forma normală: $(n=1)$

$\dot{x} = f(t, x)$, unde $f: \Delta(f) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcție cunoscută

Definiție: $\leadsto$ caut soluții pentru această ecuație funcții de clasă C^1, definite pe un interval, care verifică ecuația.

Dacă are soluție, ecuația are o infinitate de soluții, depinzând de constantă

O problemă Cauchy reprezintă determinarea unei soluții a ecuației $\dot{x} = f(t, x)$ care la un moment dat t_0 să ia o valoare dată x_0.

$$(PC) \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \text{ cu } (t_0, x_0) \in \Delta(f) \end{cases}$$

Prin soluție a (PC) înțelegem o soluție $x: \underset{\text{interval}}{I_x} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a ecuației $\dot{x} = f(t, x)$, astfel încât $t_0 \in I_x$ și $x(t_0) = x_0$

Problema Cauchy pentru o ecuație diferențială de ordin n în forma normală:

$$(PC_n) \begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_{01}, \dot{x}(t_0) = x_{02}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n}; (t_0, x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in D(f) \end{cases}$$

A rezolva (PC_n) înseamnă a găsi o soluție $x: I_x \to \mathbb{R}$ a ecuației astfel încât $t_0 \in I_x$, care verifică cele n condiții inițiale.

Pentru o ecuație diferențială îmi pot pune problema:

- existenței soluției
- unicității soluției
- aproximării soluției
- prelungibilității soluției la un interval maximal
- comportării soluției la capătul intervalului maximal
- dependența continuă a soluției de datele problemei (dacă modific puțin datele problemei, cât de tare se modifică soluția)

Ecuațiile rezolvabile prin cuadraturi

cuadratura -> reducerea unei probleme de analiză matematică la calculul unei integrale.

* 8 tipuri de ecuații (primele 5 sunt în forma normală)

Soluția poate fi dată:

- în formă explicită: $x = x(t)$
- în formă implicită: $F(t, x) = 0$ (constant)
- în formă parametrică: $\begin{cases} t = t(p) \\ x = x(p) \end{cases}$, p - parametru

I Ecuații cu variabile separabile (EVS)

Forma generală: $\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$ (EVS), unde $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$; $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale

$g(x) \neq 0, (\forall) x \in J$

Rezolvare: $\dot{x}(t) = f(t) \cdot g(x(t))$

$\boxed{\text{pas 1}}$ Se simplifică prin $g(x(t))$ care nu se anulează niciodată: $\dfrac{\dot{x}(t)}{g(x(t))} = f(t)$

pas 2 Integrăm de la t_0 la t.

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(s)}{g(x(s))}\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds$$

pas 3 Schimbăm variabila

$$x(s) = \tau \Rightarrow d\tau = \dot{x}(s) ds$$

$$\begin{cases} s = t_0 \Rightarrow \tau = x(t_0) = x_0 \\ s = t \Rightarrow \tau = x(t) \end{cases}$$

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\tau}{g(\tau)}}_{G(x(t)) \to \text{inversabilă}} = \int_{t_0}^{t} f(s) ds$$

pas 4 aplicăm inversa G^{-1}

$$x(t) = G^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} f(s) ds\right)$$

05.10.2023

Seminar 1

Ecuații rezolvabile prin cuadraturi

① Ecuații cu variabilă separabilă (EVS)

Formă generală: $\dot{x} = f(t) \cdot g(x)$, $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$, $I, J \subset \mathbb{R}$

$g(r) \neq 0, \forall r \in J$

Rezolvare: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ notația lui LEIBNIZ

Formal: $\frac{dx}{dt} = f(t) \cdot g(x)$

pas 1 Separăm prin înmulțire sau împărțire pe x de t

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t) dt \,\Big/ \int \Rightarrow \ldots$$

Observație: În practică se întâmplă să existe puncte în care $g = 0$. Dacă $g(x_0) = 0$, atunci $x(t) = x_0$ este soluția EVS pentru că:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{\cancel{g(x)}\,\cancel{dt}} \cdot \dot{x_0} = 0 \\ &f(t)g(x) = f(t)\cdot g(x_0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = f(t)g(x),\ (\forall)\ t \in I$$

Cum procedăm?

- dăm deoparte zerourile lui g, care sunt soluții constante
- rezolvăm (EVS), pe intervalele pe care $g \neq 0$, ca mai sus.

Exerciții:

① $\begin{cases} \dot{x} = e^{-x}\sin 2t \\ x(0) = 0 \end{cases} \to$ (PC)

② $\begin{cases} \dot{x} = 2t(1+x^2) \\ x(0) = 0 \end{cases}$

③ $\dot{x} = t^2x^4$

④ $(4-t^2)(x-1)\dot{x} - 2t(x+1) = 0$

⑤ $\begin{cases} t\dot{x} = 2x + x^2 \\ x(1) = 1 \end{cases}$

① $\dot{x} = e^{-x}\sin 2t$ (EVS) $\Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = e^{-x}\sin 2t \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{x}dx = \sin 2t\,dt \ \Big|\int \Rightarrow \int e^x dx = \int \sin 2t\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{+\mathcal{C}_1}{e^x} = \underset{+\mathcal{C}_2}{-\dfrac{\cos 2t}{2}} + \mathcal{C} \ \Big|\ln \Rightarrow \qquad \mathcal{C} = \mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1;\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$ constant

$\Rightarrow \ln e^x = \ln\left(-\dfrac{\cos 2t}{2} + \mathcal{C}\right) \Rightarrow x = \ln\left(-\dfrac{\cos 2t}{2} + \mathcal{C}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = \ln\left(\mathcal{C} - \dfrac{\cos 2t}{2}\right) \leftarrow$ soluția generală de la 1

$\mathcal{C} \in \mathbb{R}$

$\ln: (0,\infty) \to \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{C} - \dfrac{\cos 2t}{2} > 0$

$x(0) = 0 \Rightarrow \ln\left(\mathcal{C} - \dfrac{\cos 0}{2}\right) = 0 \Rightarrow \ln\left(\mathcal{C} - \dfrac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{C} - \dfrac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \mathcal{C} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x(t) = \ln\left(\dfrac{3 - \cos 2t}{2}\right)$

$\frac{3-\cos 2t}{2} > 0 \Rightarrow 3-\cos 2t > 0 \Rightarrow \cos 2t < 3$ A pt $(\forall) t \in \mathbb{R}$; $\cos y \in [-1,1] \; \forall$

$$x(t) = \ln \frac{3-\cos 2t}{2}, (\forall) t \in \mathbb{R}$$

(2) $\dot{x} = 2t(1+x^2) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t(1+x^2) \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2} = 2t\,dt \,\Big/ \int \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\int t\,dt \Rightarrow \operatorname{arctg} x = t^2 + \mathcal{C} \,/\, tg \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = tg(t^2+\mathcal{C}), \; \mathcal{C} \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} tg\,y = \frac{\sin y}{\cos y} \\ \cos y \neq 0 \Rightarrow y \notin \left\{ \frac{2k+1}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{array}\right\} \Rightarrow t^2 + \mathcal{C} \notin \left\{ \frac{2k+1}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$x(0) = 0 \Rightarrow tg\,\mathcal{C} = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = 0 \Rightarrow x(t) = tg(t^2); \; t^2 \notin \left\{ \frac{2k+1}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \notin \left\{ \pm\sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = tg(t^2); \; t \in \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

(3) $\dot{x} = t^2 \cdot x^4 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = t^2 \cdot x^4 \Rightarrow \frac{dx}{x^4} = t^2\,dt \,\Big/ \int \Rightarrow$

$\Rightarrow \int x^{-4}\,dx = \int t^2\,dt \Rightarrow \frac{x^{-4+1}}{-4+1} = \frac{t^3}{3} + \mathcal{C} \Rightarrow \frac{x^{-3}}{-3} = \frac{t^3}{3} + \mathcal{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-1}{3x^3} = \frac{t^3}{3} + \mathcal{C} \,\Big/ \cdot(-3) \Rightarrow \frac{1}{x^3} = -t^3 - 3\mathcal{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 = \frac{-1}{t^3+3\mathcal{C}} \Rightarrow x(t) = -\sqrt[3]{\frac{1}{t^3+3\mathcal{C}}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{t^3+3\mathcal{C}}}, \; \mathcal{C} \in \mathbb{R}, \; t^3 + 3\mathcal{C} \neq 0$

I dacă $x = 0$, adică $x(t) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} m.s = 0 \\ m.d = t^2 \cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m.s = m.d, (\forall) t \in \mathbb{R} \Rightarrow x_2(t) = 0, (\forall) t \in \mathbb{R}$$

$t^3 \neq -3\mathcal{C} \Rightarrow t \neq -\sqrt[3]{3\mathcal{C}} \Rightarrow t \in (-\infty; -\sqrt[3]{3\mathcal{C}})$ sau
$t \in (-\sqrt[3]{3\mathcal{C}}, +\infty)$

$y \in \mathbb{R}$

④ $(4-t^2)(x-1)\dot{x} - 2t(x+1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (4-t^2)(x-1)\dfrac{dx}{dt} = 2t(x+1) \Rightarrow$

$\underline{\mathrm{I}}$ $\Rightarrow \dfrac{x-1}{x+1}\,dx = \dfrac{2t}{4-t^2}\,dt \;\Big|\int$; $x+1 \neq 0$; $t \neq \pm 2$

$\cancel{\dot{x} = \dfrac{2t(x+1)}{(4-t^2)(x-1)},\ x \neq 1}$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{x-1}{x+1}\,dx = \int \frac{2t}{4-t^2}\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1}\right)dx = \int \frac{-(4-t^2)'}{4-t^2}\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\int \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)dx = -\ln|4-t^2| + C \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2\ln|x+1| = \ln|4-t^2| + C$ ← soluție în formă implicită

$\underline{\mathrm{II}}$ $x = -1$

$(4-t^2)(-2)\cdot 0 - 2t\cdot 0 = 0$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = -1$; $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$ soluție

⑤ $t\dot{x} = 2x + x^2 \Rightarrow \dfrac{t}{dt}\cdot dx = 2x + x^2 \Rightarrow dx = (2x+x^2)\cdot\dfrac{dt}{t} \Rightarrow$

$\underline{\mathrm{I}}$ $\Rightarrow \dfrac{dx}{2x+x^2} = \dfrac{dt}{t}$, $t \neq 0$; $x \neq 0$; $x \neq -2$

$\displaystyle\int \frac{dx}{2x+x^2} = \int \frac{dt}{t}$

$\dfrac{1}{2x+x^2} = \dfrac{1}{x(2+x)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{2+x} = \dfrac{(2+x)A + xB}{x(2+x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2A + xA + Bx = 1 \Rightarrow 2A + x(A+B) = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\int\frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2|=\ln|t|+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|x|-\ln|x+2|=2\ln|t|+\overbrace{2C}^{\ln k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{|x|}{|x+2|}=\ln t^2\cdot k \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{x+2}\right|=\ln(t^2\cdot k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x}{x+2}\right|=kt^2 \Rightarrow \frac{x}{x+2}=\pm kt^2 \Rightarrow \frac{x}{x+2}=z\cdot t^2,\ z\in\mathbb{R}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=(x+2)zt^2 \Rightarrow x\,\cancel{(t)}=xzt^2+2zt^2 \Rightarrow x(1-zt^2)=2zt^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(t)=\frac{2zt^2}{1-zt^2},\ z\in\mathbb{R}^* \qquad 1-zt^2\neq 0 \Rightarrow t^2\neq\frac{1}{z}$$

II $x(t)=0$

$$\left.\begin{array}{l} m_s=t\cdot 0=0 \\ m_d=2\cdot 0+0^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow m_s=m_d,\ (\forall)t\in\mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(t)=0,\ (\forall)t\in\mathbb{R}$$

III $x(t)=-2 \Rightarrow \dot{x}=0$

$$\left.\begin{array}{l} m_s=0 \\ m_d=2\cdot(-2)+(-2)^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow m_s=m_d,\ (\forall)t\in\mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3(t)=-2,\ (\forall)t\in\mathbb{R}$$

$x(1)=1$

II $x_2(t)=0,\ (\forall)t\in\mathbb{R} \Rightarrow x_2(1)=0\neq 1$

III $x_3(t)=-2,\ (\forall)t\in\mathbb{R} \Rightarrow x_3(1)=-2\neq 1$

I $x_1(t)=\dfrac{2zt^2}{1-zt^2}$

$$x_1(1)=\frac{2z}{1-z}=1 \Rightarrow 2z=1-z \Rightarrow 3z=1 \Rightarrow z=\frac{1}{3}$$

$$x_1(t)=\frac{2}{\cancel{3}}\,\frac{\cancel{3}t^2}{3-t^2}=\frac{2t^2}{3-t^2}\ ;\ 3-t^2\neq 0 \Rightarrow t\neq\pm\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\in(-\sqrt{3};\sqrt{3})$$

② Ecuațiile omogene (EO)

Forma generală: $\dot{x} = h\left(\frac{x}{t}\right)$, $h \in I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă
$h(r) \neq r, (\forall) r \in I$

Rezolvare: prin schimbarea de funcție necunoscută $u = \frac{x}{t}$, (EO) se transformă într-o (EVS) în necunoscuta $u = u(t)$

$u(t) = \frac{x(t)}{t} \Rightarrow x(t) = t\,u(t)$ / derivăm în raport cu t ca produs $\Rightarrow \dot{x}(t) = t'u(t) + t\dot{u}(t) \Rightarrow \dot{x} = u + t\dot{u}$

$(EO) \Rightarrow u + t\dot{u} = h(u) \Rightarrow \dot{u} = \underbrace{\frac{1}{t}}_{\substack{f(t)\\ t\neq 0}}\underbrace{[h(u) - u]}_{g(u)}$ (EVS) în $u(t)$

Exerciții:

① $t\dot{x} = -x - t$

② $\begin{cases} 2tx\dot{x} = 3x^2 - t^2 \\ x(1) = \sqrt{2} \end{cases}$

① $t\dot{x} = -x - t \;/ : t \neq 0 \Rightarrow \dot{x} = \underbrace{-\frac{x}{t} - 1}_{h\left(\frac{x}{t}\right)}$ (EO)

Notăm: $u = \frac{x}{t} \Rightarrow x = t \cdot u \Rightarrow \dot{x} = (t \cdot u)' = u + t\dot{u}$

$\dot{x} = -u - 1 \Rightarrow \cancel{\dot{x}(t) = -u(t) - 1}$

$u + t\dot{u} = -u - 1 \Rightarrow t\dot{u} = -2u - 1 \;/ : t \neq 0 \Rightarrow \dot{u} = -\frac{2u+1}{t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{u} = -\frac{1}{t}(2u+1)$ (EVS) $\Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{t}(2u+1) \Rightarrow$

$\boxed{u \neq -\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{du}{2u+1} = -\frac{1}{t}\,dt \;\Big/\int \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2}{2u+1}\,du = -\int \frac{1}{t}\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln|2u+1| = -\ln|t| + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$k > 0$

$\Rightarrow \ln|2u+1| = -2\ln|t| + 2c \Rightarrow \ln|2u+1| = -\ln t^2 + \ln k \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|2u+1| = \ln\frac{k}{t^2} \Rightarrow 2u+1 = \pm\frac{k}{t^2} \Rightarrow 2u+1 = \frac{q}{t^2} \Rightarrow$

$q \in \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow u(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{t^2} - 1\right),\ a \in \mathbb{R}^*,\ t \neq 0$

dar $x = t \cdot u \Rightarrow x_1(t) = \frac{t}{2}\left(\frac{a}{t^2} - 1\right),\ t \neq 0,\ a \in \mathbb{R}^*$

$$\text{II} \quad \left.\begin{array}{l} u = -\frac{1}{2} \Rightarrow u(t) = -\frac{1}{2} \\ x = t \cdot u \end{array}\right\} \Rightarrow x = -\frac{t}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} ms = t \cdot \left(-\frac{t}{2}\right)' = t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{t}{2} \\ md = -\left(-\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} = \frac{t}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow ms = md,\ (\forall)\, t \in \mathbb{R}$$

$x_2(t) = -\frac{t}{2};\ t \in \mathbb{R}$

$x(t) = \frac{a}{2t} - \frac{t}{2},\ t \neq 0,\ a \in \mathbb{R}$