acelaşi tip de ecuaţie

$\rightarrow U'(t) = L\,I''(t) + R\,I'(t) + \frac{1}{C}\,I(t),\ t \geq 0$

ec. diferenţială de ordin II liniară cu coeficienţi constanţi

$m\,x''(t) + \alpha\,x'(t) + k\,x(t) = F(t)$

↳ ecuaţia oscilatorului armonic amortizat, cu oscilaţii întreţinute

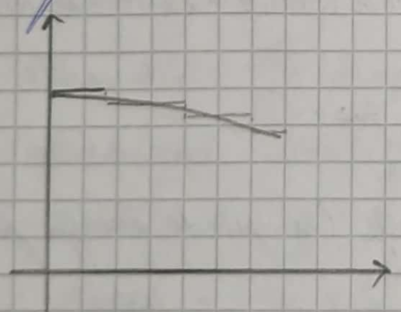
09.11.2023

Cursul 7

④ Dezintegrarea radioactivă

1902, * Ernest RUTHERFORD - Legea dezintegrării atomilor radioactivi: viteza instantanee de dezintegrare a unui element chimic radioactiv este proporţională cu numărul de atomi nedezintegraţi existenţi la momentul respectiv şi nu depinde de alţi factori externi.

Notăm $x(t)$ = nr. de atomi nedezintegraţi la momentul $t \geq 0$; presupunem că x este o funcţie de clasă C^1



(1) $x'(t) = -a\,x(t),\ t \geq 0$

unde $a > 0$ este o constantă, numită constanta de dezintegrare, care depinde de elementul chimic respectiv şi poate fi determinată experimental cu o precizie suficient de bună.

Semnul „−" arată că x este o funcţie descrescătoare (numărul de atomi nedezintegraţi scade în timp) $\Rightarrow x'(t) \leq 0, (\forall) t \geq 0$

Din (FVC) $\Rightarrow$ soluţia ecuaţiei (1) este (2) $x(t) = x(0)\,e^{-at},\ t \geq 0$, unde $x(0) > 0$ reprezintă numărul de atomi nedezintegraţi la momentul iniţial $t = 0$.

carbon 14

Pe acest model simplu se bazează metoda datării cu $\Rightarrow C^{14}$ radioactiv a obiectelor de origine organică, care funcţionează pentru intervale de timp ≤ 10000 ani.

Se cunosc $x(0)$ = numărul de atomi de C^{14} nedezintegrați la momentul morții animalului

și $x(T_0)$ = numărul de atomi de C^{14} nedezintegrați la momentul prezent (se măsoară)

$$(2) \Rightarrow x(T_0) = x(0)\, e^{-aT_0} \Rightarrow \frac{x(T_0)}{x(0)} = e^{-aT_0} \Big/ \ln \Rightarrow \ln \frac{x(T_0)}{x(0)} = -aT_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_0 = -\frac{1}{a} \ln \frac{x(T_0)}{x(0)} = \frac{1}{a} \ln \frac{x(0)}{x(T_0)}$$

Observație: fiind $x(0) > 0$, $e^{-at} > 0$ pentru $(\forall)\ t \geq 0 \Rightarrow x(t) > 0, (\forall)\ t \geq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ nu are sens să-mi pun problema să calculez timpul total de viață a unui element. În schimb îmi pot pune problema să calculez în cât timp se dezintegrează o anumită fracție din elementul respectiv.

Drept măsură a vitezei de dezintegrare a unui element radioactiv se ia timpul de înjumătățire = timpul în care se dezintegrează $\frac{1}{2}$ din cantitatea inițială ~~a timpului~~ de element.

$T = ?$ a.î. $x(T) = \frac{x(0)}{2}$

$$(3) \overset{(4)}{\Rightarrow} T = \frac{1}{a} \ln \frac{x(0)}{x(T_0)} = \frac{1}{a} \ln \frac{x(0)}{\frac{x(0)}{2}} = \frac{1}{a} \ln 2 = \frac{\ln 2}{a}$$ $\Rightarrow$ timpul de înjumătățire depinde doar de elementul chimic considerat (prin constanta de dezintegrare)

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} \overset{(2)}{=} \frac{\cancel{x(0)} \cdot e^{\cancel{-a(t+T)}}}{\cancel{x(0)}\, e^{\cancel{-at}}} = e^{-aT} = e^{-\ln 2} = e^{\ln 2^{-1}} = \frac{1}{2}, (\forall)\ t \geq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ timpul de înjumătățire este același, indiferent de câți atomi nedezintegrați aveam la început.

Din $(4) \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{a} \Rightarrow aT = \ln 2$

$$x(T) = \frac{x(0)}{2}$$

$$x(2T) \overset{(2)}{=} x(0) \cdot e^{-a\cdot 2T} = x(0)\left(e^{-aT}\right)^2 = x(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x(0)}{2^2}$$

$$x(3T) \overset{(2)}{=} x(0) \cdot e^{-a\cdot 3T} = x(0)\left(e^{-aT}\right)^3 = x(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{x(0)}{2^3}$$

$$x(kT) \overset{(2)}{=} x(0) \cdot e^{-akT} = x(0) \cdot \left(e^{-aT}\right)^k = x(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{x(0)}{2^k}, (\forall)\ k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

Scanat cu CamScanner

$\Rightarrow$ după trecerea timpului kT rămâne nedezintegrată $\frac{1}{2^k}$ din cantitatea inițială de substanță.

Capitolul: Sisteme diferențiale liniare de ordinul I

- sunt "prime aproximări" pentru sisteme mai complexe

Fie $a_{ij}, b_i : \underset{\neq \emptyset}{I_{\text{interval}}} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $1 \le i, j \le n$.

Fie sistemul de n ecuații diferențiale de ordinul I liniare, în necunoscutele $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$:

$$(1) \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Acest sistem poate fi scris într-o formă concentrată dacă introducem notațiile:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \; ; \; b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Coloana necunoscutelor — Coloana termenilor liberi

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

matricea coeficienților sistemului

Cu aceste notații sistemul (1) se rescrie ca o ecuație diferențială vectorială liniară:

$$(2)\quad x'(t) = A(t)\cdot x(t) + b(t), \text{ unde } x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \cdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Definiție: Dacă $b(t)=0$, $(\forall) t \in I$, sistemul (2) (sau (1)) se numește liniar omogen; în caz contrar (adică dacă $\exists i \in \overline{1,n}$ a.î. b_i să nu fie funcție identic nulă) sistemul (2) (sau (1)) se numește liniar neomogen.

Teoremă: $(\forall)\ t_0 \in I$, $(\forall)\ x_0 \in \mathbb{R}^n$, (PC) $\begin{cases} x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ are o soluție unică $x: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ← soluție globală

De aici înainte prin soluție a sistemului (2) înțelegem o soluție definită pe tot I.

Sisteme liniare omogene. Mulțimea soluțiilor

Fie sistemul liniar omogen (3) $x'(t) = A(t)\cdot x(t)$, unde $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$

Teoremă: Mulțimea S a soluțiilor sistemului omogen (3) ~~este~~ un spațiu liniar (vectorial) peste $\mathbb{R}$ (real) ~~este~~ de dimensiune n (n fiind ordinul matricei $A(t)$).

Observație: Această teoremă spune că pentru a rezolva sistemul liniar omogen (3) este suficient să cunoaștem n soluții liniar independente ale acestui sistem.

$\dim_{\mathbb{R}} S = n \Rightarrow (\forall)$ bază din S are n elemente. Într-un spațiu liniar finit dimensional, de dimensiune n, o mulțime cu n elemente este bază $\Rightarrow$ este liniar independentă.

Dacă $x^1, x^2, \ldots, x^n \in S$ formează bază în S, atunci $(\forall)$ soluție $x \in S$ a sistemului liniar omogen (3) poate fi scrisă în mod unic ca o combinație liniară a elementelor bazei, adică $(\exists!) C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ a.î.: $x(t) = C_1 x^1(t) + C_2 x^2(t) + \dots + C_n x^n(t), (\forall) t \in I$

① Cum determin un sistem liniar independent de n soluții pentru sistemul omogen (3)?

Nu există o metodă generală, dar dacă sistemul are coeficienți constanți (adică dacă $A(t) = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice constantă), atunci există mai multe metode de a găsi un astfel de sistem.

Definiție: Dacă $x^1, x^2, \dots, x^n \in S$ formează bază în S, spunem că $x^1, x^2, \dots, x^n$ este un sistem fundamental de soluții (s.f.s) pentru sistemul liniar omogen (3).

② Date n soluții ale sistemului liniar omogen (3), cum aflu dacă formează un s.f.s. (sunt liniar independente)?

Definiție: Fie $x^1, x^2, \dots, x^n \in S$ (soluții pentru sistemul liniar omogen (3), $x^i(t) = \begin{pmatrix} x_1^i(t) \\ x_2^i(t) \\ \vdots \\ x_n^i(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, 1 \le i \le n$

Matricea $X: I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), X(t) = col(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$

$$\Rightarrow X(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \dots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \dots & x_2^n(t) \\ \dots & & & \\ x_n^1 & x_n^2(t) & \dots & x_n^n(t) \end{pmatrix}$$

se numește matricea asociată sistemului de soluții $x^1, x^2, \dots, x^n$.

Observație: Cum fiecare coloană a matricei $X(t)$ este soluție a sistemului omogen (3), rezultă că $X(t)$ verifică:

(4) $X'(t) = A(t) \cdot X(t), t \in I$

matricea care are pe locul (i,j), $1 \le i, j \le n$

derivata elementelor (i,j) din matricea $X(t)$

Definiție: Matricea asociată unui s.f.s pentru sistemul omogen (3) se numește matrice fundamentală a sistemului liniar omogen (3).

Observație: $(\forall)$ spațiu liniar are ∞ baze $\Rightarrow$ S are ∞ baze $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ sistemul omogen (3) are ∞ s.f.s., deci ∞ de matrice fundamentale.

Dacă $X(t)$ este matrice fundamentală pentru sistemul omogen (3), atunci altă matrice $Y(t) \in M_n(\mathbb{R})$ este matrice fundamentală pentru sistemul omogen (3) $\Leftrightarrow (\exists)$ o matrice constantă $C \in M_n(\mathbb{R})$, cu ~~determinan~~ $\det C \neq 0$ a.î. $Y(t) = X(t) \cdot C$

Observație: Dacă $X(t)$ este matrice fundamentală pentru sistemul liniar omogen (3), atunci soluția generală a sistemului omogen (3) este dată de: (5) $x(t) = X(t) \cdot c$, $t \in I$, unde $c \in \mathbb{R}^n$ este un vector constant.

Definiție: Fie $x^1, x^2, \ldots, x^n \in S$ un sistem de n soluții pentru sistemul liniar omogen (3) și $X(t)$ matricea asociată acestui sistem de soluții. Determinantul $W: I \to \mathbb{R}$, $W(t) = \det X(t)$ se numește wronskianul asociat sistemului de soluții $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Teorema (Liouville): Fie $x^1, x^2, \ldots, x^n \in S$ un sistem de n soluții pentru sistemul liniar omogen (3) și $W(t)$ wronskianul asociat acestui sistem de soluții. Atunci:

$$W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\,ds}, (\forall)\, t \in I, \text{ unde } t_0 \in I \text{ fixat},$$

iar $\operatorname{tr} A(s) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(s)$, $\forall\, s \in I$

$\operatorname{tr} A(s)$ = urma matricei $A(s)$ = suma elementelor de pe diagonala principală a matricei.

Teoremă: Fie $x^1, x^2, \dots, x^n \in S$ un sistem de n soluții pentru sistemul liniar omogen (3), $X(t)$ și $W(t)$ matricea sistemului, respectiv, wronskianul asociat acestui sistem de soluții. Atunci sunt echivalente afirmațiile:

i) $X(t)$ matrice fundamentală pentru sistemul omogen (3) ($\Leftrightarrow x^1, x^2, \dots, x^n$ s.f.s pentru (3))

ii) $W(t) \neq 0, (\forall) t \in I$

iii) $(\exists) t_0 \in I$ a.î. $W(t_0) \neq 0$

Observație: ii $\Leftrightarrow$ iii rezultă și din ~~Th. Liou~~ Th. Liouville

Observație: Dacă $X(t)$ este o matrice fundamentală pentru sistemul liniar omogen (3), atunci, $(\forall) t_0 \in I, (\forall) x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$(PC) \begin{cases} x'(t) = A(t) \cdot x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, (3) \text{ are o soluție unică } x: I \to \mathbb{R}^n,$$

dată de (6) $x(t) = X(t) \cdot X^{-1}(t_0) \cdot x_0, (\forall) t \in I$

D:

$X(t)$ matrice fundamentală pentru (3) $\xrightarrow[\text{i)} \Leftrightarrow \text{ii)}]{\text{Th. precedentă}}$

$\Rightarrow W(t) = \det X(t) \neq 0, (\forall) t \in I \Rightarrow X(t)$ inversabilă, $(\forall) t \in I$, cu inversa notată $X^{-1}(t)$.

Din (5), soluția generală a sistemului omogen (3) este dată de $x(t) = X(t) \cdot c$, $t \in I$, unde $c \in \mathbb{R}^n$ vector constant.

Îl oblig pe x să verifice $x(t_0) = x_0 = X(t_0) \cdot c \Rightarrow X(t_0) \cdot c = x_0 \,\Big|\, \cdot X^{-1}(t_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow c = X^{-1}(t_0) \cdot x_0$

$x(t) = X(t) \cdot c$

$\Rightarrow$ soluția ~~at~~ pb. Cauchy este ~~x(t)~~

$$x(t) = X(t) X^{-1}(t_0) \cdot x_0, \ t \in I$$

Sisteme liniare neomogene. Formula variației constantelor

Fie sistemul liniar neomogen (7) $x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t),\ t \in I$, unde $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{R})$, $b(t) = (b_i(t))_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^n$, cu $a_{ij}, b_i : I \to \mathbb{R}$, $1 \le i,j \le n$ funcții continue.

Dacă știm soluția generală a sistemului omogen asociat lui (7): (3) $x'(t) = A(t)\,x(t),\ t \in I$, putem spune ceva despre soluția sistemelor neomogene (7)?

Teoremă: Dacă $X(t)$ este o matrice fundamentală pentru sistemul liniar omogen (3) și $y : I \to \mathbb{R}^n$, o soluție particulară a sistemului liniar neomogen (7), atunci o funcție $x : I \to \mathbb{R}^n$ este soluție pentru sistemul neomogen (7) $\Leftrightarrow$ x are forma:

$$\underbrace{x(t)}_{\text{soluția generală a sistemului neomogen (7)}} = \underbrace{X(t) \cdot c}_{\text{soluția generală a sistemului omogen (3)}} + \underbrace{y(t)}_{\text{o soluție particulară a sistemului neomogen (7)}},\ t \in I, \text{ unde } c \in \mathbb{R}^n \text{ vector constant}$$

Observație: Spațiul soluțiilor pentru sistemul liniar neomogen (7) nu este spațiu liniar, pentru că suma a 2 soluții ale sistemului (7) nu e soluție pentru (7) (pentru că dacă x, y soluții pentru (7) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t) \\ y'(t) = A(t)\,y(t) + b(t) \quad (+) \\ \hline (x+y)'(t) = A(t)(x+y)(t) + 2\,b(t) \end{array} \Rightarrow x + y \text{ nu verifică (7)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ nu putem vorbi de s.f.s., matrice fundamentală pentru sisteme liniare neomogene.

Teoremă (formula variației constantelor): Fie $X(t)$ o matrice fundamentală pentru sistemul liniar omogen (3). Atunci $(\forall)\ t_0 \in I$, $(\forall)\ x_0 \in \mathbb{R}^n$, pb. Cauchy $\begin{cases} x'(t) = A(t)\,x(t) + b(t) \ (7) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ (8) are o soluție unică dată de:

$$(FVC): \; x(t) = \underline{X(t)X^{-1}(t_0)x_0} + \int_{t_0}^{t} X(t)\,X^{-1}(s)\,b(s)\,ds, \; (\forall)\, t \in I,$$

unde $X^{-1}(t)$ = inversa matricei $X(t)$

↳ de verificat (6): soluția (PC) $\begin{cases} x'(t) = A(t)\,x(t) & (3) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

<u>Demonstrație</u>: Știm că soluția generală a sistemului liniar omogen (3) este dată de (5) $x(t) = X(t)\cdot c$, $t \in I$, $c \in \mathbb{R}^n$ vector constant.

Căutăm soluția lui (7) de forma: $x(t) = X(t)\,c(t)$, $t \in I$, $c \in C^1(I)$

<u>Observație</u>: De aici vine denumirea de formula variației constantelor: în locul constantei c din soluția generală a sistemului omogen am pus o funcție care variază o dată cu t (depinde de t).

→ Îl oblig să verifice (7) $\Rightarrow \overbrace{X'(t)\,c(t) + X(t)\,c'(t)}^{x'(t)} = \overbrace{A(t)\,X(t)\,c(t)}^{A(t)\,x(t)} + b(t)$

Din (4) $\Rightarrow X'(t) = A(t)\cdot X(t)$, $t \in I$; înlocuire mai sus $\Rightarrow$

$\Rightarrow A(t)\,X(t)\,c(t) + X(t)\,c'(t) = A(t)\,X(t)\,c(t) + b(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow X(t)\,c'(t) = b(t) \;\Big|\cdot X^{-1}(t) \Rightarrow c'(t) = X^{-1}(t)\,b(t) \;\Big|\int_{t_0}^{t} ds \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\int_{t_0}^{t} c'(s)\,ds}_{c(s)\big|_{t_0}^{t} = c(t) - c(t_0)} = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,b(s)\,ds \Rightarrow c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,b(s)\,ds$; ne întoarcem în $x(t)$

$$\Rightarrow x(t) = X(t)\left(c(t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,b(s)\,ds\right) = X(t)\,c(t_0) + \underline{X(t)}\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,b(s)\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = X(t)\,c(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t)\,X^{-1}(s)\,b(s)\,ds.$$

nu depinde de variabila de integrare s; integrala e operator liniar.

Pun condiția ca $x(t_0) = x_0$. Fac $t = t_0$ în formula de mai sus a lui $x(t)$:

$$X^{-1}(t_0) \Big| x(t_0) = X(t_0) \cdot c(t_0) \cdot c(t_0) + \int_{t_0}^{t_0} X(t) X^{-1} f b(s)\,ds = 0 \Rightarrow X^{-1}(t_0) x_0 = c(t_0)$$

Acum înlocuim $c(t_0)$ în formula subliniată și obținem (7VC)

__Observație__: Dacă $X(t)$ este o matrice fundamentală a sistemului omogen (3), atunci soluția generală a sistemului neomogen (7) este dată, conform formulei subliniate de:

$$x(t) = X(t)c + \int_{t_0}^{t} X(t) X^{-1}(s)\, b(s)\,ds,\ t \in \underline{I}, \text{ unde } t_0 \in \underline{I} \text{ fixat},$$

$c \in \mathbb{R}^n$ vector constant.

__Observație__: Deci pentru a rezolva sistemul omogen (3) sau sistemul neomogen (7) este suficient să cunoaștem o <u>matrice fundamentală</u> $X(t)$ pentru (3)

= un s.f.s pt (3)

9.11.2023

Seminarul 6

① Să se găsească un interval pe care (PC) $\begin{cases} x'(t) = txy + y^2 \\ y' = x^2 y + 1 \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1 \end{cases}$ să admită soluție unică; scrieți primele 3 perechi de termeni din șirul aproximărilor succesive

Identificăm datele problemei:

$t_0 = 0$

$x_0 = 0$

$y_0 = 1$

$f_1(t, x, y) = txy + y^2$

$f_2(t, x, y) = x^2 y + 1$

$f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \Rightarrow (\forall)\ a, b > 0$

Luăm $a = 2$, $b = 1$

$\Delta = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b; x_0 + b] \times [y_0 - b; y_0 + b]$ $\Bigg\} \Rightarrow \Delta = [-2; 2] \times [-1; 1] \times [0; 2]$.

1) f_1, f_2 continue pe Δ (funcție polinomială)

2) f_1, f_2 lipschitziană în raport cu $(x; y)$ pe Δ

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x} = ty \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = tx + 2y \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = x^2 \end{array}\right\} \text{continue ; funcții polinomiale} \Longrightarrow$$

1) și 2) $\Longrightarrow$ (PC) are o soluție unică

$x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to [-1; 1]$

$y : [t_0 - \delta; t_0 + \delta] \to [0; 2]$

$\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\} = \min\{2; \frac{1}{M}\}$

$M =$ majorant $\{|f_1|, |f_2|\} \to \Delta$

$$\left.\begin{array}{l} |f_1(x, y, t)| = |txy + y^2| \le |t| \cdot |x| \cdot |y| + |y|^2 \le 2 \cdot 1 \cdot 2 + 4 = 8, (\forall)(t, x, y) \in \Delta \\ |f_2(t, x, y)| = |x^2 y + 1| \le |x|^2 \cdot |y| + 1 \le 1 \cdot 2 + 1 = 3, (\forall)(t, x, y) \in \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow M = 8 \Rightarrow \delta = \min\{2; \frac{1}{8}\} = \frac{1}{8}$

$x : [-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}] \to [-1; 1]$

$y : [-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}] \to [0; 2]$

1) $\begin{cases} x_0(t) = 0 \\ y_0(t) = 1 \end{cases}$

2) $x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_1(s, x_0(s), y_0(s))\, ds = \int_0^t f_1(s, 0, 1)\, ds \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1(t) = \int_0^t (s\cdot 0\cdot 1 + 1^2)\,ds = \int_0^t 1\,ds = s\Big|_0^t = t$$

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f_2(s, x_0(s), y_0(s))\,ds = 1+\int_0^t f_2(s,0,1)\,ds = 1+\int_0^t (0^2\cdot 1+1)\,ds = 1+\int_0^t 1\,ds = 1+s\Big|_0^t = t+1$$

$$\begin{cases} x_1(t) = t \\ y_1(t) = t+1 \end{cases}$$

3) $$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_1(s, x_1(s), y_1(s))\,ds = 0+\int_0^t f_1(s, s, s+1)\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \int_0^t s^3+s^2 + s^2+2s+1\,\cancel{ds} = \cancel{\frac{s^4}{4}\Big|_0^t + \frac{s^3}{3}\Big|_0^t = \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3}}\ \frac{s^4}{4}\Big|_0^t + 2\cdot\frac{s^3}{3}\Big|_0^t + 2\,\frac{s^2}{2}\Big|_0^t + s\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \frac{t^4}{4} + 2\frac{t^3}{3} + t^2 + t$$

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f_2(s, x_1(s), y_1(s))\,ds = 1+\int_0^t f_2(s, s, s+1)\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2(t) = 1+\int_0^t s^2(s+1)+1\,ds = 1+\int_0^t s^3+s^2+1\,ds = 1+\frac{s^4}{4}\Big|_0^t + \frac{s^3}{3}\Big|_0^t + s\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2(t) = \dfrac{t^4}{4} + \dfrac{t^3}{3} + t + 1 \\ x_2(t) = \dfrac{t^4}{4} + 2\dfrac{t^3}{3} + t^2 + t \end{cases}$$

$(x_0, x_1, x_2) : \left[-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right] \to [-1; 1]$

$(y_0, y_1, y_2) : \left[-\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right] \to [0; 2]$

Ecuații diferențiale liniare de ordin superior cu coeficienți constanți

(A) omogene

Forma: (1) $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}\cdot x' + a_n x = 0$, unde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ constante.

Rezolvare: Spațiul soluțiilor ecuației liniare omogene (1) este un spațiu liniar peste $\mathbb{R}$ de dimensiune n = ordinul ecuației $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ este un s.f.s pentru (1) (adică o bază în spațiul soluțiilor lui (1)), atunci soluția generală a lui (1) are forma:

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t),\ t\in\mathbb{R},\ C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R} \text{ const}$$

Determinarea unui s.f.s pentru (1):

① asociem ecuației (1) ecuația caracteristică:

$$(1')\ \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,\quad x^{(k)} \rightsquigarrow \lambda^k,\ k=\overline{0,n}$$

! $\underset{x^{(0)}}{x} \rightsquigarrow \underset{\lambda^0}{1}$, nu cu λ

② rezolv ecuația caracteristică

③ fiecărei rădăcini λ_j de multiplicitate m_j a ecuației caracteristice îi asociez m_j funcții în s.f.s astfel:

a) dacă $\lambda_j \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \underbrace{e^{\lambda_j t}, t e^{\lambda_j t}, t^2 e^{\lambda_j t}, \dots, t^{m_j-1} \cdot e^{\lambda_j t}}_{m_j \text{ funcții}}$

b) dacă $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, atunci $\overline{\lambda_j} = \alpha_j - i\beta_j$ este și ea rădăcină pentru (1'), cu aceeași multiplicitate m_j; pentru λ_j și $\overline{\lambda_j}$ asociem $2m_j$ funcții în s.f.s. astfel:

$$e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t,\ t e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t,\ t^2 e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t, \dots, t^{m_j-1} e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t$$

$$e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t,\ t e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t,\ t^2 e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t, \dots, t^{m_j-1} e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t$$

Să se rezolve:

a) $x'' - 2x' - 8x = 0$

b) $\begin{cases} x'' - 7x' + 10x = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2 \end{cases}$

c) $x'' - 3x' = 0$

d) $36x'' - 12x' + x = 0$

e) $\begin{cases} x'' + 8x' + 16x = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2 \end{cases}$

a) $x'' - 2x' - 8x = 0$

Ecuația caracteristica: $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$

$\Delta = 4 + 4 \cdot 8 = 36$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} \begin{cases} 4 \in \mathbb{R} \\ -2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

S.f.s $\{e^{4t}, e^{-2t}\}$

Soluția generală: $x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t}, t \in \mathbb{R}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ const

b) $x'' - 7x' + 10x = 0$

$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$

$\Delta = 49 - 40 = 9$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{2} \begin{cases} 5 \in \mathbb{R} \\ 2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

S.f.s $\{e^{2t}, e^{5t}\}$

$x(t) = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 e^{5t}, t \in \mathbb{R}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ const

$$\left.\begin{aligned} &x(0) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1 \\ &x'(t) = 2C_1 e^{2t} + 5C_2 e^{5t} \\ &x'(0) = 2C_1 + 5C_2 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \;/\cdot 2 \\ 2C_1 + 5C_2 = 2 \end{cases} \ominus \Rightarrow \cancel{C_2 = 0}$$

$C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = 1$

$x(t) = e^{2t}, t \in \mathbb{R}$

c) $x'' - 3x' = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \in \mathbb{R} \\ \lambda_2 = 3 \in \mathbb{R} \end{cases}$ rădăcini simple

S.f.s $\{e^{0\cdot t} = 1;\ e^{3t}$

$x(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^{3t} = C_1 + C_2 e^{3t}$; $t \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ const

d) $36x'' - 12x' + x = 0$

$36\lambda^2 - 12\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (6\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{6} \in \mathbb{R}$ rădăcină dublă

S.f.s $\{e^{\frac{t}{6}},\ t \cdot e^{\frac{t}{6}}\}$

$x(t) = C_1 \cdot e^{\frac{t}{6}} + C_2 \cdot t \cdot e^{t/6}$, $t \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ const

e) $\begin{cases} x'' + 8x' + 16x = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2 \end{cases}$

$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda+4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4 \in \mathbb{R}$ rădăcină dublă

$\Delta = 64 - 64 = 0$

S.f.s. $\{e^{-4t},\ t \cdot e^{-4t}\}$

$x(t) = C_1 \cdot e^{-4t} + C_2\, t e^{-4t}$, $t \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ const

$x(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$

$x'(t) = -4C_1 \cdot e^{-4t} + C_2 \cdot e^{-4t} - 4C_2\, t e^{-4t}$

$x'(0) = 2 \Rightarrow -4C_1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 6$

$x(t) = e^{-4t} + 6t e^{-4t}$, $t \in \mathbb{R}$

f) $x'' + 25x = 0$

g) $\begin{cases} x'' + 36x = 0 \\ x(0) = 2 \ ; \ x'(0) = 6 \end{cases}$

h) $x'' - 4x' + 5x = 0$

i) $x'' + 2x' + 10x = 0$

f) $x'' + 25x = 0$

$\lambda^2 + 25 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -25 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 5i \in \mathbb{C}$

$\alpha \pm i\beta \longrightarrow e^{\alpha t} \cdot \cos\beta t$

simplu $\qquad e^{\alpha t} \sin\beta t$

$\alpha = 0$: $\pm i\beta \longrightarrow \cos\beta t$

simple $\qquad \sin\beta t$

$e^{\alpha t} = e^{0t} = 1$

g) $\begin{cases} x'' + 36x = 0 \\ x(0) = 2, \ x'(0) = 6 \end{cases}$

$\lambda^2 + 36 = 0$

$\lambda = \pm 6i$

$S.f.S \ \{\cos 6t, \sin 6t\}$

$x(t) = C_1 \cos 6t + C_2 \sin 6t, \ t \in \mathbb{R}, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ const

$x(0) = 2 \Rightarrow C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 2 \Rightarrow C_1 = 2$

$x'(t) = -6C_1 \sin 6t + 6C_2 \cos 6t$

$x'(0) = 0 + 6C_2 = 6 \Rightarrow C_2 = 1$

$x(t) = 2\cos 6t + \sin 6t, \ t \in \mathbb{R}$

Observație: Dacă luăm $\beta = -6 \rightarrow$ S.f.s $\{\cos(-6t) = \cos 6t,\ \sin(-6t) = -\sin 6t$

$$x(t) = C_1 \cos 6t + C_2(-\sin 6t) = C_1 \cos 6t + C_3 \sin 6t$$

notăm $-C_2 = C_3$

h) $x'' - 4x' + 5x = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 20 = -4$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$

$\alpha = 2$

$\beta = \pm 1$

S.f.s $\{e^{2t}\cos t,\ e^{2t}\sin t\}$

$x(t) = C_1 e^{2t}\cos t + C_2 \sin t\, e^{2t},\ t \in \mathbb{R},\ C_1, C_2$ const

i) $x'' + 2x' + 10x = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$

$\Delta = 4 - 40 = -36$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i$

$\alpha = -1$

$\beta = 3$

Sfs $\{e^{-t}\cos(3t);\ e^{-t}\sin(3t)\}$

$x(t) = C_1 e^{-t}\cos(3t) + C_2 e^{-t}\sin(3t),\ t \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ const

j) $\begin{cases} x''' - 3x'' + 4x = 0 \\ x(0) = 2;\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 5 \end{cases}$

k) $x''' - 3x'' + 3x' - x = 0$

l) $x^{(4)} + 14x'' + 49x = 0.$

j) $x''' - 3x'' + 4x = 0$

$x(0) = 2;\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 5$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 = p(\lambda)$

Dacă p are coeficienți din $\mathbb{Z}$, rădăcinile sale din $\mathbb{Z}$ se găsesc printre divizorii termenului liber:

Met I $p(1) = 1 - 3 + 4 = 2 \neq 0$

$p(-1) = -1 - 3 + 4 = 0$ A

$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2(\lambda+1) - 4\lambda(\lambda+1) + 4(\lambda+1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$

Met II

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 & \lambda + 1 \\ \hline -\lambda^3 - \lambda^2 & \lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ \quad / \ -4\lambda^2 + 4 & \\ \quad\ \ +4\lambda^2 + 4\lambda & \\ \qquad / \ 4(\lambda+1) & \\ \qquad\quad // & \end{array}$$

$\Rightarrow (\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-2)^2 = 0$

I $\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \in \mathbb{R}$ rad simplă

II $(\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = 0 \in \mathbb{R}$ rad dublă

sfs: $\{e^{-t}, e^{2t}, t \cdot e^{2t}\} \Rightarrow x(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{2t} + c_3 \cdot t \cdot e^{2t}, t \in \mathbb{R}$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$x(0) = c_1 + c_2 + 0 = 2$

$x'(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} + c_3 e^{2t} + 2c_3 \cdot t \cdot e^{2t}$

$x'(0) = -c_1 + 2c_2 + c_3 + 0 = 1$

$x''(t) = c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{2t} + 2c_3 e^{2t} + 2c_3 e^{2t} + 4c_3 t e^{2t}$

$x''(0) = c_1 + 4c_2 + 4c_3 + 0 = 5$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \quad (1) \\ -c_1 + 2c_2 + c_3 = 1 \quad \Big|\cdot 4 \\ c_1 + 4c_2 + 4c_3 = 5 \end{cases}$$

$(-)$

$5c_1 - 4c_2 = 1 \ + 4(1) \Rightarrow 9c_1 = 9 \Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ c_3 = 0 \Rightarrow$

k) $x''' - 3x'' + 3x' - x = 0$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - \lambda = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \in \mathbb{R}$ rădăcină triplă

S.f.s $\{e^t, te^t, t^2 \cdot e^t\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot t \cdot e^t + C_3 \cdot t^2 \cdot e^t, t \in \mathbb{R}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ const