12.10.2023

# Cursul 2: Ecuații rezolvabile prin cuadraturi

## ① Ecuații cu variabile separabile (EVS)

**Forma**: $x' = f(t) \cdot g(x)$, unde $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$ continue, $I, J \neq \emptyset$ intervale; $g(r) \neq 0$, $(\forall) r \in J$

Observație: Dacă există $x_0 \in J$ a.î. $g(x_0) = 0$, atunci funcția constantă $x(t) = x_0$, $(\forall) t \in I$ este soluție a (EVS) pentru că:

$$\begin{cases} m.\ stâng = x_0' = 0 \\ m.\ drept = f(t) \cdot g(\underbrace{x_0}_{=0}) = 0 \end{cases}$$

În practică dăm deoparte rădăcinile lui $g$ și rezolvăm (EVS) pe intervalele deschise cuprinse între 2 rădăcini ~~deschise cuprinse~~ ~~între 2 rădă~~ consecutive ale lui $g$.

Exemplu:

Rezolvați problemele Cauchy:

① $\begin{cases} x' = 3t^2 e^{2x} \\ x(1) = 0 \end{cases}$  ② $\begin{cases} x' = 5\sqrt[5]{x^4} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

① $x' = 3t^2 \cdot e^{2x} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 3t^2 \cdot e^{2x} \Rightarrow \frac{dx}{e^{2x}} = 3t^2 dt \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-2x} dx = 3t^2 dt \Big/ \int \Rightarrow -\frac{1}{2}\int -2e^{-2x} dx = \int 3t^2 dt \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} e^{-2x} = t^3 + \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ constant $\Big/ \cdot(-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-2x} = -2t^3 - 2\mathcal{C} \,/\, \ln \Rightarrow -2x = \ln(-2t^3 - 2\mathcal{C}) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \ln(-2t^3 - 2\mathcal{C})$; $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ constant

$-2t^3 - 2\mathcal{C} > 0 \Leftrightarrow 2t^3 < -2\mathcal{C} \Rightarrow t < -\sqrt[3]{\mathcal{C}} \Rightarrow t \in (-\infty, -\sqrt[3]{\mathcal{C}})$

$x(t) = -\frac{1}{2} \ln(-2t^3 - 2\mathcal{C})$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ constant, $t \in (-\infty, -\sqrt[3]{\mathcal{C}})$

└ Soluție generală

Prin condiția ~~generală~~ inițială:

$x(1) = 0 \Rightarrow x(1) = -\frac{1}{2} \ln(-2 - 2\mathcal{C}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(-2 - 2\mathcal{C}) = 0 \Rightarrow -2 - 2\mathcal{C} = 1 \Rightarrow -2\mathcal{C} = 3$

$x(t) = -\frac{1}{2} \ln(-2t^3 + 3)$, $t \in \left(-\infty; +\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$

└ Soluția problemei Cauchy

② $x' = 5\sqrt[5]{x^4} \cdot 1$

Ecuație cu variabile separabile unde $f(t)=1$

$$\frac{dx}{dt} = 5 \cdot \sqrt[5]{x^4}$$

I Dacă $x \neq 0$

$$\frac{dx}{5\sqrt[5]{x^4}} = dt \,/\!\int \Rightarrow \int \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\,dx = \int dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\int x^{-\frac{4}{5}}\,dx = \int dt \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot \frac{x^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}} = t + \mathcal{C},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R} \text{ constant} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{x} = t + \mathcal{C} \,/\,(\,)^5 \Rightarrow x = (t+\mathcal{C})^5,\ \mathcal{C} \in \mathbb{R} \text{ constant}$$

Observație: Pentru că $\exists\, x(t) \neq 0$ ar trebui că $t + \mathcal{C} \neq 0 \Rightarrow$ $t \neq -\mathcal{C}$. De fapt, $x(t)$ verifică ecuația pentru $(\forall) t \in \mathbb{R}$, se poate prelungi prin continuitate în $t = -\mathcal{C}$.

$$\left.\begin{aligned} &\text{m. stâng} = [(t+\mathcal{C})^5]' = 5(t+\mathcal{C})^4 \cdot (t+\mathcal{C})' = 5(t+\mathcal{C})^4 \\ &\text{m. drept} = 5\sqrt[5]{(t+\mathcal{C})^{20}} = 5(t+\mathcal{C})^4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{m. stâng} = \text{m. drept},\ (\forall) t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1(t) = (t+\mathcal{C})^5,\ t \in \mathbb{R},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$ constant

soluția generală a ecuației

II Dacă $x(t) = 0$, observ că este soluție a (EVS) pentru că:

$$\left.\begin{aligned} &\text{m. stâng} = 0' = 0 \\ &\text{m. drept} = 5\sqrt[5]{0^4} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{m. stâng} = \text{m. drept},\ (\forall) t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_2(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$ soluție a ecuației

Punem condiția inițială $x(0) = 0$

① Dacă $x_2(t) = 0,\ (\forall) t \in \mathbb{R} \Rightarrow x_2(0) = 0 \Rightarrow$ verifică condiția inițială, deci este soluție a problemei Cauchy.

② Dacă $x_1(t) = (t+\mathcal{C})^5 \overset{t=0}{\Longrightarrow} x_1(0) = \mathcal{C}^5 \Rightarrow \mathcal{C} = 0 \Rightarrow x_1(t) = t^5$, $t \in \mathbb{R}$ este și ea soluție a problemei Cauchy

Observație:

$$x_3(t) = \begin{cases} t^5, & t<0 \\ 0, & t\geq 0 \end{cases}$$

$$x_4(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ t^5, & t\geq 0 \end{cases}$$

funcții de clasă $C^1$ și sunt soluții ale problemei Cauchy.

## ② Ecuațiile omogene (EO)

Formă: $x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$, $h: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h$ continuă

(*) $h(r) \neq r$, $(\forall) r \in I$ ; $(t \neq 0)$

Rezolvare: prin schimbarea de funcție necunoscută $u = \frac{x}{t}$, (EO) în $x = x(t)$ se transformă într-o (EVS) în $u = u(t)$

$$u(t) = \frac{x(t)}{t} \iff x(t) = t\cdot u(t) \Rightarrow x'(t) = (t\cdot u(t))' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'(t) = t'\cdot u(t) + t\cdot(u(t))' \Rightarrow x' = u + tu'$$

$$(EO) \Rightarrow u + tu' = h(u) \Rightarrow tu' = h(u) - u \,\Big/ :t,\ t\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u' = \underbrace{\frac{1}{t}}_{f(t)} \underbrace{(h(u) - u)}_{g(u)} \quad (EVS)$$

Acum rezolv (EVS) în $u = u(t)$ și la final îmi amintesc că $u = \frac{x}{t}$ (sau $x = t\cdot u$) și revin la funcția $x$.

Exemplu:

① $\begin{cases} t\cdot x' = x - t\cdot e^{\frac{x}{t}} \\ x(1) = 0 \end{cases}$

$t \neq 0 \Rightarrow t\in(-\infty, 0)$ sau $t \in (0, +\infty)$ $\Big\} \Rightarrow t \in (0; +\infty)$

$tx' = x - t\, e^{\frac{x}{t}} \Big/ : t \neq 0 \Rightarrow x' = \underbrace{\frac{x}{t} - e^{\frac{x}{t}}}_{h\left(\frac{x}{t}\right)}$ (EO)

Facem schimbarea de funcție necunoscută $\frac{x}{t} = u$

!!! Nu este corect să scriu $x' = u \cdot e^{u}$

$x'(t) = u(t) - e^{u(t)}$ $\Big\} \to t, u, x'$ necunoscute

$x = t \cdot u \Big/ \frac{d}{dt} \to x' = (tu)' = t' \cdot u + t \cdot u' = u + tu'$

$\cancel{u} + tu' = \cancel{u} - e^{u} \to$ ecuație în $u = u(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow tu' = -e^{u} \Big/ : t \neq 0 \Rightarrow u' = \underbrace{-\frac{1}{t}}_{f(t)} \cdot \underbrace{e^{u}}_{g(u) \neq 0}$ (EVS) în $u = u(t)$

$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{t} \cdot e^{u} \Rightarrow e^{-u} du = -\frac{dt}{t} \Big/ \int \Rightarrow -\int -e^{-u} du = \int -\frac{dt}{t} \Rightarrow$

$\Rightarrow -e^{-u} = -\ln(t) + C \Big/ \cdot(-1) \Rightarrow e^{-u} = \ln(t) - C \Big/ \ln \Rightarrow$

$\Rightarrow -u = \ln(\ln(t) - C) \Big/ \cdot(-1) \Rightarrow u = -\ln(\ln(t) - C),\ t \in (0, +\infty)$

$\ln t - C > 0 \Rightarrow \ln t > C \Rightarrow t > e^{C}$, $C \in \mathbb{R}$ constant

$x(t) = t \cdot u(t) = -t \ln(\ln(t) - C)$, $t \in (e^{C}, \infty)$, $C \in \mathbb{R}$ constant

Acum punem condiția inițială $x(1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{x(1)}_{0} = -\ln(\underbrace{\ln 1}_{0} - C) \Rightarrow \ln(-C) = 0 \Rightarrow -C = 1 \Rightarrow C = -1$

$x(t) = -t \ln(\ln(t) + 1)$, $t \in \left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$

$\llcorner$ Soluția problemei Cauchy

② $x'(t) = \dfrac{4tx - x^2}{t^2} = \dfrac{4x}{t} - \left(\dfrac{x}{t}\right)^2 \Rightarrow x'(t) = \overbrace{4\dfrac{x}{t} - \left(\dfrac{x}{t}\right)^2}^{h\left(\frac{x}{t}\right)}$ (EO)

$t \neq 0$

Observație: O ecuație de forma $x' = \dfrac{f(t,x)}{g(t,x)}$ este (EO) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ f și g sunt funcții omogene de același grad, adică există un număr n a.î.:

$$f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^n f(t,x)$$
$$g(\lambda t, \lambda x) = \lambda^n g(t,x) \quad , (\forall)\lambda > 0$$

În acest caz scoțând fortat în factor $t^n$ din f și g se va forma o ecuație de forma $x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$ (EO)

La noi: $f(t,x) = 4tx - x^2$
$g(t,x) = t^2$

$f(\lambda t, \lambda x) = 4(\lambda t)(\lambda x) - (\lambda x)^2 = 4\lambda^2 tx - \lambda^2 x^2 = \lambda^2(4tx - x^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^2 f(t,x), \forall \lambda > 0$

$g(\lambda t, \lambda x) = (\lambda t)^2 = \lambda^2 t^2 = \lambda^2 g(t,x), (\forall)\lambda > 0$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ scot $t^2$ în factor la numărător și numitor:

$$x' = \frac{t^2\left(\frac{4tx}{t^2} - \frac{x^2}{t^2}\right)}{t^2} \Leftrightarrow x' = 4\frac{x}{t} - \left(\frac{x}{t}\right)^2 \text{(EO)}$$

Facem substituția $\frac{x}{t} = u \Rightarrow x = tu \Rightarrow x' = u + tu'$

(EO) $\Rightarrow u + tu' = 4u - u^2 \Rightarrow tu' = 3u - u^2 \; / : t \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u' = \underbrace{\frac{1}{t}}_{f(t)} \underbrace{(3u - u^2)}_{g(u)}$ (EVS) $\Rightarrow \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{t}(3u - u^2) \Rightarrow$

$\cancel{\Rightarrow \frac{1}{3u - u^2} du = \frac{1}{t} dt}$

I Dacă $3u - u^2 \neq 0 \to u(3-u) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} u \neq 0 \\ u \neq 3 \end{cases}$

$$\frac{1}{3u-u^2}\,du = \frac{1}{t}\,dt \,\Big|\int \Rightarrow \int \frac{1}{3u-u^2}\,du = \int \frac{1}{t}\,dt$$

$$\frac{1}{u(3-u)} = \frac{u+(3-u)}{u(3-u)} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3-u} + \frac{1}{u}\right)\frac{1}{3}$$

$\boxed{\text{SAU}}$

$$\frac{1}{u(3-u)} = \frac{\overset{3-u)}{A}}{u} + \frac{\overset{u)}{B}}{3-u} = \frac{3A - A\cdot u + B\cdot u}{u(3-u)} \to 1 = 3A + u(B-A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = B - A \\ 1 = 3A \end{cases} \to A = \frac{1}{3} = B$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{-1}{3-u}\,du + \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du = \int \frac{1}{t}\,dt \Rightarrow -\frac{1}{3}\ln|3-u| + \frac{1}{3}\ln|u| = \ln|t| + \mathcal{C}$$

$$\Rightarrow \ln|u| - \ln|3-u| = 3\ln|t| + 3\mathcal{C} \Rightarrow$$

$$\to \ln\left|\frac{u}{3-u}\right| = \ln|t|^3 + \underbrace{3\mathcal{C}}_{\ln k} \Rightarrow ;\ k>0 \text{ constant } (k = e^{3\mathcal{C}} > 0)$$

$$\to \ln\left|\frac{u}{3-u}\right| = \ln(|t|^3 \cdot \overset{k}{\cancel{3\mathcal{C}}}) \to \left|\frac{u}{3-u}\right| = |t|^3 \cdot \cancel{3\mathcal{C}}\, k \Rightarrow$$

$$\to \frac{u}{3-u} = \pm k t^3 \ ;\ a = \pm k \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$$

$$\to \frac{u}{3-u} = a t^3 \to u = 3at^3 - uat^3 \Rightarrow u(1+at^3) = 3at^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1(t) = \frac{3at^3}{1+at^3},\ a \in \mathbb{R}^* \text{ constant},\ 1+at^3 \neq 0,\ t \neq 0;\ t \neq -\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$

II $u(t) = 0$ este soluție pentru (EVS)

$\begin{cases} \text{m stâng} = 0' = 0 \\ \text{m drept} = \frac{1}{t} \cdot 0 = 0 \end{cases}$

$u_2(t) = 0,\ t \neq 0$ soluție pentru (EVS)

III $u(t)=3$ este soluție pentru (EVS)?

$$\begin{cases} \text{m. stâng} = 3' = 0 \\ \text{m. drept} = \frac{1}{t}\underbrace{(3\cdot 3 - 3^2)}_{0} = 0 \end{cases}$$

$u_3(t) = 3,\ t \neq 0$ soluție pentru (EVS)

adică $t \in (-\infty, 0)$ sau $t \in (0, +\infty)$

Dar $x = tu$

$$\begin{cases} x_1(t) = tu_1(t) = \dfrac{3\cdot a \cdot t^4}{1+at^3},\ a\in\mathbb{R}^* \text{ constant},\ t \neq -\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}},\ t\neq 0 \\ x_2(t) = tu_2(t) = 0,\ t\neq 0 \\ x_3(t) = tu_3(t) = 3t,\ t \neq 0 \end{cases}$$

③ $x' = -\dfrac{x^2+3tx+4t^2}{4x^2+3tx+t^2}$

$4x^2+3tx+t^2 \neq 0$

$f(t,x) = -(x^2+3tx+4t^2)$

$g(t,x) = 4x^2+3tx+t^2$

$$f(\lambda t, \lambda x) = -[(\lambda x)^2 + 3(\lambda t)(\lambda x) + 4(\lambda t)^2] = -(\lambda^2x^2+3\lambda^2tx+4\lambda^2t^2)$$
$$= \lambda^2[-(x^2+3tx+4t^2)] = \lambda^2 f(t,x), (\forall)\lambda>0$$

$$g(\lambda t, \lambda x) = 4\lambda^2x^2+3\lambda^2tx+\lambda^2t^2 = \lambda^2(4x^2+3tx+t^2) = \lambda^2 g(t,x), (\forall)\lambda>0$$

f, g omogene de gradul 2 => scot forțat în factor $t^2$

$$x' = -\frac{t^2\left(\frac{x^2}{t^2}+\frac{3tx}{t^2}+4\right)}{t^2\left(4\frac{x^2}{t^2}+\frac{3tx}{t^2}+1\right)} = -\frac{\left(\frac{x}{t}\right)^2+3\frac{x}{t}+4}{4\left(\frac{x}{t}\right)^2+3\frac{x}{t}+1} \quad (EO)$$

Facem substituția $\frac{x}{t} = u \Rightarrow x = tu \Rightarrow x' = u + tu'$

$$u + tu' = -\frac{u^2+3u+4}{4u^2+3u+1} \Big/ -u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tu' = -\frac{u^2+3u+4}{4u^2+3u+1} - \overset{4u^2+3u+1}{u} \Rightarrow tu' = \frac{-u^2-3u-4-4u^3-3u^2-u}{4u^2+3u+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{u' = -u^2+3u+4}$$

$$\Rightarrow t\frac{du}{dt} = \frac{-4u^3-4u^2-4u-4}{4u^2+3u+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\frac{du}{dt} = -4\,\frac{u^3+u^2+u+1}{4u^2+3u+1}$$

I Dacă $u^3+u^2+u+1 \neq 0 \Leftrightarrow u^2(u+1)+(u+2) \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (u^2+1)(u+1) \neq 0 \Rightarrow u \neq -1$$

$$\frac{4u^2+3u+1}{u^3+u^2+u+1}\,du = -4\,\frac{dt}{t} \Big/ \int \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{4u^2+3u+1}{u^3+u^2+u+1}\,du = -4\int \frac{1}{t}\,dt$$

$$\frac{4u^2+3u+1}{(u^2+1)(u+1)} = \frac{\overset{u+1)}{Au+B}}{u^2+1} + \frac{\overset{u^2+1)}{C}}{u+1} = \frac{Au^2+Bu+Au+B+Cu^2+C}{(u^2+1)(u+1)} \Rightarrow$$

A, B, C – constante

$$\Rightarrow 4u^2+3u+1 = u^2(A+C) + u(B+A) + C+B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = A+C \\ 3 = B+A \\ 1 = C+B \end{cases} \oplus$$

$$\left.\begin{matrix} 4 = 2B+A+C \\ A+C = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4 = 2B+4 \Rightarrow B = 0,\ C = 1,\ A = 3$$

$$\int\left(\frac{3u}{u^2+1}+\frac{1}{u+1}\right)du=-4\int\frac{dt}{t} \Rightarrow \int\frac{\frac{3}{2}\cdot 2u}{u^2+1}\,du+\int\frac{du}{u+1}=-4\int\frac{dt}{t} \Rightarrow$$

$(u^2+1)'=2u$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\ln(u^2+1)+\ln|u+1|=-4\ln|t|+c$, $c\in\mathbb{R}$ constant

$3\ln(u^2+1)+2\ln|u+1|+8\ln|t|=2c$

$\ln\left[(u^2+1)^3(u+1)^2t^8\right]=2c$

$(u_1^2+1)^3(u_1+1)^2t^8=e^{2c}=a>0$ constant

[ soluție în formă implicită

II Dacă $u(t)=-1$, este soluție pentru (EVS)?

$$\begin{cases} m\,\text{stâng}=t\cdot(-1)'=0 \\ m\,\text{drept}=\dfrac{-4(-1)-4\cdot 1-4(-1)-4}{4\cdot 1-3+1}=\dfrac{4-4+4-4}{2}=0\end{cases}$$

$u_2(t)=-1$ soluție pentru (EVS) dată explicit

$\frac{x}{t}=u \Leftrightarrow x=tu$

$$\left[\left(\frac{x_1}{t}\right)^2+1\right]^3\cdot\left(\frac{x_1}{t}+1\right)^2\cdot t^8=a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x_1^2+t^2}{t^2}\right)^3\cdot\frac{(x_1+t)^2}{\cancel{t^2}}\cdot t^{\cancel{8}\,6}=a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{(x_1^2+t^2)^3}{\cancel{t^6}}\cdot(x_1+t)^2\cdot\cancel{t^6}=a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x_1^2+t^2)^3\cdot(x_1+t)^2=a \\ 4x_1^2+3tx_1+t^2\neq 0\end{cases}$$

$x_1=x_1(t)$ soluție în formă implicită

$$\begin{cases} x_2(t) = t u_2(t) = -t \\ 4x_2^2 + 3t x_2 + t^2 = 4t^2 - 3t^2 + t^2 = 2t^2 \neq 0 \Rightarrow t \neq 0 \end{cases}$$

$x_2$ e definită pe $(-\infty; 0)$ sau $(0; +\infty)$

12.10.2023

## Seminar 2

### ② Ecuații omogene

Forma: $x' = h\left(\frac{x}{t}\right)$ (EO)

Rezolvare: prin schimbarea de funcție necunoscută $\frac{x}{t} = u$, (EO) în $x = x(t)$ se transformă într-o (EVS) în

② $x' = \frac{x-t}{x+t}$

Î $x+t \neq 0$

$x' = \frac{x-t}{x+t} \Rightarrow x' = \frac{\cancel{t}(\frac{x}{t}-1)}{\cancel{t}(\frac{x}{t}+1)}, t\neq 0 \; (\cancel{EO}) \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = \frac{\frac{x}{t}-1}{\frac{x}{t}+1}$ (EO)

$u = \frac{x}{t} \Rightarrow x = ut \Rightarrow x' = u + u't$

$u + u't = \frac{u-1}{u+1} \Big/ -u \Rightarrow t \cdot u' = \frac{\cancel{u}-1-u^2-\cancel{u}}{u+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow tu' = -\frac{u^2+1}{u+1} \Rightarrow \frac{u+1}{\underset{\neq 0}{u^2+1}} du = -\frac{1}{t} dt \Big/ \int \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{u+1}{u^2+1} du = -\int \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2+1} du + \int \frac{1}{u^2+1} du = -\int \frac{dt}{t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln(u^2+1) + \operatorname{arctg} u = -\ln|t| + \cancel{c} \Big/ \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(u^2+1) + 2 \operatorname{arctg} u = -\ln t^2 + 2c \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln[t^2(u^2+1)] + 2 \operatorname{arctg} u = 2c$ soluție în formă implicită

$\ln[t^2(\frac{x^2}{t^2}+1)] + 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{t} = 2c \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(x^2+t^2) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{t} = 2c, \; x^2+t^2 \neq 0, t \neq 0, x+t \neq 0$

$\operatorname{arctg}: \mathbb{R}(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

③ $\begin{cases} \frac{t+x}{t} > 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{x}{t} > 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$

$tx' = x + (t+x) \ln(1+\frac{x}{t})$

$x' = \frac{x}{t} + (1+\frac{x}{t}) \ln(1+\frac{x}{t})$ (EO) $\cancel{\Rightarrow x}$

$u = \frac{x}{t} \Rightarrow x = t \cdot u \Rightarrow x' = u + t u'$

$\cancel{u(t)} = u + t u' = u + (1+u) \ln(1+u) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{(1+u)\ln(1+u)}{t}$ (EVS)

I dacă $\ln(1+u) \neq 0 \Rightarrow 1+u \neq 1 \Rightarrow u \neq 0$

$\frac{du}{(1+u)\ln(1+u)} = \frac{1}{t} dt \ / / \int \Rightarrow \int \frac{\frac{1}{1+u}}{\ln(1+u)} du = \int \frac{1}{t} dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|\ln(1+u)| = \ln|t| + C \Rightarrow C = \ln k,\ k > 0,\ k = e^{C}$

$\Rightarrow \ln|\ln(1+u)| = \ln(k \cdot |t|) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(1+u) = \underbrace{\pm k}_{a \in \mathbb{R}^*} |t| \Rightarrow \ln(1+u) = a \cdot t \Rightarrow$

$\Rightarrow (1+u) = e^{at} \Rightarrow u_1 = e^{at} - 1,\ a \in \mathbb{R}^*,\ t \neq 0$

II dacă $u = 0$

$\begin{cases} m \text{ stâng} = 0 \\ m \text{ drept} = \frac{1}{t}(1+0)\underbrace{\ln(1+0)}_{0} = 0 \end{cases}$

$u_2(t) = 0,\ t \neq 0$ soluție pentru ~~(EO)~~ (EVS)

$x_1(t) = t e^{at} - t,\ t \neq 0,\ a \in \mathbb{R}^*$ ct sol pt (EO)

$x_2(t) = 0,\ t \neq 0$ sol pt (EO)

# Ecuații reductibile la (EO)

Forma: $x' = f\left(\frac{a_{11}x + a_{12}t + b_1}{a_{21}x + a_{22}t + b_2}\right)$ (*), cu $f$ funcție continuă

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, 1 \le i, j \le 2$

$a_{21}x + a_{22}t + b_2 \neq 0$

$a_{11}^2 + a_{12}^2 + b_1^2 \neq 0 \ (>0)$

$a_{21}^2 + a_{22}^2 + b_2^2 \neq 0 \ (>0)$

$$(S) \begin{cases} a_{11}x + a_{12}t + b_1 = 0 \\ a_{21}x + a_{22}t + b_2 = 0 \end{cases}$$

Cazuri:

I (S) compatibil nedeterminat ((S) are $\infty$ de soluții), adică

$(\exists)\lambda \neq 0$ a.î. $\begin{cases} a_{11} = \lambda a_{21} \\ a_{12} = \lambda a_{22} \\ b_1 = \lambda b_2 \end{cases}$, atunci (*) devine

$$x' = f\left(\frac{\lambda(a_{21}x + a_{22}t + b_2)}{a_{21}x + a_{22}t + b_2}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x' = f(\lambda)$ EVS

II (S) incompatibil (n-are soluții),

$\exists \lambda \neq 0$ a.î. $\begin{cases} a_{11} = \lambda a_{21} \\ a_{12} = \lambda a_{22} \\ b_1 \neq \lambda b_2 \end{cases}$

Atunci notez $y = a_{11}x + a_{12}t + b_1$ sau $y = a_{21}x + a_{22}t + b_2$, și ajunge la o (EVS) în $y = y(t)$.

II (S) compatibil determinat, adică are soluție unică $(x_0, t_0)$, atunci prin substituția $\begin{cases} x = y + x_0 \\ t = s + t_0 \end{cases}$ ajunge la o (EO) în $y = y(s)$

$$s'(t) = (t - t_0)' = 1$$

$$ms = x' = (y + x_0)' = y' + \underbrace{x_0'}_{0} = y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds}$$

$$md = f\left(\frac{a_{11}y + a_{12}s + \overbrace{a_{11}x_0 + a_{12}t_0 + b_1}}{a_{21}y + a_{22}s + \underbrace{a_{21}x_0 + a_{22}t_0 + b_2}_{0}}\right) = f\left(\frac{s(a_{11}\frac{y}{s} + a_{12})}{s(a_{21}\frac{y}{s} + a_{22})}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow md = f\left(\frac{a_{11}\frac{y}{s} + a_{12}}{a_{21}\frac{y}{s} + a_{22}}\right) = h\left(\frac{y}{s}\right)$$

$$(*) \Rightarrow \frac{dy}{ds} = h\left(\frac{y}{s}\right) \text{ (EO) în } y = y(s)$$

① $x'(x - t + 2) = t - x - 1$

② $x' = (x - t)^2 + 1$

③ $x' = \frac{x + t - 2}{x - t - 4}$

① $x'(x - t + 2) = t - x - 1 \Big/ :(x - t + 2) \neq 0 \Rightarrow$ ; $x(t) \neq t - 2$

$$\Rightarrow x' = \frac{t - x - 1}{x - t + 2} \qquad (*) \text{ cu } f(r) = r$$

$$(S) \begin{cases} t - x - 1 = 0 \\ x - t + 2 = 0 \end{cases} (+)$$

$/ \quad / \quad 1 = 0$ (F) $\Rightarrow$ (S) nu are soluție $\Rightarrow$ caz II

Notez $x - t + 2 = y \Rightarrow x = t - 2 + y \Big/ \frac{d}{dt} \Rightarrow x' = 1 + y'$

$(1 + y')y = \cancel{t} - (\cancel{t} - 2 + y) - 1 \Rightarrow y + y'y = 1 - y \Rightarrow y'y = 1 - 2y$ (EVS) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt}y = 1 - 2y \Big/ :(1 - 2y)$$

I Dacă $1-2y\neq 0 \Leftrightarrow y\neq \frac{1}{2}$

$\frac{y}{1-2y}\,dy = dt \,/\!\!\int \Rightarrow \int \frac{y}{1-2y}\,dy = \int dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{(-2y+1)\cdot(-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{1-2y}\,dy = t + \mathcal{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\int dy + \frac{1}{2\cdot(-2)}\int \frac{-2}{1-2y}\,dy = t+\mathcal{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\ln|1-2y| = t+\mathcal{C} \,/\cdot(-4) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y+\ln|1-2y| = -4t-4\mathcal{C}$ soluție în formă implicită

II Dacă $y(t)=\frac{1}{2}$:

m stânga din (EVS) $=\left(\frac{1}{2}\right)'\cdot\frac{1}{2}=0$

m drept din (EVS) $= 1-2\cdot\frac{1}{2}=0$

$\Big\}\ y_2(t)=\frac{1}{2},\ t\in\mathbb{R}$ soluție pt EVS

$2(x_1(t)-t+2)+\ln|1-2(x_1(t)-t+2)| = -4t-4\mathcal{C},\ \mathcal{C}\in\mathbb{R}$ soluție implicită

$x_2(t)=t-2+y_2 = t-2+\frac{1}{2} = t-\frac{3}{2},\ t\in\mathbb{R}$

(2) $x' = (x+t)^2+1 \qquad f(u)=u^2+1$

(S) $\begin{cases} x-t=0 \\ 1=0\ (F) \end{cases} \Rightarrow$ (S) incompatibil $\Rightarrow$ cazul II

$x-t = \frac{x-t}{1}$

Notez $y=x-t \Rightarrow x = y+t \,/\frac{d}{dt} \Rightarrow x'=y'+1$

$y'+\cancel{1} = y^2+\cancel{1} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = y^2$ (EVS)

I $y \neq 0$

$\frac{dy}{y^2} = dt \Big| \int \Rightarrow \int y^{-2} dy = \int dt \Rightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = t + C \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{y} = t + C \Rightarrow y = \frac{-1}{t+C}, \ t + C \neq 0, \ C \in R$

II $y = 0$

$\left.\begin{array}{l} ms = 0 \\ md = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y_2(t) = 0$ soluție a (EVS)

$x_1(t) = t - \frac{1}{t+C}, \ t + C \neq 0, \ C \in R$

$x_2(t) = t, \ t \in R$

③ $x' = \frac{x+t-2}{x-t-4}$

$x - t - 4 \neq 0$ ⊛ cu $f(r) = r$

(S) $\begin{cases} x + t - 2 = 0 \\ x - t + 4 = 0 \end{cases}$ (+)

$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow t = x - 4 = -1$

(S) are soluție unică $\begin{cases} x_0 = 3 \\ t_0 = -1 \end{cases}$ caz III

Fac substituția $\begin{cases} x = y + x_0 = y + 3 \\ t = s + t_0 = s - 1 \Rightarrow s = t + 1 \end{cases}$

m∆ din ③ $x' = (y+3)' = y' + 3' = y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds}$

③ devine: $\frac{dy}{ds} = \frac{y + \cancel{3} + s - \cancel{1} - \cancel{2}}{y + \cancel{3} - (s-1) - \cancel{4}} \Rightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{y+s}{y-s}$

$\frac{dy}{ds} = \frac{s\left(\frac{y}{s} + 1\right)}{s\left(\frac{y}{s} - 1\right)}; \ s \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{\frac{y}{s} + 1}{\frac{y}{s} - 1}$ (EO)

Fac substituția $\frac{y}{s} = u \Rightarrow y = s \cdot u \Rightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds}(su) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dy}{ds} = u + s\frac{du}{ds}$$

$$u + s\frac{du}{ds} = \frac{u+1}{u-1} \Big/ -\overset{u-1}{u} \Rightarrow s\frac{du}{ds} = \frac{u+1-u^2+u}{u-1} \quad \text{(EVS)}$$

I Dacă $-u^2+2u+1 \neq 0$

$$\frac{u-1}{-u^2+2u+1}\,du = \frac{ds}{s} \Big/ \int \Rightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{(u-1)(-2)}{-u^2+2u+1}\,du = \int \frac{ds}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|-u^2+2u+1| = \ln|s| + C \Big/ \cdot(-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|-u^2+2u+1| = \underbrace{-2\ln|s| + \underbrace{(-2C)}_{\ln k}}_{\ln \frac{k}{s^2}} \quad k = e^{-2C} > 0$$

$$|-u^2+2u+1| = \frac{k}{s^2} \Rightarrow s^2(-u^2+2u+1) = \pm k \quad a \in \mathbb{R}^*$$