k) $x''' - 3x'' + 3x' - x = 0$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - \lambda = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \in \mathbb{R}$ rădăcină triplă

S.f.s $\{e^t, te^t, t^2e^t\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot t \cdot e^t + C_3 \cdot t^2 \cdot e^t$, $t \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ const

16.11.2023

Cursul 8

Ecuații diferențiale liniare de ordin superior

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

O ecuație diferențială liniară de ordin n are forma generală:

(1) $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + a_2(t)x^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t)$,

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n, f : I$ (interval deschis $\neq \emptyset$) $\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

Prin substituția $\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x' \\ \ldots \\ y_n = x^{n-1} \end{cases}$ ecuația (1) se transformă în sistemul de n ecuații diferențiale liniare de ordinul I.

$$(2) \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \ldots \\ y_{n-1}' = y_n = x^{(n-1)} \\ y_n' = -a_n(t)y_1 - a_{n-1}(t)y_2 - \ldots - a_1(t)y_n + f(t) = x^{(n)} \end{cases}$$

Fie $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \ldots & a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$

$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \ldots y_{n-1} \quad y_n$

$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \\ y_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Scanat cu CamScanner

Cu aceste notații ② se rescrie sub forma ecuației liniar vectoriale:

③ $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$.

Rezultatele din cursul trecut despre sisteme diferențiale liniare de ordin I pot fi reformulate pentru ecuațiile diferențiale liniare de ordin n.

Dacă $f(t) = 0$, $(\forall)\, t \in I$, ecuația ① se numește LINIAR OMOGENĂ, iar în caz contrar, LINIAR NEOMOGENĂ.

__Teoremă__: Pentru orice $t_0 \in I$, orice $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$,

$$(PC)\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t) \\ x(t_0) = x_{01},\ x'(t_0) = x_{02}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0n} \end{cases}$$

are o soluție unică globală $x: I \to \mathbb{R}$.

Ideea de demonstrație $(PC)\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$, problema Cauchy despre care știu de la sistemele liniare că are soluție unică globală.

__Ecuații diferențiale liniare de ordin n omogene__

__Forma__: $x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0$ ④

ecuația liniară omogenă asociată ecuației ①

__Teoremă__: Mulțimea S_n a soluțiilor ecuației liniare omogene ④ este un spațiu liniar real (peste $\mathbb{R}$) de dimensiune n = ordinul ecuației.

Din această teoremă $\Rightarrow$ pentru a cunoaște $\forall$ soluție a ecuației omogene ④ este suficient să aflu n soluții liniar independente ($\Leftrightarrow$ o bază în S_n) ale ecuației ④.

Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n : I \to \mathbb{R}$ sunt n soluții liniar independente pentru ④, atunci $\forall$ soluție $x \in S_n$ a ecuației ④ se scrie în mod unic în forma: ⑤ $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t)$, $(\forall)\, t \in I$, unde $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ constante.

Definiție: Un sistem de n soluții $x_1, x_2, \dots, x_n$ ale lui ④ care formează o bază în S_n se numește SISTEM FUNDAMENTAL DE SOLUȚII pentru ecuația liniară omogenă ④.

Definiție: Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n \in S_n$, matricea $X: \underline{I} \to M_n(\mathbb{R})$,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & & x_n'(t) \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$ se numește matricea ~~asocie~~ asociată acestui sistem de soluții.

Definiție: Matricea asociată unui s.f.s. pentru ecuația ④ se numește MATRICE FUNDAMENTALĂ.

Definiție: Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n \in S_n$ și $X(t)$ este matricea asociată acestui sistem de soluții, determinantul $W: \underline{I} \to \mathbb{R}$, $W(t) = \det X(t)$ se numește wronskianul sistemului de soluții, atunci:

$$W(t) = W(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(s)ds}, (\forall) t \in \underline{I}, \text{ unde } t_0 \in \underline{I} \text{ fixat.}$$

Demonstrație: Th. Liouville pentru sistemul liniar ② (sau ③):

$$W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s) ds}, (\forall) t \in \underline{I} \ (t_0 \in \underline{I} \text{ fixat}).$$

Dar $\operatorname{tr} A(s)$ = suma elementelor de pe diagonala principală a matricei $A(t) = -a_1(s)$, $(\forall) s \in \underline{I}$

Observație: Dacă în ecuația ① sau ④ coeficientul $a_1(t) = 0, (\forall) t \in \underline{I}$, atunci $W(t) = \text{constant}, (\forall) t \in \underline{I}$, $(\forall)$ sistemul de soluții $x_1, x_2, \dots, x_n$ pentru ④.

Pentru a verifica dacă n soluții $x_1, x_2, \dots, x_n$ ale ecuației omogene ④ sunt s.f.s. se folosește:

Teoremă: Fie $x_1, x_2, \dots, x_n \in S_n$, $X(t)$ și $W(t)$ matricea sistemului, respectiv, wronskianul asociate acestui sistem de soluții.

Atunci sunt echivalente afirmațiile:

i) $X(t)$ matrice fundamentală pentru ④ $\Leftrightarrow x_1, x_2, \dots, x_n$ sfs pt ④

ii) $W(t) \neq 0, (\forall)\, t \in I$

iii) $(\exists)\, t_0 \in I$ a.î. $W(t_0) \neq 0$

Observație: Condiția ii) $\Leftrightarrow \det X(t) \neq 0, (\forall)\, t \in I \Leftrightarrow X(t)$ matrice inversabilă $(\forall)\, t \in I$

Ecuații diferențiale liniare de ordin n neomogene

Observație: Mulțimea soluțiilor pentru o ecuație liniară neomogenă nu e spațiu liniar, pentru că suma a 2 soluții ale ecuației nu e soluție pentru ecuație:

① $x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\, x' + a_n(t)\, x = f(t)$

$y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\, y' + a_n(t)\, y = f(t)$ $\quad (+)$

$(x+y)^{(n)} + a_1(t)(x+y)^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)(x+y)' + a_n(t)(x+y) = 2f(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y$ nu verifică ①

Pentru ecuații liniare neomogene nu vorbim de s.f.s. sau matrice fundamentală (aceste noțiuni sunt specifice ecuațiilor liniar omogene).

Teoremă:

$$\underbrace{X_{neomg}(t)}_{\text{soluția generală a ecuației liniar neomogene ①}} = \underbrace{X_{omg}(t)}_{\text{soluția generală a ecuației liniar omogene ④}} + \underbrace{X_p(t)}_{\text{soluția particulară a ecuației neomogene ④}}, (\forall)\, t \in I$$

Metoda variației constantelor pentru rezolvarea ecuației liniare neomogene.

Pp. că am putut determina un s.f.s. $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ pentru ecuația liniară omogenă (4). Fie $X(t)$ matricea asociată acestui s.f.s. $\Rightarrow X(t)$ matrice fundamentală pentru (4) $\Rightarrow$

$\xRightarrow[\text{ec. omogene}]{\text{ultima th}}$ $W(t) = \det X(t) \neq 0$, $(\forall)\, t \in I$

Din (5) $\Rightarrow$ soluția generală a ecuației liniare omogene (4) este:

$$x_{omg}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot x_k(t), (\forall)\, t \in I, \text{ unde } c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R} \text{ const}$$

În continuare căutăm soluția generală a ecuației neomogene (1) de forma:

(6) $x(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\, x_k(t)$, unde $C_1, C_2, \dots, C_n : I \to \mathbb{R}$ de clasă C^1

(*) $X(t)\, C'(t) = b(t) \Leftarrow$ de văzut demonstrația TVC pentru sisteme liniare

$$(S)\begin{cases} C_1'(t)\, x_1(t) + C_2'(t)\, x_2(t) + \dots + C_n'(t)\, x_n(t) = 0 \\ C_1'(t)\, x_1'(t) + C_2'(t)\, x_2'(t) + \dots + C_n'(t)\, x_n'(t) = 0 \\ \dots\dots \\ C_1'(t)\, x_1^{(n-2)}(t) + C_2'(t)\, x_2^{(n-2)}(t) + \dots + C_n'(t)\, x_n^{(n-2)}(t) = 0 \\ C_1'(t)\, x_1^{(n-1)}(t) + C_2'(t)\, x_2^{(n-1)}(t) + \dots + C_n'(t)\, x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}$$

Sistemul (S) este un sistem algebric liniar cu n ecuații și n necunoscute $C_1'(t), C_2'(t), \dots, C_n'(t)$, în plus, determinantul sistemului (S) este $\forall t$ $\det X(t) = \cancel{\det}\, W(t) \neq 0\, (\forall)\, t \in I \Rightarrow (S)$ sistem Cramer, deci are soluție unică.

Se rezolvă sistemul (S), se află $C_1'(t), C_2'(t), \dots, C_n'(t)$. Prin integrare se află $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$, fiecare depinzând de câte o constantă, în total n constante.

Cele n constante pot fi aflate în mod unic din cele n condiții inițiale ale problemei Cauchy

se formează un nou sistem Cramer

cu $\det C = W(t_0) \cancel{W(t_0)} \neq 0$

<u>Observație</u>: Singura informație de care avem nevoie ca să rezolvăm ecuația omogenă ④ sau ecuația neomogenă ① este cum aflu un sfs pentru ④. Acest lucru este posibil la ecuații liniare cu coeficienți constanți (de văzut seminar).

Ecuația oscilatorului liniar armonic. Fenomenul de rezonanță pentru oscilatorul armonic neamortizat

<u>Ecuația oscilatorului liniar armonic neamortizat</u>:

① $m x'' + k x = 0$; $\frac{k}{m} = \omega^2$ ($\omega > 0$ constant, pulsație)

② $x'' + \omega^2 x = 0$ ecuație liniară cu coeficient constant omogenă

<u>Soluția generală</u>:

↳ pentru ②:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,\ t \geq 0,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ const.}$$

Dacă, în plus, cunoaștem:

x_0 = elongația inițială a particulei = $x(0)$

v_0 = viteza inițială a particulei = $x'(0)$

③ $\xRightarrow{t=0} x(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \Rightarrow C_1 = x_0$

Derivăm ③ $\Rightarrow x'(t) = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t \xRightarrow{t=0}$

$\xRightarrow{t=0} x'(0) = -\omega C_1 \sin 0 + \omega C_2 \cos 0 \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{\omega}$

Înlocuim C_1, C_2 în ③ $\Rightarrow$ ④ $x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t,\ t \geq 0$

Notăm: $a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} > 0$, constant

⑤ $x(t) = a\left(\frac{x_0}{a}\cos\omega t + \frac{\frac{v_0}{\omega}}{a}\sin\omega t\right)$

Observăm că $\left.\begin{array}{l} -1 \leq \frac{x_0}{a} \cdot \frac{\frac{v_0}{\omega}}{a} \leq 1 \\ \left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{\frac{v_0}{\omega}}{a}\right)^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (\exists)\ \varphi \in [0; 2\pi]$ a.î. $\left\{\begin{array}{l} \frac{x_0}{a} = \sin\varphi \\ \frac{v_0/\omega}{a} = \cos\varphi \end{array}\right.$

faza inițială

⑤ se rescrie: $x(t) = a(\sin\varphi\cos\omega t + \cos\varphi\sin\omega t) \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = a\sin(\varphi + \omega t),\ t \geq 0$, oscilație armonică

a = amplitudinea mișcării = valoarea maximă a elongației

$\omega t + \varphi$ = faza oscilației

T = perioada oscilației

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Particula oscilează între elongațiile extreme a și $-a$, cu perioada $T > 0$; $\nu = \frac{1}{T}$ frecvența oscilației.

Fenomenul de rezonanță:

Pp că nu avem frecare și că particula se mișcă sub acțiunea forței elastice și a unei forțe de întreținere a oscilațiilor cu modulul: $F(t) = m(k_1\sin\omega t + k_2\cos\omega t)$

$m\ddot{x} = -k \cdot x + m(k_1\sin\omega t + k_2\cos\omega t) \,/ : m \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = k_1\sin\omega t + k_2\cos\omega t \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = k_1\sin\omega t + k_2\cos\omega t$ ⑥

Rezolvăm ecuația liniară neomogenă, cu coeficientul constant, ⑥ prin metoda variației constantelor.

Ecuația liniară omogenă asociată:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

s.f.s pentru ecuația omogenă: $\{\cos \omega t, \sin \omega t\}$

Căutăm soluția generală a ecuației neomogene ⑥ de forma:

⑦ $x(t) = C_1(t)\cos \omega t + C_2(t)\sin \omega t$, $C_1, C_2 \in C^1$

$$(S)\begin{cases} C_1'(t)\cos \omega t + C_2'(t)\sin \omega t = 0 \quad / \cdot \omega \sin \omega t \\ C_1'(t)\cdot(-\omega \sin \omega t) + C_2'(\omega \cos \omega t) = k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t \quad / \cdot \cos \omega t \end{cases}$$

⊕

$$C_2'(\underbrace{\omega \sin^2 \omega t + \omega \cos^2 \omega t}_{\omega \cdot 1}) = k_1 \sin \omega t \cos \omega t + k_2 \cos^2 \omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2'(t) = \frac{1}{\omega}(k_1 \sin \omega t \cos \omega t + k_2 \cos^2 \omega t) \quad ⑧$$

Ducem ⑧ în prima ecuație din (S):

$$C_1'(t)\cos \omega t + \frac{1}{\omega}(k_1 \sin \omega t \cos \omega t + k_2 \cos^2 \omega t)\sin \omega t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(t)\cos \omega t + \frac{1}{\omega}k_1 \sin^2 \omega t \cos \omega t + \frac{1}{\omega}k_2 \cos^2 \omega t \sin \omega t = 0 \quad \Big| : \cos \omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(t) + \frac{1}{\omega}k_1 \sin^2 \omega t + \frac{1}{\omega}k_2 \cos \omega t \sin \omega t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(t) = -\frac{k_1}{\omega}\sin^2 \omega t - \frac{k_2}{\omega}\cos \omega t \sin \omega t \quad \Big/ \int dt \Rightarrow$$

$$\cancel{\Rightarrow C_1(t) = -\frac{k_1}{2\omega}\int(1-\cos 2\omega t)\,dt}$$

$$\Rightarrow C_1(t) = -\frac{k_1}{\omega}\int \sin^2 \omega t\, dt - \frac{k_2}{\omega}\int \cos \omega t \sin \omega t\, dt$$

$$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos 2a)$$

$$2\sin a \cos a = \sin 2a$$

$$\Rightarrow C_1(t) = -\frac{k_1}{2\omega}\int(1-\cos 2\omega t)\,dt - \frac{k_2}{2\omega}\int \sin 2\omega t\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(t) = -\frac{k_1}{2\omega}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right) + \frac{k_2}{2\omega}\,\frac{\cos 2\omega t}{2\omega} + a_1,\ a_1 \in \mathbb{R} \text{ constantă}$$

$$\left.\begin{array}{l} C_2(t) = \dfrac{k_1}{\omega}\displaystyle\int \sin\omega t \cos\omega t\,dt + \dfrac{k_2}{\omega}\displaystyle\int \cos^2\omega t\,dt \\ \cos^2 a = \frac{1}{2}(1+\cos 2a) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2(t) = \frac{k_1}{2\omega}\int \sin 2\omega t\,dt + \frac{k_2}{2\omega}\int (1+\cos 2a)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2(t) = -\frac{k_1}{2\omega}\,\frac{\cos 2\omega t}{2\omega} + \frac{k_2}{2\omega}\left(t + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right) + a_2,\ a_2 \in \mathbb{R} \text{ constantă}$$

Ne întoarcem cu $C_1(t)$ și $C_2(t)$ în (7) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = \left(-\frac{k_1}{2\omega}t + \frac{k_1}{4\omega^2}\sin 2\omega t + \frac{k_2}{\omega^2}\cos 2\omega t + a_1\right)\cdot \cos\omega t +$$
$$+ \left(-\frac{k_1}{4\omega^2}\cos 2\omega t + \frac{k_2}{2\omega}t + \frac{k_2}{4\omega^2}\sin 2\omega t + a_2\right)\sin\omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{k_1}{2\omega}t\cos\omega t + \frac{k_2}{2\omega}t\sin\omega t + a_1\cos\omega t + a_2\sin\omega t +$$
$$+ \frac{k_1}{4\omega^2}(\sin 2\omega t\cos\omega t - \cos 2\omega t\sin\omega t) + \frac{k_2}{4\omega^2}(\cos 2\omega t\cos\omega t + \sin 2\omega t\sin\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{k_1}{2\omega}t\cos\omega t + \frac{k_2}{2\omega}t\sin\omega t + \underbrace{a_3\sin\omega t + a_4\cos\omega t}_{\text{mărginită (seamănă cu soluția ecuației omogene } x''+\omega^2 x = 0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = a_2 + \dfrac{k_1}{4\omega^2} \\ a_4 = a_1 + \dfrac{k_2}{\omega^2} \end{array}\right\} \text{sunt constante}$$

Pt că $F(t) = m(k_1\sin\omega t + k_2\cos\omega t) \not\equiv 0$ trebuie ca $k_1 \neq 0$ sau $k_2 \neq 0$

• Dacă $k_1 \neq 0$, căutăm un șir $(t_n)_n$ a.î. $\begin{cases}\cos\omega t_n = 1\\ \sin\omega t_n = 0\end{cases}$

Luăm $\omega t_n = 2n\pi \Leftrightarrow t_n = \frac{2n\pi}{\omega}$, $n \geq 1$

$$x(t_n) = -\frac{k_1}{2\underbrace{\omega}_{>0}}\,\frac{\overbrace{2n\pi}^{\to\infty}}{\underbrace{\omega}_{>0}}\underbrace{\cos\omega t_n}_{1} + \frac{k_2}{2\omega}\underbrace{\sin\omega t_n}_{0} + a_3\cdot 0 + a_4\cdot 1 \xrightarrow{n\to\infty}$$

$\rightarrow -\operatorname{sgn} k_1 \cdot \infty = \pm\infty \Rightarrow$ funcția x nemărginită

• Dacă $k_2 \neq 0$, caut un șir $(\tilde{t}_n)_n$ a.î. $\begin{cases} \sin \omega \tilde{t}_n = 1 \\ \cos \omega \tilde{t}_n = 0 \end{cases}$

Luăm $\omega \tilde{t}_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Leftrightarrow \tilde{t}_n = \frac{(4n+1)\pi}{2\omega}$, $n \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(\tilde{t}_n) = -\frac{k_1}{2\omega} \cdot \frac{4n+1}{2\omega}\pi \underbrace{\cos\omega\tilde{t}_n}_{0} + \frac{k_2}{2\omega} \cdot \frac{4n+1}{2\omega}\pi \sin\omega\tilde{t}_n + a_3 \cdot 1 + a_n \cdot 0 \longrightarrow$

$\xrightarrow{n\to+\infty} \operatorname{sgn} k_2 (+\infty) = \pm\infty \Rightarrow$ funcția este nemărginită

Deci dacă frecvența forței de întreținere a oscilațiilor coincide cu frecvența proprie a oscilatorului, elongația devine oricât de mare (fenomenul de rezonanță).

16.11.2023

Seminar 7

Rădăcina ecuației caracteristice	Soluția din s.f.s
$\lambda \in \mathbb{R}$ simplă	$\Rightarrow e^{\lambda t}$
$\lambda \in \mathbb{R}$ dublă	$\Rightarrow e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}$
$\lambda \in \mathbb{R}$ triplă	$\Rightarrow e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}$
$\lambda_{1,2} = \pm \beta i \in \mathbb{C}$ simple	$\Rightarrow \cos\beta t, \sin\beta t$
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ simple	$\Rightarrow e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$
$\lambda_{1,2} = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ duble	$\Rightarrow e^{\alpha t}\cos\beta t, t e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t, t e^{\alpha t}\sin\beta t$

1) $x^{(4)} + 14x'' + 49x = 0$

Ec. caracteristică: $\lambda^4 + 14\lambda^2 + 49 = 0$

Notăm: $\lambda^2 = \mu \Rightarrow \mu^2 + 14\mu + 49 = 0$

$\Delta = 14^2 - 4 \cdot 49 = 196 - 196 = 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = \frac{-14}{2} = -7$ răd dublă

$\lambda^2 = -7$ rădăcină dublă $\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{7} \cdot i$ răd duble $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \sqrt{7} \end{cases}$

s.f.s: $\{\cos(t\sqrt{7}), \sin(t\sqrt{7}), t\cos(t\sqrt{7}), t\sin(t\sqrt{7})\}$

Soluția generală:

$x(t) = c_1 \cos(t\sqrt{7}) + c_2 \sin(t\sqrt{7}) + c_3 t \cos(t\sqrt{7}) + c_4 t \sin(t\sqrt{7}), t\in\mathbb{R}, c_i$ const $i=\overline{1,4}$

Ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți de ordin n neomogene

Forma: $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t)$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ const

$f: I \to \mathbb{R}$ continuă

Rezolvare:
- I cu metoda variației constantelor (MVC)
- II căutarea unei soluții particulare $x_p(t)$, dacă $f(t)$ = cvasipolinom

Rezolvați cu metoda variația constantelor:

① $x'' + 16x' + 64x = 2t e^{-8t}$

② $\begin{cases} x'' + 4x = 4\sin 2t \\ x(0) = 0,\ x'(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

③ $x'' + 6x' + 8x = 6e^{-t}$

④ $x''' + x'' - x' - x = 4e^{-t}$

① $x'' + 16x' + 64x = 2t e^{-8t}$

Ec. omogenă asociată: $x'' + 16x' + 64x = 0$

Ec. caracteristică: $\lambda^2 + 16\lambda + 64 = 0$! Membrul drept al ec. caract. este mereu 0!

$(\lambda+8)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -8 \in \mathbb{R}$ dublă

sfs $\{e^{-8t}, t e^{-8t}\}$

$\boxed{MVC}$ Căutăm ~~$x(t) = c_1 e^{-8t} + c_2 t e^{-8t}$, c_1~~

$x(t) = C_1(t) e^{-8t} + C_2(t) \cdot t e^{-8t}$, $C_1, C_2 \in C^1_I$ (*)

$$(S)\begin{cases} C_1'(t) e^{-8t} + C_2'(t) \cdot t e^{-8t} = 0 \quad | \cdot 8 \\ C_1'(t) e^{-8t} \cdot (-8) + C_2'(t)\left(e^{-8t} - 8t e^{-8t}\right) = 2t e^{-8t} \end{cases} \quad (+)$$

$C_2'(t) \cdot \cancel{e^{-8t}} = 2t \cancel{e^{-8t}} \Rightarrow$

$\Rightarrow C_2'(t) = 2t \ | \int dt \Rightarrow C_2(t) = 2\int t\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow C_2(t) = 2\frac{t^2}{2} + k_2 = t^2 + k_2$, $k \in \mathbb{R}$ const

Scanat cu CamScanner

$C_1'(t)\cdot \cancel{e^{-8t}} + 2t^2 \cdot t\, \cancel{e^{-8t}} = 0 \Rightarrow C_1'(t) = -2t^2 \,\Big/ \int dt \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1(t) = -2\int t^2 dt = -2\cdot \frac{t^3}{3} + k_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1(t) = -\frac{2}{3}t^3 + k_1,\ k_1 \in \mathbb{R}$ const

Acum ducem $C_1(t)$, $C_2(t)$ în formula (*):

$x(t) = \left(-\frac{2}{3}t^3 + k_1\right)e^{-8t} + (t^2 + k_2)\,t\,e^{-8t} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = k_1 e^{-8t} + k_2 t e^{-8t} + t^3 e^{-8t}\left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{1}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = k_1 e^{-8t} + k_2 t e^{-8t} + \frac{1}{3} t e^{-8t},\ t \in \mathbb{R},\ k_{1,2} \in \mathbb{R}$ const.

(2) $x'' + 4x = 4\sin 2t$ (ec. oscilatorului armonic neamortizat, $\omega = 2$)

$\lambda^2 + 4\cancel{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$

sfs: $\{\cos 2t, \sin 2t\}$

$x(t) = C_1(t)\cos 2t + C_2(t)\sin 2t,\ C_1, C_2 \in C^1$

$$(S)\begin{cases} C_1'(t)\cos 2t + C_2'(t)\sin 2t = 0 \ \Big/ \cdot 2\sin 2t \\ C_1'(t)(-2\sin 2t) + C_2'(t)\, 2\cos 2t = 4\sin 2t \ \Big/ \cos 2t \end{cases} \oplus$$

$C_2'(t)(2\sin^2 2t + 2\cos^2 2t) = 4\sin 2t\,\cancel{\cos 2t}$

$\Rightarrow 2C_2'(t) = 4\sin 2t\cos 2t \Rightarrow C_2'(t) = 2\sin 2t\cos 2t \Rightarrow$

$\Rightarrow C_2'(t) = \sin 4t \,\Big/ \int dt \Rightarrow C_2(t) = \int \sin 4t\, dt \Rightarrow$

$\Rightarrow C_2(t) = -\frac{\cos 4t}{4} + k_2,\ k_2 \in \mathbb{R}$ const

$C_1'(t)\cancel{\cos 2t} + 2\sin^2 2t\,\cancel{\cos 2t} = 0 \Rightarrow C_1'(t) = -2\sin^2 2t \,\Big/ \int dt \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1(t) = -\int (1 - \cos 4t)\,dt \Rightarrow C_1(t) = -t + \frac{\sin 4t}{4} + k_1,\ k_1 \in \mathbb{R}$ const

$x(t) = \left(-t + \frac{\sin 4t}{4} + k_1\right)\cos 2t + \left(-\frac{\cos 4t}{4} + k_2\right)\sin 2t \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = -t\cos 2t + \frac{\sin 4t\cos 2t}{4} + k_1\cos 2t - \frac{\cos 4t\sin 2t}{4} + k_2\sin 2t \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = -t\cos 2t + k_1\cos 2t + k_2\sin 2t + \frac{\sin 4t\cos 2t - \cos 4t\sin 2t}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = -t\cos 2t + k_1\cos 2t + k_2\sin 2t + \frac{\sin 2t}{4},\ t \in \mathbb{R},\ k_{1,2} \in \mathbb{R}$ const

$x(0) = 0 + k_1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$

$x'(t) = -\cos 2t + 2t\sin 2t - 2k_1\sin 2t + 2k_2\cos 2t + \frac{\cos 2t}{2}$

$x'(0) = -1 + 0 - 0 + 2k_2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = 0$

$x(t) = -t\cos 2t + \frac{\sin 2t}{4} \Rightarrow \cancel{x(t)=}, t \in \mathbb{R}$

③ $x'' + 6x' + 8x = 6e^{-t}$

$x'' + 6x' + 8x = 0$

$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$

$\Delta = 36 - 4 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 \quad \lambda_1 = \frac{-6+2}{2} = -2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_2 = \frac{-6-2}{2} = -4 \in \mathbb{R}$

$Sfs \{e^{-2t}, e^{-4t}\}$

$x(t) = C_1(t) \cdot e^{-4t} + C_2(t) e^{-2t}; C_1, C_2 \in C^1$

$(S) \begin{cases} C_1'(t) e^{-4t} + C_2'(t) e^{-2t} = 0 \quad / \cdot (4) \\ C_1'(t)(-4e^{-4t}) + C_2'(t)(-2e^{-2t}) = 6e^{-t} \end{cases}$ (+)

$+2 C_2'(t) e^{-2t} = 6e^{-t} \Rightarrow C_2'(t) = 3e^{-t+2t} = 3e^{t} \,/\!\int dt \Rightarrow$

$\Rightarrow C_2(t) = 3\int e^{t} dt \Rightarrow C_2(t) = 3e^{t} + k_2, k_2 \in \mathbb{R}$ const

$C_1'(t) e^{-4t} + 3e^{t} \cdot e^{-2t} = 0 \Rightarrow C_1'(t) e^{-4t} = -3e^{-t} \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1'(t) = -3e^{-t} \cdot e^{4t} = -3e^{3t} \,/\!\int dt \Rightarrow C_1(t) = \int -3e^{3t} dt \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1(t) = -e^{3t} + k_1, k_1 \in \mathbb{R}$ const

$x(t) = (-e^{3t} + k_1) \cdot e^{-4t} + (3e^{t} + k_2) e^{-2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = -e^{-t} + k_1 \cdot e^{-4t} + 3e^{-t} + k_2 \cdot e^{-2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = 2e^{-t} + k_1 e^{-4t} + k_2 e^{-2t}, t \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ const

Scanat cu CamScanner

(4) $x''' + x'' - x' - x = 4e^{-t}$

$x''' + x'' - x' - x = 0$

$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda+1) - 1(\lambda+1) = 0 \Rightarrow (\lambda+1)^2(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_{2,3} = \pm 1 \end{cases}$

$S.f.S = \{e^{-t}, te^{-t}, e^{t}\}$

$x(t) = b_1(t)e^{-t} + b_2(t)te^{-t} + b_3(t)\cdot e^{t}$, $b_1, b_2, b_3 \in C^1$

$$(S)\begin{cases} b_1'(t)e^{-t} + b_2'(t)te^{-t} + b_3'(t)e^{t} = 0 \\ -b_1'(t)\cdot(e^{-t}) + b_2'(t)\cdot e^{-t} - b_2'(t)\cdot(te^{-t}) + b_3'(t)\cdot e^{t} = 0 \\ b_1'(t)e^{-t} - b_2'(t)\cdot e^{-t} - b_2' e^{-t} + b_2'(te^{-t}) + b_3'(t)e^{t} = 4e^{-t} \end{cases}$$

$b_1'(t)e^{-t} + b_2'(t)te^{-t} + b_3'(t)e^{t} = 0$

$-b_1'(t)e^{-t} + b_2'(t)e^{-t} - \cancel{b_2'(t)e^{-t}t} + b_3'(t)e^{t} = 0 \quad (+)$

$/ \quad b_2'(t)e^{-t} + 2b_3'(t)e^{t} = 0$

$-b_1'(t)e^{-t} + b_2'(t)e^{-t} - b_2'(t)(te^{-t}) + b_3'(t)e^{t} = 0$

$b_1'(t)e^{-t} - b_2'(t)e^{-t} - b_2'(t)e^{-t} + b_2'(t)(te^{-t}) + b_3'(t)e^{t} = 4e^{-t} \quad (+)$

$/ \quad / \quad -b_2'(t)e^{-t} \quad / + 2b_3'(t)e^{t} = 4e^{-t}$

Scanat cu CamScanner

$b_2'(t)e^{-t} + 2b_3'(t)e^{t} = 0$

$-b_2'(t)e^{-t} + 2b_3'(t)e^{t} = 4e^{-t}$ (+)

$4b_3'(t)e^{t} = 4e^{-t} \Rightarrow b_3'(t) = e^{-2t}$

$b_2'(t)e^{-t} + 2\cdot e^{-2t}\cdot e^{t} = 0 \Rightarrow b_2'(t)\cancel{e^{-t}} = -2\cancel{e^{-t}} \Rightarrow b_2'(t) = -2$

$b_1'(t)\cdot e^{-t} - 2te^{-t} + e^{-2t}\cdot e^{t} = 0 \Rightarrow b_1'(t)\cdot \cancel{e^{-t}} + 2t\cancel{e^{-t}} + \cancel{e^{-t}} = 0 \Big/ : e^{-t} \Rightarrow$

$\Rightarrow b_1'(t) = +2t - 1 \Big/ \int dt \Rightarrow b_1(t) = 2\int t\,dt - \int dt = 2\frac{t^2}{2} - t + k_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b_1(t) = t^2 - t + k_1,\ t \in \mathbb{R},\ k_1 \in \mathbb{R}$

$b_2'(t) = -2 \Big/ \int dt \Rightarrow b_2(t) = -2\int dt = -2t + k_2,\ t\in\mathbb{R},\ k_2 \in \mathbb{R}$

$b_3'(t) = e^{-2t} \Big/ \int dt \Rightarrow b_3(t) = -\frac{1}{2}\int -2e^{-2t}dt = -\frac{e^{-2t}}{2} + k_3,\ t\in\mathbb{R}, k_3\in\mathbb{R}$

$x(t) = (t^2 - t + k_1)\cdot e^{-t} + (-2t + k_2)\cdot t\cdot e^{-t} + \left(\frac{-e^{-2t}}{2} + k_3\right)e^{t} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = k_1 e^{-t} + k_2\cdot t\cdot e^{-t} + k_3\cdot e^{t} + e^{-t}\left(t^2 - t - 2t^2 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = k_1 e^{-t} + k_2 t e^{-t} + k_3 e^{t} + e^{-t}\left(-t^2 - t - \frac{1}{2}\right),\ t\in\mathbb{R},\ k_1, k_2, k_3$ constante

Metoda a II-a: $x_{neomg}(t) = x_{omg}(t) + x_p(t)$

$\underbrace{x(t)}_{\text{soluție generală a ec. neomogene}} = \underbrace{x_{omg}(t)}_{\text{soluție generală a ec. omogene asociate}} + x_p(t)$ $\longrightarrow$ o soluție particulară a ec. neomogene

(A) Dacă membrul drept $f(t) = e^{\gamma t}P(t)$, cu $\gamma\in\mathbb{R}$, P polinom, atunci caut $x_p(t) = t^{\ell} e^{\gamma t} Q(t)$, unde ℓ = multiplicitatea lui γ ca rădăcină a ecuației caracteristice ($\ell = 0$ dacă γ nu e rădăcină a ecuației caracteristice)

Q = polinom de același grad cu P

① $x'' - 2x' - 15x = 14e^{-2t}$

② $x''' - 2x'' - x' + 2x = 2t + 1$

③ $x'' + x' - 6x = 5e^{2t}$

④ $x''' - 2x'' = 12t$

① $x'' - 2x' - 15x = 14e^{-2t}$

Ec. omogenă asociată : $x'' - 2x' - 15x = 0$

Ec. caracteristică: $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$

$\Delta = 4 + 60 = 64$

$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{2} \left\langle \begin{array}{l} 5 \in \mathbb{R} \\ -3 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$ simple

s.f.s. $\{e^{5t}, e^{-3t}\}$

$x_{omg}(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-3t}$, $t \in \mathbb{R}$, $c_{1,2} \in \mathbb{R}$ constante

$x_p(t) = ?$

$f(t) = 14e^{-2t}$

$P(t) = 14$, $\mu = -2 \Rightarrow l = 0$ (-2 nu e rădăcină a ec. carac)

Caut $x_p(t) = t^0 \cdot e^{-2t} \cdot a = a \cdot e^{-2t}$, $a \in \mathbb{R}$

Aflăm a obligându-l pe $x_p(t)$ să verifice ec. neomogenă:

$x_p'(t) = -2ae^{-2t}$

$x_p''(t) = 4ae^{-2t}$

$\underbrace{4 \cdot a \cdot e^{-2t}}_{x_p''} - \underbrace{2(-2ae^{-2t})}_{-2x_p'} \underbrace{-15 \cdot ae^{-2t}}_{-15x_p} = 14e^{-2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow -7ae^{-2t} = 14e^{-2t} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow x_p(t) = -2e^{-2t}$

$x(t) = x_{omg}(t) + x_p(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-3t} - 2e^{-2t}$, $t \in \mathbb{R}$, $c_{1,2} \in \mathbb{R}$ constante

② $x''' - 2x'' - x' + 2x = 2t + 1$

$x''' - 2x'' - x' + 2x = 0$

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda-2) - 1(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_{2,3} = \pm 1 \end{cases}$

S.f.s $\{e^{-t}, e^{t}, e^{2t}\}$

$x_{omg}(t) = b_1 e^{-t} + b_2 e^{t} + b_3 e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ constante

$x_p(t) = ?$

$f(x) = 2t + 1$

$\mu = 0 \Rightarrow l = 0$

$P(t) = 2t + 1$

$x_p(t) = t^0 e^0 (at + b) = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$x_p'(t) = a$

$x_p''(t) = 0$

$x_p'''(t) = 0$

$-a + 2at + 2b = 2t + 1$

$2at + (2b - a) = 2t + 1$, $\forall t \in I$

$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

$x_p(t) = t + 1$

$x(t) = b_1 e^{-t} + b_2 e^{t} + b_3 e^{2t} + t + 1$, $t \in \mathbb{R}$, $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ constante

③ $x'' + x' - 6x = 5e^{2t}$

$x'' + x' - 6x = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} -3 \in \mathbb{R} \\ 2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

Sfs $\{e^{-3t}, e^{2t}\}$

$x_{omg}(t) = b_1 e^{-3t} + b_2 e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ constante

$f(t) = 5e^{2t}$

$r = 2 \Rightarrow l = 1$

$P(t) = 5$

$x_p(t) = t \cdot e^{2t} a, \ a \in \mathbb{R}$

$x_p'(t) = e^{2t} a + 2t e^{2t} a$

$x_p''(t) = 2e^{2t} a + 2e^{2t} a + 4te^{2t} a$

$4e^{2t} a + \cancel{4te^{2t} a} + e^{2t} a + \cancel{2te^{2t} a} - \cancel{6te^{2t} a} = 5e^{2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ 5e^{2t} a = 5e^{2t} \Rightarrow a = 1$

$x_p(t) = t \cdot e^{2t}, \ t \in \mathbb{R}$

$x(t) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 e^{-3t} + t \cdot e^{2t}, \ t \in \mathbb{R}, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constante.

Observație: Dacă căutăm $x_p(t) = e^{2t} \cdot a, a \in \mathbb{R}$ constant $\Rightarrow x_p'(t) = 2e^{2t} a$, $x_p''(t) = 4e^{2t} a \Rightarrow$ ecuația devine $4e^{2t} a + 2e^{2t} a - 6e^{2t} a = 5e^{2t} \Rightarrow 0 = 5e^{2t}$ (F)

④ $x''' - 2x'' = 12t$

$x''' - 2x'' = 0$

$\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = 0 \text{ dublă} \\ \lambda_3 = 2 \text{ simplă} \end{cases}$

s.f.s $\{e^{0t}, te^{0t}, e^{2t}\} \equiv \{1, t, e^{2t}\}$

$x_{omog}(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t}$

$f(t) = 12t \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \Rightarrow l = 2 \\ P(t) = 12t \end{cases}$

Caut $x_p(t) = t^2 e^{0t}(at + b) = at^3 + bt^2, a, b \in \mathbb{R}$

$x_p'(t) = 3at^2 + 2bt$

$x_p''(t) = 6at + 2b$

$x_p'''(t) = 6a \Rightarrow 6a - 12at - 4b = 12t \Rightarrow$

Scanat cu CamScanner

$$\Rightarrow \begin{cases} -12a = 12 \\ 6a - 4b = 0 \Rightarrow 4b = 6a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$x_p(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2$$

$$x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t} - t^3 - \frac{3}{2}t^2, \; t \in \mathbb{R}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \text{ constant}$$