19.10.2023

Cursul 3.

③ Ecuații liniare de ordinul I (EL)

Forma: $x' = a(t)x + b(t)$ (EL), unde $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, I interval deschis nevid.

Dacă $b(t) = 0$, $(\forall)\, t \in I$, ecuația ia forma $x' = a(t)x$ (ELO), dar și (EVS), și se numește ECUAȚIE LINIARĂ OMOGENĂ. În caz contrar, ecuația se numește LINIARĂ NEOMOGENĂ

Rezolvare: Pt. $(\forall) t_0 \in I$, $(\forall)\, x_0 \in \mathbb{R}$, problema Cauchy $\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

are soluție unică $x : I \to \mathbb{R}$, dată prin formula variației constantelor (FVC):

(FVC): $x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(r)dr} \cdot b(s)\,ds, (\forall) t \in I$

Observație: Pentru ecuația liniară omogenă, (FVC) ia forma:

~~x(t) = x~~

$x(t) = x_0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, (\forall) t \in I$; $b \equiv 0$, deci integrala mare e 0

Exemplu:

① $\begin{cases} x' - 4t^3 x = e^{t^4} \\ x(0) = 2 \end{cases}$

Mai întâi aduc ecuația la forma normală (în m. stâng rămâne doar x')

$$\begin{cases} x' = \underbrace{4t^3}_{a(t)} x + \underbrace{e^{t^4}}_{b(t)} \\ \underset{t_0}{x(0)} = \underset{x_0}{2} \end{cases}$$

(FVC): $x(t) = 2\, e^{\int_0^t 4s^3 ds} + \int_0^t e^{\int_s^t 4r^3 dr} \cdot e^{s^4} ds \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = 2\, e^{s^4 \big|_0^t} + \int_0^t e^{r^4 \big|_s^t} \cdot e^{s^4} ds = 2\, e^{t^4 - 0} + \int_0^t e^{t^4 - s^4} \cdot e^{s^4} ds \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = 2e^{t^4} + e^{t^4} \int_0^t e^{-s^4} \cdot e^{s^4} ds = 2e^{t^4} + e^{t^4} \cdot s \big|_0^t \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = 2e^{t^4} + e^{t^4} \cdot t \Rightarrow x(t) = e^{t^4}(2 + t), (\forall) t \in \mathbb{R}$

② $tx' = -x + e^t,\ t>0 \ \Big|: t \neq 0,\ t>0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x' = \underbrace{-\frac{1}{t}}_{a(t)}\cdot x + \underbrace{\frac{e^t}{t}}_{b(t)}$$

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds = -\int_{t_0}^{t}\frac{1}{s}\,ds = -\ln s\Big|_{t_0}^{t} = -\ln t + \ln t_0$$

Egalăm $\ln t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = 1 > 0 \Rightarrow x_0 = x(t_0) = x(1)$ = constantă

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\ln t} + \int_1^t e^{-\ln t + \ln s}\cdot\frac{e^s}{s}\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0\cdot\frac{1}{t} + \int_1^t e^{\ln\frac{s}{t}}\cdot\frac{e^s}{s}\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{t} + \int_1^t \frac{\cancel{s}}{t}\cdot\frac{e^s}{\cancel{s}}\,ds \Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{t} + \frac{1}{t}\cdot\int_1^t e^s\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{t} + \frac{1}{t}\cdot e^s\Big|_1^t = \frac{x_0}{t} + \frac{1}{t}\left(e^t - e\right) = \frac{e^t}{t} + \frac{1}{t}\underbrace{(x_0 - e)}_{b\in\mathbb{R}}$$

Deci $x(t) = \frac{e^t}{t} + \frac{b}{t}$; $t \in (0, +\infty)$, $b \in \mathbb{R}$ constant

④ Ecuații Bernoulli (EB)

Forma: $x' = a(t)x + b(t)x^{\alpha}$ (EB), unde $a, b: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, neidentice nule și neproporționale, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

Observații: Dacă $a \equiv 0$, ecuația devine: $x' = b(t)x^{\alpha}$ (EVS)

Dacă $b \equiv 0$, ecuația devine: $x' = a(t)x$ (ELO sau EVS)

Dacă a, b proporționale, adică $\exists\lambda$ constant a.î. $a(t) = \lambda b(t), (\forall) t \in I$, ecuația devine: $x' = b(t)(\lambda x + x^{\alpha})$ (EVS)

Dacă $\alpha = 0 \Rightarrow x^{\alpha} = x^0 = 1 \Rightarrow$ ecuația devine: $x' = a(t)x + b(t)$ (EL

Dacă $\alpha = 1$, ecuația devine: $x' = (a(t) + b(t))x$ (ELO sau EL

Observație: Dacă $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha<0$, atunci x^{α} este bine definit dacă $x\neq 0$.

Dacă $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\alpha<0$, atunci x^{α} este bine definit dacă $x>0$.

Dacă $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\alpha>0$, atunci x^{α} este bine definit dacă $x\geq 0$.

Observație: Dacă $\alpha>0$, (EB) are drept soluție particulară pe $x(t)=0$, $(\forall)\, t\in I$, pentru că

$$\begin{cases} \text{m. stâng din (EB)} = 0' = 0. \\ \text{m. drept din (EB)} = a(t)\cdot 0 + b(t)\cdot 0^{\alpha} = 0. \end{cases}$$

Rezolvare: prin schimbarea de funcție necunoscută $y = x^{1-\alpha}$, (EB) în $x = x(t)$ se transformă într-o (EL) în $y = y(t)$.

$$y = x^{1-\alpha} \Big|^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow y^{\frac{1}{1-\alpha}} = x \Big| \frac{d}{dt} \Rightarrow x' = \frac{1}{1-\alpha}\, y^{\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1-\alpha}{1}} \cdot y'$$

y' - este o funcție de t.

(EB) devine $\frac{1}{1-\alpha} \cdot y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\, y' = a(t)\cdot y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t)\, y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Big| \cdot (1-\alpha)\, y^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = a(t)(1-\alpha)\, y^{\overset{1}{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}}} + b(t)(1-\alpha)\, y^{\overset{0}{\frac{\alpha-\alpha}{1-\alpha}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = a(t)(1-\alpha) + b(t)(1-\alpha) \text{ (EL) în } y = y(t)$$

Exemple:

① $\begin{cases} x' = \frac{t}{2(t^2-1)}\, x + \frac{t}{2x} \text{ (EB) cu } \alpha = -1\ ;\ \frac{1}{x} = x^{-1} \\ x(0) = 1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x\neq 0\ ;\ t^2-1\neq 0 \Rightarrow t\neq \pm 1 \\ \text{dar } x(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow t\in(-1;1) \Rightarrow 1-t^2>0$

~~Dintre cele 3 intervale posibile pentru t:~~

x soluție pentru o ecuație diferențială de ordinul I $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in C^1 \Rightarrow x$ continuă $\left.\begin{array}{l} \\ x \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x$ are semn constant pe intervalul de definiție

Dar $x(0) = 1 > 0$ $\Rightarrow x > 0$

Facem substituția $y = x^{1-\alpha} = x^{1-(-1)} = x^2$

$y = x^2 \Rightarrow y > 0$

$x = \sqrt{y}$ (nu pot avea $x = -\sqrt{y}$, pentru că $x > 0$) $\Rightarrow x' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y'$

Ecuația devine: $\frac{1}{2\sqrt{y}} y' = \frac{t}{2(t^2-1)} \sqrt{y} + \frac{t}{2\sqrt{y}} \Big| \cdot 2\sqrt{y} \Rightarrow$

Înmulțesc cu ce este nevoie a.î. în m stâng să fie numai y'.

$\Rightarrow y' = \frac{t}{\cancel{2}(t^2-1)} \cancel{2} y + t$ (EL) în $y = y(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = \underbrace{\frac{t}{(t^2-1)}}_{a(t) \text{ din (EL)}} \cdot y + \underbrace{t}_{b(t) \text{ din (EL)}}$ (EL) în $y = y(t)$

$y = x^2 \Rightarrow y(0) = x^2(0) = 1^2 = 1$

(FVC) $y(t) = 1 \cdot e^{\frac{1}{2}\int_0^t \frac{2s}{s^2-1} ds} + \int_0^t e^{\frac{1}{2}\int_s^t \frac{2r}{r^2-1} dr} \cdot s\,ds \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = 1 \cdot e^{\frac{1}{2} \ln |s^2-1| \big|_0^t} + \int_0^t e^{\frac{1}{2} \ln |r^2-1| \big|_s^t} \cdot s\,ds.$

$t \in (-1;1) \Rightarrow t^2 - 1 < 0$
$1 - t^2 > 0$ | la fel pentru s, r

$$y(t) = e^{\frac{1}{2}\ln(1-s^2)\Big|_0^t} + \int_0^t e^{\frac{1}{2}(1-r^2)\Big|_s^t} \cdot s\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{\frac{1}{2}\ln(1-t^2)} + \int_0^t e^{\frac{1}{2}\ln(1-t^2) - \frac{1}{2}\ln(1-s^2)} \cdot s\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \sqrt{1-t^2} + \int_0^t \sqrt{\frac{1-t^2}{1-s^2}} \cdot s\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-t^2}\int_0^t \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \cdot s\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \sqrt{1-t^2} + \sqrt{1-t^2} \cdot \left(-\sqrt{1-s^2}\right)\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \sqrt{1-t^2} - t^2 + 1 + \sqrt{1-t^2} = \cancel{1-t^2}\ 2\sqrt{1-t^2} - (1-t^2),\ t \in (-1,1)$$

Observație: $y(t) = \underbrace{\sqrt{1-t^2}}_{>0}\underbrace{\left(2 - \underbrace{\underbrace{\sqrt{1-t^2}}_{<1}}_{\leq 1}\right)}_{>0} > 0,\ (\forall)\, t \in (-1,1)$

$$x = \sqrt{y} \Rightarrow x(t) = \sqrt{2\sqrt{1-t^2} - (1-t^2)},\ t \in (-1,1)$$

② $t x' = 4x + 2t^2\sqrt{x} \ \Big|\ : t \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = \frac{4}{t}x + 2t\sqrt{x}$ (EB) cu $\alpha = \frac{1}{2}$, $x \geq 0$

Observație: $x(t) = 0$ este soluție, pentru că m stâng $= t \cdot 0' = 0$
m drept $= 4 \cdot 0 + 2t^2\sqrt{0} = 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ m stâng = m dreapta, $(\forall)\, t \in \mathbb{R} \Rightarrow x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ soluție

Presupunem că $x \neq 0 \Rightarrow x > 0$

$$y = x^{1-\alpha} = x^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{x} > 0 \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow x' = 2yy'$$

(EB) devine: $2yy' = \frac{4}{t}y^2 + 2ty \;\Big/ \cdot \frac{1}{2y}$

$$y' = \underbrace{\frac{2}{t}}_{a(t)} y + \underbrace{t}_{b(t)} \text{ (EL) în } y = y(t)$$

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} \frac{2}{s}\,ds = 2\ln|s|\Big|_{t_0}^{t} = \ln s^2\Big|_{t_0}^{t} = \ln t^2 - \ln t_0^2$$

pp. că $t > 0 \Rightarrow s, r, t_0 > 0$

vrem ca $\ln t_0^2$ să fie $0 \Rightarrow t_0^2 = 1$ $\to t_0 = 1$ dacă lucrăm cu $t \in (0; +\infty)$

$\to t_0 = -1$ dacă lucrăm cu $t \in (-\infty; 0)$

$$y_0 = y(t_0) = y(1) - \text{constant}$$

(FVC) $$y(t) = y_0 e^{\ln t^2} + \int_1^t e^{\ln t^2 - \ln s^2} \cdot s\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 t^2 + \int_1^t e^{\ln \frac{t^2}{s^2}} \cdot s\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 t^2 + t^2 \int \frac{1}{s}\,ds \Rightarrow y(t) = y_0 t^2 + t^2 \cdot \ln s\Big|_1^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 t^2 + t^2 \ln t,\ t \in (0, +\infty)$$

Observație: dacă $t \in (-\infty; 0)$, obțineam $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 t^2 + t^2 \ln(-t)$, $t \in (-\infty; 0)$, $\tilde{y}_0 + \ln(-t) > 0$

$x = y^2 \Rightarrow x(t) = t^4(y_0 + \ln t)^2$, $t \in (0; +\infty)$, $y_0 + \ln t > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ constant

$\tilde{x}(t) = t^4(\tilde{y}_0 + \ln(-t))^2$, $t \in (-\infty, 0)$, $\tilde{y}_0 + \ln(-t) > 0$, $\tilde{y}_0 \in \mathbb{R}$ constant

⑤ Ecuații RICCATI (ER)

Forma: $x' = a(t)x + b(t)x^2 + c(t)$, (ER), cu $a, b, c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

$b \neq 0$ (dacă $b = 0$: $x' = a(t)x + c(t)$ (EL))

$c \neq 0$ (dacă $c = 0$; $x' = a(t)x + b(t)x^2$ (EB) cu $\alpha = 2$)

Rezolvare: Nu există o metodă generală

DAR dacă $\varphi = \varphi(t)$ este o soluție particulară a (ER), atunci prin schimbarea de funcție necunoscută $\boxed{x = y + \varphi}$

(ER) se transformă într-o (EB) cu $\alpha = 2$

$(ER) \to (y+\varphi)' = a(t)(y+\varphi) + b(t)(y+\varphi)^2 + c(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow y' + \varphi' = a(t)y + a(t)\varphi + b(t)y^2 + 2b(t)y\varphi + b(t)\varphi^2 + c(t)$

φ se reduce pentru că verifică (ER) $\Rightarrow$

$\Rightarrow y' = [a(t) + 2b(t)\varphi]y + b(t)y^2$ (EB) cu $\alpha = 2$

Exemplu:

① $x' = x^2 - t^2 + 1$, $\varphi(t) = t$ soluție

(ER) cu $a(t) = 0$, $b(t) = 1$, $c(t) = -t^2 + 1$

$t' = t^2 - t^2 + 1$, $(\forall) t \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(t) = t$ soluție pentru (ER)

Fac substituția $\boxed{x = y + t}$

$(y+t)' = (y+t)^2 - t^2 + 1$

$y' + 1 = y^2 + 2yt + t^2 - t^2 + 1$

Scanat cu CamScanner

$y' = 2yt + y^2$ (EB) cu $\alpha = 2$

Observație: $y(t) = 0$ este soluție pentru (EB) pentru că $0' = 2 \cdot 0 \cdot t + 0^2$

$\Rightarrow 0 = 0$ (A), $(\forall) t \in \mathbb{R}$

Lui $y(t) = 0$ îi corespunde $x = y + t = t = \varphi(t)$

~~Presupunem că $y \neq 0$~~

(EB) în $x = x(t) \xrightarrow{y = x^{1-\alpha}}$ (EL) în $y = y(t)$

(EB) în $y = y(t) \xrightarrow{z = y^{1-\alpha}}$ (EL) în $z = z(t)$

Pp. că $y \neq 0$

$z = y^{1-\alpha} = y^{1-2} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -\frac{1}{z^2} \cdot z'$

(EB) devine: $-\frac{1}{z^2} z' = 2 \cdot \frac{1}{z} t + \frac{1}{z^2} \Big/ \cdot (-z)^2$

$z' = -2t \cdot z - 1$ (EL) în $z = z(t)$

$\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} (-2s)\,ds = -s^2 \Big|_{t_0}^{t} = -t^2 + \underbrace{t_0^2}_{\text{vrem să fie } 0 \Rightarrow t_0 = 0 \Rightarrow}$

$\Rightarrow z_0 = z(t_0) = z(0) = \text{constant}$

(FVC) $z(t) = z_0 e^{-t^2} + \int_0^t e^{-t^2+s^2} \cdot (-1)\,ds \Rightarrow$

$\Rightarrow z(t) = z_0 e^{-t^2} - e^{-t^2} \underbrace{\int_0^t \underbrace{e^{s^2}}_{\text{continuă, deci integrabilă}} ds}_{\text{nu este o funcție elementară}}$

$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{e^{-t^2}\left(z_0 - \int_0^t e^{s^2} ds\right)}$, cu $z_0 - \int_0^t e^{s^2} ds \neq 0$

$x = y + t = \frac{1}{e^{-t^2}\left(z_0 - \int_0^t e^{s^2} ds\right)} + t$, cu $z_0 - \int_0^t e^{s^2} ds \neq 0$, $z_0 \in \mathbb{R}$ const

⑥ Ecuații cu diferențială exacte (EE)

Fie ecuația $x' = \dfrac{g(t,x)}{h(t,x)}$, cu $g, h : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă C^1

$D \neq \emptyset$, deschisă, conexă
nu e formată din mai multe bucăți

$h \neq 0$ pe D

$$x' = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{g(t,x)}{h(t,x)} \Leftrightarrow h(t,x)dx - g(t,x)dt = 0 \quad (1)$$

Definiție: Ecuația (1) se numește cu diferențială exactă dacă $(\exists) F : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 a.î.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = h(t,x) \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = -g(t,x) \end{cases}, (\forall)(t,x) \in D$$

În acest caz (1) $\Leftrightarrow \underbrace{\dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x)dx + \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x)dt}_{dF(t,x)} = 0 \Rightarrow$

$dF(t,x) \leftarrow$ diferențiala lui F

$\Rightarrow$ ec. (1) are soluția în formă implicită $F(t,x) = $ constant

Propoziție: Dacă D este simplu conex, atunci (1) este (EE) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial h}{\partial t}(t,x) = -\dfrac{\partial g}{\partial x}(t,x), (\forall)(t,x) \in D$

„coeficientul" lui dx derivat în t = „coeficientul" lui dt derivat în x

19.10.2023

Seminarul 3

Rămas de la Seminarul 2

① $x' = \dfrac{x+t-2}{x-t-4}$, $x-t-4 \neq 0$

$$\begin{cases} x = y+3 \\ t = s-1 \end{cases} \longrightarrow (EO) \text{ în } y = y(s)$$

$\dfrac{y}{s} = u \rightsquigarrow (EVS)$ în $u = u(s)$

- - - -

I dacă $-u^2+2u+1 \neq 0$: $(-u^2+2u+1)s^2 = k$, $k>0$ constant

$u = \dfrac{y}{s} \Rightarrow \left(-\dfrac{y^2}{s^2} + 2\cdot\dfrac{y}{s} + 1\right)s^2 = k \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow -y^2+2ys+s^2 = k \\ y = x-3 \\ s = t-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -(x-3)^2+2(x-3)(t+1)+(t+1)^2 = k, k>0 \text{ const} \\ x-t-4 \neq 0 \end{cases}$$

Soluția generală în formă implicită

II dacă $-u^2+2u+1 = 0$

$\Delta = 4+4 = 8$

$u_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{-2} = 1 \mp \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} u = \dfrac{y}{s} \Rightarrow y = s\cdot u = (1\mp\sqrt{2})s \\ \begin{cases} x = y+3 \\ t = s-1 \Rightarrow s = t+1 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \overbrace{(1\mp\sqrt{2})\underbrace{(t+1)}_{s}}^{y} + 3$$

Sunt soluții ale ecuației inițiale?

$x_1(t) = (1-\sqrt{2})(t+1) + 3$

m. stânga din ① $= x_1'(t) = 1-\sqrt{2}$

m. dupt din ① $= \dfrac{(1-\sqrt{2})(t+1)+3+t+2}{(1-\sqrt{2})(t+1)+3-t-4} = \dfrac{(t+1)(1-\sqrt{2}+1)}{(t+1)(1-\sqrt{2}-1)} =$

$= \dfrac{2-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}+1 =$ m stâng $\Rightarrow x_1$ este soluție pt ec ①, definită pe $(-\infty,-1)$ sau pe $(-1,\infty)$

Ecuații liniare de ordinul I (EL)

① $\begin{cases} x' = 3x + e^{6t} \\ x(0) = 1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x' + 2t\,x = e^{-t^2}\cos t \\ x(0) = 2 \end{cases}$

③ $(t^2+1)\,x' = t - 4tx$ ④ $t x' = 2x + t^2,\ t>0$

① $\begin{cases} x' = \overset{a(t)}{3}\,x + \overset{b(t)}{e^{6t}} \\ \underset{t_0}{x(0)} = \underset{x_0}{1} \end{cases}$

$x(t) = 1\cdot e^{\int_0^t 3\,ds} + \int_0^t e^{\int_s^t 3\,dr}\cdot e^{6s}\,ds \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = 1\cdot e^{3t} + \int_0^t e^{3t-3s}\cdot e^{6s}\,ds \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = 1\cdot e^{3t} + e^{3t}\cdot\frac{1}{3}\int_0^t 3e^{3s}\,ds \Rightarrow x(t) = e^{3t} + e^{3t}\cdot\frac{1}{3}\left(e^{3t}-1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = e^{3t}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{e^{3t}}{3}\right) = e^{3t}\left(\frac{e^{3t}}{3}+\frac{2}{3}\right).$

② $\begin{cases} x' + 2t\,x = e^{-t^2}\cos t \\ x(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \overset{b(t)}{e^{-t^2}\cos t}\ \overset{a(t)}{-2t}\,x \\ \underset{t_0}{x(0)} = \underset{x_0}{2} \end{cases}$

(FVC) $x(t) = 2\cdot e^{\int_0^t -2s\,ds} + \int_0^t e^{\int_s^t -2r\,dr}\cdot e^{-s^2}\cos s\,ds \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = 2 \cdot e^{-s^2\big|_0^t} + \int_0^t e^{-r^2\big|_s^t} \cdot e^{-s^2} \cos ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = 2 \cdot e^{-t^2} + \int_0^t e^{-t^2+s^2} \cdot e^{-s^2} \cos s\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = 2 \cdot e^{-t^2} + e^{-t^2} \int_0^t \cos s\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = 2 \cdot e^{-t^2} + e^{-t^2} \cdot \sin s \Big|_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-t^2}(2 + \sin t),\ (\forall)\, t \in \mathbb{R}$$

8) $(t^2+1)x' = t - 4tx \;\Big/ : (t^2+1) \neq 0 \Rightarrow x' = -\frac{4t}{t^2+1}x + \frac{t}{t^2+1}$ (EL) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t a(s)\, ds = \int_{t_0}^t -\frac{4s}{s^2+1}\, ds = -2\int_{t_0}^t \frac{2s}{s^2+1}\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^t a(s)\, ds = \cancel{\int_{t_0}^t} -2\ln(s^2+1)\Big|_{t_0}^t = -2\ln(t^2+1) + \underbrace{2\ln(t_0^2+1)}_{\text{vrem să fie } 0}$$

$$\Downarrow$$

$$t_0^2+1 = 1 \Rightarrow t_0 = 0$$

$x_0 = x(t_0) = x(0) =$ constant

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-2\ln(t^2+1)} + \int_0^t e^{-2\ln(t^2+1)+2\ln(s^2+1)} \cdot \frac{s}{s^2+1}\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \cdot \frac{1}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{(t^2+1)^2} \cdot \int_0^t (s^2+1)^{\cancel{2}} \cdot \frac{s}{\cancel{s^2+1}}\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \cdot \frac{1}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{(t^2+1)^2} \cdot \int_0^t (s^2+1) \cdot s\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{(t^2+1)^2} \int_0^t s^3 + s\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{(t^2+1)^2} \cdot \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2}\left(x_0 + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}\right),\ (\forall)\, t \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R} \text{ constant}$$

(4) $t x' = 2x + t^2,\ t > 0 \ /:t \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = \underbrace{\frac{2}{t}}_{a(t)} x + \underbrace{t}_{b(t)}$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{2}{s}\, ds = 2 \cdot \ln s \Big|_{t_0}^{t} = 2(\ln t - \ln t_0)$$

$\ln t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = 1 \Rightarrow x_0 = x(t_0) = x(1) = \text{constant}$

$$x(t) = x_0 e^{2\ln t} + \int_1^t e^{2\ln t - 2\ln s} \cdot s\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \cdot t^2 + t^2 \cdot \int_1^t \frac{1}{s^2} \cdot s\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \cdot t^2 + t^2 \cdot \ln s \Big|_1^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 t^2 + t^2 \cdot \ln t \Rightarrow x(t) = t^2(x_0 + \ln t),\ \cancel{(\forall t>0)}\ t \in (0, +\infty)$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ constant

Ecuațiile Bernoulli (EB)

(1) $\begin{cases} t x' = -3x - t x^2 \\ x(1) = 1 \end{cases}$

(2) $x' = 3x - e^{2t} x^3$

(3) $x' = \frac{3x}{t} + 3t^2 x^{5/3}$

(1) $\begin{cases} t x' = -3x - t x^2 \ /:t \neq 0 \\ x(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow x' = \underbrace{-\frac{3}{t}}_{a(t)} x - \underbrace{1}_{b(t)} x^2$ (EB) cu $\alpha = 2$ $\Rightarrow$

$\Downarrow$

$\Rightarrow t \in (0; +\infty)$

Observație: $x(t) = 0$ este soluție pentru (EB) pentru că $t \cdot 0' = -3 \cdot 0 - t \cdot 0^2$

Dar $x_1(1)=0\neq 1 \Rightarrow x_1$ nu verifică problema Cauchy

În continuare lucrez cu $x\neq 0$

$$y=x^{1-\alpha}=x^{1-2}=\frac{1}{x}_{\neq 0} \Rightarrow x=\frac{1}{y} \Rightarrow x'=-\frac{1}{y^2}\cdot y'$$

$$-\frac{1}{y^2}\cdot y'=-\frac{3}{t}\cdot\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\Big/\cdot(-y^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{3}{t}y+1 \text{ (EL) în } y=y(t),\ t\in(0,\infty)$$

$$y=\frac{1}{x} \Rightarrow y(\overset{t_0}{1})=\frac{1}{x(1)}=\overset{y_0}{1}$$

$$y(t)=1\,e^{\int_1^t \frac{3}{s}ds}+\int_1^t e^{\int_s^t \frac{3}{r}dr}\cdot 1\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=e^{\ln t^3}+\int_1^t e^{\ln t^3-\ln s^3}ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=\cancel{e^{\ln t^3}}\,t^3+t^3\int_1^t \frac{1}{s^3}ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=t^3+t^3\,\frac{s^{-2}}{-2}\Big|_1^t \Rightarrow y(t)=t^3\left(1-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{3}{2}t^3-\frac{t}{2},\ t\in(0,+\infty)$$

$$x(t)=\frac{2}{3t^3-t},\ t\in(0;+\infty)\quad 3t^3-t\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} t\neq 0 \\ t\neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{2}{3t^3-t},\ t\in\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$$

② $\underset{a(t)}{x' = 3x} - \underset{b(t)}{e^{2t}} x^3$ (EB) cu $\alpha = 3$

Observație: $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ soluție pentru (EB) pentru că

$0' = 3 \cdot 0 - e^{2t} \cdot 0$

Pp. că $x \neq 0$

$y = x^{1-\alpha} = x^{1-3} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow x' = \pm\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{y^{3/2}} y'\right)$

$\mp \frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} y' = 3\left(\pm y^{-\frac{1}{2}}\right) - e^{2t}\left(\pm y^{-\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} y' = 3y^{-\frac{1}{2}} - e^{2t} y^{-\frac{3}{2}} \;\Big/ \cdot \left(-2y^{\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = \underset{a(t)}{-6} y + \underset{b(t)}{2e^{2t}}$

$\int_{t_0}^{t} -6\,ds = -6s\Big|_{t_0}^{t} = -6t + 6t_0$

$6t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = 0$

$y(t) = y_0 \cdot e^{-6t} + \int_0^t e^{-6t+6s} \cdot 2e^{2s}\,ds \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = y_0 \cdot 6^{-6t} + 2 \cdot e^{-6t} \int_0^t e^{8s}\,ds \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = y_0 \cdot e^{-6t} + \cancel{2} e^{-6t} \frac{1}{\cancel{8}} \cdot e^{8s}\Big|_0^t \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = y_0 \cdot e^{-6t} + \frac{1}{4} \cdot e^{-6t}\left(\cancel{8} e^{8t} - 1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = e^{-6t}\underbrace{\left(y_0 - \frac{1}{4}\right)}_{c} + e^{\cancel{-6t+}2t} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = \cancel{\ell}\, c \cdot e^{-6t} + \frac{e^{2t}}{4}$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{b e^{-6t} + \frac{e^{2t}}{4}}} \quad ; \; b e^{-6t} + \frac{e^{2t}}{4} > 0 \quad ; \; b \in \mathbb{R} \text{ constant}$$

③ $x' = \frac{3x}{t} + 3t^2 \cdot x^{5/3}$;(EB) cu $\alpha = 5/3 \Rightarrow x \geq 0$

Observație: $x(t) = 0$, $t \in (-\infty, 0)$ sau $t \in (0, \infty)$ soluție pentru (EB) pentru că $0' = \frac{3}{t} \cdot 0 + 3t^2 \cdot 0$

$\boxed{x > 0}$

$$y = x^{1-\alpha} = x^{1-\frac{5}{3}} = x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{y^3}}$$

$$x' = \left(y^{-\frac{3}{2}}\right)' = -\frac{3}{2} \cdot y^{-\frac{3}{2}-1} \cdot y' \Rightarrow x' = -\frac{3}{2} \cdot y^{-\frac{5}{2}} y'$$

$$-\frac{3}{2} \cdot y^{-\frac{5}{2}} y' = \frac{3}{t} \cdot y^{-\frac{3}{2}} + 3t^2 \cdot y^{-\frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{5}{\cancel{3}}} \Big/ \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot y^{5/2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{t} \cdot y^{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}} - \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} t^2 \cdot y^{-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{2}{t} \cdot y - 2t^2 \,, \; pp.\; t \in (0, \infty) \Rightarrow s, t, t_0 > 0$$

$$\int_{t_0}^{t} -\frac{2}{s}\, ds = -2 \ln s \Big|_{t_0}^{t} = -2\ln t + 2 \ln t_0 ;\; t_0 = 1$$

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-2\ln t} + \int_1^t e^{-2\ln t + 2\ln s} \cdot (-2s^2)\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 \cdot e^{\ln \frac{1}{t^2}} - \int_1^t e^{\ln \frac{s^2}{t^2}} \cdot 2s^2\, ds \Rightarrow y(t) = y_0 \cdot \frac{1}{t^2} - 2 \cdot \frac{1}{t^2} \int_1^t s^4\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{y_0}{t^2} - \frac{2}{t^2} \cdot \frac{s^5}{5}\Big|_1^t \Rightarrow y(t) = \frac{y_0}{t^2} - \frac{2}{5t^2}\left(t^5 - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{t^2}\Big(\underbrace{y_0 + \frac{2}{5}}_{b} - \frac{2}{5} t^5\Big) \Rightarrow y(t) = \frac{b}{t^2} - \frac{2}{5} t^3 ,\; t \in (0, +\infty)$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b}{t^2} - \frac{2}{5}t^3\right)^3}} ,\; t \in (0, +\infty) ;\; \frac{b}{t^2} - \frac{2}{5} t^3 > 0$$

Ecuațiile Riccati (ER)

$x' = -x^2 - \frac{1}{t}x + \frac{4}{t^2}$ (ER), $t>0$, $\varphi(t) = \frac{2}{t}$ soluție

$\varphi(t) = \frac{2}{t}$ soluție pentru ER:

m stâng $= 2\left(-\frac{1}{t^2}\right) = -\frac{2}{t^2}$

m drept $= -\frac{4}{t^2} - \frac{1}{t} \cdot \frac{2}{t} + \frac{4}{t^2} = -\frac{2}{t^2} = m$ stâng

$x(t) = y(t) + \frac{2}{t}$

$\left(y + \frac{2}{t}\right)' = -\left(y + \frac{2}{t}\right)^2 - \frac{1}{t}\left(y + \frac{2}{t}\right) + \frac{4}{t^2}$

$y' - \cancel{\frac{2}{t^2}} = -y^2 - \frac{4}{t}y - \cancel{\frac{4}{t^2}} - \frac{y}{t} - \cancel{\frac{2}{t^2}} + \cancel{\frac{4}{t^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = -y^2 - \frac{5y}{t}$, (EB) cu $\alpha = 2$

$y=0$ soluție $0' = 0^2 - \frac{5 \cdot 0}{t} = 0$, corespunzătoare lui

$x = 0 + \varphi = \varphi$

Pp. că $y \neq 0$

$z = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z}$

$y' = -\frac{1}{z^2} \cdot z'$

$-\frac{1}{z^2} z' = -\frac{1}{z^2} - \frac{5}{t \cdot z} \Big/ \cdot (-z^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow z' = \underbrace{1}_{b(t)} + \underbrace{\frac{5}{t}}_{a(t)} z$ (EL)

(FVC) $z(t) =$ $\int_{t_0}^{t} \frac{5}{s} ds = 5 \ln s \Big|_{t_0}^{t} = 5\ln t - 5 \ln t_0$

$\ln t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = 1$

$$z(t) = z_0\, e^{5\ln t} + \int_1^t e^{5\ln t - 5\ln s}\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(t) = z_0 \cdot t^5 + t^5 \int_1^t \frac{1}{s^5}\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(t) = z_0 \cdot t^5 + t^5 \cdot \left(\frac{s^{-4}}{-4}\right)\Bigg|_1^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(t) = z_0 t^5 + t^5\left(\cancel{t^{-4}} - \frac{1}{4t^4} + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(t) = t^5\left(\underbrace{z_0 + \frac{1}{4}}_{C} - \frac{1}{4t^4}\right) \Rightarrow z(t) = Ct^5 - \frac{1}{4}t$$

$$y = \frac{1}{z} \Rightarrow y = \frac{1}{\frac{4Ct^5 - t}{4}} = \frac{4}{4Ct^5 - t} \quad ; \quad 4Ct^5 - t \neq 0$$

$$x(t) = y + \frac{2}{t} = \frac{4}{4Ct^5 - t} + \frac{2}{t} \quad ; \quad 4C - t \neq 0,\ t > 0$$