03.11.2023

Cursul 6

Teorema lui PEANO. Metoda liniilor poligonale

Th. Peano este o teoremă de existență pentru soluțiile pb. Cauchy. Mai precis, ea spune că dacă f continuă, atunci:

$$(PC)\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$ are măcar o soluție locală (adică definită într-o vecinătate a lui t_0).

Metoda de demonstrație ne furnizează o a doua metodă de aproximare a soluțiilor pb. Cauchy: metoda liniilor poligonale.

Th. Peano: Fie $a, b > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Fie paralelipipedul $(n+1)$ dimensional $\Delta = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t-t_0| \le a, \|x-x_0\| \le b\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Fie $f: \Delta \to \mathbb{R}^n$ continuă.

Atunci pb. Cauchy (PC) are măcar o soluție $x: [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R}^n$, unde $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M>0$ fiind un majorant pentru $\|f\|$ pe Δ (adică $\|f(t,x)\| \le M, (\forall)(t,x) \in \Delta$)

<u>Observație</u>: Alegerea optimă pentru M este $M = \max\limits_{(t,x)\in\Delta} \|f(t,x)\|$ (care există din Th. Weierstrass, f fiind continuă pe compactul Δ, deci f mărginită și își atinge marginile) $\Rightarrow$ se obține $\frac{1}{M}$ maxim, deci δ maxim.

<u>Observație</u>: Continuitatea singură nu e suficientă pentru a asigura unicitatea soluției

$$\begin{cases} x' = 5\sqrt[5]{x^4} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$ are drept soluție pe $x_1(t) = t^5$, $t \in \mathbb{R}$

$x_2(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$

- - - - .

$f(t,x) = 5\sqrt[5]{x^4} = 5x^{\frac{4}{5}}$ continuă (elementară), dar nu Lipschitz pe dreptunghi.

$\Delta = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] = [-a, a] \times [-b, b]$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5 \cdot \frac{4}{5} \cdot x^{\frac{4}{5}-1} = \frac{4}{\sqrt[5]{x}}$$

nu este definită în $x = 0$, f nu este Lipschitz pe Δ

Metoda liniilor poligonale

Presupunem că, în plus, f este lipschitziană în raport cu x pe Δ $\xrightarrow{\text{Th. Picard}}$ pb Cauchy (PC) are soluție unică. Fie pentru $(\forall)\, k \in \mathbb{N}^*$, următoarea partiție a intervalului $[t_0, t_0 + \delta]$

$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{k-1} < t_k = t_0 + \delta$, unde

$t_{i+1} = t_i + \frac{\delta}{k}$, $0 \le i \le k-1$ (nodurile t_i sunt echidistante)

Înlocuiesc ecuația integrală:

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$, care era echivalentă cu (PC) cu următorul sistem:

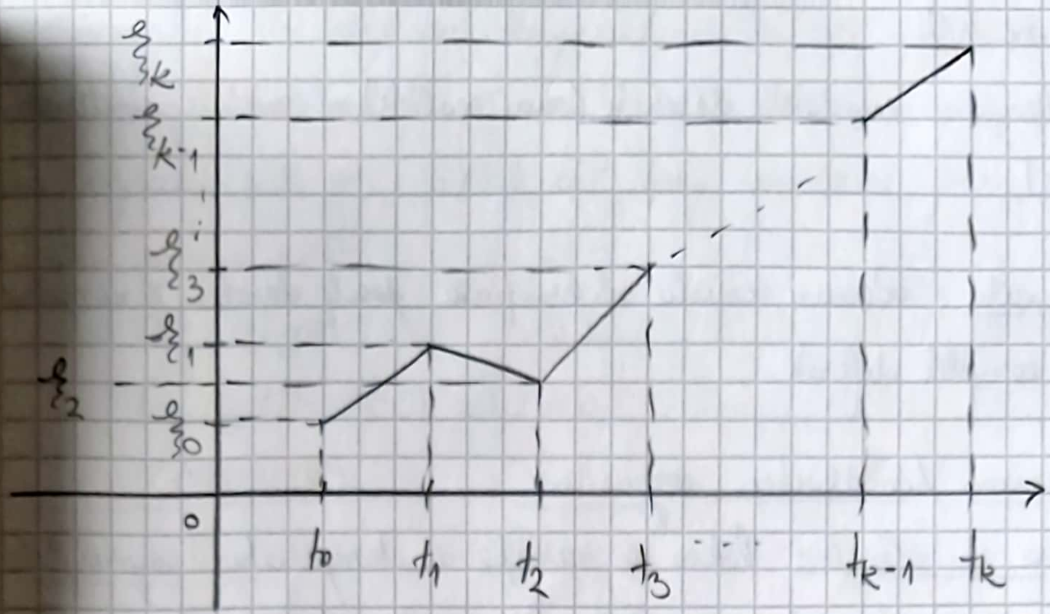
$$\begin{cases} \xi_0 = x_0 \\ \ldots \\ \xi_{i+1} = \xi_i + (t_{i+1} - t_i) f(t_i ; \xi_i), (\forall)\ 0 \le i \le k-1 \end{cases}$$

Funcția $y_k : [t_0, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$, definită prin:

$$y_k(t) = \xi_i + (t - t_i) f(t_i, \xi_i), (\forall)\ t \in \begin{cases} [t_i, t_{i+1}), & 0 \le i \le k-2 \\ [t_{k-1}, t_k], & i = k-1 \end{cases},$$

aproximează, pentru k suficient de mare, destul de bine soluția $x : [t_0, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ a (PC).

Observăm că $y_k(t_i) = \xi_i$, $0 \le i \le k$ $\to$ graficul lui y_k este linia poligonală care unește punctele $(t_0, \xi_0), (t_1, \xi_1), \ldots, (t_k, \xi_k)$



Evaluare erori: Dacă f continuă și lipschitziană pe Δ, adică $(\exists) L>0$ astfel încât $\|f(t,x)-f(s,y)\| \le L(|t-s|+|x-y|)$, $(\forall)(t,x),(s,y)\in\Delta$, atunci $\|\chi_k(t) - \underbrace{x(t)}_{\text{soluția (PC)}}\| \le \frac{L(M+1)\delta^2}{k}\cdot e^{L\delta}$, $(\forall)\, t\in[t_0, t_0+\delta]$, $(\forall)\, k\in\mathbb{N}^*$

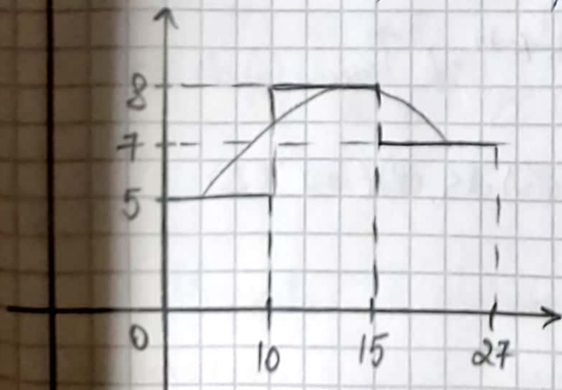
Metodele matematice descrise prin ecuații diferențiale

Modelarea matematică = transpunerea comportării fenomenelor din lumea înconjurătoare în limbaj matematic.

$\boxed{\text{pas 1}}$: scriu în limbaj matematic legile care guvernează comportarea fenomenului pe care-l studiez.

Pentru ca modelul să nu fie prea complex, renunț la o parte dintre parametrii care descriu fenomenul (cei pe care-i consider mai puțin importanți) $\Rightarrow$ modelul nu este o copie întrutotul fidelă a realității.

I lucru: verific consistența modelului ($\exists$ soluției). Utilă este și obținerea unicității soluției pentru pb. Cauchy.



Convenție: $\forall$ funcție care descrie evoluția în timp a unei entități (nr. de atomi/molecule dintr-o substanță, nr. indivizi dintr-o populație) este de clasă C^1 pe intervalul de definiție (deși în realitate ea ia valori într-o mulțime discretă ex $\mathbb{N}$).

(Înlocuiesc modelele discrete (mai realiste) cu modele continuu diferențiabile)

Observație: aceeași ecuație diferențială poate descrie fenomene din domenii complet diferite.

① Răcirea / încălzirea corpurilor

Legea lui Newton: Viteza de variație a temperaturii suprafeței unui corp este proporțională cu diferența dintre temperatura suprafeței corpului și temperatura mediului.

Presupunem că am un corp cu aceeași temperatură în toată masa sa. Cunoscând $T_{mediu}(t)$ = temperatura mediului ambiant, $(\forall) t \geq 0$, vreau să aflu $T(t)$ = temperatura corpului (°C) la momentul $t \geq 0$.

$T'(t) = -k(T(t) - T_{mediu}(t)), (\forall) t \geq 0$, unde $k > 0$ este constanta de transfer.

De ce $-k$? Dacă $T(t) > T_{mediu}(t) \to T'(t) \leq 0 \Rightarrow T$ descrescătoare (ceea ce corespunde realității: temperatura corpului scade pentru a se apropia de temperatura mediului $\to$ procesul de răcire)

Dacă $T(t) < T_{mediu}(t) \Rightarrow T'(t) > 0 \Rightarrow T$ crescătoare (ceea ce corespunde realității: temperatura corpului crește pentru a se apropia de temperatura mediului $\to$ procesul de încălzire)

(1) $T'(t) = -k\,T(t) + k\,T_{mediu}(t), t \geq 0$ (EL)

Dacă la momentul $t=0$ cunosc temperatura T_0 a corpului $\Rightarrow$ condiția inițială (2) $T(0) = T_0$

$$(1),(2) \overset{(FVC)}{\Longrightarrow} T(t) = T_0\, e^{\int_0^t -k\,ds} + \int_0^t e^{\int_s^t -k\,dr} \cdot k\, T_{mediu}(s)\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(t) = T_0\, e^{-kt} + k\int_0^t e^{-k(t-s)} \cdot T_{mediu}(s)\, ds, (\forall) t \geq 0 \quad (3)$$

Exemplu: Un corp cu temperatura de 15°C este adus într-o cameră unde temperatura se menține la 23°C. Știind că după 10 minute, temperatura corpului este 18°C, aflați cât timp durează până ce temperatura corpului atinge 22°C.

$T_0 = T(0) = 15(°C)$

$T_{mediu}(\overline{T}) = 23(°C)$, $(\forall)\ t \geq 0$

$T(10) = 18(°C)$

$t_1 = ?$

$T(t_1) = 22(°C)$

Fac $t = 10$ în (3) $\Rightarrow T(10) = T_0\, e^{-k\cdot 10} + k\int_0^{10} e^{-k(10-s)} \cdot 23\, ds \Rightarrow$

$\Rightarrow 18 = 15\cdot e^{-10k} + 23\, k\, e^{-10k}\int_0^{10} e^{ks}\, ds \Rightarrow$

$\Rightarrow 18 = 15 e^{-10k} + 23\cdot \cancel{k}\cdot e^{-10k}\cdot \frac{e^{ks}}{\cancel{k}}\Big|_0^{10} \Rightarrow 18 = 15\cdot e^{-10k} + 23^{-10k}(e^{10k} - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 18 = 15 e^{-10k} + 23 - 23 e^{-10k} \Rightarrow 18 = -8 e^{-10k} + 23 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 e^{-10k} = 5 \Rightarrow e^{-10k} = \frac{5}{8} \Big| \ln \Rightarrow -10k = \ln\frac{5}{8} \Rightarrow k = -\frac{1}{10}\ln\frac{5}{8} = \frac{1}{10}\ln\frac{8}{5}$ (4)

Fac $t = t_1$ în (3) $\Rightarrow T(t_1) = T_0\, e^{-kt_1} + k\int_0^{t_1} e^{-k(t_1-s)} \cdot 23\, ds \Rightarrow$

$\Rightarrow 22 = 15 e^{-kt_1} + 23 e^{-kt_1}\, k\int_0^{t_1} e^{ks}\, ds \Rightarrow$

$\Rightarrow 22 = 15 e^{-kt_1} + 23 e^{-kt_1}\cdot \cancel{k}\cdot \frac{e^{ks}}{\cancel{k}}\Big|_0^{t_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 22 = 15 e^{-kt_1} + 23 e^{-kt_1}(e^{kt_1} - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 22 = 15 e^{-kt_1} + 23 - 23 e^{-kt_1} \Rightarrow 8 e^{-kt_1} = 1 \Rightarrow e^{-kt_1} = \frac{1}{8} \Big| \ln \Rightarrow$

$\Rightarrow -kt_1 = \ln\frac{1}{8} \Rightarrow t_1 = -\frac{1}{k}\ln\frac{1}{8} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{k}\ln 8 \overset{(4)}{=\!=}\!>$

$\Rightarrow t_1 = \frac{1}{\frac{1}{10}\cdot\ln\frac{8}{5}}\cdot \ln 8 = \frac{10\ln 8}{\ln 8 - \ln 5} \Rightarrow t_1 = 44,2431$ min

3°C de la 15°C la 18°C → 10 minute

4°C de la 18°C la 22°C → 44,2431 − 10 = 34,2431 minute (de 3ori mai mult)

Observație: Pe măsură ce temperatura corpului se apropie de temperatura mediului, procesul de încălzire se desfășoară din ce în ce mai lent.

② Oscilatorul liniar armonic

Fie o particulă materială M de masă m, suspendată de un punct fix O cu ajutorul unui resort de masă neglijabilă.

La momentul $t=0$ sistemul este în echilibru (greutatea particulei este anulată în efect de o forță elastică statică). Presupun că poziția inițială M_0 a particulei este sub O ($\overrightarrow{OM_0}$ și versorul $\vec{j}$ al verticalei sunt coliniari)

Pun în mișcare sistemul a.î. viteza inițială $\vec{v_0}$ a particulei M să fie verticală (coliniară cu $\vec{j}$)

Mă aștept ca particula M să se miște numai pe verticală.

Dacă presupunem că mediul nu opune rezistență, singura forță necompensată este forța elastică, care, din Legea lui Hooke, este proporțională cu elongația (notată $x(t)$ la momentul $t\geq 0$) și se opune mișcării.

Vectorul de poziție al punctului M față de poziția inițială M_0:

$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{j}$

Viteza $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = x'(t)\vec{j}$

Accelerația: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = x''(t)\vec{j}$

$\vec{F_e}(t) = -k\,x(t)\vec{j}$, $k>0$ constanta elastică a resortului

Legea a II-a a lui Newton: $m\cdot\vec{a}(t) = \vec{F_e}(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow m\,x''(t)\vec{j} = -k\,x(t)\vec{j} \Rightarrow m''(t) = -k\,x(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow m\,x''(t) + k\,x(t) = 0,\ t\geq 0 \ /:m$

Notăm $\frac{k}{m} = \omega^2 \Rightarrow x''(t) + \omega^2 x(t) = 0,\ t\geq 0$ ecuația diferențială de ordinul al II-lea, liniară cu coeficienți constanți

Ecuația oscilatorului liniar armonic neamortizat

Un model mai realist spune că ar trebui să apară și o forță de frecare (datorată vâscozității mediului), care este proporțională cu viteza corpului: $\vec{F_f}(t) = -\alpha \vec{v}(t) = -\alpha x'(t)\vec{j}$ ($\alpha > 0$ constantă).

Legea a II-a a lui Newton: $m \cdot \vec{a}(t) = \vec{F_e}(t) + \vec{F_f}(t) \Rightarrow$ ~~m x~~

$\Rightarrow m x''(t)\vec{j} = -k\, x(t)\vec{j} - \alpha x'(t)\vec{j} \Rightarrow m x''(t) + \alpha x'(t) + k\, x(t) = 0,\ t \geq 0$ (*)

↳ ec. diferențială de ordin II liniară cu coeficienți constanți, ec. oscilatorului armonic amortizat

$m x''(t) + \alpha x'(t) + k\, x(t) = F(t),\ t \geq 0 \rightarrow$ oscilații forțate (întreținute)

$F(t)$ - modelul unei forțe exterioare care acționează asupra particulei M

Dacă $F(t) = 0$, avem oscilații libere

Observație: ① $m x''(t) + k\, x(t) = 0 \ / \cdot x'(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow m x''(t)\, x'(t) + k\, x(t)\, x'(t) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{m\,[x'(t)]^2}{2} + \frac{k\, x^2(t)}{2} \right)' = 0 \Rightarrow$ energia totală $E(t)$ = constant (se conservă)

$m x''(t) + \alpha x'(t) + k\, x(t) = 0 \ / \cdot x'(t) \Rightarrow m x''(t) x'(t) + \alpha x'^2(t) + k x(t) x'(t) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{m\,[x'(t)]^2}{2} + \frac{k\, x^2(t)}{2} \right)' = -\alpha (x'(t))^2 \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow E'(t) \leq 0 \Rightarrow$ energia totală $E(t)$ descrește (se pierde energie prin frecare)

③ <u>Circuitul RLC serie</u>

- un rezistor cu rezistența $R > 0$ ohmi
- o bobină cu inductanța $L > 0$ henry
- un condensator cu capacitatea $C > 0$ farazi
- o sursă cu tensiunea $U(t) = U,\ t \geq 0$

Fie $I(t)$ - intensitatea curentului prin circuit la momentul $t \geq 0$

Legea a II-a Kirchhoff: $U(t) = U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow U(t) = R I(t) + L I'(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t)$ / derivăm

$Q'(t) = I(t),\ t \geq 0$ ↳ sarcina prin condensator aceiași tip de ecuație

$\rightarrow U'(t) = L\,I''(t) + R\,I'(t) + \frac{1}{C}\,I(t),\ t \geq 0$

ec. diferențială de ordin II liniară cu coeficienți constanți

$m\,x''(t) + \alpha\,x'(t) + k\,x(t) = F(t)$

$\hookrightarrow$ ecuația oscilatorului armonic amortizat, cu oscilații întreținute