23.11.2023

Cursul 9.

Sisteme liniare cu coeficienți constanți

Fie sistemul liniar omogen cu coeficienți constanți:

① $x' = A \cdot x$, cu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Ne amintim că (ELO) $x' = ax$, $a \in \mathbb{R}$ avea soluția generală (FVC) $x(t) = C e^{at}$, $C \in \mathbb{R}$ constant.

Știm că $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$, $t \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a^k, \ t \in \mathbb{R}$$

Definim, deocamdată formal, matricea:

② $$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \frac{t^0}{0!} A^0 + \frac{t}{1!} A^1 + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!} A^k + \dots,$$

unde $\begin{cases} A^0 = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ - matricea unitate de ordin } n \\ A^k = A^{k-1} \cdot A, \ (\forall) k \geq 1 \end{cases}$

Teoremă: Pentru $(\forall) A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, seria din ② este uniform convergentă pe orice interval compact $I \subset \mathbb{R}$ (în raport cu norma matriceală $\|A\| = \sup \ \|Ax\|_{\mathbb{R}^n} : \|x\|_{\mathbb{R}^n} < 1$). Mai mult, suma ei e^{tA} este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și: $\frac{d}{dt}$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = A e^{tA} = e^{tA} \cdot A, \ (\forall) t \in \mathbb{R}$$

Observație: Când am vorbit despre matricea $X(t)$ asociată unui sistem de n soluții pentru un sistem liniar am spus că $X'(t) = A(t)X(t)$, relație pe care o verifică și e^{tA} $\Rightarrow$ coloanele lui e^{tA} sunt soluții pentru sistemul ① $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ e^{tA} este matricea asociată unui sistem de n soluții pentru sistemul ①. Mai mult, wronskianul lui e^{tA} în $t=0$ este

$$\det I_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow e^{tA} \text{ matrice fundamentală pentru sistemul ①}$$

Soluția generală a sistemului liniar omogen ① este $x(t) = e^{tA}c$, unde $c \in \mathbb{R}^n$ este vector constant.

Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$, $b: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continuă, atunci $(\forall)\, t_0 \in I$, $(\forall)\, x_0 \in \mathbb{R}^n$, PC) $\begin{cases} x' = Ax + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ are soluția unică $x: I \to \mathbb{R}^n$,
dată de (FVC) $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s)\,ds$, $(\forall)\, t \in I$

$$\begin{cases} e^{tA} \cdot e^{sA} = e^{(t+s)A}, & (\forall)\, t, s \in \mathbb{R} \\ \left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}, & (\forall)\, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluția generală a sistemului liniar neomogen $x' = Ax + b(t)$ este $x(t) = e^{tA} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s)\,ds$, $(\forall)\, t \in I$, unde $t_0 \in I$ fixat, $c \in \mathbb{R}^n$ vector constant

Teoremă de structură pentru e^{tA}:

Fie ecuația caracteristică $\det(\lambda I_n - A) = 0$. Dacă rădăcinile acesteia sunt $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, de multiplicitate m_k, pentru $k = \overline{1,s}$ cu $\sum_{k=1}^{s} m_k = n$), atunci orice element din e^{tA} are forma:

$$\sum_{k=1}^{s} e^{\alpha_k t}\left(p_k(t)\cos\beta_k t + q_k(t)\sin\beta_k t\right),$$ unde p_k și q_k sunt polinoame cu coeficienți în $\mathbb{R}$ de grad $\le m_k - 1$.

PARTEA A II-A A MATERIEI

Ecuații cu derivate parțiale. Noțiuni introductive. Formulele lui GREEN

Pe $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}, n \ge 2$) se introduce norma euclidiană:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},\ (\forall)\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Pentru $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, definim:

- bila deschisă de centru x_0 și rază r:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\} \subset \mathbb{R}^n$$

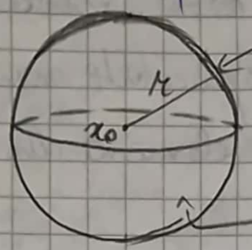
- bila închisă de centru x_0 și rază r:

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \le r\} \subset \mathbb{R}^n$$

- sfera de centru x_0 și rază r:

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| = r\} \subset \mathbb{R}^n$$

În $\mathbb{R}^3$ (în spațiu):

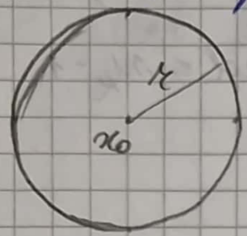


$S(x_0, r)$

$$\overline{B}(x_0, r) = B(x_0, r) \cup S(x_0, r)$$

$B(x_0, r)$ (interiorul mingii)

În $\mathbb{R}^2$ (în plan):

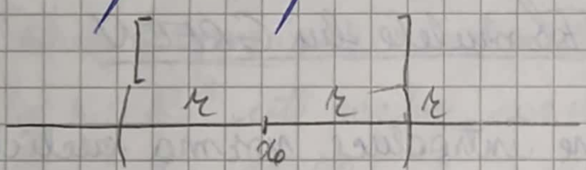


$S(x_0, r) =$ cercul de centru x_0 și rază $r = \mathcal{C}(x_0, r)$

$B(x_0, r) = \text{int } \mathcal{C}(x_0, r)$

$\overline{B}(x_0, r) = \mathcal{C}(x_0, r) \cup \text{int } \mathcal{C}(x_0, r)$

În $\mathbb{R}$ (pe dreapta reală):

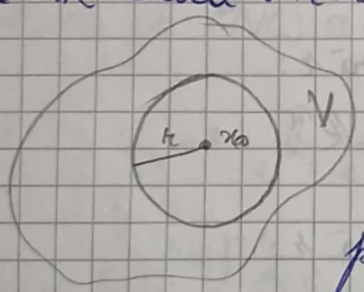


$B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$

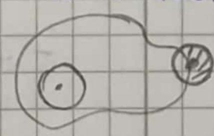
$\overline{B}(x_0, r) = [x_0 - r, x_0 + r]$

$S(x_0, r) = \{x_0 - r, x_0 + r\}$

Spunem că mulțimea $V \subset \mathbb{R}^n$ este vecinătate pentru punctul $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dacă $\exists\, r > 0$ a. î. $B(x_0, r) \subset V$

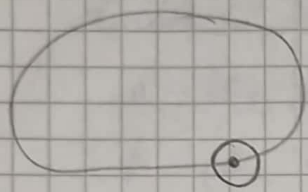


Spunem că mulțimea $\Omega \in \mathbb{R}^n$ este deschisă dacă $\Omega = \emptyset$ sau Ω vecinătate pentru fiecare punct al ei.



Spunem că o mulțime din $\mathbb{R}^n$ este închisă dacă complementara ei ($\mathbb{R}^n \setminus$ mulțimea) este deschisă.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime nevidă. Spunem că $x \in \mathbb{R}^n$ este punct de frontieră pentru Ω dacă orice bilă deschisă centrată în x conține atât puncte din Ω, cât și din $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Mulțimea punctelor frontieră ale lui Ω se numește frontiera lui Ω și se notează $\partial\Omega$ (sau Fr Ω în analiză).



$$\partial B(x_0, r) = \partial \overline{B}(x_0, r) = S(x_0, r)$$

Dacă $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \cup \partial\Omega = \overline{\Omega}$

$\overline{\Omega}$ = închiderea mulțimii Ω, mulțime închisă =

$\overline{\Omega}$ = mulțimea punctelor aderente pentru Ω

$\overline{\Omega} = \{ x \in \mathbb{R}^n \,/\, (\forall)\, V$ vecinătate pentru x, $V \cap \Omega \neq \emptyset \}$

Definiție: Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ deschisă nevidă. Spunem că funcția $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este de clasa C^k pe Ω (și scriem $u \in C^k(\Omega)$) dacă u este derivabilă parțial până la ordinul k în toate variabilele și derivatele sale parțiale de ordin k sunt continue.

Dacă $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, cu $f_i: \Omega \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, spunem că f este de clasă C^k pe Ω (și scriem $f \in C^k(\Omega)$) dacă toate componentele sale $f_i \in C^k(\Omega)$, $(\forall)\ 1 \le i \le n$

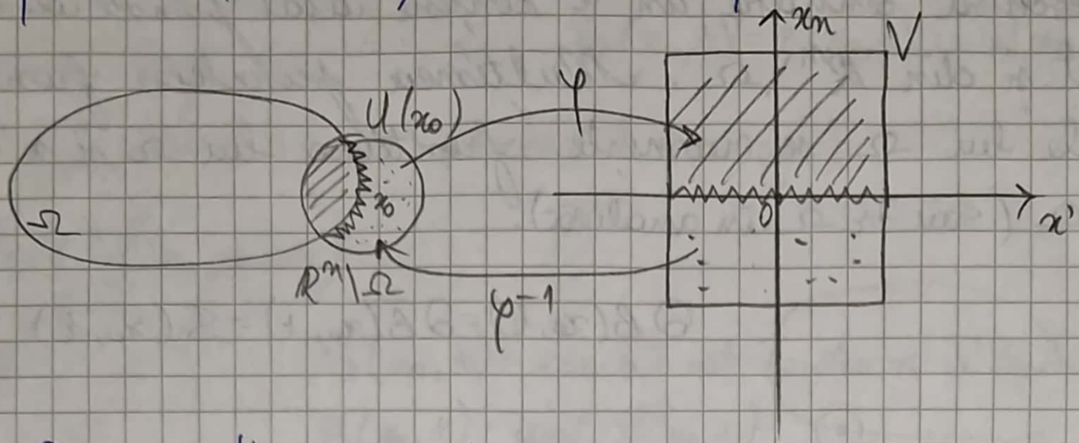
Definiție: O mulțime $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, cu frontiera $\partial\Omega$ se numește varietate (cu bord) de clasă C^k dacă $(\forall)\, x_0 \in \partial\Omega$ există o vecinătate $U(x_0)$ a lui x_0 și o funcție bijectivă $\varphi: U(x_0) \to V$, unde V este o vecinătate a originii în $\mathbb{R}^n$ a.î. φ și inversa φ^{-1} să fie funcții de clasă C^k și:

$$\varphi(U(x_0) \cap \Omega) = V \cap \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0 \}$$

$$x = (\overbrace{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}}^{x'}, x_n)$$

$\varphi(U(x_0)\cap\partial\Omega) = V\cap\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$

$\varphi(U(x_0)\cap(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)) = V\cap\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n < 0\}$



Operatorii diferențiali:

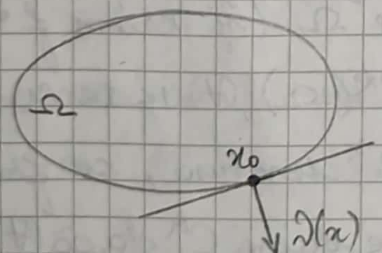
Fie $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ deschisă nevidă.

- dacă $u:\Omega\to\mathbb{R}$, $u\in C^1(\Omega)$, definim gradientul lui u, $\nabla u:\Omega\to\mathbb{R}^n$, $\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right)\in\mathbb{R}^n$

- dacă $u:\Omega\to\mathbb{R}$, $u\in C^2(\Omega)$, definim laplaceanul lui u, $\Delta u:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)\in\mathbb{R}$

Dacă $\Delta u(x) = 0, (\forall)\, x\in\Omega$, spunem că u este armonică pe Ω.

- dacă $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $f=(f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f_i:\Omega\to\mathbb{R}$, $1\le i\le n$, $f\in C^1(\Omega)$, definim divergența lui f, $\operatorname{div} f:\Omega\to\mathbb{R}$, $\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\in\mathbb{R}$.



$\partial\Omega\in C^1$ (Ω mulțime fără colțuri)

Dacă Ω este o ~~fultimea~~ mulțime cu $\partial\Omega\in C^1$, atunci $(\forall)\, x\in\partial\Omega$, putem construi versorul normalei exterioare la $\partial\Omega$ în punctul x, $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \dots, \nu_n(x))$

Dacă $u \in C^1(\overline{\Omega})$, definim derivata normală a lui u în punctul $x \in \partial\Omega$ astfel:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \underbrace{\nabla u(x) \cdot \nu(x)}_{\text{produs scalar în } \mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \cdot \nu_i(x)}_{\text{înmulțirea din } \mathbb{R}^1}$$

Produsul scalar în $\mathbb{R}^n$:

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Formula lui GAUSS-OSTROGRADSKI

Fie $\phi \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, mărginită, cu $\partial\Omega \in C^1$ (pe porțiuni). Fie $f : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Atunci:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} f(x) \cdot \nu(x)\, d\sigma, \text{ unde } \nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \dots, \nu_n(x))$$

este versorul normalei exterioare în punctul $x \in \partial\Omega$, iar

$$\underbrace{f(x) \cdot \nu(x)}_{\text{produs scalar din } \mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, \nu_i(x), \; (\forall)\, x \in \partial\Omega$$

Aplicând F.G-O. pentru $f = u \nabla v$, $u, v : \Omega \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și folosind formula $\operatorname{div}(u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v$, obținem:

I formulă a lui GREEN:

↳ Fie $\phi \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, mărginită, cu $\partial\Omega \in C^1$. Fie $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, cu $v \in C^2(\Omega)$, $\Delta v \in C(\overline{\Omega})$. Atunci:

$$(*) \int_{\Omega} u(x)\, \Delta v(x)\, dx = -\int_{\Omega} \underbrace{\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)}_{\text{produs scalar în } \mathbb{R}^n}\, dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial \nu}(x)\, d\sigma$$

Scriind ⊛ pentru (u,v), (v,u) și scăzând relațiile, obținem:

A II-a formulă a lui GREEN

↳ Fie $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, mărginită, cu $\partial\Omega \in C^1$. Fie $u, v \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $\Delta u, \Delta v \in C(\bar{\Omega})$. Atunci:

$$\int_\Omega [u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)]dx = \int_{\partial\Omega} \left[u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) - v(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\right] d\sigma$$

Dacă în ⊛ luăm $u = 1 \Rightarrow \nabla u(x) = \left(\frac{\partial(1)}{\partial x_1}, \frac{\partial(1)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial(1)}{\partial x_n}\right) = 0 \in \mathbb{R}^n$ și dacă v este armonică (adică $\Delta v(x) = 0, \forall x \in \Omega$), se obține:

FORMULA LUI GAUSS: $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) d\sigma = 0$

Probleme pentru ecuații cu derivate parțiale. Condiții la frontieră și inițiale

Formula generală a unei ecuații cu derivate parțiale este:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = 0$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ = variabile independente

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funcția necunoscută

Ordinul maxim de derivare al lui u care apare în ecuație = ordinul ecuației

Soluție clasică pentru o ecuație cu derivate parțiale = o funcție u definită pe un deschis $\Omega \subset \mathbb{R}$ continuă împreună cu toate derivatele ei parțiale care apar în ecuație, ce verifică ecuația în orice punct din Ω

O ecuație cu derivate parțiale se numește liniară dacă F este operator liniar în raport cu u și toate derivatele ei parțiale care apar în ecuație.

Ecuații cu derivate parțiale liniare de ordinul II

- ecuația lui POISSON: $\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega$
  - ↳ dacă $f \equiv 0$, obținem ecuația lui LAPLACE:

$$\Delta u(x) = 0, x \in \Omega$$

↳ ambele sunt ecuații staționare, funcția nu depinde de timp

- ecuația propagării căldurii (ec. difuziei gazelor):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \omega^2 \Delta u(x,t) = f(x,t), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \in (0,T)$$

- ecuația undelor:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \omega^2 \Delta u(x,t) = f(x,t), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t \in (0,T)$$

↳ ambele sunt ecuații de evoluție, funcția necunoscută u depinde și de timpul t.

O ecuație cu derivate parțiale are ∞ soluții (mulțimea lor formând soluția generală a ecuației). Pentru a individualiza o soluție se pun condiții suplimentare, care depind de tipul de ecuație:

- condiții la frontieră (la limită), referitoare la variabilele spațiale, descriu comportarea soluției pe frontiera domeniului

- condiții inițiale, referitoare la timp
  → numai pentru ecuațiile de evoluție

Condiții la frontieră $\begin{cases} \text{DIRICHLET} \\ \text{NEUMANN} \\ \text{ROBIN} \end{cases}$

Ecuațiile cu derivate parțiale (staționare) și condiția la frontieră D (N, R) formează o problemă la limită de tip D(N, R)

Ecuațiile cu derivate parțiale și condiția la frontieră și condiții inițiale = problemă mixtă.

<u>Exemplificăm tipurile de probleme la limită pe ecuația lui Poisson</u>

① Problema DIRICHLET: dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, mărginită, căutăm $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ a.î.:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), \ (\forall) x \in \Omega \to \text{ecuație staționară a căldurii} \\ \qquad u(x) = \text{temperatura în punctul } x \\ u(x) = \varphi(x), \ x \in \partial\Omega, \text{ unde } f \in C(\bar{\Omega}), \varphi \in C(\partial\Omega) \\ \qquad \hookrightarrow \text{cunoaștem temperatura pe } \partial\Omega \end{cases}$$

② Problema NEUMANN: dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, mărginită cu $\partial\Omega \in C^1$, căutăm $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, cu derivată normală continuă pe $\partial\Omega$ a.î.:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), \ x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x), \ x \in \partial\Omega, \text{ unde } f \in C(\bar{\Omega}), g \in C(\partial\Omega) \\ \qquad \hookrightarrow \text{cunoaștem fluxul de căldură prin frontiera } \partial\Omega \end{cases}$$

Scanat cu CamScanner

Dacă $g=0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}=0, x\in\partial\Omega$, frontiera $\partial\Omega$ este izolată termic (nu am flux de căldură prin frontieră)

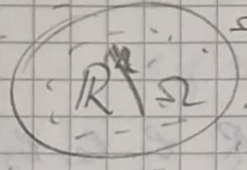
③ Problema ROBIN: în ~~aceleași~~ aceleași ipoteze ca la ②,

$$\begin{cases} \Delta u(x)=f(x), & x\in\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)+\alpha(x)u(x)=g(x), & x\in\partial\Omega \end{cases}$$, unde $f\in C(\overline{\Omega})$, $\alpha, g\in C(\partial\Omega)$,

$\alpha(x)\geq 0$ pt $(\forall) x\in\partial\Omega$

este verificată legea lui Newton: fluxul de căldură prin frontieră e proporțional cu diferența dintre temperatura suprafeței corpului și temperatura mediului înconjurător

④ Probleme la limită exterioare:



Dacă $R^n\setminus\Omega$ mărginită și închisă (compactă), problema la limită se formulează ca ①, ②, ③, dar apare în plus o condiție la ∞: u mărginită când $\|x\|\to\infty$ sau $\lim_{\|x\|\to\infty} u(x)=0$.

23.11.2023

Seminar 8

Ecuații liniare cu coeficienți constanți neomogene

① $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$

Ⓑ Dacă $f(t)=e^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t+P_2(t)\sin\beta t)$, cu $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, P_1, P_2 polinoame, căutăm o soluție particulară pentru ① de forma: $x_p(t)=t^{l}\cdot e^{\alpha t}(Q_1(t)\cos\beta t+Q_2(t)\sin\beta t)$

unde l = multiplicitatea lui $\mu=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}$ ca rădăcină a ecuației caracteristice ($l=0$ dacă μ nu e rădăcină a ecuației caracteristice)

Q_1, Q_2 = polinoame de grad $\max\{\text{grad}P_1, \text{grad}P_2\}$.

① $x''' + x'' + x' + x = 8(\sin 3t + 3\cos 3t)$

② $x'' + 9x = 6\cos t$

Soluția generală a ecuației neomogene:

$$\cancel{X(t)} = x(t) = x_{ong}(t) + x_p(t)$$

① $x''' + x'' + x' + x = 8(\sin 3t + 3\cos 3t)$

$x''' + x'' + x' + x = 0$

Ec. caracteristică: $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2(\lambda+1) + (\lambda+1) = 0 \Rightarrow (\lambda^2+1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = \pm i \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$

S.f.S $= (\cos t, \sin t, e^{-t})$

$x_{ong}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^{-t}, t \in \mathbb{R}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ const

$f(t) = 8\sin 3t + 24\cos 3t$

$\alpha = 0$

$\beta = 3$

$\alpha + i\beta = 3i \Rightarrow l = 0$

$P_1(t) = 24$

$P_2(t) = 8$

$x_p(t) = t^0(A\cos 3t + B\sin 3t), A, B \in \mathbb{R}$

$x_p'(t) = -3A\sin 3t + 3B\cos 3t$

$x_p''(t) = -9A\cos 3t - 9B\sin 3t$

$x_p'''(t) = +27A\sin t - 27B\cos 3t$

$27A\sin 3t - 27B\cos 3t - 9A\cos 3t - 9B\sin 3t - 3A\sin 3t + 3B\cos 3t + A\cos 3t + B\sin 3t =$

$= 8\sin 3t + 24\cos 3t \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 27A\sin 3t - 9B\sin 3t - 3A\sin 3t + B\sin 3t = 8\sin 3t \ / : \sin 3t \\ -27B\cos 3t - 9A\cos 3t + 3B\cos 3t + A\cos 3t = 24\cos 3t \ / : \cos 3t \Rightarrow \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 27A - 9B - 3A + B = 8 \\ -27B - 9A + 3B + A = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24A - 8B = 8 \\ -24B - 8A = 24 \end{cases} \Big| :8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A - B = 1 \;\big|\cdot 3 \\ -A - 3B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9A - 3B = 3 \\ -A - 3B = 3 \end{cases} \ominus$$

$$10A = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow B = -1$$

$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 e^{-t} - \sin 3t,\ t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ const.

(2) $x'' + 9x = 6\cos 3t$

$x'' + 9x = 0$

$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i$

S.f.s $\{\cos 3t, \sin 3t\}$

$x_{omog}(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t,\ t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ const

$f(x) = 6\cos 3t$

$\alpha = 0$

$\beta = 3$

$\alpha + i\beta = 3i$

$l = 1$

$P_1 = 6$

$P_2 = 0$

$x_p(t) = t(A\cos 3t + B\sin 3t)$, A, B const

$x_p'(t) = t(-3A\sin 3t + 3B\cos 3t) + (A\cos 3t + B\sin 3t)$

$x_p''(t) = t(-9A\cos 3t - 9B\sin 3t) + (-3A\sin 3t + 3B\cos 3t) +$
$+ (-3A\sin 3t + 3B\cos 3t)$

$\cancel{-9tA\cos 3t} \cancel{- 9tB\sin 3t} - 3A\sin 3t + 3B\cos 3t - 3A\sin 3t + 3B\cos 3t + \cancel{9tA\cos 3t} + \cancel{9tB\sin 3t}$
$= 6\cos 3t \Rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} -3A\sin 3t - 3A\sin 3t = 0 \\ 3B\cos 3t + 3B\cos 3t = 6\cos 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$x_p(t) = t\sin 3t$$

$$x(t) = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t + t\sin 3t,\ t\in\mathbb{R},\ C_1, C_2\in\mathbb{R} \text{ const.}$$

Ⓐ $f(t) = e^{\gamma t}P(t)$

Ⓑ $f(t) = e^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t)$

$$x'' - x = \underbrace{t - t\cos t}_{f(t)}$$

$y'' - y = t \rightsquigarrow$ tip Ⓐ $\rightarrow$ obțin soluția $y = y(t)$

$z'' - z = -t\cos t \rightsquigarrow$ tip Ⓑ $\rightarrow$ obțin soluția $z = z(t)$

$(+)$

$(y+z)'' - (y+z) = t - t\cos t \rightarrow x(t) = y(t) + z(t)$

Sisteme liniare cu coeficienți constanți

① $\begin{cases} x' = 10y - x \\ y' = y - x \end{cases}$ ② $\begin{cases} x' = 3x + y - e^{2t} \\ y' = y - x \end{cases}$

sistem omogen $\Downarrow$ ecuație cu coef const omogenă

sistem neomogen $\Downarrow$ ecuație cu coef const neomogenă

① a) derivăm I ecuație:

$$x'' = 10y' - x'$$

b) înlocuim y' din a II-a ecuație

$$x'' = 10(y - x) - x' \Rightarrow x'' = 10y - 10x - x'$$

c) înlocuim y din I ecuație: $y = \frac{x' + x}{10}$ ⊛

$$x'' = \cancel{10}\cdot\frac{x' + x}{\cancel{10}} - 10x - \cancel{x'} = -9x \rightarrow$$

Scanat cu CamScanner

$\Rightarrow x'' + 9x = 0$ ec. cu coef ct. omogenă

ec. caract. $\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -9 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i$

s.f.s $\{\cos 3t, \sin 3t\}$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t \\ y(t) \overset{(*)}{=} \frac{1}{10}(-3c_1 \sin 3t + 3c_2 \cos 3t + c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t) \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow y(t) = \frac{-3c_1 + c_2}{10} \sin 3t + \frac{3c_2 + c_1}{10} \cos 3t$, c_1, c_2 ~~e~~ const, $t \in \mathbb{R}$

(2) $\begin{cases} x'' = 3x' + y' - 2e^{2t} \\ y' = y - x \end{cases}$

$x'' = 3x' + y - x - 2e^{2t}$ $\cancel{\Rightarrow y = x'' - 3x' + x - 2e^{2t}}$

$x' = 3x + y - e^{2t} \Rightarrow y = x' - 3x + e^{2t}$

$x'' = 3x' + x' - 3x + e^{2t} - x - 2e^{2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow x'' = 4x' - 4x - e^{2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow x'' - 4x' + 4x = -e^{2t}$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{4}{2} = 2$

S.f.s $\{e^{2t}, t \cdot e^{2t}\}$

$x_{omg}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 te^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$x_p(t) = ?$

$f(t) = -e^{2t}$

$\mu = 2$

$P(t) = -1$

$\ell = 2$

$x_p(t) = t^2 \cdot e^{2t} \cdot A, \ A \in \mathbb{R}$

$x_p'(t) = 2t \cdot e^{2t} A + t^2 \cdot 2e^{2t} A = A(2t e^{2t} + 2t^2 e^{2t})$

$x_p''(t) = A(2e^{2t} + 2t 2e^{2t} + 4t e^{2t} + 4t^2 e^{2t}) \Leftrightarrow$

$x_p'' - 4x_p' + 4x_p = -e^{2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{e^{2t}(2A + 4tA) + A \ A e^{2t}(2t+4t) + 2Ae^{2t}}$

$\Rightarrow A(2e^{2t} + 4t e^{2t} + 4t e^{2t} + 4t^2 e^{2t} - 8t e^{2t} - 8t^2 e^{2t} + 4t^2 e^{2t}) = -e^{2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cdot e^{2t}(2 + \cancel{4t} + \cancel{4t} + \cancel{4t^2} - \cancel{8t} - \cancel{8t^2} + \cancel{4t^2}) = -e^{2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2A \cdot \cancel{e^{2t}} = -\cancel{e^{2t}} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$x_p(t) = -\frac{1}{2} t^2 e^{2t}$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} - \frac{1}{2} t^2 e^{2t} \\ y(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2(e^{2t} + 2te^{2t}) - \frac{1}{2}(2te^{2t} + 2t^2 e^{2t}) \\ \quad - 3c_1 e^{2t} - 3c_2 t e^{2t} + \frac{3}{2} t^2 e^{2t} + e^{2t} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y(t) = c_1 e^{2t}(2-3) + c_2 \cdot e^{2t}(1 + 2t - 3t) - e^{2t}(t + t^2) + e^{2t}(\frac{3}{2}t^2 + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t) = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t}(1-t) + e^{2t}(-t^2 - t + \frac{3}{2}t^2 + 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(t) = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t}(1-t) + e^{2t}(\frac{1}{2}t^2 - t + 1) \\ x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} - \frac{1}{2} t^2 e^{2t} \end{cases}$$

b) aflarea matricei e^{tA}

① $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ ② $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2y - z \\ z' = x - y + z \end{cases}$

① Matricea coeficienților sistemului

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ec. caracteristică: $\det(\lambda I_2 - A) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det\left[\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & +1 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$$

Căutăm $e^{tA} = \cos t \cdot B_1 + \sin t\, B_2$, B_1, B_2 matrice 2x2 const

Pentru a afla B_1, B_2 folosim:

$$\begin{cases} e^{tA}\big|_{t=0} = I_2 \\ (e^{tA})' = A e^{tA} \end{cases}$$

$$I_2 = \cos 0 \cdot B_1 + \sin 0 \cdot B_2 \Rightarrow B_1 = I_2$$

$$-\sin t\, B_1 + \cos t \cdot B_2 = A(\cos t\, B_1 + \sin t\, B_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sin t\, B_1 + \cos t\, B_2 = \cos t\, A B_1 + \sin t\, A B_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -b_1 = A b_2 \\ b_2 = A b_1 \end{cases} \Rightarrow b_2 = A I_2 = A$$

Deci $e^{tA} = \cos t\, I_2 + \sin t\, A = \cos t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -\sin t \\ 2\sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -\sin t \\ 2\sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1(\cos t + \sin t) - k_2 \sin t \\ 2k_1 \sin t + k_2(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}$$

Soluția generală a sistemului:

$$\begin{cases} x(t) = k_1(\cos t + \sin t) - k_2 \sin t \\ y(t) = 2k_1 \sin t + k_2(\cos t - \sin t) \end{cases}, t \in \mathbb{R},\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \text{ const}$$

② $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2y - z \\ z' = x - y + z \end{cases}$

Matricea sistemului: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda-2) + \cancel{1} + \cancel{\lambda-2} - \cancel{\lambda+1} = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

$SFS \{e^t, te^t, e^{2t}\}$

$e^{tA} = e^t C_1 + te^t C_2 + e^{2t} C_3$, C_1, C_2, C_3 matrice 3x3 constante

$e^{tA}\Big|_{t=0} = I_3$

$C_1 + C_3 = I_3$

$(e^{tA})' = A \cdot e^{tA} = e^t C_1 + C_2(e^t + te^t) + 2e^{2t} C_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^t C_1 + C_2 e^t + tC_2 e^t + 2C_3 e^{2t} = A(e^t C_1 + te^t C_2 + e^{2t} C_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow e^t C_1 + e^t C_2 + te^t C_2 + 2e^{2t} C_3 = e^t AC_1 + te^t AC_2 + e^{2t} AC_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} e^t(C_1 + C_2) = e^t AC_1 \\ te^t C_2 = te^t AC_2 \\ 2e^{2t} C_3 = e^{2t} AC_3 \\ C_1 + C_3 = I_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = AC_1 \\ C_2 = AC_2 \\ 2C_3 = AC_3 \\ A \cdot | C_1 + C_3 = I_3 \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow \underbrace{A \cdot C_1}_{C_1 + C_2} + \underbrace{A \cdot C_3}_{2C_3} = A \Rightarrow C_1 + C_2 + 2C_3 = A$

$A^2 \cdot | C_1 + C_3 = I_3 \Rightarrow A^2 C_1 + A^2 C_3 = A^2$

$A^2 C_1 = A \cdot AC_1 = A(C_1 + C_2) = AC_1 + AC_2 = C_1 + C_2 + C_2 = C_1 + 2C_2$

$A^2 C_3 = A \cdot AC_3 = A \cdot 2C_3 = 2 \cdot 2C_3 = 4C_3$

$\Rightarrow C_1 + 2C_2 + 4C_3 = A^2$

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = I_3 \\ C_1 + C_2 + 2C_3 = A \;\Big|\cdot(-2) \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 = A^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = I_3 \\ -2C_1 - 2C_2 - 4C_3 = -2A \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 = A^2 \end{cases} \oplus$$

$$\left.\begin{aligned} -C_1 = A^2 - 2A &\Rightarrow C_1 = 2A - A^2 \\ C_1 + C_3 = I_3 &\Rightarrow C_3 = I_3 - C_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_3 = I_3 - 2A + A^2$$

$$C_1 + C_2 + 2C_3 = A \Rightarrow 2A - A^2 + C_2 + 2I_3 - 4A + 2A^2 = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 + 2I_3 - 2A + A^2 = A \Rightarrow C_2 = -2I_3 + 3A - A^2$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = 2A - A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = -2I_3 + 3A - A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = I_3 - (2A - A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} 2e^t + te^t - e^{2t} & -2e^t - te^t + e^{2t} & e^t + 0 - e^{2t} \\ e^t + te^t - \cancel{2}e^{2t} & -e^t - t \cdot e^t + 2e^{2t} & e^t + 0 - e^{2t} \\ 0 + te^t + 0 & 0 - te^t + 0 & e^t + 0 + 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = k_1(2e^t + te^t - e^{2t}) + k_2(-2e^t - te^t + e^{2t}) + k_3(e^t - e^{2t}) \\ y(t) = k_1(e^t + te^t - e^{2t}) + k_2(-e^t - te^t + 2e^{2t}) + k_3(e^t - e^{2t}) \\ z(t) = k_1 te^t - k_2 te^t + k_3 e^t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ const

(3) $\begin{cases} x' = x - y + e^{2t} \\ y' = -4x - 2y \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2) - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - \lambda - 2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25 \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

Scanat cu CamScanner

$S f S \{e^{-3t}, e^{2t}\}$

$e^{tA} = e^{-3t} C_1 + e^{2t} C_2$, C_1, C_2 matrice 2x2 constante

$$\begin{cases} e^{tA}\Big|_{t=0} = I_2 \Rightarrow C_1 + C_2 = I_2 \Big| \cdot A \Rightarrow AC_1 + AC_2 = I_2 \\ (e^{tA})' = Ae^{tA} \Rightarrow -3e^{-3t}C_1 + 2e^{2t}C_2 = e^{-3t}AC_1 + e^{2t}AC_2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3e^{-3t}C_1 = e^{-3t}AC_1 \\ 2e^{2t}C_2 = e^{2t}AC_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3C_1 = AC_1 \\ 2C_2 = AC_2 \end{cases} \Rightarrow -3C_1 + 2C_2 = A$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = I_2 \Big| \cdot 3 \\ -3C_1 + 2C_2 = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3C_1 + 3C_2 = 3I_2 \\ -3C_1 + 2C_2 = A \quad (+) \end{cases}$$

$$/ \quad 5C_2 = 3I_2 + A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{3}{5} I_2 + \frac{1}{5} A$$

$$C_1 = I_2 - C_2 \Rightarrow C_1 = I_2 - \frac{3}{5} I_2 - \frac{1}{5} A = \frac{2}{5} I_2 - \frac{1}{5} A$$

$e^{tA} = e^{-3t} C_1 + e^{2t} C_2$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\int_0^t e^{(t-s)A} \cdot b(s)\, ds}_{(*)}$$

Alegem $t_0 = 0$

$\rightarrow$ facem $t \to t-s$ în formula lui e^{tA}

$$C_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{2s} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t,s) \\ f_2(t,s) \end{pmatrix}$$

$$(*) = \begin{pmatrix} \int_0^t f_1(t,s)\, ds \\ \int_0^t f_2(t,s)\, ds \end{pmatrix}$$