26.10.2023

Cursul 4.

⑥ Ecuații cu diferențiale exacte (EE)

Exemplu: Să se rezolve ecuația:

$$x\cos t - x^2 - (2tx - \sin t)\,x' = 0 \quad / \cdot dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x\cos t - x^2)}_{P(t,x)}\,dt \underbrace{- (2tx - \sin t)}_{Q(t,x)}\,dx = 0 \quad (1)$$

(1) este EE $\Leftrightarrow$ „coeficientul" lui dx derivat în t este egal cu „coeficientul" lui dt derivat în x

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x}(t,x) = \cos t - 2x \\ \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = -2x + \cos t \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (1) este EE

$dF(t,x) = \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)dx + \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)dt$ diferențiala lui F

(1) este EE $\Rightarrow (\exists) F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 a.î. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = \text{„coeficientul" lui } dx = -2tx + \sin t \quad \Big/ \int dx \Rightarrow \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = \text{„coeficientul" lui } dt = x\cos t - x^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow F(t,x) = -2t\int x\,dx + \sin t \int dx \Rightarrow$

$\Rightarrow F(t,x) = -\cancel{2}t \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} + \sin t \; x + \ell(t) \Rightarrow F(t,x) = \sin t - x^2 t + \ell(t)$

$\ell(t) =$ „constantă" de integrare $\to$ o funcție care nu depinde de variabila în care am integrat, ci de cealaltă variabilă.

Ca să aflăm $\ell(t)$ folosesc relația neutilizată din sistem:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = x\cos t - x^2 \\ &\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = -x^2 + x\cos t + \ell'(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cancel{x\cos t} - \cancel{x^2} = -\cancel{x^2} + \cancel{x\cos t} + \ell'(t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ell'(t) = 0 \Rightarrow \ell(t) = k \in \mathbb{R}$ constant $\Rightarrow$

$\Rightarrow F(t,x) = -tx^2 + x\sin t + k$

Soluția (EE) în formă implicită este $F(t,x) = \text{constant} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{-tx^2 + x\sin t = \text{constant}}$

Ultimele două tipuri de ecuații au forma $x = f(t, x')$, nu au forma clasică $x' = f(t,x)$. Se rezolvă prin metoda parametrului și au soluțiile date în formă parametrică

⑦ Ecuațiile CLAIRAUT (EC)

Forma: $x = tx' + \varphi(x')$, cu $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă C^1

Rezolvare:

Căutăm soluții de gradul C^2 și derivez în t EC

$$x' = (t x')' + [\Psi(x')]' \Rightarrow \cancel{x'} = \overset{1}{\cancel{t'}}\cancel{x'} + t x'' + \Psi'(x') \cdot x'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x''[t + \Psi'(x')] = 0 \quad \begin{cases} x'' = 0 \\ t + \Psi'(x') = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Cazul I}}$

Dacă $x'' = 0 \,/\!\int dt \Rightarrow x' = C$ constant $/\!\int dt \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \int C\,dt = C\int dt \Rightarrow x = Ct + D$, C, D constante

Înlocuiesc pe x în (EC):

$\cancel{Ct} + D = \cancel{t\,C} + \Psi(C) \Rightarrow D = \Psi(C) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = C \cdot t + \Psi(C), \quad C \in \mathbb{R} \text{ constant}}$

↳ familie de drepte depinzând de C

↳ Soluția generală a (EC)

$\boxed{\text{Cazul II}}$

Dacă $t + \Psi'(x') = 0 \xrightarrow[x' = p]{\text{notez}} t + \Psi'(p) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t(p) = -\Psi'(p) \\ x(p) = -\Psi'(p) \cdot p + \Psi(p) \end{cases}$

$$\begin{cases} t(p) = -\Psi'(p) \\ x(p) = -\Psi'(p) \cdot p + \Psi(p) \end{cases}, \quad p \in \mathbb{R} \text{ parametru}$$

↳ Soluția singulară a (EC), dată în formă parametrică

~~Observatie: Geometric soluția singulară este înfășurătoarea familiei de drepte coincide cu familia tangentelor la soluția~~

Observație: Geometric, soluția singulară este înfășurătoarea familiei de drepte din soluția generală, adică familia de drepte coincide cu familia tangentelor la soluția singulară.

8 Ecuația LAGRANGE (ELg)

Forma: $x = t\underbrace{\varphi(x')}_{\neq 1} + \psi(x')$, cu $\varphi, \psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă C^1

$\varphi(r) \neq r, (\forall) r \in \mathbb{R}$

Rezolvare:

Căutăm soluții de clasă C^2 și derivez în t:

$$x' = t'\varphi(x') + t\varphi'(x')\cdot x'' + \psi'(x')\cdot x''$$

Metoda parametrului: $x' = p \Rightarrow x'' = p'$

$$p = \varphi(p) + t\varphi'(p)p' + \psi'(p)p' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{p'}_{\frac{dp}{dt}}[t\varphi'(p) + \psi'(p)] = p - \cancel{\psi}\,\varphi(p) \Big/ \cdot \frac{dt}{dp}$$

Pp. că $p(t)$ este inversabilă, cu inversa $t = t(p)$

$$t\varphi'(p) + \psi'(p) = [p - \varphi(p)]\frac{dt}{dp} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dt}{dp}}_{t'(p)} = \underbrace{\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}}_{a(p)} \cdot t + \underbrace{\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}}_{b(p)} \quad (EL) \text{ în } t = t(p)$$

Rezolv (EL) și obțin soluția $t = t(p, \mathcal{C})$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ constant

Soluția (E Lg) în formă parametrică:

$$\begin{cases} t = t(p, \mathcal{C}) \\ x = t(p, \mathcal{C}) \cdot \varphi(p) + \psi(p) \end{cases}, \ p \text{ parametru}, \ \mathcal{C} \text{ constantă}$$

! În general pentru ecuațiile 7 și 8 ~~→~~ soluția finală este dată de sistemul t și x, dar dacă p se poate afla atunci soluția finală va fi $x(t)$.

Exemplu:

Rezolvați

1 $x = t x' - (x')^4$ (EC)

2 $x = t\underbrace{(1+x')}_{\neq x'} + (x')^2$ (E Lg)

1 Caut soluții $x \in \cancel{\mathcal{C}}\, C^2$ și derivez în t:

$\cancel{x'} = \cancel{t'x'} + t x'' - 4(x')^3 \cdot x'' \Rightarrow x''[t - 4(x')^3] = 0$

I Dacă $x'' = 0 \,/\int dt \Rightarrow x' = \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ constant $/\int dt \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = \int \mathcal{C}\, dt \Rightarrow x(t) = \mathcal{C}t + \mathcal{D}$, $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ constant

Înlocuim $x(t)$ în (EC) $\Rightarrow \cancel{\mathcal{C}t} + \mathcal{D} = \cancel{t\mathcal{C}} - \mathcal{C}^4 \Rightarrow \mathcal{D} = -\mathcal{C}^4$

Deci $x(t) = \mathcal{C} \cdot t - \mathcal{C}^4$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ constantă

↳ soluția generală a EC

II Dacă $t-4(x')^3=0 \xrightarrow[x'=p]{\text{notăm}} \begin{cases} t(p)=4p^3 \\ x(p)=4p^3\cdot p-p^4=3p^4 \end{cases}, p\in\mathbb{R}$ parametru

↳ soluția singulară în formă parametrică

$t=4p^3 \Rightarrow p^3=\frac{t}{4} \Rightarrow p=\sqrt[3]{\frac{t}{4}} \Rightarrow x(t)=3\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{t}{4}}\right)^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t)=\frac{3t}{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{t}{4}}, t\in\mathbb{R}$

↳ soluția singulară în formă explicită

7 Decembrie - Parțial

② $x-t\underbrace{(1+x')}_{\neq x'}+(x')^2$ (EL_g)

Căutăm soluții $x\in C^2$ și derivez în t

$\cancel{x'}=\cancel{t'(1+x')}+t(1+x')'+2x'\cdot x''$

$0=1+tx''+2x'x''$

Metoda parametrului:

Notăm: $x'=p \Rightarrow x''=p'$

$0=1+tp'+2pp' \Rightarrow p'(t+2p)=-1$ (**)

Dacă $p'=0 \Rightarrow$ (**) devine $0=-1$ (F) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ deci $p'\neq 0$

$\frac{dp}{dt}(t+2p)=-1 \Big/ \frac{dt}{dp} \Rightarrow t+2p=-\frac{dt}{dp}$

$\frac{dt}{dp}=\overset{a(p)}{-1}\,t\overset{b(p)}{-2p}$ (EL) în $t=t(p)$

(FVC) $t(p)=t_0\, e^{\int_{p_0}^{p} a(s)ds}+\int_{p_0}^{p} e^{\int_s^p a(r)dr}\cdot b(s)ds \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{p_0}^{p} (-1)\,ds = -s\Big|_{p_0}^{p} = p_0 - p$$

$$p_0 = 0 \Rightarrow t_0 = t(p_0) = t(0) = \text{constant}$$

$$t(p) = t_0 e^{-p} + \int_0^p e^{-p+s} \cdot (-2s)\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(p) = t_0 \cdot e^{-p} - 2e^{-p} \cdot \int_0^p e^{s} \cdot s\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(p) = t_0\, e^{-p} - 2e^{-p} \cdot \int_0^p (e^{s})' s\,ds = t_0 \cdot e^{-p} - 2e^{-p}\left(e^{s} \cdot s\Big|_0^p - \int_0^p e^{s} \cdot 1\,ds\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(p) = t_0\, e^{-p} - 2e^{-p}\left(p \cdot e^{p} - e^{s}\Big|_0^p\right) = t_0 \cdot e^{-p} - 2e^{-p}\left(p \cdot e^{p} - e^{p} + 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(p) = e^{-p}\left(\underbrace{t_0 - 2}_{\text{constant}} - 2p\, e^{p} + 2e^{p}\right)$$

$$\begin{cases} t(p) = \ell \cdot e^{-p} - 2p + 2 \\ x(p) = (\ell e^{-p} - 2p + 2)(1+p) + p^2 \end{cases}, \; p \in \mathbb{R} \text{ parametru}, \; \ell \in \mathbb{R} \text{ constant}$$

$\hookrightarrow$ soluția EL în formă parametrică

$$x = t(1 + x') + (x')^2$$

Capitolul 2: Existență și unicitate pentru problema CAUCHY

Teorema lui PICARD este un rezultat de existență și unicitate pentru soluțiile problemei Cauchy, care îmi furnizează și o metodă de aproximare a soluțiilor: <u>metoda aproximațiilor succesive</u>.

<u>Existență și unicitate pentru problema Cauchy pentru ecuații diferențiale scalare</u>

Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale cu interior nevid.

Scanat cu CamScanner

Fie problema Cauchy:

$$(1)\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \text{ unde } f: \underset{t}{I} \times \underset{x}{J} \to \mathbb{R} \text{ continuă}, t_0 \in I, x_0 \in J$$

<u>Propoziție</u>: Fie $f: I \times J \to \mathbb{R}$ continuă și $I_0 \subset I$ un interval cu $t_0 \in I_0$. Atunci funcția $x: I_0 \to J$ este soluție pentru problema Cauchy (1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ x continuă și verifică ecuația integrală:

$$(2) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds, \ (\forall) t \in I_0$$

Demonstrație: $\overset{\text{directa}}{„\Rightarrow"}$ Știm că x este soluție pentru problema Cauchy (1) $\Rightarrow x \in C^1(I_0) \Rightarrow x, x'$ continue pe I_0

$$\underbrace{x'(s)}_{\text{continuă}} = \underbrace{\overset{\to\text{continuă}}{f}(s, \overset{\to\text{continuă}}{x(s)})}_{\text{continuă}}, (\forall) s \in I_0 \ \Big| \int_{t_0}^{t} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} x'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds \Rightarrow x(s)\Big|_{s=t_0}^{s=t} = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) - \underbrace{x(t_0)}_{x_0} = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds \Rightarrow x \text{ verifică } (2)$$

Reciproca: „$\Leftarrow$" Pp că x continuă și verifică (2)

$$(2)\ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{\overset{\to\text{continuă}}{f}(s, \overset{\to\text{continuă}}{x(s)})}_{\text{continuă}}\,ds, \ (\forall) t \in I_0$$

$$F(t) = \int_{a_{\text{final}}}^{t} f(s)\,ds, \text{ cu } f \text{ continuă, este derivabilă și } F'(t) = f(t), (\forall) t$$

Deci putem deriva în (2) $\Rightarrow x'(t) = \underset{=0}{x_0'} + f(t, x(t)), (\forall) t \in I_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x$ verifică ecuația din (1)

Facem $t = t_0$ în (2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dots \Rightarrow x(t_0) = x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0} \dots}_{=0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x(t_0) = x_0 \Rightarrow x$ verifică problema Cauchy (1)

Din această propoziție $\Rightarrow$ a rezolva problema Cauchy (1) este echivalent cu a rezolva ecuația integrală (2).

Fie $x_0 = x_0(t)$ o funcție care aproximează soluția x a lui (2).

Fie $x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))ds$

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds$$

$\vdots$

(3) $$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s))\, ds \;; (\forall) n \geq 1$$

De obicei se ia (4) $x_0(t) = x_0$ $\hookrightarrow$ data inițială din (PC)

Șirul dat de (3) și (4) se numește șirul aproximațiilor succesive, iar metoda de construcție se numește metoda aproximațiilor succesive.

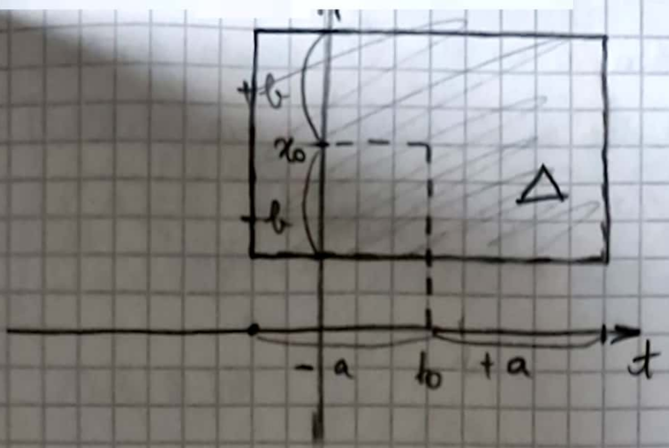
__Teorema lui PICARD:__

Fie $a, b > 0$. Fie $\Delta = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 / -a \leq t - t_0 \leq a, -b \leq x - x_0 \leq b\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 / t_0 - a \leq t \leq a + t_0, x_0 - b \leq x \leq x_0 + b\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subset \mathbb{R}^2$



Fie $f: \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dacă:

i) f continuă pe Δ

ii) f lipschitziană în raport cu x pe Δ, adică $(\exists) L > 0$ a.î.

$|f(t,x) - f(t,y)| \le L|x-y|, (\forall)(t,x),(t,y) \in \Delta$, atunci problema Cauchy (1) are o soluție unică $x: [t_0-\delta, t_0+\delta] \to [x_0-b, x_0+b]$, unde $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, cu $M>0$ majorant pentru $|f|$ pe Δ (adică $|f(t,x)| \le M, (\forall)(t,x) \in \Delta$).

<u>Observație</u>: $\delta \le a \Rightarrow [t_0-\delta, t_0+\delta] \subset [t_0-a, t_0+a] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ soluția x este locală (adică definit posibil pe un interval mai mic decât intervalul pentru t pe car-e permite f)

<u>Observație</u>: M există din Teorema lui Weierstrass pentru funcții continue (f continuă pe mulțimea mărginită și închisă (deci compactă) Δ, prin urmare f e mărginită și își atinge marginile)

$\Rightarrow (\exists) M = \max|f(t,x)|, (t,x) \in \Delta$

Vrem ca soluția x să fie definită pe un interval cât mai mare $\Leftrightarrow \delta$ maxim ~~a,b fixe~~ a,b fixe numitorul M este minim $\Rightarrow M = \max\limits_{\Delta}|f|$

Observație: În practică o condiție suficientă pentru ipoteza ii) este $(\exists)\ \frac{\partial f}{\partial x}$ pe Δ și să fie mărginită sau continuă (din Teorema lui Lagrange: $f(t,x) - f(t,y) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi)}_{\text{mărginită}}(x-y)$)

26.10.2023

Seminar 4.

⑥ Ecuații cu diferențiale exacte

① $(3x^2 - t^2 + 1)\,dx + (4t^3 - 2tx)\,dt = 0$

② $(x^2 \sin t + \cos t)\,dt - 2x \cos t\,dx = 0$

③ $(t^2 x - x + t)\,x' + 1 + x + t x^2 = 0$

④ $e^{-x} - (2e^{t+2x} + t e^{-x})\,x' = 0$

① $\underbrace{(3x^2 - t^2 + 1)}_{P(t,x)}\,dx + \underbrace{(4t^3 - 2tx)}_{Q(t,x)}\,dt = 0$

Verificăm: "coeficientul" lui dx derivat în t = "coeficientul" lui dt derivat în x

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t}(t,x) &= -2t \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(t,x) &= -2t\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{sunt egale} \Rightarrow (EE) \Rightarrow (\exists)\ F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ de clasă } C^2 \text{ a.î.}$$

$$(S)\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = \text{"coeficientul" lui } dx = 3x^2 - t^2 + 1 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = \text{"coeficientul" lui } dt = 4t^3 - 2tx \quad \Big/ \int dt \Rightarrow\end{cases}$$

$\Rightarrow F(t,x) = \int 4t^3\,dt - \int 2tx\,dt = 4 \cdot \frac{t^4}{4} - 2x \int t\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow F(t,x) = t^4 - 2x \cdot \frac{t^2}{2} + \varphi(x)$

Pentru a afla $b(x)$:

$$\left.\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = 3x^2 - t^2 + 1 \text{ (din sistemul (S))} \\ \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = -t^2 + b'(x) \text{ (derivez F obținut mai sus)} \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3x^2 \cancel{-t^2} + 1 = \cancel{-t^2} + b'(x) \Rightarrow b'(x) = 3x^2 + 1 \; \Big/ \int dx \Rightarrow$

$\Rightarrow b(x) = x^3 + x + k$, $k \in \mathbb{R}$ constant

Deci $F(t,x) = t^4 - xt^2 + x^3 + x + k$

Soluția (EE) în formă implicită este: $F(t,x) = \text{constant} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{t^4 - xt^2 + x^3 + x = \text{constant}}$

② $\underbrace{(x^2 \sin t + \cos t)}_{P(t,x)} dt \underbrace{- 2x \cos t}_{Q(t,x)} dx = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x}(t,x) = 2x \sin t \\ \\ \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 2x \sin t \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sînt egale} \Rightarrow (EE) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\exists) F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 a.î.

$$(S)\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = -2x \cos t \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = x^2 \sin t + \cos t \end{cases}$$

$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = -2x \cos t \; \Big/ \int dx \Rightarrow F(t,x) = -2\cos t \int x \, dx \Rightarrow$

$\Rightarrow F(t,x) = -2\cos t \cdot \frac{x^2}{2} + b(t) = -x^2 \cos t + b(t)$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = x^2 \sin t + \cos t$$
$$\frac{\partial F}{\partial t} = x^2 \sin t + \ell'(t)$$
$$\Rightarrow \cancel{x^2 \sin t} + \cos t = \cancel{x^2 \sin t} + \ell'(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ell'(t) = \cos t \ \Big/ \int dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ell(t) = \sin t + k, \ k \in \mathbb{R} \text{ constantă}$$

$$F(t,x) = -x^2 \cos t + \sin t + k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 \cos t + \sin t = \text{constant}$$

③ $(t^2 x - x + t)\frac{dx}{dt} - 1 + x + tx^2 = 0 \ \Big/ \cdot dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{(t^2x - x + t)}_{Q(t,x)} dx + \underbrace{(-1 + x + tx^2)}_{P(t,x)} dt = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 2tx - 0 + 1$$
$$\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) = 0 + 1 + 2tx$$
$$\Rightarrow \text{sunt egale} \Rightarrow (EE) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, F \in C^2 \text{ a.î.}$$

$$(S)\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = t^2x - x + t \\ \dfrac{\partial F}{\partial t} = tx^2 + x - 1 \ \Big/ \int dt \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(t,x) = x^2 \int t\,dt + x\int dt - \int dt \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F(t,x) = x^2 \cdot \frac{t^2}{2} + x \cdot t - t + \ell(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F(t,x) = \frac{x^2}{2} \cdot t^2 + t(x-1) + \ell(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = t^2x - x + t$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = t^2x + t + \ell'(x)$$
$$\Rightarrow \cancel{t^2x} - x + \cancel{t} = \cancel{t^2x} + \cancel{t} + \ell'(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ell'(x) = -x \Rightarrow \ell(x) = -\frac{x^2}{2} + k$$

$F(t,x) = \frac{t^2}{2}x^2 + xt - t - \frac{x^2}{2} + k \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{F(t}$ $\frac{x^2}{2}(t^2-1) + t(x-1) = \text{constant}$

④ $e^{-x} - (2e^{2x} + te^{-x})x' = 0 \Big| \cdot dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{e^{-x}}_{P(t,x)} dt \underbrace{- (2e^{2x} + te^{-x})}_{Q(t,x)} dx = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) = -e^{-x} \\ &\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = -0 - 1\, e^{-x} = -e^{-x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{sunt egale}, (EE) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\exists)\, F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\, F \in C^2$

$$(S)\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = -(2\cdot e^{2x} + t\cdot e^{-x}) \Big| \int dx = -\int 2e^{2x}dx - t\int e^{-x}dx \Rightarrow \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = e^{-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(t,x) = -e^{2x} + te^{-x} + b(t) \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = e^{-x} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = e^{-x} \\ &\frac{\partial F}{\partial t} = 0 + e^{-x} + b'(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow e^{-x} = e^{-x} + b'(t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow b(t) = k,\ k \in \mathbb{R},\ ct.$

$F(t,x) = -e^{2x} + t\cdot e^{-x} + k \Rightarrow t\cdot e^{-x} - e^{2x} = ct.$

Scanat cu CamScanner

⑦ Ecuații CLAIRAUT (EC) ⑧ Ecuații LAGRANGE (ELg)

- nu sunt în formă normală ($x' = f(t, x)$)
- se rezolvă prin metoda parametrului
- soluția e dată parametric

(EC) $x = tx' + \psi(x')$

(ELg) $x = t\underbrace{\varphi(x')}_{\neq x'} + \psi(x')$

- căutăm soluție în $x \in C^2$

① $x = tx' + \sqrt{1+(x')^2}$

② $x = tx' - 61x'$

③ $x = tx' + 3x'$

}(EC)

④ $x = \frac{1}{2}tx' + (x')^3$

⑤ $x = t(x')^2 - \frac{1}{x'}$

} ELg

① $x = tx' + \sqrt{1+(x')^2}$

$1 + (x')^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{\ }$ bine definit

Căutăm soluția $x \in C^2$ și derivez în t

$x' = (tx')' + \left(\sqrt{1+(x')^2}\right)'$

$x' = 1 \cdot x' + tx'' + \frac{1}{2\sqrt{1+(x')^2}} \cdot 2x'x''$

$x''\left(t + \frac{x'}{\sqrt{1+(x')^2}}\right) = 0$

I Dacă $x'' = 0 \,/ \int dt \Rightarrow x' = C$ constant $/ \int dt \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = \int C\,dt = C\int dt = Ct + D$, C, D constante

Ne întoarcem cu x în ecuația inițială:

$\cancel{Ct} + D = \cancel{tC} + \sqrt{1+C^2} \Rightarrow D = \sqrt{1+C^2}$

Scanat cu CamScanner

Deci $x(t) = bt + \sqrt{\underbrace{1+b^2}_{>0}}$, $b \in \mathbb{R}$ ct.

↳ Soluția generală a EC

II Dacă $t + \frac{x'}{\sqrt{1+(x')^2}} = 0 \xrightarrow[x'=p]{\text{notăm}} \begin{cases} t(p) = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ x(p) = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot p + \sqrt{1+p^2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x(p) = \frac{-p^2 + 1 + p^2}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \; p \in \mathbb{R} \text{ parametru} \\ t(p) = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \end{cases}$

↳ soluția singulară a (EC) în formă parametrică

$\left. \begin{array}{l} t^2 = \frac{p^2}{1+p^2} \\ x^2 = \frac{1}{1+p^2} \end{array} \right\} \Rightarrow t^2 + x^2 = 1$

↳ ecuația cercului cu centrul în $(0,0)$ și raza 1

② $x = tx' - \cos x'$

Căutăm soluții $x \in C^2$; derivăm ~~în~~ în t:

$x = tx' - \cos x'$

$x' = x' + tx'' + \sin x' \cdot x''$

$x''(t + \sin x') = 0$

I Dacă $x'' = 0 \,/\!/\!\int dt \Rightarrow x' = b \,/\!/\!\int dt \Rightarrow x(t) = bt + D$, b, D const.

$\cancel{bt} + D = \cancel{tb} - \cos b \Rightarrow D = -\cos b$

$x(t) = bt - \cos b$, $b \in \mathbb{R}$ const, $t \in \mathbb{R} \to$ soluția generală

II Dacă $t + \sin x' = 0$

Notăm $x' = p \Rightarrow \begin{cases} t(p) = -\sin p \\ x(p) = (-\sin p) \cdot p - \cos p \end{cases}$, $p \in \mathbb{R}$ parametru

↳ soluția singulară

③ $x = tx' + 3x'$

Căutăm $x \in C^2$, derivăm în t:

$x' = t' \cdot x' + t \cdot x'' + 3 \cdot x'' \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{x'} = \cancel{x'} + t x'' + 3x'' \Rightarrow x''(t+3) = 0$

I Dacă $x'' = 0 \,/\!/ \int dt \Rightarrow x' = \mathcal{C} \,/\!/ \int dt \Rightarrow x = \mathcal{C} t + \mathcal{D}$, $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ constante

$\cancel{\mathcal{C}t} + \mathcal{D} = \cancel{t\,\mathcal{C}} + 3 \cdot \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D} = 3 \cdot \mathcal{C}$

$x(t) = t \cdot \mathcal{C} + 3\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ constant, $t \in \mathbb{R}$

↳ soluție generală

II Dacă $t + 3 = 0 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow$ Nu există soluția singulară

④ $x = \frac{1}{2} t x' + (x')^3$

Căutăm soluția $x \in C^2$ și derivăm în t:

$x' = \frac{1}{2} x' + \frac{1}{2} t x'' + 3(x')^2 \cdot x'' \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} x' = \frac{1}{2} t x'' + 3(x')^2 \cdot x'' \,/\, \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = t x'' + 6(x')^2 x''$

Notăm $x' = p \Rightarrow x'' = (x')' = p'$

$p = t \cdot p' + 6p^2 \cdot p' \Rightarrow p'(t + 6p^2) = p \,/\, \frac{dt}{dp}$

I Dacă $p' = 0 \Rightarrow$ ecuația devine $0 = p \Rightarrow x' = 0 \,/\!/ \int dt \Rightarrow x(t) = \mathcal{C}$, constant

Înlocuim x în $(E_{Lg}) \Rightarrow \mathcal{C} = \frac{1}{2} t \cdot 0 + 0^3 \Rightarrow \mathcal{C} = 0$.

Deci $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, soluție a (E_{Lg})

II Dacă $p' \neq 0 \Rightarrow$ putem înmulți cu $\frac{1}{p'} = \frac{dt}{dp}$

$$p\frac{dt}{dp} = t + 6p^2 \Big/ : p \neq 0 \Rightarrow \frac{dt}{dp} = \underbrace{\frac{1}{p}}_{a(p)} t + \overbrace{6p}^{b(p)} \ (EL) \text{ în } t = t(p)$$

$$(FVC)\quad t(p) = t_0\, e^{\int_{p_0}^{p} a(s)ds} + \int_{p_0}^{p} e^{\int_s^p a(r)\,dr} \cdot b(s)ds$$

$$\int_{p_0}^{p} a(s)ds = \int_{p_0}^{p} \frac{1}{s}\, ds = \ln|s|\Big|_{p_0}^{p} = \ln|p| - \underbrace{\ln|p_0|}_{=0 \Rightarrow p_0 = 1}$$

Pp. că $p > 0 \Rightarrow p_0, s, r > 0 \Rightarrow t_0 = t(p_0) = t(1) =$ constant

$$t(p) = t_0\, e^{\ln p} + \int_1^p e^{\ln p - \ln s} \cdot 6s\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(p) = t_0 \cdot p + \int_1^p \frac{p}{\cancel{s}} \cdot 6\cancel{s}\, ds \Rightarrow t(p) = t_0 \cdot p + 6p\; s\Big|_1^p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(p) = t_0 \cdot p + 6p(p-1) = 6p^2 + t_0 \cdot p - 6p = 6p^2 + p\underbrace{(t_0 - 6)}_{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t(p) = 6p^2 + p \cdot b; \ b \in \mathbb{R} \text{ constant} \\ x(p) = \frac{1}{2}\cdot(6p^2 + pb)\cdot p + p^3 = 4p^3 + \frac{b}{2}p^2 \end{cases}, \ p \in (0, +\infty) \text{ parametru}, \ b \in \mathbb{R} \text{ constant}$$

⑤ $x = t(x')^2 - \frac{1}{x'}$

căutăm $x \in C^2$ și derivăm în t

$x' \neq 0 \overset{x' = p}{\Longleftrightarrow} p \neq 0$

$$x' = (x')^2 + 2t\,x' \cdot x'' + \frac{1}{(x')^2} \cdot x''$$

Notăm $x' = p \Rightarrow x'' = p'$

$$p = p^2 + 2t\,p \cdot p' + \frac{1}{p^2} \cdot p' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p' \left(2tp + \frac{1}{p^2}\right) = p - p^2 \Big/ \cdot \frac{dt}{dp}$$

I Dacă $p'=0 \Rightarrow 0=p-p^2 \Rightarrow 0=p(1-p)$
$p\neq 0$ $\Big\} \Rightarrow p=1 \Rightarrow x'=1 \Rightarrow x(t)=t+b$

$x(t)=t+b$
$t+b=t-1 \Rightarrow b=-1$ $\Big\} \Rightarrow x(t)=t-1$

↳ soluție

II Dacă $p'\neq 0$

$$2tp+\frac{1}{p^2}=(p-p^2)\frac{dt}{dp} \Big/ \cdot (p-p^2)\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dp}=\frac{2tp+\frac{1}{p^2}}{p-p^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dp}=\frac{2p}{p-p^2}\,t+\overbrace{\frac{1}{(p-p^2)p^2}}^{b(p)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dp}=\overbrace{\frac{2}{1-p}}^{a(p)}\,t+\overbrace{\frac{1}{p^3(1-p)}}^{b(p)}$$

(FVC)

$$\int_{p_0}^{p} a(s)\,ds=2\int_{p_0}^{p}\frac{1}{1-s}\,ds=-2\ln|1-s|\Big|_{p_0}^{p}=-2\ln\frac{1-p_0}{1-p}$$

$$|1-p_0|=1 \Leftrightarrow 1-p_0=1 \text{ sau } 1-p_0=-1 \Leftrightarrow p_0=0 \text{ sau } 2$$

La noi $p\neq 0,\ p\neq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow p\in\begin{cases}(-\infty,0)\\(0,1)\\(1;+\infty)\rightarrow p_0=2\end{cases}$$

$\Big\}$ nu-e continu pe $p_0\in\{0,2\}$

$$t(p)=t_0\, e^{-2\ln|1-p|+2\ln|1-p_0|}+\int_{p_0}^{p} e^{-2\ln|1-p|+2\ln|1-s|}\cdot\frac{1}{s^3(1-s)}\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(p)=t_0\cdot\left(\frac{1-p_0}{1-p}\right)^2+\int_{p_0}^{p} \cancel{e}^{\cancel{\ln}\frac{(1-s)^2}{(1-p)^2}}\cdot\frac{1}{s^3(1-s)}\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(p) = t_0 \frac{(1-p_0)^2}{(1-p)^2} + \frac{1}{(1-p)^2} \int_{p_0}^{p} \frac{1-s}{s^3}\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(p) = t_0 \left(\frac{1-p_0}{1-p}\right)^2 + \frac{1}{(1-p)^2} \int_{p_0}^{p} s^{-3} - s^{-2}\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(p) = t_0 \left(\frac{1-p_0}{1-p}\right)^2 + \frac{1}{1-p^2} \left(\frac{s^{-2}}{-2}\Big|_{p_0}^{p} - \frac{s^{-1}}{-1}\Big|_{p_0}^{p} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(p) = t_0 \left(\frac{1-p_0}{1-p}\right)^2 + \frac{1}{1-p^2} \left(-\frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2p_0^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_0} \right) \Rightarrow$$

$$t(p) = \frac{1}{(1-p)^2} \left(-\frac{1}{2p^2} + \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{(1-p)^2} \underbrace{\left[t_0 (1-p_0)^2 + \frac{1}{2p_0^2} - \frac{1}{p_0} \right]}_{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t(p) = \dfrac{1}{(1-p)^2} \left(-\dfrac{1}{2p^2} + \dfrac{1}{p} \right) + \dfrac{c}{(1-p^2)} \\ x(p) = \left[\dfrac{1}{(1-p)^2} \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2p^2} \right) + \dfrac{c}{1-p^2} \right] \cdot p^2 - \dfrac{1}{p} \end{cases} ; \; p \neq 0;\; p \neq 1,\; c \in \mathbb{R} \text{ constant.}$$