AIMO 2022 BH1 Geometrie: halbgare Ausarbeitung

Darij Grinberg

March 14, 2022

1 Zwei Dreiecke I

1.1 Ceva

Ein Dreieck ABC heißt *entartet*, wenn seine Ecken A, B und C auf einer Geraden liegen. Entartete Dreiecke werden meistens überhaupt nicht als Dreiecke angesehen; jedoch will man hin und wieder gewisse Eigenschaften von Dreiecken auf sie anwenden, und dies ist manchmal zulässig und manchmal nicht. Wir werden also im Folgenden zumindest bei allen Sätzen explizit darauf hinweisen, ob unsere Dreiecke entartet sein dürfen oder nicht.

Der folgende Satz ist wohlbekannt:

Satz 1.1 (Satz von Ceva)**.** Sei ABC ein nicht-entartetes Dreieck. Seien A', B' und C' drei Punkte jeweils auf den Geraden BC, CA bzw. AB. Genau dann schneiden sich die Geraden AA', BB' und CC' in einem Punkt, wenn

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

gilt. (Siehe Fig. 1.)

Wichtige Anmerkungen zu diesem Satz:

- Die Strecken sind hier und auch im Folgenden orientiert – d.h., wir wählen auf jeder der Geraden BC, CA und AB eine Richtung (egal wie), und messen eine Strecke XY positiv wenn Y hinter X in dieser Richtung liegt und sonst negativ.

- Mit "schneiden sich in einem Punkt" meine ich "schneiden sich in einem Punkt oder sind parallel". Das heißt, ich arbeite in der projektiven Ebene. Wenn also mehrere Geraden zueinander parallel sind, dann

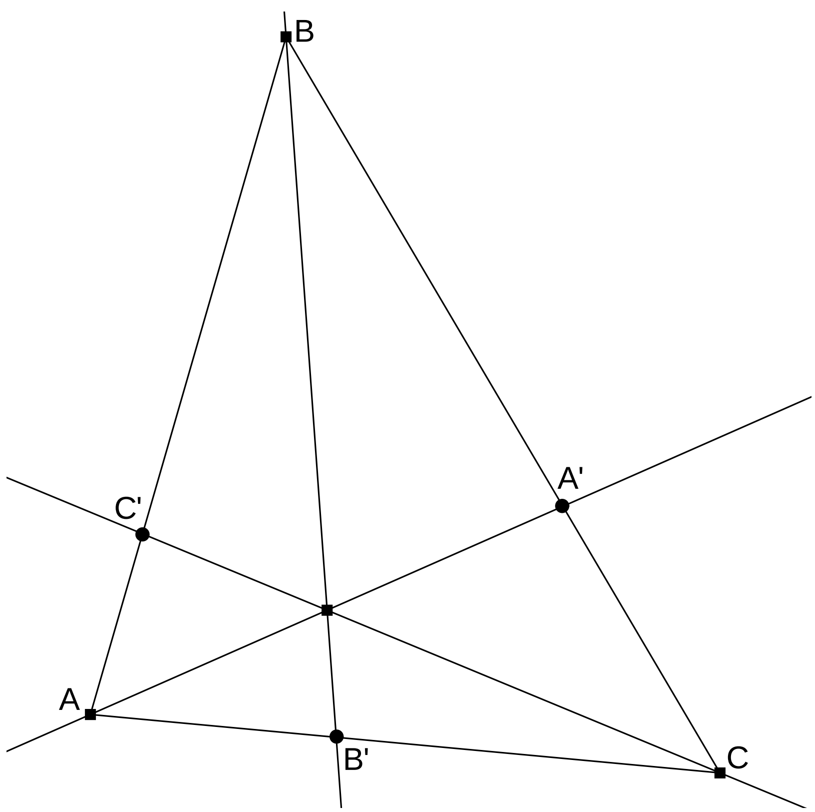

Fig. 1: Ein Dreieck mit drei konkurrenten Ecktransversalen

schneiden sie sich in einem unendlich fernen Punkt. Wenn man im Satz von Ceva wissen will, ob sie parallel sind oder nicht, hilft der Strahlensatz:

- In entarteten Fällen der Sorte $A' = B$ bleibt der Satz richtig (0 und ∞ sind beide nicht 1). Im besonders entarteten Fall $A' = B' = C$ wird er sinnlos ($0 \cdot \infty$). Im Fall, wenn die Punkte A, B und C auf einer Geraden liegen, ist er leider falsch – die Geraden sind immer parallel, aber das Verhältnisprodukt muss nicht 1 sein. Daher "nicht-entartetes Dreieck".

- Ein paar gebräuchliche aber völlig optionale Notationen: Geraden wie AA', BB' und CC' in Satz 1.1 heißen *Ecktransversalen* ("cevians" im Englischen); das Dreieck $A'B'C'$ heißt das *Cevadreieck* des Schnittpunktes von AA', BB' und CC' (falls dieser Schnittpunkt existiert); drei Geraden, die sich in einem Punkt schneiden (oder parallel sind), heißen *kopunktal* oder *konpunktal* oder *konkurrent*.

Beweisidee zu Satz 1.1: Für die $\Longrightarrow$-Richtung kann man eine Parallele zu BC durch A zeichnen und alle Streckenverhältnisse auf sie projizieren (mithilfe des Strahlensatzes). Den Fall $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ sollte man eigentlich separat betrachten, oder als Grenzfall (indem man den Schnittpunkt von AA', BB' und CC' immer weiter vom Dreieck ABC wegschiebt). Die Umkehrung erhält man durch Eindeutigkeit (das Verhältnis $\dfrac{BA'}{A'C}$ bestimmt die Lage des Punktes A' auf der Geraden BC eindeutig). Details gibt es in den meisten Geometriebüchern.

Anwendungen von Ceva gibt es zuhauf (ich werde evtl. später was dazu posten). Hier sind ein paar:

Aufgabe 1 (Paul Yiu)**.** Sei ABC ein nicht-entartetes Dreieck. Sei P ein Punkt. Die Innenwinkelhalbierenden der Winkel BPC, CPA und APB schneiden die Strecken BC, CA bzw. AB jeweils in X, Y bzw. Z. Man beweise: Die Geraden AX, BY und CZ schneiden sich in einem Punkt. (Siehe Fig. 2.)

Lösung (Florian): Wir erinnern uns an den Satz, dass eine Winkelhalbierende im Dreieck die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt[1]. Also ist

$$\frac{BX}{XC} = \frac{BP}{CP}, \qquad \frac{CY}{YA} = \frac{CP}{AP}, \qquad \text{und} \qquad \frac{AZ}{ZB} = \frac{AP}{BP}.$$

[1] Ausführlich formuliert behauptet dieser Satz folgendes: Wenn die Innenwinkelhalbierende des Winkels CAB eines Dreiecks ABC die Seite BC im Punkt D schneidet, dann gilt $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AC}$.

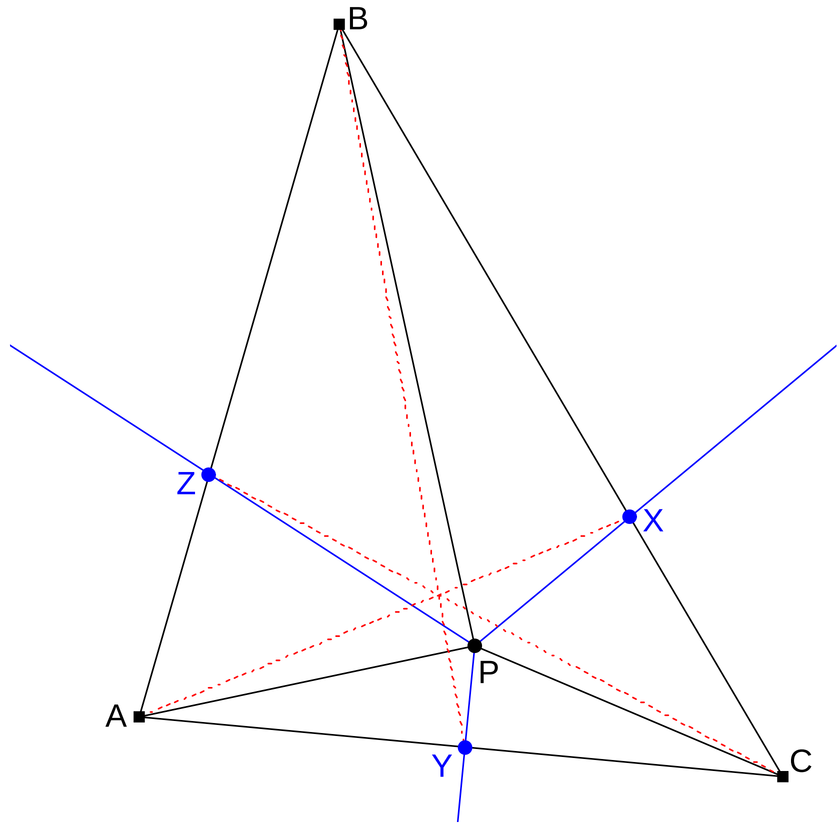

Fig. 2: Paul Yius Innenwinkelhalbierenden

Multiplikation dieser drei Gleichungen ergibt

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CP}{AP} \cdot \frac{AP}{BP} = 1.$$

Nach Ceva schneiden sich also AX, BY und CZ in einem Punkt.

Aufgabe 2 (isotomische Punkte)**.** Sei ABC ein nicht-entartetes Dreieck. Sei P ein Punkt. Seien A', B' und C' die Schnittpunkte der Geraden AP, BP bzw. CP mit den Geraden BC, CA bzw. AB. Seien A'', B'' und C'' die Spiegelbilder der Punkte A', B' bzw. C' an den Mittelpunkten der Strecken BC, CA bzw. AB. Man zeige: Die Geraden AA'', BB'' und CC'' schneiden sich in einem Punkt.

Letzterer Punkt heißt der zu P *isotomische* (oder *isotomisch konjugierte*) Punkt bezüglich des Dreiecks ABC. (Siehe Fig. 3.)

Lösung: Nach Definition von A'' ist $BA'' = A'C$ und $A''C = BA'$, also

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{A'C}{BA'}.$$

Analog kann man erhalten:

$$\frac{CB''}{B''A} = \frac{B'A}{CB'};$$
$$\frac{AC''}{C''B} = \frac{C'B}{AC'}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\frac{BA''}{A''C} \cdot \frac{CB''}{B''A} \cdot \frac{AC''}{C''B} &= \frac{A'C}{BA'} \cdot \frac{B'A}{CB'} \cdot \frac{C'B}{AC'} \\ &= 1 \Big/ \underbrace{\left(\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B}\right)}_{=1 \text{ (nach Ceva)}} \\ &= 1/1 = 1.\end{aligned}$$

Nach Ceva folgt die Behauptung.

Aufgabe 3 (Satz von Reuschle-Terquem; isozyklische Punkte)**.** Sei ABC ein nicht-entartetes Dreieck. Sei P ein Punkt. Seien A', B' und C' die Schnittpunkte der Geraden AP, BP bzw. CP mit den Geraden BC, CA bzw. AB. Seien A'', B'' und C'' die zweiten Schnittpunkte des Umkreises des Dreiecks $A'B'C'$ mit den Geraden BC, CA bzw. AB. (Mit "zweite Schnittpunkte" meine ich die jeweils von A', B' bzw. C' verschiedenen Schnittpunkte. Wenn der Kreis die Gerade BC berührt, sind allerdings die zwei Schnittpunkte als gleich zu verstehen.)

Man zeige: Die Geraden AA'', BB'' und CC'' schneiden sich in einem Punkt.

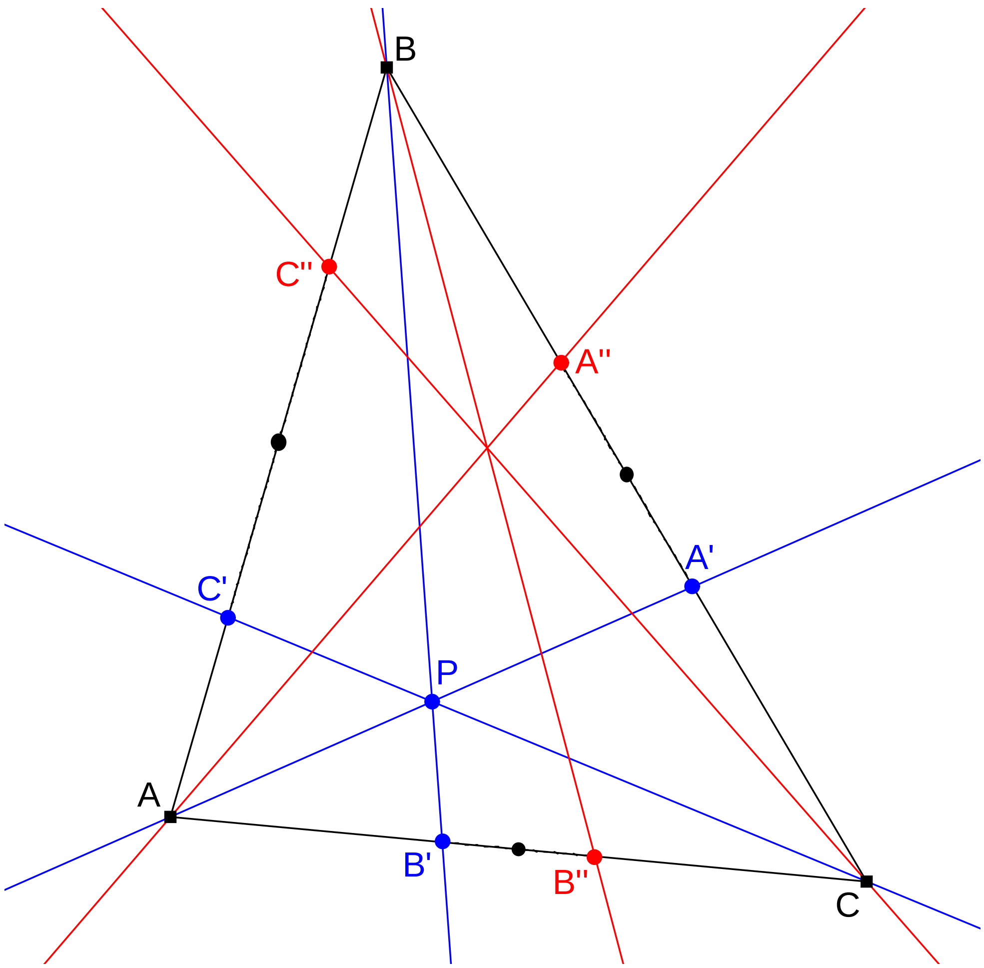

Fig. 3: Isotomische Punkte

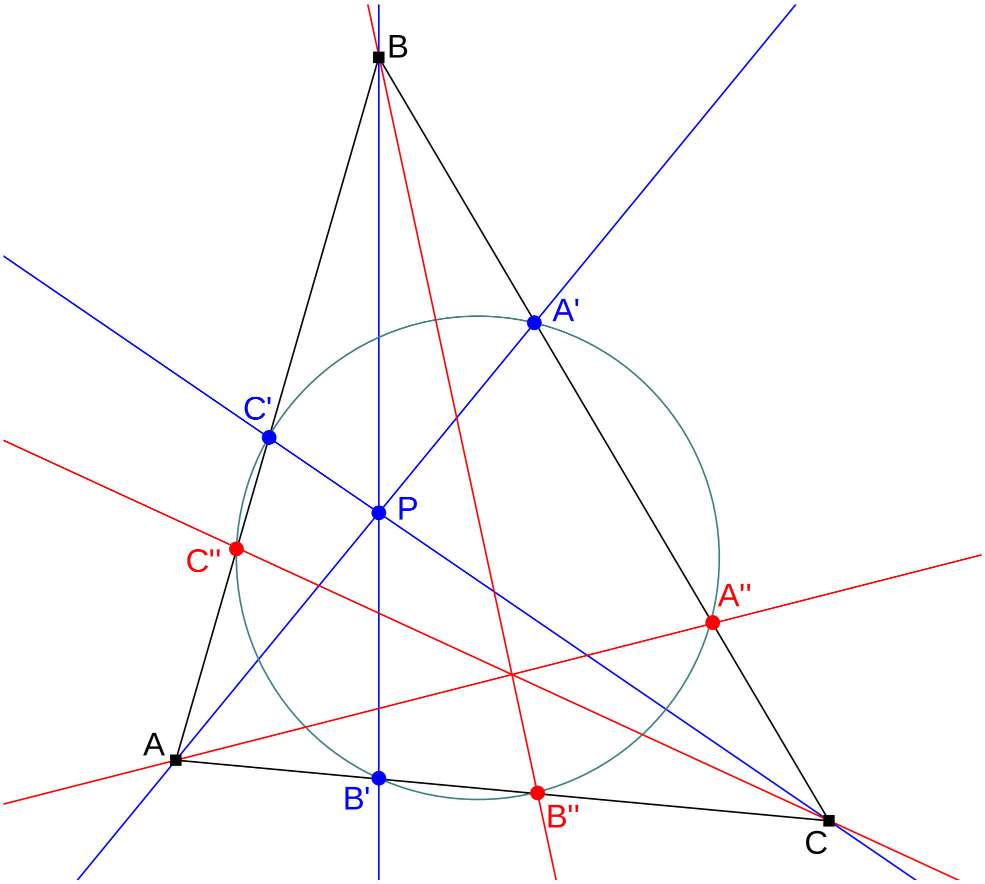

Fig. 4: Isoyzklische Punkte

Letzterer Punkt heißt der zu P *isozyklisch konjugierte* (oder kurz *isozyklische*) Punkt bezüglich des Dreiecks ABC. Im Englischen heißt er "cyclocevian conjugate of P". (Siehe Fig. 4.)

Lösung (Richard): Die Punkte B', B'', C' und C'' liegen auf einem Kreis. Nach dem Sekantensatz gilt also

$$AC' \cdot AC'' = AB' \cdot AB'' = B'A \cdot B''A,$$

wobei die Strecken gerichtet sind. Analog gilt

$$BA' \cdot BA'' = C'B \cdot C''B;$$
$$CB' \cdot CB'' = A'C \cdot A''C.$$

Hieraus folgt schnell

$$\begin{aligned}&\left(\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}\right)\cdot\left(\frac{BA''}{A''C}\cdot\frac{CB''}{B''A}\cdot\frac{AC''}{C''B}\right)\\&=\underbrace{\frac{AC'\cdot AC''}{B'A\cdot B''A}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{BA'\cdot BA''}{C'B\cdot C''B}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{CB'\cdot CB''}{A'C\cdot A''C}}_{=1}\\&=1.\end{aligned}$$

Da $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$ ist (nach Ceva), folgt hieraus, dass auch $\frac{BA''}{A''C}\cdot\frac{CB''}{B''A}\cdot\frac{AC''}{C''B}=1$ ist. Nach Ceva folgt die Behauptung.

1.2 Menelaos

Ein Gegenstück zum Satz von Ceva ist der Satz von Menelaos:

Satz 1.2 (Satz von Menelaos)**.** Sei ABC ein nicht-entartetes Dreieck. Seien A', B' und C' drei Punkte jeweils auf den Geraden BC, CA bzw. AB. Genau dann liegen die Punkte A', B' und C' auf einer Geraden, wenn

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=-1$$

gilt. (Siehe Fig. 5.)

Aufgabe 4 (Paul Yiu)**.** Sei ABC ein nicht-entartetes Dreieck. Sei P ein Punkt. Die **Außen**winkelhalbierenden der Winkel BPC, CPA und APB schneiden die Geraden BC, CA bzw. AB jeweils in X, Y bzw. Z. Man zeige: Die Punkte X, Y und Z liegen auf einer Geraden.

Lösung: Eine ähnliche Aufgabe haben wir bereits für die Innenwinkelhalbierenden gelöst (Aufgabe 1), aber jetzt müssen wir natürlich Menelaos statt Ceva anwenden.

Für die Außenwinkelhalbierende gilt das gleiche Abstandsverhältnis wie für die Innenwinkelhalbierende, nur mit einem Minuszeichen. Also gilt $\frac{BX}{XC}=-\frac{BP}{PC}$ und so weiter. Folglich ist

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\left(-\frac{BP}{CP}\right)\cdot\left(-\frac{CP}{AP}\right)\cdot\left(-\frac{AP}{BP}\right)=-1,$$

und man kann Menelaos anwenden.

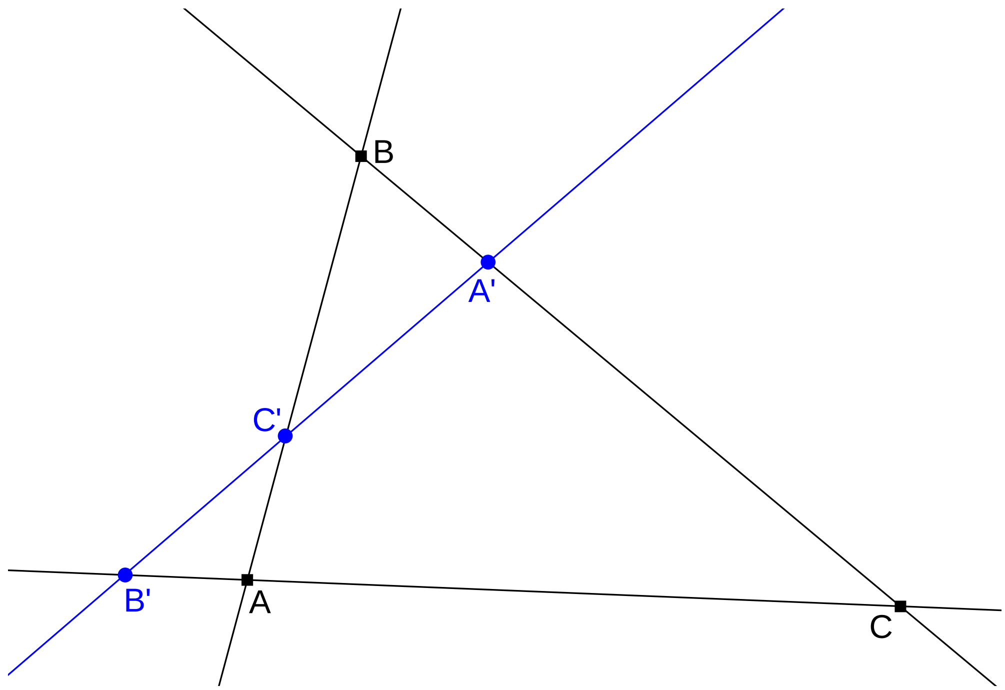

Fig. 5: Satz von Menelaos

Aufgabe 5. **(a)** Zeige ein Analogon zum Satz vom isotomischen Punkt (Aufgabe 2), bei dem Menelaos statt Ceva verwendet wird.

(b) Warum gibt es kein solches zum Satz vom isozyklischen Punkt?

Lösung (Christian): **(a)** Hier ist die analoge Aufgabe: Eine Gerade schneide die Seitengeraden BC, CA und AB eines Dreiecks ABC in den Punkten A', B' bzw. C'. Seien A'', B'' und C'' die Spiegelbilder der Punkte A', B' bzw. C' an den Mittelpunkten der Strecken BC, CA bzw. AB. Man zeige: Die Punkte A'', B'' und C'' liegen auf einer Geraden.

Der Beweis hiervon ist fast derselbe wie für Aufgabe 2, verwendet aber Menelaos statt Ceva.

(b) Der Umkreis eines entarteten Dreiecks $A'B'C'$ ist undefiniert oder eine Gerade; damit bekommt man hier kein sinnvolles Resultat.

Im Folgenden bezeichnet $g \cap h$ den Schnittpunkt zweier Geraden g und h.

Aufgabe 6 (Satz von Pascal)**.** Seien A, B, C, D, E und F sechs Punkte auf einem Kreis. Man zeige: Die Schnittpunkte

$$AB \cap DE, \qquad BC \cap EF \qquad \text{und} \qquad CD \cap FA$$

liegen auf einer Geraden. (Siehe Fig. 6.)

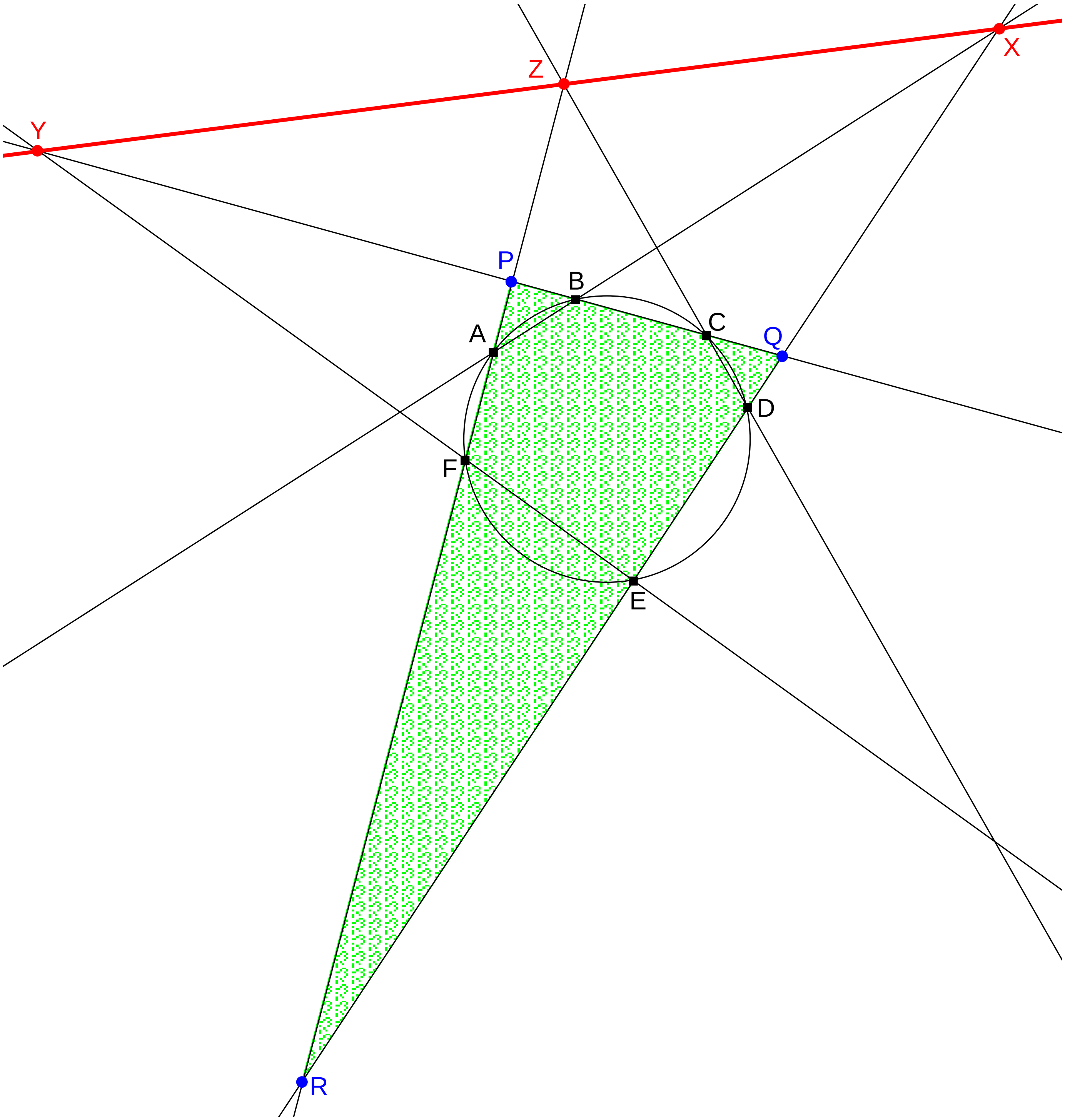

Fig. 6: Satz von Pascal

Lösung: Seien $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$ und $Z = CD \cap FA$. Seien ferner $P = FA \cap BC$ und $Q = BC \cap DE$ und $R = DE \cap FA$. Wir wollen nun Menelaos im Dreieck PQR anwenden (auf dessen Seiten QR, RP und PQ jeweils die Punkte X, Z bzw. Y liegen). Wir müssen dazu zeigen:

$$\frac{QX}{XR} \cdot \frac{RZ}{ZP} \cdot \frac{PY}{YQ} = -1.$$

Doch Menelaos, angewandt auf das Dreieck PQR und die Gerade CZD, ergibt

$$\frac{RZ}{ZP} \cdot \frac{PC}{CQ} \cdot \frac{QD}{DR} = -1, \qquad \text{also}$$
$$\frac{RZ}{ZP} = -1 \Big/ \left(\frac{PC}{CQ} \cdot \frac{QD}{DR} \right) = -\frac{DR}{QD} \cdot \frac{CQ}{PC}.$$

Analog ist

$$\frac{PY}{YQ} = -\frac{FP}{RF} \cdot \frac{ER}{QE} \qquad \text{und}$$
$$\frac{QX}{XR} = -\frac{BQ}{PB} \cdot \frac{AP}{RA}.$$

Multiplikation dieser drei Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} &\frac{QX}{XR} \cdot \frac{RZ}{ZP} \cdot \frac{PY}{YQ} \\ &= \left(-\frac{DR}{QD} \cdot \frac{CQ}{PC} \right) \cdot \left(-\frac{FP}{RF} \cdot \frac{ER}{QE} \right) \cdot \left(-\frac{BQ}{PB} \cdot \frac{AP}{RA} \right) \\ &= -\frac{AP \cdot FP}{PC \cdot PB} \cdot \frac{DR \cdot ER}{RA \cdot RF} \cdot \frac{CQ \cdot BQ}{QE \cdot QD} = -1, \end{aligned}$$

weil nach dem Sekantensatz jeder der Brüche gleich 1 ist. Nach Menelaos folgt hieraus die Behauptung.

Aufgabe 7 (Satz von Gauss)**.** Sei ABC ein Dreieck. Seien A', B' und C' drei Punkte jeweils auf den Geraden BC, CA bzw. AB, die auf einer Geraden liegen. Man zeige: Die Mittelpunkte der Strecken AA', BB' und CC' liegen ebenfalls auf einer Geraden. (Siehe Fig. 7.)

Lösung: (Siehe Fig. 8.) Seien M_a, M_b und M_c die Mittelpunkte der Seiten BC, CA bzw. AB. Dann ist $XM_c \parallel BA'$ (als Mittelparallele im Dreieck ABA') und $XM_b \parallel CA'$ (analog). Dies bedeutet, dass beide Geraden XM_c und XM_b zu BC parallel sind. Also fallen diese beiden Geraden zusammen. Der Punkt X liegt daher auf der Geraden M_bM_c. Analog liegen die Punkte

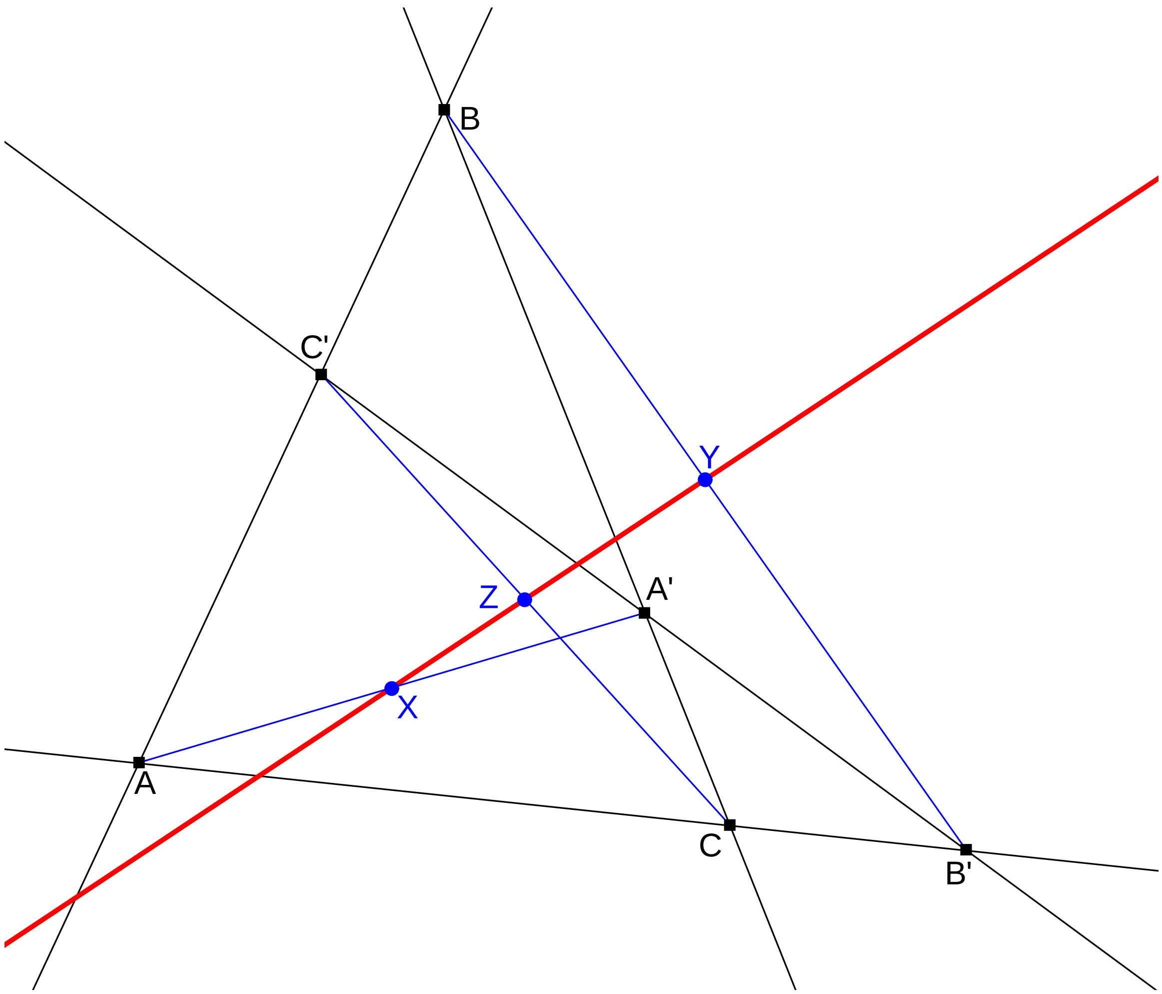

Fig. 7: Satz von Gauss

Y und Z auf den Geraden M_cM_a bzw. M_aM_b. Ferner ist $M_bM_c \parallel BC$ (denn $XM_c \parallel BA'$), und nach dem Strahlensatz ist somit

$$\frac{M_bX}{XM_c} = \frac{CA'}{A'B}.$$

Analog finden wir

$$\frac{M_cY}{YM_a} = \frac{AB'}{B'C} \qquad \text{und} \qquad \frac{M_aZ}{ZM_b} = \frac{BC'}{C'A}.$$

Multiplikation dieser drei Gleichungen ergibt

$$\frac{M_bX}{XM_c} \cdot \frac{M_cY}{YM_a} \cdot \frac{M_aZ}{ZM_b} = \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{BC'}{C'A} = -1$$

nach Menelaos (weil A', B' und C' auf einer Geraden liegen). Nach Menelaos (für Dreieck $M_aM_bM_c$) liegen also X, Y und Z auf einer Geraden (denn X, Y und Z liegen auf den Geraden M_bM_c, M_cM_a bzw. M_aM_b). Damit ist die Aufgabe gelöst.

Aufgabe 8 (Satz von Desargues)**.** Seien ABC und $A'B'C'$ zwei nicht-entartete Dreiecke. Man zeige: Die Geraden AA', BB' und CC' schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn die Punkte

$$BC \cap B'C', \qquad CA \cap C'A' \qquad \text{und} \qquad AB \cap A'B'$$

auf einer Geraden liegen. (Hierbei wird angenommen, dass die Situation nicht "zu stark ausgeartet ist" – so dürfen die Punkte A und A' beispielsweise nicht zusammenfallen.) (Siehe Fig. 9.)

Lösung (Boldizsar): Seien

$$X = BC \cap B'C', \qquad Y = CA \cap C'A' \qquad \text{und} \qquad Z = AB \cap A'B'.$$

Wir müssen also folgendes zeigen: Die Geraden AA', BB' und CC' schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn die Punkte X, Y und Z auf einer Geraden liegen.

Von dieser Behauptung beweisen wir die "$\Longrightarrow$"-Implikation und die "$\Longleftarrow$"-Implikation separat:

$\Longrightarrow$: Angenommen, die Geraden AA', BB' und CC' schneiden sich in einem Punkt. Wir nennen diesen Punkt P.

Menelaos im Dreieck BPC für die Gerade $B'C'X$ ergibt

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CC'}{C'P} \cdot \frac{PB'}{B'B} = -1,$$

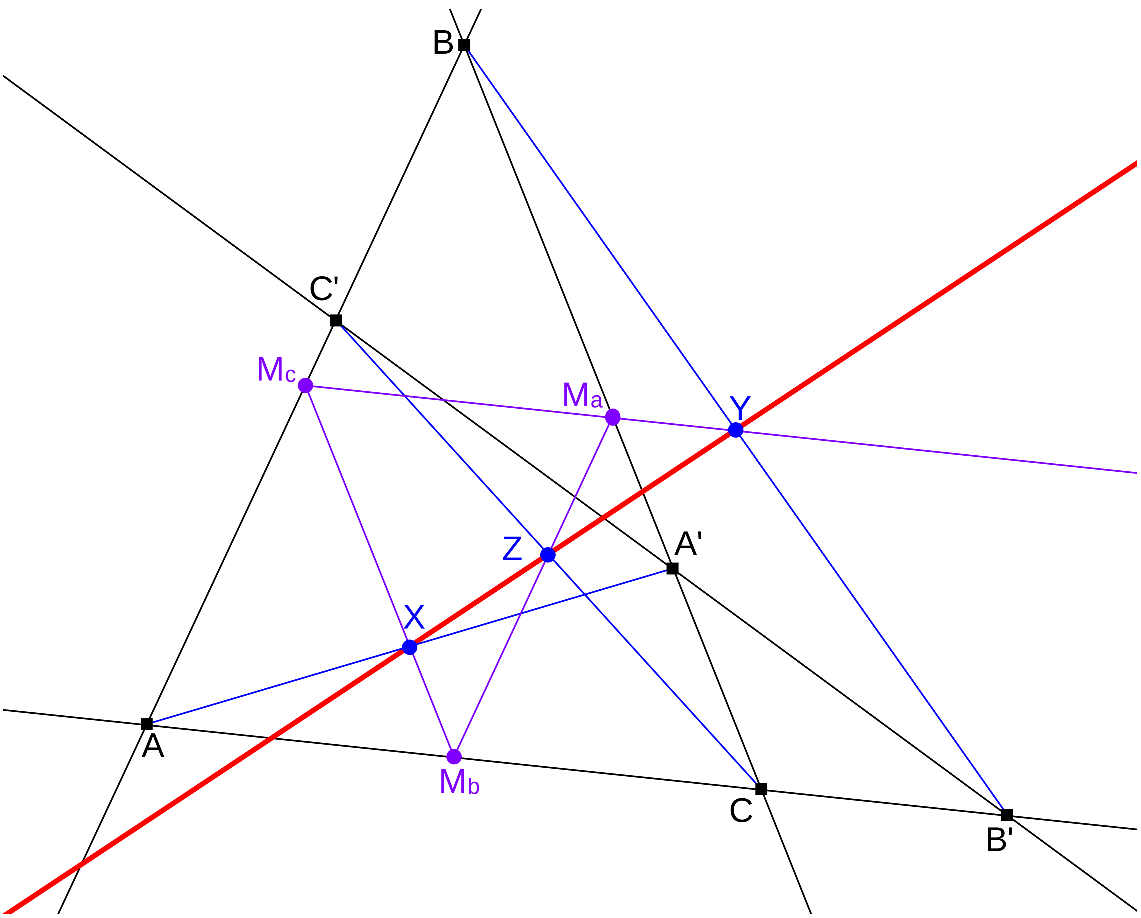

Fig. 8: Beweis des Satzes von Gauss

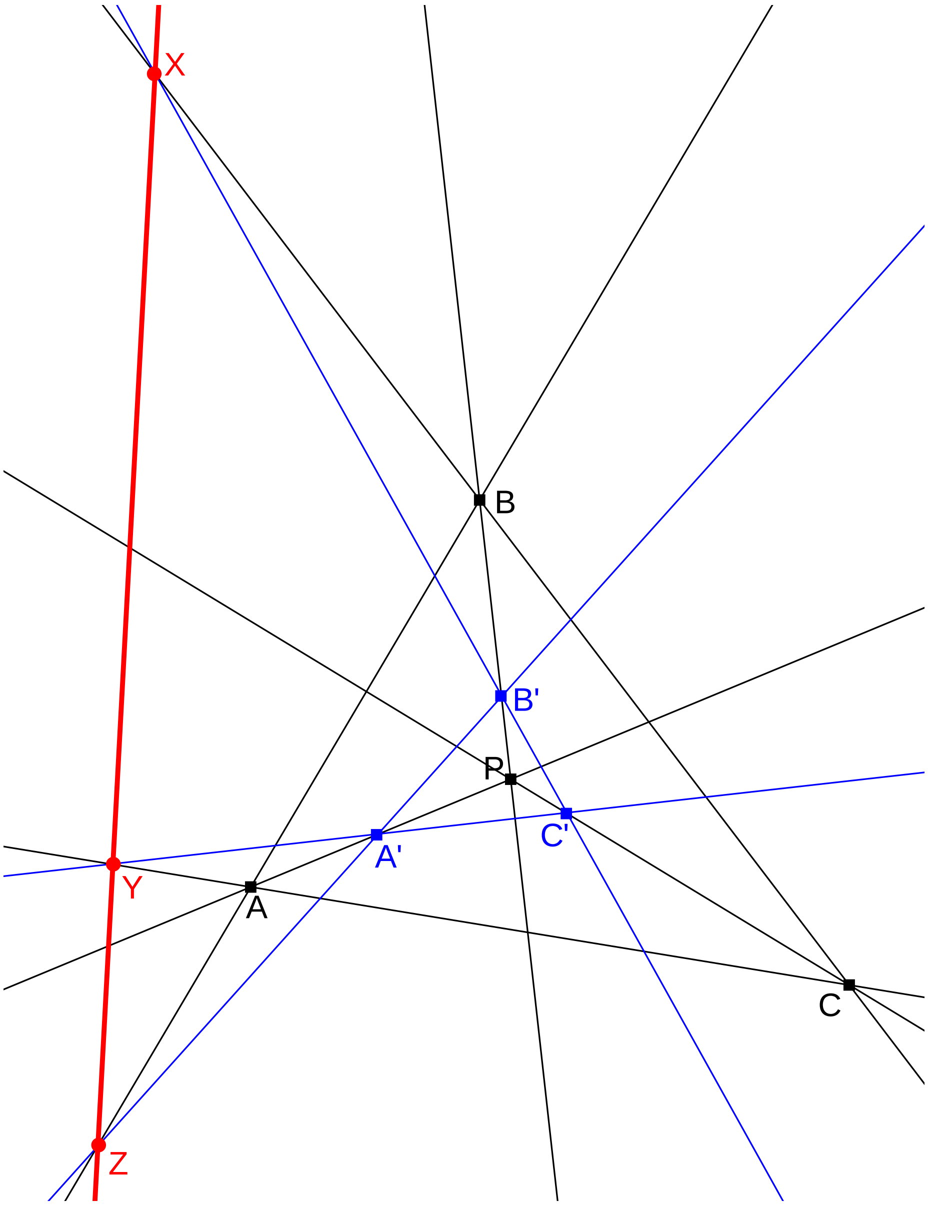

Fig. 9: Satz von Desargues

also

$$\frac{BX}{XC} = -\frac{B'B}{PB'} \cdot \frac{C'P}{CC'} = -\frac{BB'}{B'P} \Big/ \frac{CC'}{C'P}.$$

Durch zyklisches Vertauschen der Ecken A, B und C (und dementsprechend auch der Ecken A', B' und C' sowie der Punkte X, Y bzw. Z) erhält man aus dieser Gleichung die zwei analogen Gleichungen

$$\frac{CY}{YA} = -\frac{CC'}{C'P} \Big/ \frac{AA'}{A'P} \qquad \text{und}$$
$$\frac{AZ}{ZB} = -\frac{AA'}{A'P} \Big/ \frac{BB'}{B'P}.$$

Multiplikation all dieser drei Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}
&\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} \\
&= \left(-\frac{BB'}{B'P} \Big/ \frac{CC'}{C'P}\right) \cdot \left(-\frac{CC'}{C'P} \Big/ \frac{AA'}{A'P}\right) \cdot \left(-\frac{AA'}{A'P} \Big/ \frac{BB'}{B'P}\right) = -1
\end{aligned}$$

(Teleskopprodukt). Nach Menelaos folgt hieraus, dass X, Y und Z auf einer Geraden liegen. Damit ist die "$\Longrightarrow$"-Richtung bewiesen.

$\Longleftarrow$: Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die vielleicht eleganteste ist folgende: Angenommen, die Punkte X, Y und Z liegen auf einer Geraden. Die Geraden BC, $B'C'$ und ZY schneiden sich somit in einem Punkt (nämlich im Punkt X). Somit können wir die "$\Longrightarrow$"-Richtung unserer Aufgabe auf die Dreiecke $BB'Z$ und $CC'Y$ anstelle von den Dreiecken ABC bzw. $A'B'C'$ anwenden. Wir erhalten dadurch, dass die Punkte

$$B'Z \cap C'Y, \qquad ZB \cap YC \qquad \text{und} \qquad BB' \cap CC'$$

auf einer Geraden liegen. Doch diese drei Punkte sind A', A und $BB' \cap CC'$. Somit liegen die Punkte A', A und $BB' \cap CC'$ auf einer Geraden. Mit anderen Worten: Der Punkt $BB' \cap CC'$ liegt auf der Geraden AA'. Das heißt, die Geraden AA', BB' und CC' schneiden sich in einem Punkt. Damit ist auch die "$\Longleftarrow$"-Richtung bewiesen.

1.3 Trig-Ceva

Folgende Variante des Satzes von Ceva erlaubt uns, die Konkurrenz von Ecktransversalen zu zeigen, ohne ihre Schnittpunkte mit den Seiten zu kennen.

Satz 1.3 (Trigonometrische Version des Satzes von Ceva, oder kurz Satz von Trig-Ceva)**.** Sei ABC ein nicht-entartetes Dreieck, und seien X, Y und

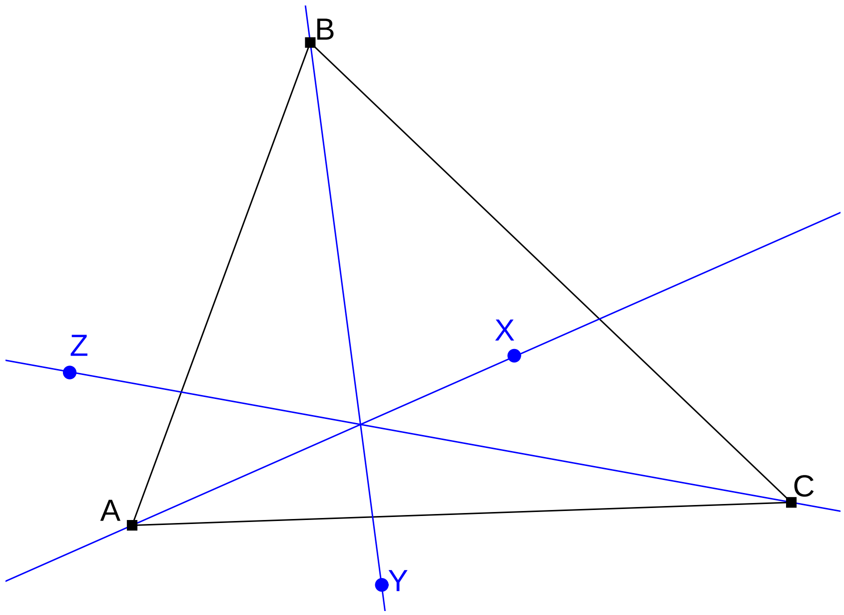

Fig. 10: Satz von Trig-Ceva

Z drei Punkte in seiner Ebene mit $X \neq A$ und $Y \neq B$ und $Z \neq C$. Genau dann schneiden sich die Geraden AX, BY und CZ in einem Punkt, wenn

$$\frac{\sin \measuredangle BAX}{\sin \measuredangle XAC} \cdot \frac{\sin \measuredangle CBY}{\sin \measuredangle YBA} \cdot \frac{\sin \measuredangle ACZ}{\sin \measuredangle ZCB} = 1$$

gilt. Hierbei sind die Winkel orientiert (und können gerne modulo 360° verstanden werden). (Siehe Fig. 10.)

Beweis: Man kann Trig-Ceva aus Ceva herleiten. Aber es geht noch einfacher: Für jeden Punkt P und jede Gerade g bezeichnen wir mit $d(P;\ g)$ den orientierten Abstand von P zur Geraden g. Dabei heißt "orientiert", dass wir zu jeder Geraden eine Halbebene wählen, in der dieser Abstand positiv sein soll, während er in der gegenüberliegenden Halbebene negativ sein soll. Dabei wählen wir die Halbebenen für die Geraden BC, CA und AB so, dass die Punkte A, B bzw. C jeweils in den positiven Halbebenen liegen (d.h., dass die orientierten Abstände $d(A;\ BC)$, $d(B;\ CA)$ und $d(C;\ AB)$ positiv sind).

Wir sehen nun leicht ein, dass $\dfrac{\sin \measuredangle BAQ}{\sin \measuredangle QAC} = \dfrac{d(Q;\ CA)}{d(Q;\ AB)}$ für jeden Punkt Q gilt (siehe Fig. 11). Nehmen wir nun an, dass die Geraden AX, BY und CZ

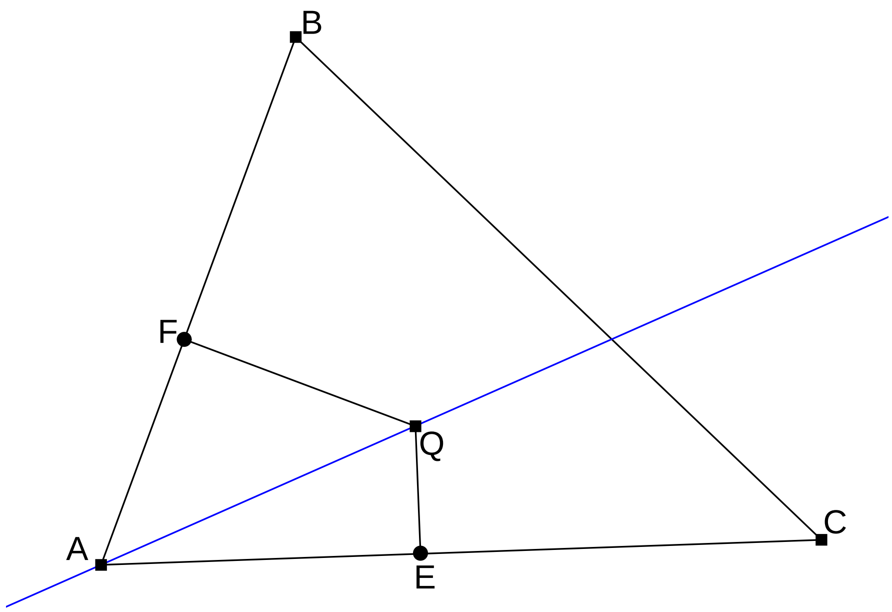

Fig. 11: Beweis des Satzes von Trig-Ceva

sich in einem Punkt Q schneiden. Dann ist

$$\frac{\sin\measuredangle BAX}{\sin\measuredangle XAC} = \frac{\sin\measuredangle BAQ}{\sin\measuredangle QAC} = \frac{d\,(Q;\ AB)}{d\,(Q;\ CA)} \qquad \text{und}$$
$$\frac{\sin\measuredangle CBY}{\sin\measuredangle YBA} = \frac{\sin\measuredangle CBQ}{\sin\measuredangle QBA} = \frac{d\,(Q;\ BC)}{d\,(Q;\ AB)} \qquad \text{und}$$
$$\frac{\sin\measuredangle ACZ}{\sin\measuredangle ZCB} = \frac{\sin\measuredangle ACQ}{\sin\measuredangle QCB} = \frac{d\,(Q;\ CA)}{d\,(Q;\ BC)}.$$

Multiplikation dieser drei Gleichungen ergibt

$$\frac{\sin\measuredangle BAX}{\sin\measuredangle XAC}\cdot\frac{\sin\measuredangle CBY}{\sin\measuredangle YBA}\cdot\frac{\sin\measuredangle ACZ}{\sin\measuredangle ZCB} = \frac{d\,(Q;\ AB)}{d\,(Q;\ CA)}\cdot\frac{d\,(Q;\ BC)}{d\,(Q;\ AB)}\cdot\frac{d\,(Q;\ CA)}{d\,(Q;\ BC)} = 1.$$

Damit ist eine Richtung von Trig-Ceva bewiesen. Die andere folgt leicht durch einen Umkehrschluss, bei dem folgendes verwendet wird: Zwei Punkte Q und Q' liegen genau dann auf einer Geraden mit A, wenn $\frac{d\,(Q;\ AB)}{d\,(Q;\ CA)} = \frac{d\,(Q';\ AB)}{d\,(Q';\ CA)}$ gilt (warum?).

Satz 1.4. Sei ABC ein Dreieck. Auf seinen Seiten BC, CA und AB werden

Dreiecke BXC, CYA bzw. AZB derart aufgesetzt, dass

$$\begin{aligned} \measuredangle ZAB &= \measuredangle CAY \neq 0^\circ, \\ \measuredangle XBC &= \measuredangle ABZ \neq 0^\circ \qquad \text{und} \\ \measuredangle YCA &= \measuredangle BCX \neq 0^\circ \end{aligned}$$

(mit orientierten Winkeln) gilt. Dann schneiden sich die Geraden AX, BY und CZ in einem Punkt. (Siehe Fig. 12.)

Man beachte, dass die "$\neq 0^\circ$"-Bedingungen in Satz 1.4 wichtig sind. Wären zum Beispiel die sechs Winkel $\measuredangle ZAB$, $\measuredangle CAY$, $\measuredangle XBC$ usw. alle gleich 0°, dann wären X, Y und Z einfach irgendwelche Punkte auf den Geraden BC, CA bzw. AB (ihre genauere Lage auf diesen Geraden wäre durch die Winkel nicht bestimmt), und die Behauptung von Satz 1.4 würde meistens nicht gelten.

Beweis von Satz 1.4: Seien $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$ und $\gamma = \measuredangle BCA$. Seien

$$x = \measuredangle ZAB = \measuredangle CAY, \qquad y = \measuredangle XBC = \measuredangle ABZ \qquad \text{und} \qquad z = \measuredangle YCA = \measuredangle BCX.$$

Aus Trig-Ceva folgt

$$\frac{\sin \measuredangle BAX}{\sin \measuredangle XAC} \cdot \frac{\sin \measuredangle CBX}{\sin \measuredangle XBA} \cdot \frac{\sin \measuredangle ACX}{\sin \measuredangle XCB} = 1,$$

da sich die Geraden AX, BX und CX in einem Punkt schneiden. Auflösen nach $\dfrac{\sin \measuredangle BAX}{\sin \measuredangle XAC}$ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\sin \measuredangle BAX}{\sin \measuredangle XAC} &= 1 \Big/ \left(\frac{\sin \measuredangle CBX}{\sin \measuredangle XBA} \cdot \frac{\sin \measuredangle ACX}{\sin \measuredangle XCB} \right) \\ &= 1 \Big/ \left(\frac{-\sin y}{\sin (y+\beta)} \cdot \frac{\sin (z+\gamma)}{-\sin z} \right) \\ &= \frac{\sin (y+\beta)}{\sin y} \Big/ \frac{\sin (z+\gamma)}{\sin z}. \end{aligned}$$

Analoge Gleichungen lassen sich für $\dfrac{\sin \measuredangle CBY}{\sin \measuredangle YBA}$ und $\dfrac{\sin \measuredangle ACZ}{\sin \measuredangle ZCB}$ aufstellen. Multiplikation dieser drei Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} &\frac{\sin \measuredangle BAX}{\sin \measuredangle XAC} \cdot \frac{\sin \measuredangle CBX}{\sin \measuredangle XBA} \cdot \frac{\sin \measuredangle ACX}{\sin \measuredangle XCB} \\ &= \left(\frac{\sin (y+\beta)}{\sin y} \Big/ \frac{\sin (z+\gamma)}{\sin z} \right) \cdot \left(\frac{\sin (z+\gamma)}{\sin z} \Big/ \frac{\sin (x+\alpha)}{\sin x} \right) \\ &\qquad \cdot \left(\frac{\sin (x+\alpha)}{\sin x} \Big/ \frac{\sin (y+\beta)}{\sin y} \right) \\ &= 1 \qquad \text{(weil Teleskopprodukt)}. \end{aligned}$$

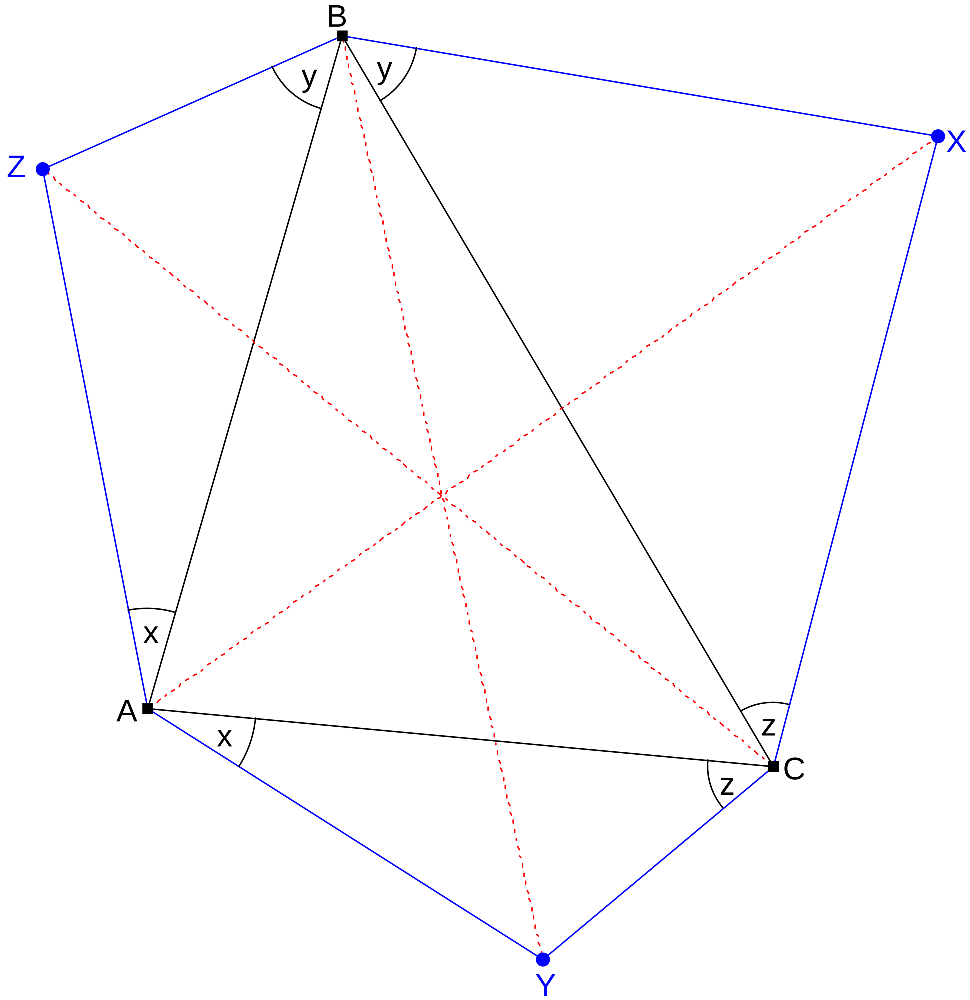

Fig. 12: Satz von Jacobi

Aus Trig-Ceva folgt somit, dass die Geraden AX, BY und CZ sich in einem Punkt schneiden.

Aus Trig-Ceva folgt leicht noch eine andere Version von Ceva:

Satz 1.5 (Satz von Ceva auf dem Kreis)**.** Seien A, B, C, X, Y und Z sechs paarweise verschiedene Punkte auf einem Kreis. Genau dann schneiden sich die Geraden AX, BY und CZ in einem Punkt, wenn

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

gilt. Hierbei sind die Strecken orientiert, und zwar folgendermaßen: Die Strecken BX, XC, CY, YA, AZ und ZB sollen genau dann positiv sein, wenn die jeweiligen Winkel $\measuredangle BAX$, $\measuredangle XAC$, $\measuredangle CBY$, $\measuredangle YBA$, $\measuredangle ACZ$ und $\measuredangle ZCB$ im Uhrzeigersinn orientiert sind. (Siehe Fig. 13.)

In der Praxis hat niemand in einer Klausur die Zeit, die richtige Orientierung nachzuprüfen; man macht sich an einer Figur klar, dass sie zumindest in einem Fall stimmt, und argumentiert dann, dass der allgemeine Fall nicht schlimmer sein kann (dahinter steckt die "Permanenz von polynomialen Identitäten").

Beweis: Sei R der Umkreisradius des Dreiecks ABC. Dann ist R auch der Umkreisradius des Dreiecks ABX. Nach dem erweiterten Sinussatz[2] ist also

$$BX = 2R \sin \measuredangle BAX.$$

Und analog gilt

$$\begin{aligned} XC &= 2R \sin \measuredangle XAC; & CY &= 2R \sin \measuredangle CBY; \\ YA &= 2R \sin \measuredangle YBA; & AZ &= 2R \sin \measuredangle ACZ; \\ ZB &= 2R \sin \measuredangle ZCB. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} &= \frac{2R \sin \measuredangle BAX}{2R \sin \measuredangle XAC} \cdot \frac{2R \sin \measuredangle CBY}{2R \sin \measuredangle YBA} \cdot \frac{2R \sin \measuredangle ACZ}{2R \sin \measuredangle ZCB} \\ &= \frac{\sin \measuredangle BAX}{\sin \measuredangle XAC} \cdot \frac{\sin \measuredangle CBY}{\sin \measuredangle YBA} \cdot \frac{\sin \measuredangle ACZ}{\sin \measuredangle ZCB}. \end{aligned}$$

Daher folgt Satz 1.5 aus Trig-Ceva.

[2] Der *erweiterte Sinussatz* besagt folgendes: Ist R der Umkreisradius eines Dreiecks ABC, dann gilt $BC = 2R \sin \measuredangle BAC$.

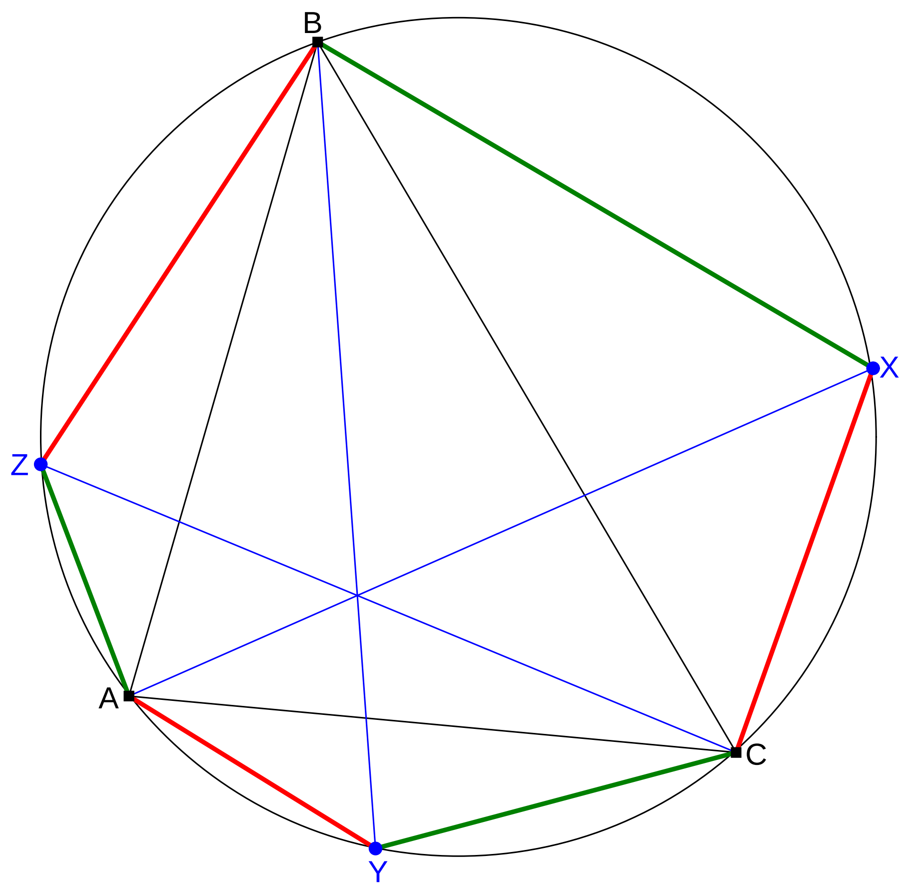

Fig. 13: Satz von Ceva auf dem Kreis

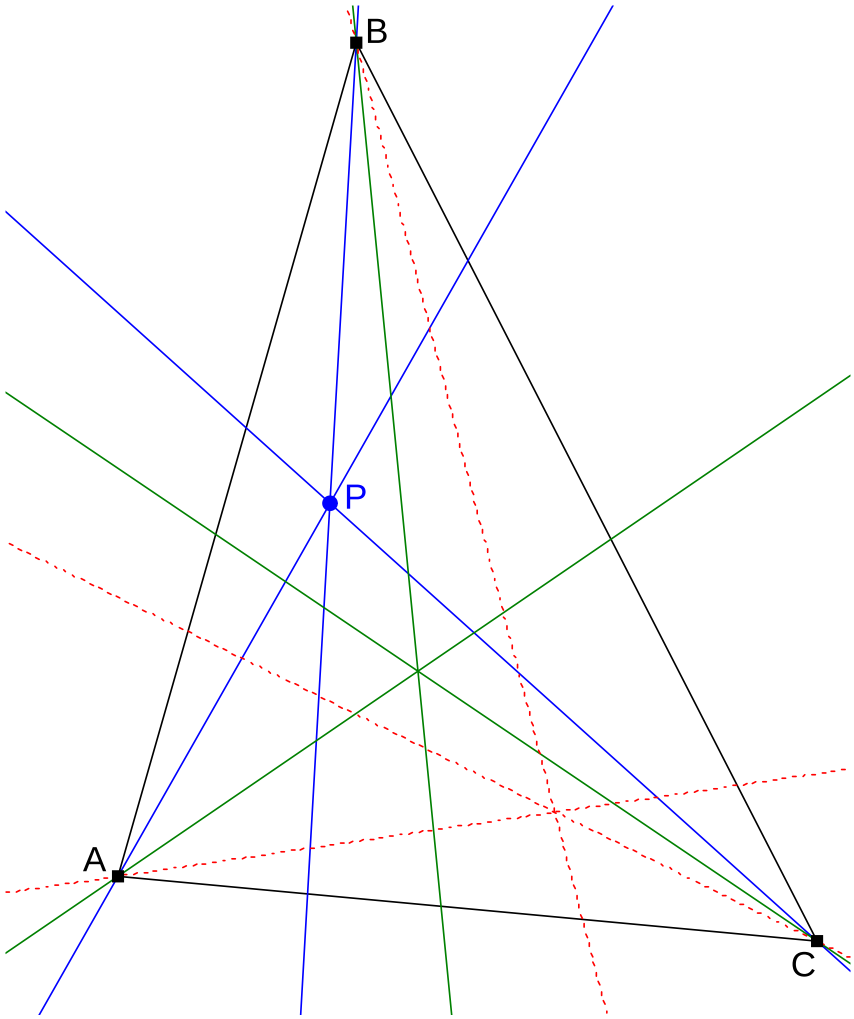

Fig. 14: Isogonale Punkte

Aufgabe 9 (isogonale Punkte)**.** Sei ABC ein nicht-entartetes Dreieck. Sei P ein Punkt. Man beweise: Die Spiegelbilder der Geraden AP, BP und CP an den Winkelhalbierenden der Winkel CAB, ABC bzw. BCA schneiden sich in einem Punkt.

Letzterer Punkt heißt der zu P *isogonal konjugierte* (oder kurz *isogonale*) Punkt bezüglich des Dreiecks ABC. (Siehe Fig. 14.) Zum Beispiel ist der Höhenschnittpunkt zum Umkreismittelpunkt isogonal (warum?). Die Inkreis- und Ankreismittelpunkte sind jeweils zu sich selbst isogonal.

Lösung: Seien X, Y und Z drei (jeweils von A, B bzw. C verschiedene) Punkte auf diesen drei Spiegelbildern (siehe Fig. 15). Dann überführt die Spiegelung an der Winkelhalbierenden des Winkels CAB die Gerade AP in die Gerade AX, während sie die Geraden AB und AC ineinander überführt.

Somit ist $\measuredangle BAX' = \measuredangle PAC$ und $\measuredangle X'AC = \measuredangle BAP$, und analoge Gleichungen gelten für vier andere Winkel. Somit ist

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\measuredangle BAX'}{\sin\measuredangle X'AC}\cdot\frac{\sin\measuredangle CBY'}{\sin\measuredangle Y'BA}\cdot\frac{\sin\measuredangle ACZ'}{\sin\measuredangle Z'CB}\\
&=\frac{\sin\measuredangle PAC}{\sin\measuredangle BAP}\cdot\frac{\sin\measuredangle PBA}{\sin\measuredangle CBP}\cdot\frac{\sin\measuredangle PCB}{\sin\measuredangle ACP}\\
&=1\diagup\underbrace{\left(\frac{\sin\measuredangle BAP}{\sin\measuredangle PAC}\cdot\frac{\sin\measuredangle CBP}{\sin\measuredangle PBA}\cdot\frac{\sin\measuredangle ACP}{\sin\measuredangle PCB}\right)}_{\substack{=1\\ \text{(nach Trig-Ceva, da die Geraden } AP,\ BP \text{ und } CP\\ \text{sich in einem Punkt schneiden)}}}\\
&=1\diagup 1=1.
\end{aligned}$$

Aus Trig-Ceva folgt nun wieder, dass sich die Geraden AX, BY und CZ in einem Punkt schneiden. Diese Geraden sind aber genau die Spiegelbilder der Geraden AP, BP und CP an den Winkelhalbierenden der Winkel CAB, ABC bzw. BCA. Damit ist die Aufgabe gelöst.

> **Aufgabe 10.** Seien X, Y und Z die Fußpunkte der von A, B bzw. C ausgehenden Höhen eines Dreiecks ABC. Auf dem Feuerbachkreis (d.h., auf dem Umkreis des Dreiecks XYZ) seien X', Y' und Z' die zu den Punkten X, Y bzw. Z diametral gegenüberliegenden Punkte. Man zeige: Die Geraden AX', BY' und CZ' schneiden sich in einem Punkt.

Dieser Punkt heißt *Prasolovpunkt* des Dreiecks ABC. (Siehe Fig. 16.)

Lösung: Seien α, β und γ die Winkel von $\triangle ABC$ bei A, B, C.

Ein paar Bemerkungen vorneweg: Da die Punkte Y' und Z' auf dem Feuerbachkreis jeweils den Punkten Y bzw. Z diametral gegenüberliegen, sind YY' und ZZ' Durchmesser dieses Feuerbachkreises. Somit sind alle Winkel im Viereck $YZ'Y'Z$ rechte Winkel (nach Thales). Daher ist $YZ'Y'Z$ ein Rechteck, und daraus folgt $YZ' = ZY'$. Analog gilt $ZX' = XZ'$ und $XY' = YX'$. Da $YZ'Y'Z$ ein Rechteck ist, gilt ferner $\measuredangle ZYZ' = 90°$. Analog ist $\measuredangle XZX' = 90°$.

Ferner ist bekannt, dass $\measuredangle BZX = \gamma$ ist. (Dies folgt aus dem Sehnenviereckssatz, nachdem man bemerkt, dass die Höhenfußpunkte Z und X beide auf dem Thaleskreis über CA liegen.)

Wir wollen nun Trig-Ceva anwenden; dazu brauchen wir $\dfrac{\sin\measuredangle BAX'}{\sin\measuredangle X'AC}$. Wir machen dafür Sinusjagd (siehe Fig. 17):

$$\sin\measuredangle BAX' = \sin\measuredangle ZAX' = ZX'\cdot\frac{\sin\measuredangle AZX'}{AX'} \qquad \text{(Sinussatz im } \triangle ZAX')$$

und analog

$$\sin\measuredangle X'AC = YX'\cdot\frac{\sin\measuredangle AYX'}{AX'}.$$

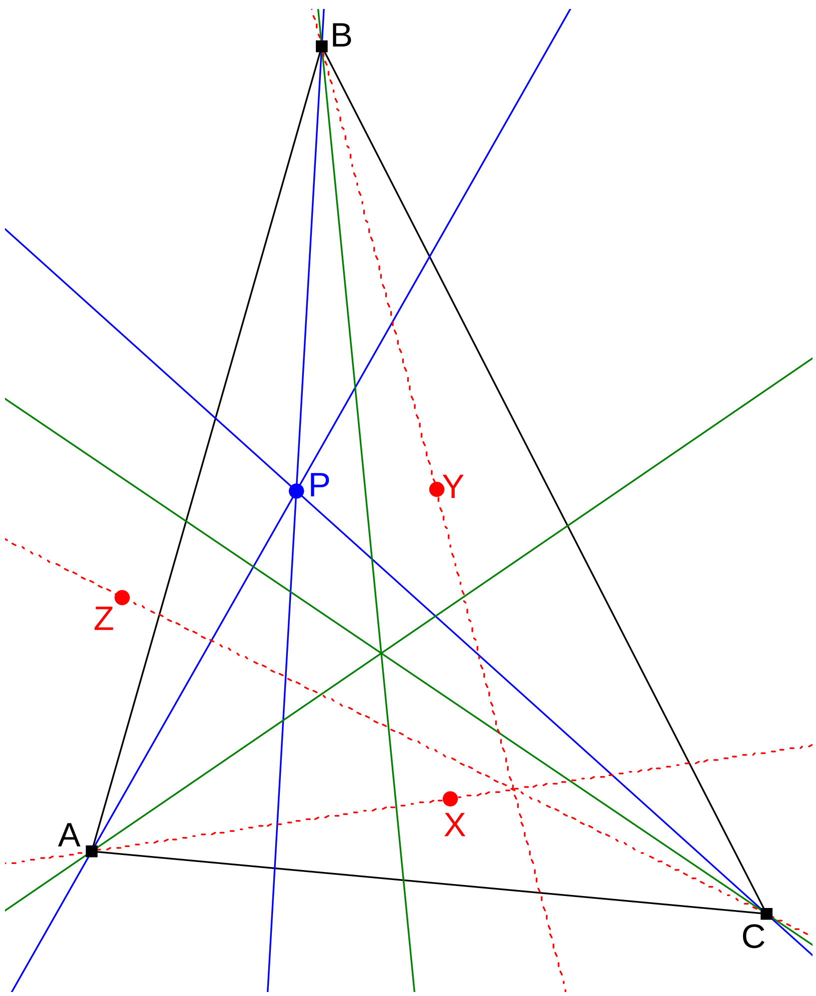

Fig. 15: Beweis zu isogonalen Punkten

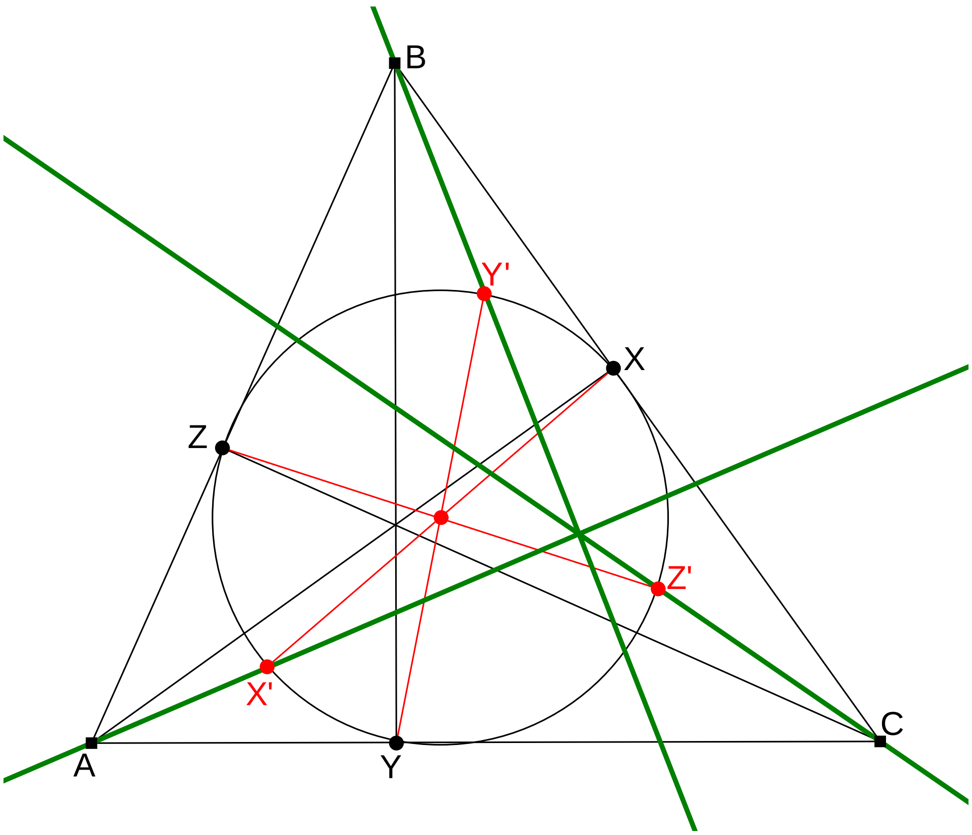

Fig. 16: Der Prasolovpunkt

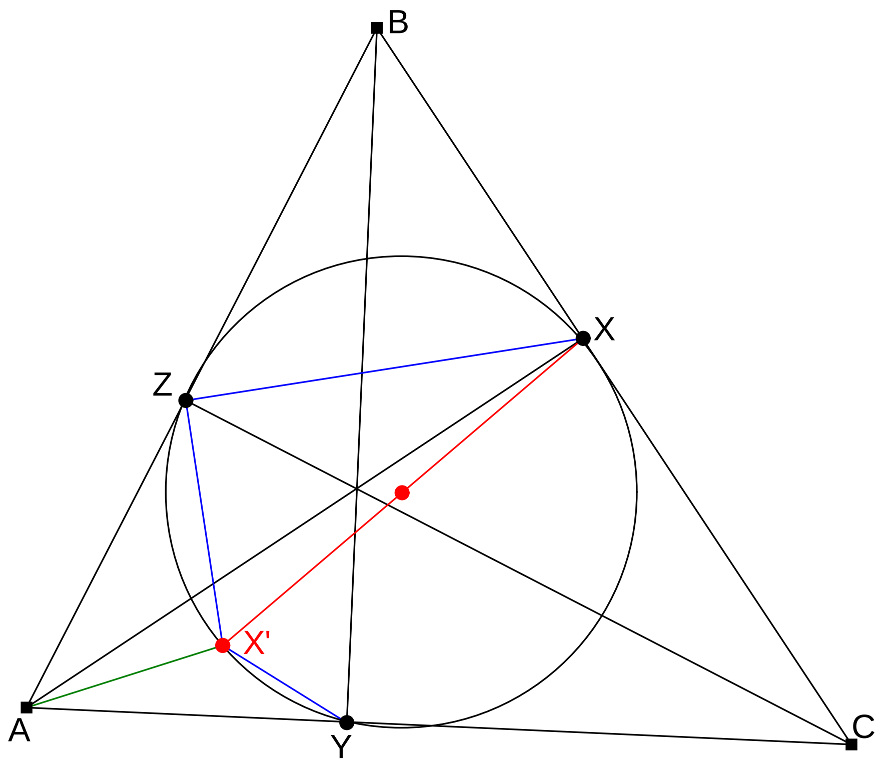

Fig. 17: Beweis zum Prasolovpunkt

Division ergibt

$$\frac{\sin\measuredangle BAX'}{\sin\measuredangle X'AC} = \frac{ZX' \cdot \dfrac{\sin\measuredangle AZX'}{AX'}}{YX' \cdot \dfrac{\sin\measuredangle AYX'}{AX'}} = \frac{ZX'}{YX'} \cdot \frac{\sin\measuredangle AZX'}{\sin\measuredangle AYX'}$$
$$= \frac{ZX'}{YX'} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \gamma)}{\sin(90^\circ - \beta)},$$

denn wir haben

$$\measuredangle AZX' = 180^\circ - \underbrace{\measuredangle XZX'}_{=90^\circ} - \underbrace{\measuredangle BZX}_{=\gamma} = 180^\circ - 90^\circ - \gamma = 90^\circ - \gamma$$

und analog $\measuredangle AYX' = 90^\circ - \beta$.

Multiplizieren wir diese Gleichung mit den zwei analogen, dann erhalten wir

$$\frac{\sin\measuredangle BAX'}{\sin\measuredangle X'AC} \cdot \frac{\sin\measuredangle CBY'}{\sin\measuredangle Y'BA} \cdot \frac{\sin\measuredangle ACZ'}{\sin\measuredangle Z'CB}$$
$$= \left(\frac{ZX'}{YX'} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \gamma)}{\sin(90^\circ - \beta)}\right) \cdot \left(\frac{XY'}{ZY'} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \gamma)}\right) \cdot \left(\frac{YZ'}{XZ'} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \beta)}{\sin(90^\circ - \gamma)}\right)$$
$$= \frac{ZX'}{YX'} \cdot \frac{XY'}{ZY'} \cdot \frac{YZ'}{XZ'} = 1 \qquad \text{(denn } ZX' = XZ' \text{ und } XY' = YX' \text{ und } YZ' = ZY'\text{)}$$

Nach Trig-Ceva folgt hieraus die gewünschte Aussage.

Alternativlösung (Jurij) (skizziert): Seien $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ und $\widetilde{Z}$ die Bilder von X, Y bzw. Z bei der Inversion am Umkreis des Dreiecks ABC. Sei O der Mittelpunkt dieses Umkreises. Nun zeigen wir:

- Die Geraden $A\widetilde{X}$, $B\widetilde{Y}$ und $C\widetilde{Z}$ schneiden sich in einem Punkt. (Dies ist äquivalent dazu, dass die Kreise AOX, BOY und COZ sich in einem zweiten Punkt außer O schneiden. Doch diesen Punkt kann man direkt beschreiben als den Punkt O' auf der Geraden OH, der $HO \cdot HO' = HA \cdot HX = HB \cdot HY = HC \cdot HZ$ erfüllt. Dass ein solcher Punkt O' existiert, ist bekannt.)

- Die Geraden AX', BY' und CZ' sind die Spiegelbilder der Geraden $A\widetilde{X}$, $B\widetilde{Y}$ und $C\widetilde{Z}$ an den entsprechenden Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC. (Dies zeigt man anscheinend durch Winkeljagd.)

Aufgabe 11 (Satz von Haruki)**.** Gegeben seien drei Kreise k, ℓ und m mit insgesamt sechs Schnittpunkten A, B, C, D, E und F, in dem Sinne dass

$$\ell \cap m = \{A, D\}, \qquad m \cap k = \{B, E\} \qquad \text{und} \qquad k \cap \ell = \{C, F\}$$

ist. Zeige: $AE \cdot BF \cdot CD = EC \cdot FA \cdot DB$. (Siehe Fig. 18.)

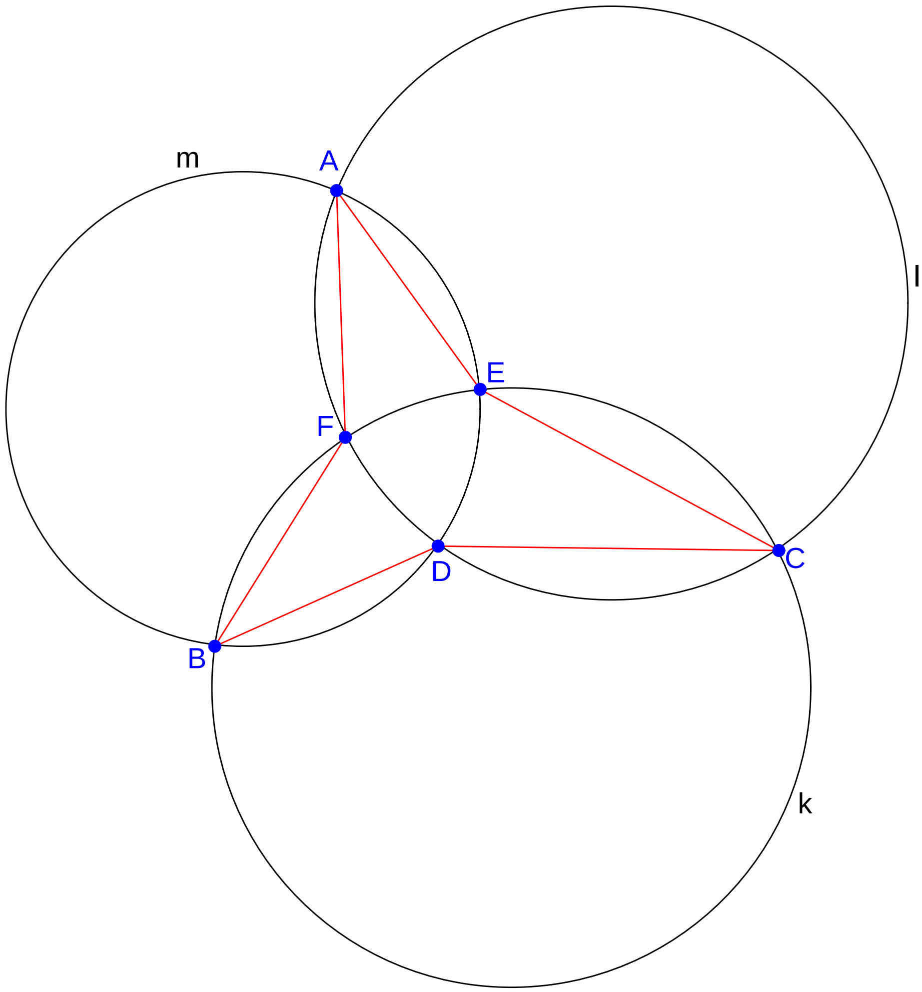

Fig. 18: Satz von Haruki

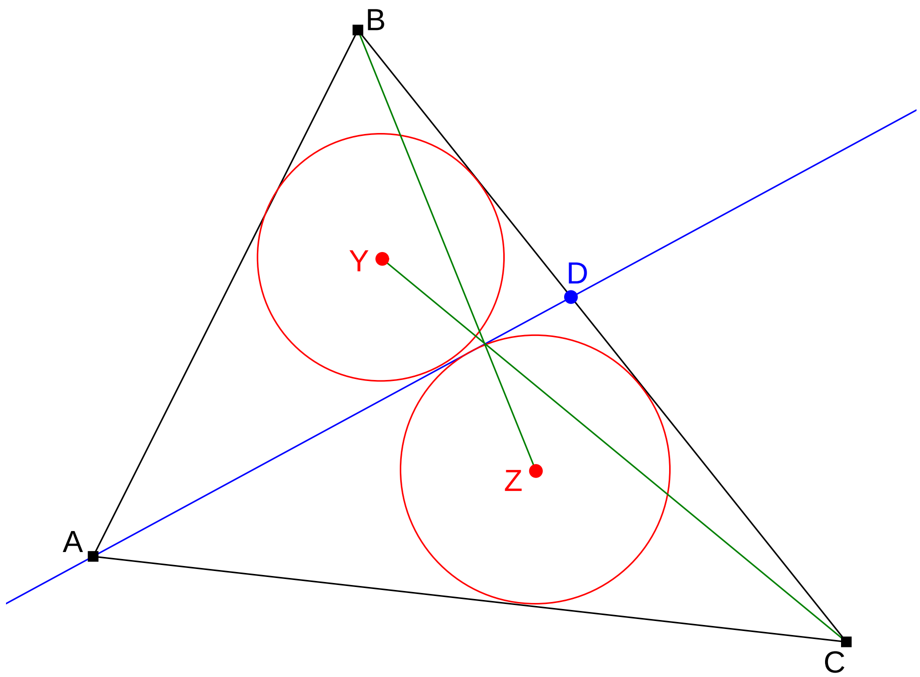

Fig. 19: Zu Aufgabe 12

Aufgabe 12. Sei D ein Punkt auf der Seite BC eines Dreiecks ABC. Seien Y und Z die Inkreismittelpunkte der Dreiecke ABD bzw. ACD. Man beweise, dass sich die Geraden BZ, CY und AD genau dann in einem Punkt schneiden, wenn AD die Winkelhalbierende des Winkels CAB ist. (Siehe Fig. 19.)

Aufgabe 13. Seien A, B, C, X, Y und Z sechs paarweise verschiedene Punkte auf einem Kreis. Sei k ein weiterer Kreis. Seien A', B', C', X', Y' und Z' die Bilder von A, B, C, X, Y bzw. Z bei der Inversion an k. Man zeige: Genau dann schneiden sich die Geraden AX, BY und CZ in einem Punkt, wenn sich die Geraden $A'X'$, $B'Y'$ und $C'Z'$ in einem Punkt schneiden. (Siehe Fig. 20.)

[**Zusatz:** Man zeige in diesem Fall, dass diese beiden Schnittpunkte mit dem Zentrum von k auf einer Geraden liegen.]

1.4 Steiner und seine Folgerungen

Mit dem Satz von Ceva (direkt angewendet auf ein gegebenes Dreieck ABC) läßt sich zeigen, dass die Höhen, die Seitenhalbierenden und die Winkelhalbierenden eines Dreiecks ABC konpunktal sind. Für die Mittelsenkrechten ist

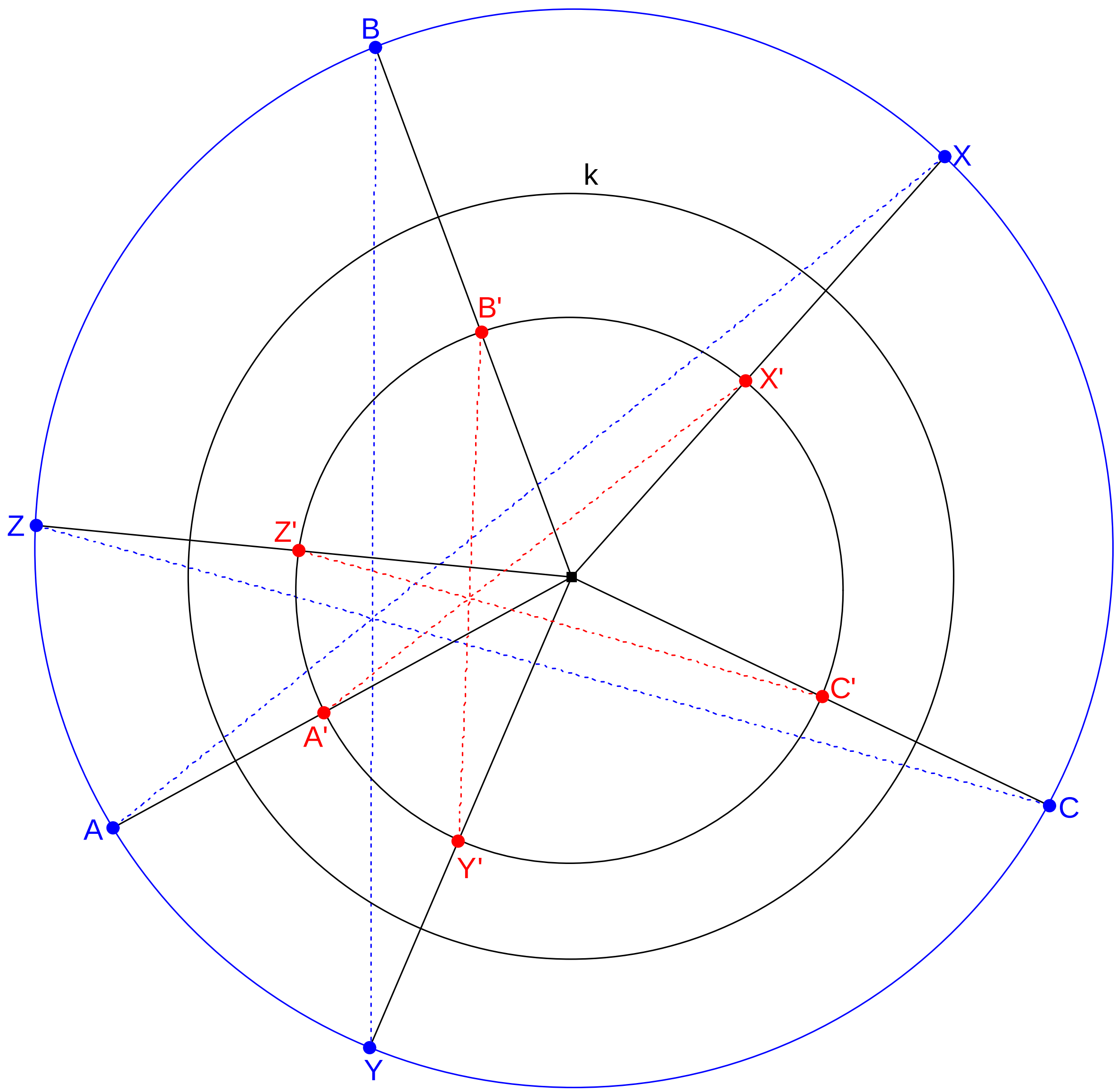

Fig. 20: Zu Aufgabe 13

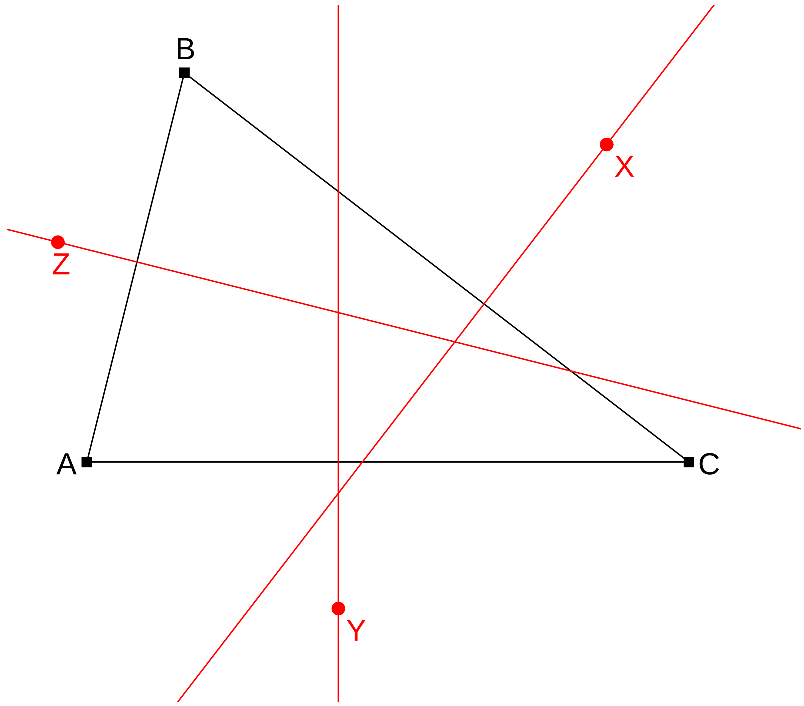

Fig. 21: Satz von Carnot-Steiner

es aber nicht mehr so einfach, da sie keine Ecktransversalen sind. Vergessen wir einmal, dass ihre Konpunktalität ohnehin klar ist, und versuchen wir ein allgemeines Kriterium zu finden.

Der Satz von Steiner (aka Satz von Carnot) ist ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konkurrenz von drei Geraden, die zu den Seiten eines Dreiecks senkrecht sind:

Satz 1.6 (Satz von Carnot-Steiner (bekannt als Satz von Steiner oder als Satz von Carnot))**.** Sei ABC ein nicht-entartetes Dreieck. Seien X, Y und Z drei beliebige Punkte. Genau dann schneiden sich die Senkrechten zu BC, CA und AB durch X, Y bzw. Z in einem Punkt, wenn

$$BX^2 - XC^2 + CY^2 - YA^2 + AZ^2 - ZB^2 = 0$$

gilt. (Siehe Fig. 21 für eine Konfiguration, die diese zwei Bedingungen **nicht** erfüllt.)

Hier ist es egal, ob die Strecken orientiert sind, denn sie werden ohnehin quadriert. Daher kann man auch CX^2 statt XC^2 schreiben.

Zum Beweis ein Lemma:

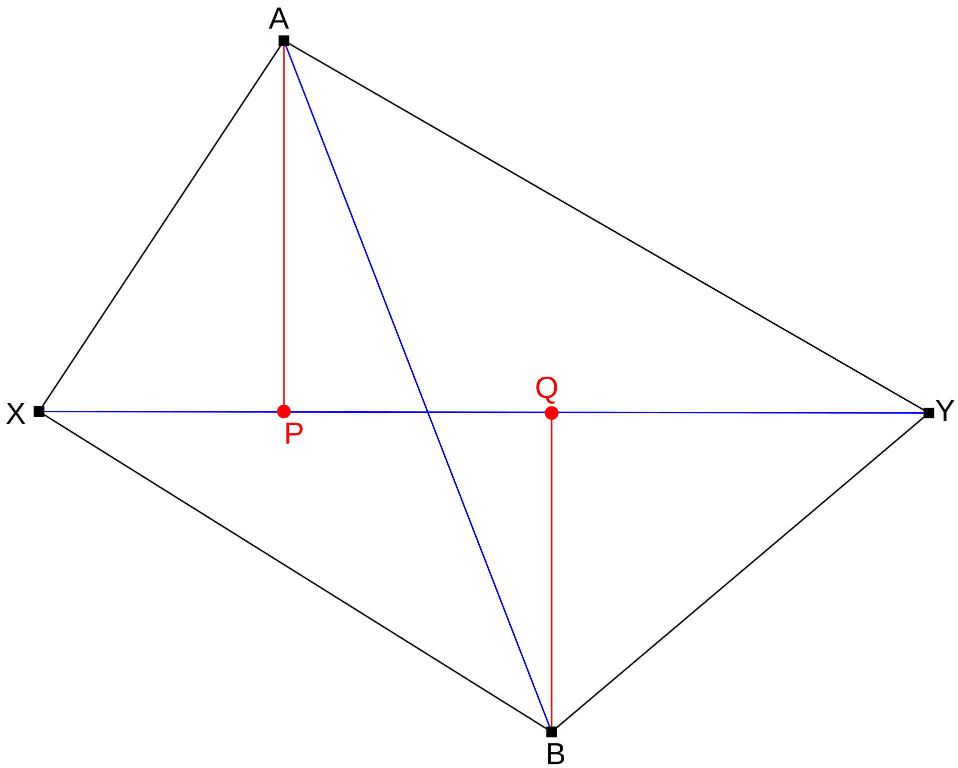

Fig. 22: Zum Beweis des Lemmas

Lemma 1.7. Seien X, Y, A und B vier Punkte. Genau dann gilt $XY \perp AB$, wenn $AX^2 - AY^2 = BX^2 - BY^2$ gilt. (Hierbei tun wir so, dass $XY \perp AB$ auch dann gilt, wenn $X = Y$ oder $A = B$ ist.)

Beweis von Lemma 1.7: O. B. d. A. sei $X \neq Y$. Seien P und Q die Fußpunkte der Lote von A bzw. B auf die Gerade XY. (Siehe Fig. 22.) Nach Pythagoras ist dann

$$AX^2 = AP^2 + PX^2 \qquad \text{und} \qquad AY^2 = AP^2 + PY^2.$$

Also ist (wobei wir orientierte Strecken auf der Geraden XY verwenden)

$$\begin{aligned} AX^2 - AY^2 &= \left(AP^2 + PX^2\right) - \left(AP^2 + PY^2\right) = PX^2 - PY^2 \\ &= \underbrace{(PX - PY)}_{=YX} \cdot \underbrace{(PX + PY)}_{=2\cdot PX + XY} = YX \cdot (2 \cdot PX + XY) \end{aligned}$$

und analog

$$BX^2 - BY^2 = YX \cdot (2 \cdot QX + XY)\,.$$

Somit gilt folgende Äquivalenzenkette:

$$\begin{aligned}
&\big(AX^2 - AY^2 = BX^2 - BY^2\big) \\
\Longleftrightarrow\ & (YX \cdot (2 \cdot PX + XY) = YX \cdot (2 \cdot QX + XY)) \qquad \text{(nach obigen Gleichungen)} \\
\Longleftrightarrow\ & (2 \cdot PX + XY = 2 \cdot QX + XY) \qquad (\text{denn } YX \neq 0) \\
\Longleftrightarrow\ & (PX = QX) \\
\Longleftrightarrow\ & (P = Q) \qquad (\text{denn } P \text{ und } Q \text{ liegen auf } XY\text{, und die Strecken sind orientiert}) \\
\Longleftrightarrow\ & (XY \perp AB)
\end{aligned}$$

(denn P und Q sind die Lotfußpunkte von A bzw. B auf XY). Damit ist das Lemma bewiesen.

Die Gleichung $AX^2 - AY^2 = BX^2 - BY^2$ in Lemma 1.7 wird oft als $AX^2 + BY^2 = AY^2 + BX^2$ geschrieben. Das Lemma läßt sich somit wie folgt umformulieren: "Die Diagonalen eines Vierecks $AXBY$ sind genau dann orthogonal, wenn die Summen der Quadrate gegenüberliegenden Seiten des Vierecks gleich sind.".

Beweis des Satzes von Carnot-Steiner: Sei P der Punkt, in dem die Senkrechte zu BC durch X die Senkrechte zu CA durch Y schneidet. Dann ist $XP \perp BC$ und $YP \perp CA$. Die Senkrechten zu BC, CA und AB durch X, Y bzw. Z schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn auch die Senkrechte zu AB durch Z durch P geht, d.h., wenn $ZP \perp AB$ ist. Wegen $XP \perp BC$ folgt aus Lemma 1.7 die Gleichung

$$BX^2 - BP^2 = CX^2 - CP^2 = XC^2 - CP^2,$$

also

$$BX^2 - XC^2 = BP^2 - CP^2.$$

Analog folgt aus $YP \perp CA$ die Gleichung

$$CY^2 - YA^2 = CP^2 - AP^2.$$

Wenn nun auch $ZP \perp AB$ gilt, dann erhalten wir ebenso

$$AZ^2 - BZ^2 = AP^2 - BP^2,$$

und durch Addition aller drei Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
&BX^2 - XC^2 + CY^2 - YA^2 + AZ^2 - ZB^2 \\
&= BP^2 - CP^2 + CP^2 - AP^2 + AP^2 - BP^2 = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist die $\Longrightarrow$-Richtung von Satz 1.6 bewiesen. Die $\Longleftarrow$-Richtung folgt durch Umkrehrung dieses Argumentes.

Hier ist eine von vielen Anwendungen des Satzes von Carnot-Steiner:

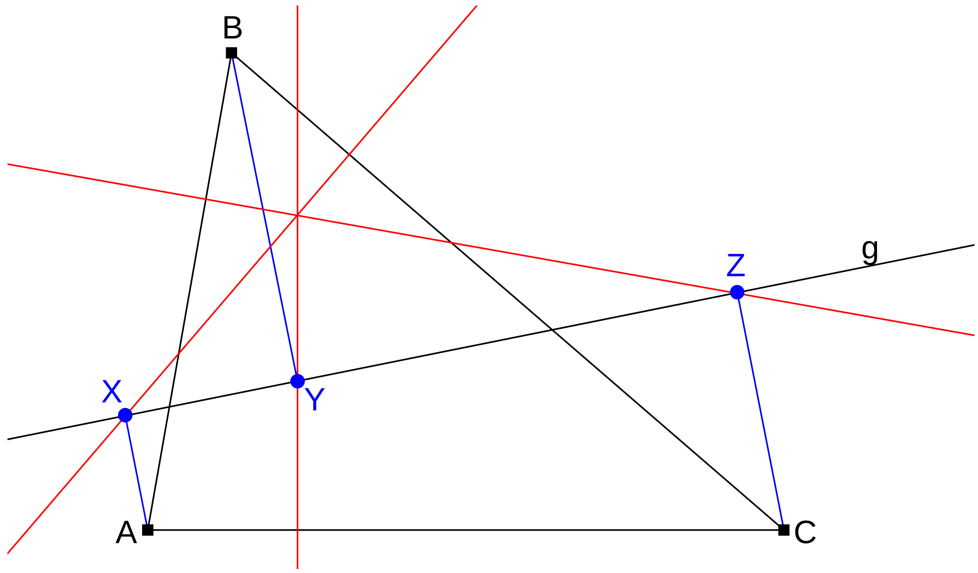

Fig. 23: Der Orthopol einer Geraden g

Satz 1.8 (Orthopolsatz)**.** Sei ABC ein Dreieck, und sei g eine Gerade. Seien X, Y und Z die Fußpunkte der Lote von A, B bzw. C auf g. Dann schneiden sich die Senkrechten zu BC, CA und AB durch X, Y bzw. Z in einem Punkt.

Dieser Punkt heißt der *Orthopol* der Geraden g in bezug auf Dreieck ABC. (Siehe Fig. 23.)

Beweis: Nach Pythagoras ist $BX^2 = BY^2 + XY^2$ und $XC^2 = CZ^2 + ZX^2$, also

$$BX^2 - XC^2 = \left(BY^2 + XY^2\right) - \left(CZ^2 + ZX^2\right).$$

Analog gelten ähnliche Formeln für $CY^2 - YA^2$ und $AZ^2 - ZB^2$. Wenn man alle drei Formeln zusammenaddiert, kürzt sich alles heraus und man erhält 0. Nach Carnot-Steiner folgt hieraus die Behauptung.

Hier ist eine weitere Anwendung des Satzes von Carnot-Steiner:

Satz 1.9 (Satz von den orthologischen Dreiecken)**.** Seien ABC und XYZ zwei nicht-entartete Dreiecke. Genau dann schneiden sich die Senkrechten zu BC, CA und AB durch X, Y bzw. Z in einem Punkt, wenn die Senkrechten zu YZ, ZX und XY durch A, B bzw. C sich in einem Punkt schneiden.

In diesem Fall heißen die beiden Dreiecke ABC und XYZ zueinander *orthologisch.* (Siehe Fig. 24.)

Beweis: Laut dem Satz von Carnot-Steiner gilt:

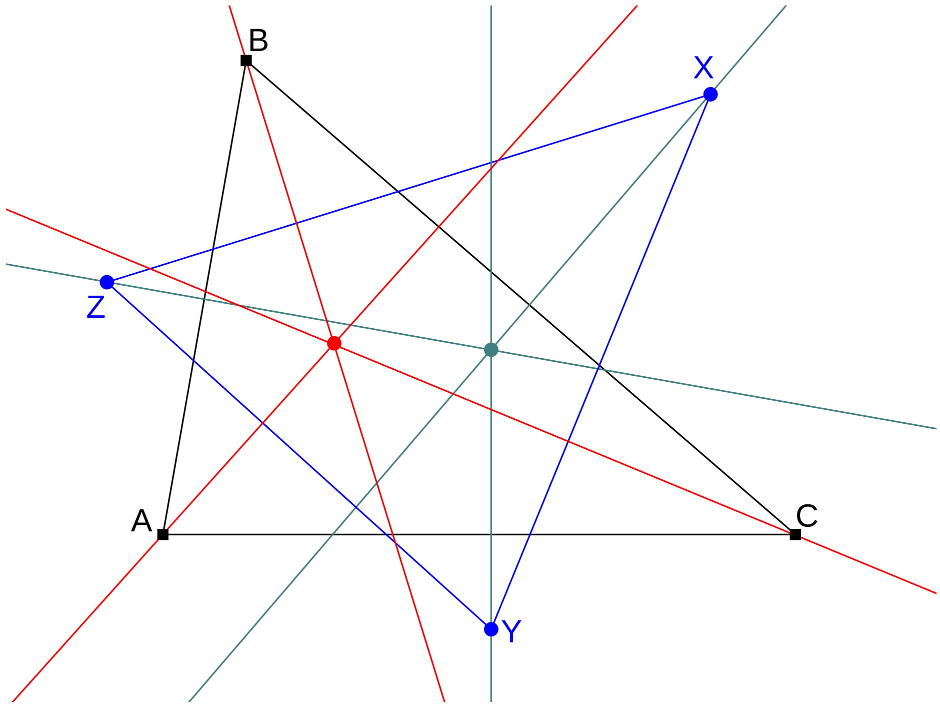

Fig. 24: Orthologische Dreiecke

- Genau dann schneiden sich die Senkrechten zu BC, CA und AB durch X, Y bzw. Z in einem Punkt, wenn die Gleichung

$$BX^2 - XC^2 + CY^2 - YA^2 + AZ^2 - ZB^2 = 0$$

gilt.

- Genau dann schneiden sich die Senkrechten zu YZ, ZX und XY durch A, B bzw. C in einem Punkt, wenn die Gleichung

$$YA^2 - AZ^2 + ZB^2 - BX^2 + XC^2 - CY^2 = 0$$

gilt.

Aber die beiden Gleichungen sind zueinander äquivalent, da die linke Seite der einen gleich der linken Seite der anderen mal -1 ist. Hieraus folgt der Satz.

Warnung: Der Satz von den orthologischen Dreiecken (wie auch der Satz von Carnot-Steiner) gilt nicht für entartete Dreiecke.

Können wir den Orthopolsatz aus dem Satz von den orthologischen Dreiecken herleiten? Das Dreieck XYZ im Orthopolsatz ist entartet; somit können wir den Satz von den orthologischen Dreiecken nicht auf dieses Dreieck anwenden.

Allerdings können wir folgendes tun:

Wir spiegeln die Ecken A, B und C an der Geraden g. Die Spiegelbilder seien X', Y' bzw. Z' (siehe Fig. 25). Nun werden wir

1. zeigen, dass die Dreiecke ABC und $X'Y'Z'$ orthologisch sind, und dann
2. den Orthopolsatz daraus herleiten.

Für Schritt 1 verwenden wir folgenden Satz:

Satz 1.10 (Orthologie gegensinnig ähnlicher Dreiecke)**.** Seien ABC und XYZ zwei Dreiecke, die zueinander gegensinnig ähnlich sind. Dann sind diese zwei Dreiecke zueinander orthologisch. Mehr sogar:

(a) Die Senkrechten zu BC, CA und AB durch X, Y bzw. Z schneiden sich in einem Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks XYZ. (Siehe Fig. 26.)

(b) Die Senkrechten zu YZ, ZX und XY durch A, B bzw. C schneiden sich in einem Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

Beweis: Winkeljagd!

(a) (Siehe Fig. 27.) Sei P der von X verschiedene Punkt, in dem die Senkrechte zu BC durch X den Umkreis des Dreiecks XYZ schneidet. (Wenn sie diesen Umkreis berührt, dann setzt man $P = X$.) Mit orientierten Winkeln modulo 180° gilt

$$\begin{aligned}
\measuredangle(XP;\ YP) &= \measuredangle XPY = \measuredangle XZY && \text{(nach dem Umfangswinkelsatz)} \\
&= -\measuredangle ACB && \left(\text{da } \triangle\, XYZ \mathrel{\bar{\sim}} \Delta ABC\right) \\
&= -\measuredangle(CA;\ BC) = \measuredangle(BC;\ CA) \\
&= \underbrace{\measuredangle(BC;\ XP)}_{\substack{=90^\circ \\ (\text{denn } XP \perp BC)}} + \measuredangle(XP;\ CA) \\
& && \left(\begin{array}{c}\text{denn } \measuredangle(g;\ k) = \measuredangle(g;\ h) + \measuredangle(h;\ k) \text{ gilt} \\ \text{für beliebige drei Geraden } g,\ h \text{ und } k\end{array}\right) \\
&= 90^\circ + \measuredangle(XP;\ CA).
\end{aligned}$$

Daher ist

$$90^\circ = \measuredangle(XP;\ YP) - \measuredangle(XP;\ CA) = \measuredangle(CA;\ YP)$$

(denn $\measuredangle(g;\ k) - \measuredangle(g;\ h) = \measuredangle(h;\ k)$ gilt für beliebige drei Geraden g, h und k). Hieraus folgt $YP \perp CA$, und daher liegt P auch auf der Senkrechten zu CA durch Y. Analog liegt P auf der Senkrechten zu AB durch Z. Also schneiden sich die drei Senkrechten zu BC, CA und AB durch X, Y bzw. Z

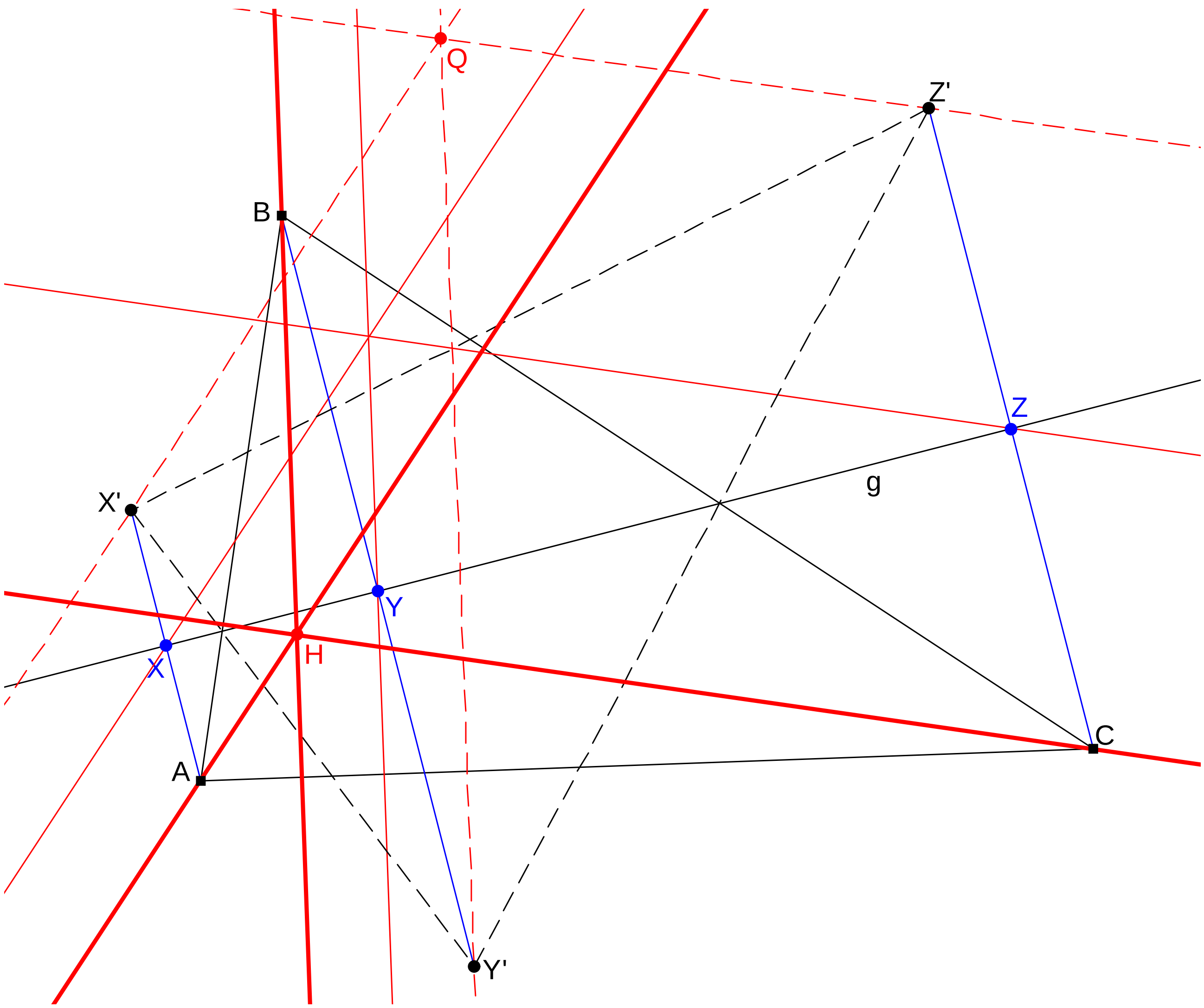

Fig. 25: Zweiter Beweis des Orthopolsatzes

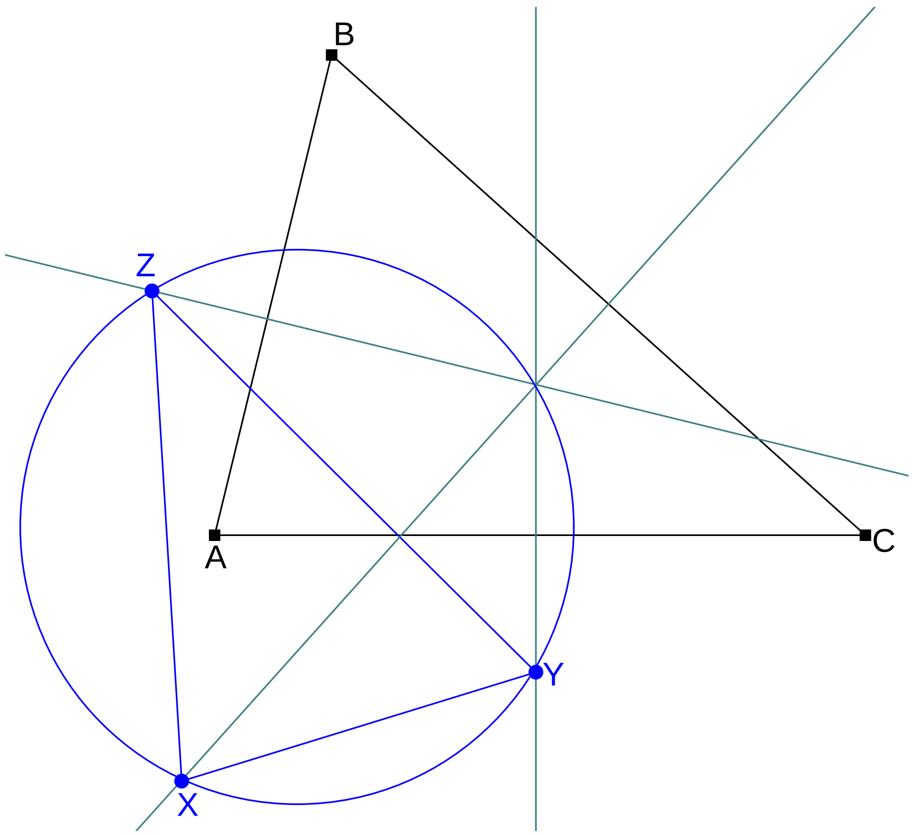

Fig. 26: Gegensinnig ähnliche Dreiecke sind orthologisch

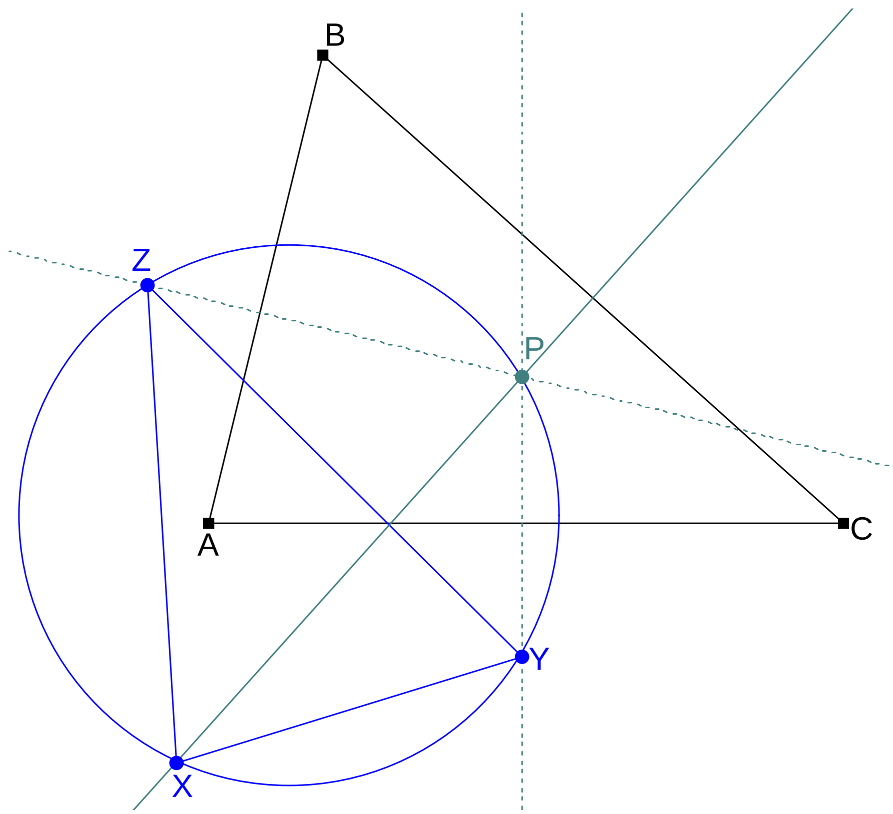

Fig. 27: Zum Beweis

in einem Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks XYZ (nämlich in P). Damit ist Teil **(a)** bewiesen.

(b) folgt aus Teil **(a)**, wenn man die Rollen der zwei Dreiecke ABC und XYZ vertauscht.

Zweiter Beweis des Orthopolsatzes (skizziert): Seien X', Y' und Z' die Spiegelbilder von X, Y bzw. Z an der Geraden g. Dann sind die Lotfußpunkte X, Y und Z die Mittelpunkte der Strecken AX', BY' bzw. CZ'.

Aber da X', Y' und Z' die Spiegelbilder von A, B bzw. C an der Geraden g sind, sind die Dreiecke ABC und $X'Y'Z'$ gegensinnig ähnlich (sogar kongruent), und daher laut Satz 1.10 orthologisch. Die Senkrechten von X', Y' und Z' auf BC, CA bzw. AB schneiden sich also in einem Punkt Q. Die Senkrechten von A, B und C auf BC, CA bzw. AB schneiden sich aber auch in einem Punkt, nämlich im Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC. Hieraus folgt schnell, dass die Senkrechten von X, Y und Z auf BC, CA bzw. AB sich im Mittelpunkt von HQ schneiden (denn X ist ja der Mittelpunkt von AX' usw., und somit hat man Mittelparallelen in Trapezen vorliegen). Damit ist der Orthopolsatz wieder gezeigt.

Aufgabe 14. Sei ABC ein Dreieck, und sei g eine Gerade durch den Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Sei P der Orthopol der Geraden g in bezug auf das Dreieck ABC. Sei H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Man zeige: Das Spiegelbild von H an P liegt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC. (Siehe Fig. 28.)

Hier ist eine weitere Anwendung des Satzes von den orthologischen Dreiecken:

Aufgabe 15. Sei ABC ein Dreieck. Sei P ein Punkt. Seien X, Y und Z die Fußpunkte der Lote von P auf BC, CA bzw. AB. Man zeige:

(a) Die Senkrechten zu YZ, ZX und XY durch A, B bzw. C schneiden sich in einem Punkt.

(b) Diese Senkrechten sind genau die Spiegelbilder der Geraden AP, BP bzw. CP an den Winkelhalbierenden der Winkel CAB, ABC bzw. BCA.

(c) Man beweise den Satz vom isogonalen Punkt neu.

Aufgabe 16. Sei ABC ein Dreieck, und seien E und F die Fußpunkte seiner von B bzw. C ausgehenden Höhen. Seien M, S und N die Mittelpunkte der Strecken BF, EF bzw. CE. Man zeige:

(a) Es gilt $AS \perp MN$.

(b) Die Senkrechte zu BS durch M und die Senkrechte zu CS durch N schneiden sich auf der Mittelsenkrechten von BC. (Siehe Fig. 29.)

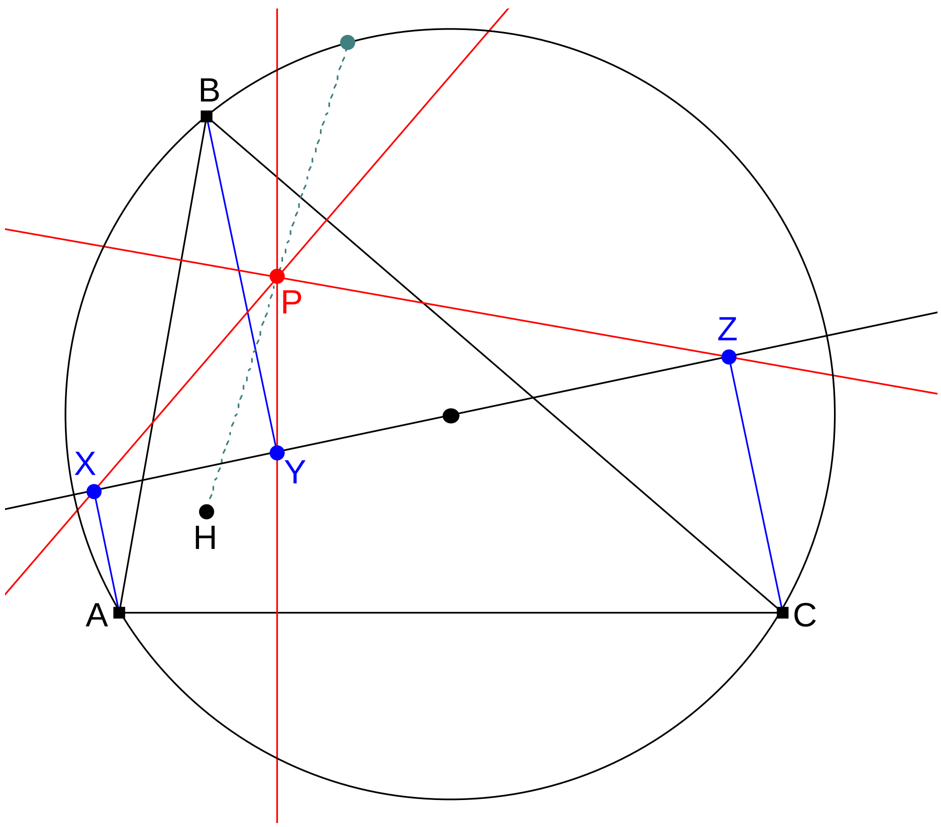

Fig. 28: Orthopol einer Geraden durch den Umkreismittelpunkt

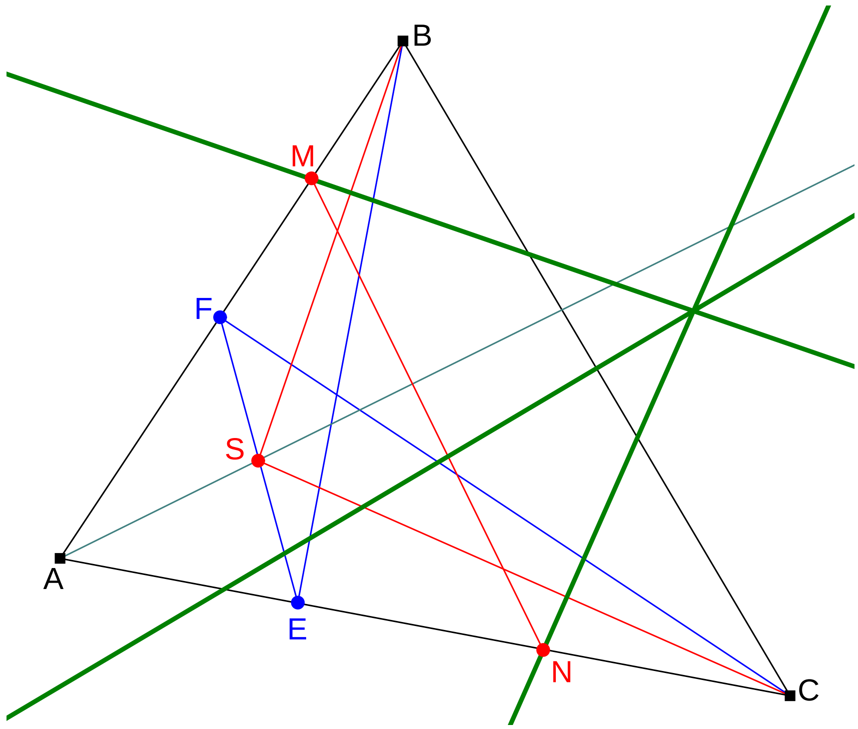

Fig. 29: Zu Aufgabe 16

Aufgabe 17. Man beweise, dass der Satz von den orthologischen Dreiecken auch dann gilt, wenn man alle “Senkrechten” durch “Parallelen” ersetzt. Das heißt:

Satz 1.11. Seien ABC und XYZ zwei nicht-entartete Dreiecke. Genau dann schneiden sich die Parallelen zu BC, CA und AB durch X, Y bzw. Z in einem Punkt, wenn die Parallelen zu YZ, ZX und XY durch A, B bzw. C sich in einem Punkt schneiden.

In diesem Fall heißen die Dreiecke ABC und XYZ zueinander *parallelologisch*.

Aufgabe 18. Sei ABC ein Dreieck. Der Inkreis des Dreiecks ABC berühre die Strecken BC, CA und AB in den Punkten X, Y bzw. Z. Der A-Ankreis des Dreiecks ABC (also der Ankreis, der die Strecke BC berührt) berühre die Strecke BC in X'. Sei x die Senkrechte von X' auf die Gerade YZ. Analog seien zwei Geraden y und z definiert. Man zeige, dass x, y und z sich in einem Punkt schneiden. (Siehe Fig. 30.)

Die nachfolgende Aufgabe ergibt einen neuen Beweis des Satzes von den orthologischen Dreiecken, bei dem auch eine andere sehr nützliche Konfigura-

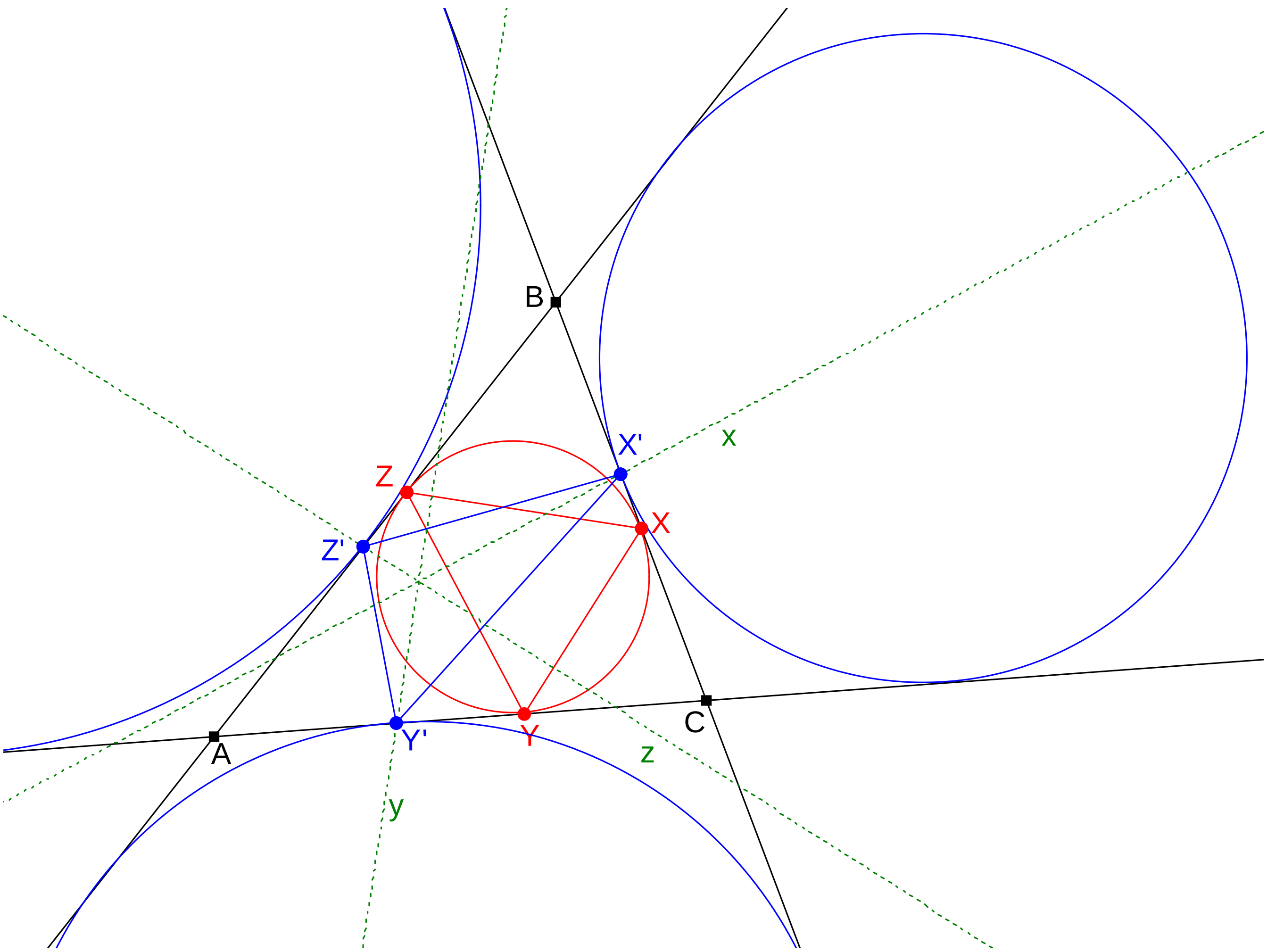

Fig. 30: Zu Aufgabe 18

tion hervortritt (eine verallgemeinerte Fermatkonfiguration, für alle denen der Name etwas sagt). Zunächst einige Bezeichnungen:

Wenn wir schreiben, dass zwei Dreiecke ABC und XYZ ähnlich sind, meinen wir immer, dass es eine Ähnlichkeitsabbildung gibt, die A auf X abbildet, B auf Y abbildet, und C auf Z abbildet. Entsprechende Ecken stehen also immer an der gleichen Stelle. Es gibt also einen Unterschied zwischen "die Dreiecke ABC und XYZ sind ähnlich" und "die Dreiecke ABC und YZX sind ähnlich". Ferner nennen wir zwei ähnliche Dreiecke ABC und XYZ *gleichsinnig ähnlich* oder *gegensinnig ähnlich*, je nachdem, ob die Ähnlichkeitsabbildung, die A, B und C auf X, Y bzw. Z abbildet, gleichsinnig oder gegensinnig ist.

Wenn U, V und W drei Punkte sind, dann bezeichnen wir den Umkreis des Dreiecks UVW auch kurz als den "Kreis UVW". Falls U, V und W auf einer Geraden liegen, wird diese Gerade als "Kreis UVW" verstanden.

Aufgabe 19. Seien ABC und XYZ zwei Dreiecke.

Seien drei Punkte A', B' und C' so gewählt, dass die Dreiecke $A'BC$, $AB'C$ und ABC' jeweils zum Dreieck XYZ gegensinnig ähnlich sind.

(a) Man zeige: Die Kreise $A'BC$, $AB'C$ und ABC' und die Geraden AA', BB' und CC' schneiden sich in einem Punkt P. (Siehe Fig. 31.)

Seien drei Punkte X', Y' und Z' so gewählt, dass die Dreiecke $X'YZ$, $XY'Z$ und XYZ' jeweils zum Dreieck ABC gegensinnig ähnlich sind.

(b) Man zeige: Die Kreise $X'YZ$, $XY'Z$ und XYZ' und die Geraden XX', YY' und ZZ' schneiden sich in einem Punkt Q.

(c) Man zeige: $\measuredangle(AA';\ YZ) = -\measuredangle(XX';\ BC)$. Hierbei ist $\measuredangle(g;\ h)$ der orientierte Winkel zwischen zwei Geraden g und h (ein orientierter Winkel modulo 180°).

(d) Man zeige: Genau dann ist $AA' \perp YZ$, wenn $XX' \perp BC$ ist.

(e) Man folgere den Satz von den orthologischen Dreiecken.

Jetzt nehmen wir an, dass das Dreieck XYZ gleichseitig und zum Dreieck ABC gleich orientiert ist. Die Dreiecke $A'BC$, $AB'C$ und ABC' sind also gleichseitige Dreiecke, die auf den Seiten BC, CA bzw. AB des Dreiecks ABC nach außen hin aufgesetzt wurden. Der Punkt P heißt dann der *erste Fermatpunkt* des Dreiecks ABC. Unter diesen Behauptungen zeige man folgendes:

(f) Es gilt $AA' = BB' = CC' = AP + BP + CP$.

(g) Wir nehmen an, dass alle Winkel des Dreiecks ABC kleiner oder gleich 120° sind. Dann ist P derjenige Punkt in der Ebene, für den die Summe der Abstände zu A, B und C minimal ist; das heißt, wir haben

$$AP + BP + CP \leq AR + BR + CR$$

für alle Punkte R.

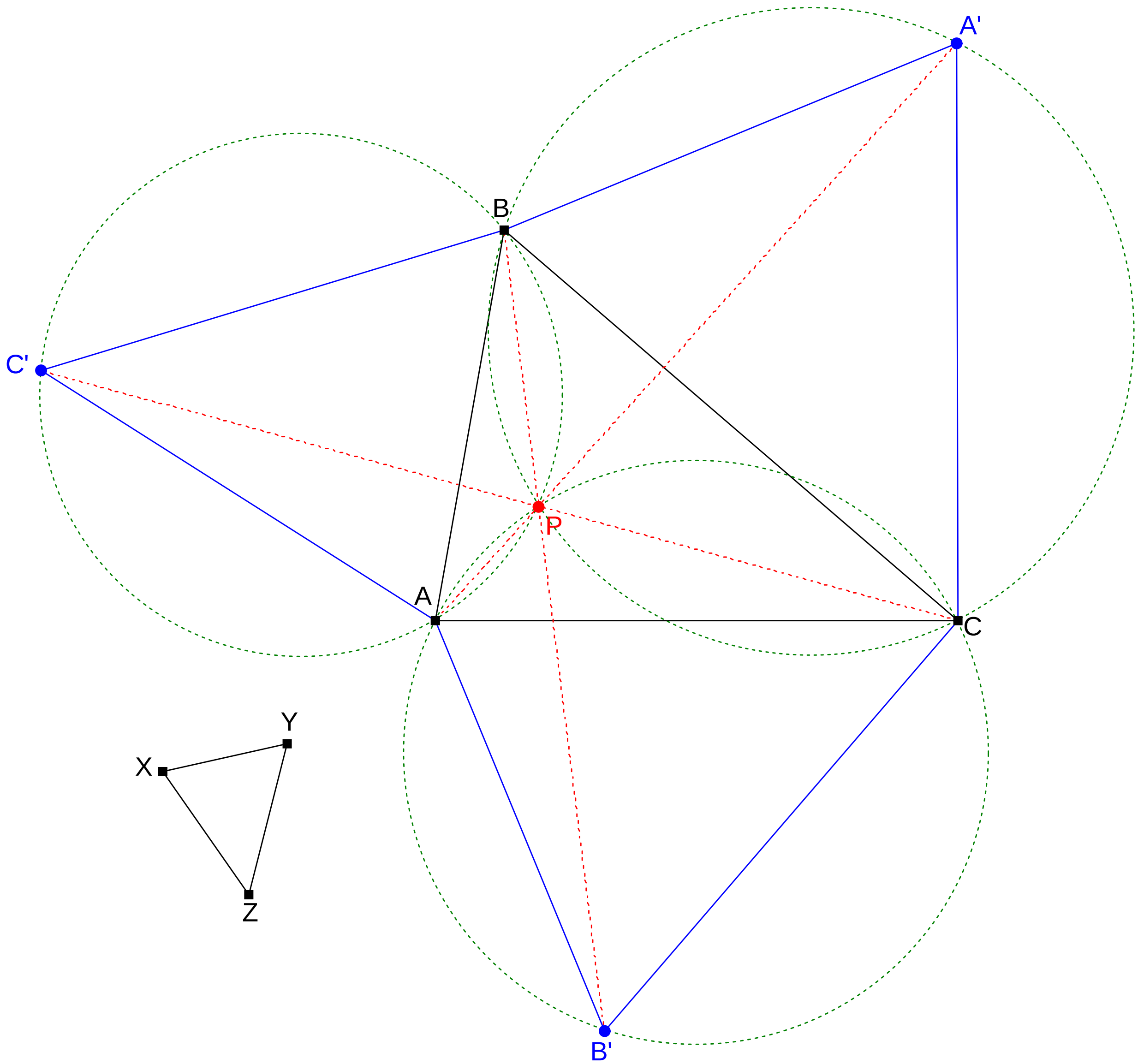

Fig. 31: Zu Aufgabe 19