Задача математичного моделювання лінійно розподілених систем з неперервними початково-крайовими спостереженнями і дискретними моделюючими функціями

Злосчастьєва Д.К., Мазур Д.А., Стоян А.О.

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Кафедра моделювання складних систем

October 5, 2021

Постановка задачі

Розглянемо динамічну систему вигляду

$$L(\partial_s)y(s) = u(s) \tag{1}$$

Тут $y(s)$ – функція стану, розподілена в області $S_0^T = S_0 \times [0, T]$; $s = (x, t) = (x_1, x_2, ..., x_n, t) \in S_0^T$ – просторово-часова змінна; $\partial_s = (\partial_x, \partial_t) = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, ..., \partial_{x_n}, \partial_t)$ – вектор частинних похідних за просторовими змінними $x_1, x_2, ..., x_n$ та часом s; $L(\partial_s)$ – лінійний диференціальний оператор; $u(s)$ – функція розподілених у S_0^T просторово-часових зовнішньодинамічних збурень.

Початкові та крайові умови

Для динамічного процесу (1) мають місце початкові ($t = 0$)

$$L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{t=0} = Y_r^0(x)(r = \overline{1, R_0}, x \in S_0) \qquad (2)$$

та крайові (на контурі Γ просторової області S_0^T)

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{s\in\Gamma\times[0,T]} = Y_\rho^\Gamma(s)(\rho = \overline{1, R_\Gamma}) \qquad (3)$$

умови.

Середньоквадратичний критерій

Функцію стану $y(s)$ будуємо за середньоквадратичним критерієм

$$\Phi = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t) y(s)\Big|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 +$$
$$+ \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0,T]} (L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) - Y_\rho^\Gamma(s))^2 ds \to \min_{y(s)} \tag{4}$$

Розв'язок

Функція стану $y(s)$ матиме вигляд:

$$y(s) = y_{\infty}(s) + y_0(s) + y_{\Gamma}(s), \tag{5}$$

де

$$y_{\infty}(s) = \int_{S_0^T} G(s - s')u(s')ds', \tag{6}$$

$$y_0(s) = \sum_{m=1}^{M_0} G(s - s_m^0)u_{0m}, \tag{7}$$

$$y_{\Gamma}(s) = \sum_{m=1}^{M_{\Gamma}} G(s - s_m^{\Gamma})u_{\Gamma m}. \tag{8}$$

Розв'язок

Тут $G(s - s')$ – функція Гріна, така що

$$L(\partial_s)G(s - s') = \delta(s - s'), \tag{9}$$

де $\delta(s - s')$ – δ-функція Дірака.
Моделюючі функції $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$, які задно критерію (4), діючі в областях $S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$ та $S^\Gamma = (R^n \backslash S_0) \times (-\infty, 0]$ відповідно.
Ці функції визначаються векторами значень u_0, u_Γ в точках S^0 та S^Γ

$$u_0 = col(u_0(s_m^0), m = \overline{1, M_0})(s_m^0 \in S^0) \tag{10}$$

$$u_\Gamma = col(u_\Gamma(s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma})(s_m^\Gamma \in S^\Gamma) \tag{11}$$

Узгодження зі спостереженнями

Враховуючи розв'язок (5),(6),(7),(8) та спостереження (2),(3) отримуємо систему для знаходження компонент векторів u_0 та u_Γ

$$\sum_{m=1}^{M_0} L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^0)|_{t=0}u_{0m}+\sum_{m=1}^{M_\Gamma} L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^\Gamma)u_{\Gamma m}= \\ =\overline{Y}_r^0(x) \quad (r=\overline{1,R_0}) \qquad (12)$$

$$\sum_{m=1}^{M_0} L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^0)|_{x\in\Gamma}u_{0m}+\sum_{m=1}^{M_\Gamma} L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^\Gamma)u_{\Gamma m}= \\ =\overline{Y}_\rho^\Gamma(x,t) \quad (\rho=\overline{1,R_\Gamma}) \qquad (13)$$

Узгодження зі спостереженнями

При цьому

$$\overline{Y}_r^0(x) = Y_r^0(x) - L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)|_{t=0}, \tag{14}$$

$$\overline{Y}_\rho^\Gamma(x,t) = Y_\rho^\Gamma(x,t) - L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s)|_{x\Gamma}. \tag{15}$$

Щоб розв'язати систему згідно критерію (4), зведемо її до вигляду

$$B(s)\overline{u} = Y(s), \tag{16}$$

де

$$\overline{u} = col(u_0, u_\Gamma), \tag{17}$$

Узгодження зі спостереженнями

$$Y(s) = col(Y_0(x)(x \in S_0), Y_\Gamma(x,t) \quad (x,t) \in \Gamma \times [0,T]) \tag{18}$$

$$B(s) = \begin{pmatrix} (B_1 1(x) \quad (x \in S_0)) & (B_1 2(x) \quad (x \in S_0)) \\ (B_2 1(x,t) \quad (x,t) \in \Gamma \times [0,T]) & (B_2 2(x,t) \quad (x,t) \in \Gamma \times [0,T]) \end{pmatrix} \tag{19}$$

де

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= col(\overline{Y}_r^0(x), r = \overline{1, R_0}), \\ Y_\Gamma(x,t) &= col(\overline{Y}_\rho^\Gamma(s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}), \end{aligned} \tag{20}$$

Узгодження зі спостереженнями

$$\begin{aligned}
B_{11}(x) &= col(str(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^0)|_{t=0}, m = \overline{1, M_0}), r = \overline{1, R_0}), \\
B_{12}(x) &= col(str(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^\Gamma)|_{t=0}, m = \overline{1, M_\Gamma}), r = \overline{1, R_0}), \\
B_{21}(x,t) &= col(str(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^0), m = \overline{1, M_0}), r = \overline{1, R_\Gamma}), \\
B_{22}(x,t) &= col(str(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}), r = \overline{1, R_\Gamma}).
\end{aligned} \tag{21}$$

Ров'язання системи (12), (13) згідно з критерієм (4) эквівалентне знаходженню вектора $\overline{u}$ такого, щоб

$$\overline{u} = arg \min_{u \in R^{M_0 + M_\Gamma}} \int_{(\cdot)} ||B(s)u - Y(s)||^2 ds, \tag{22}$$

де інтегрування відбувається по області зміни s.

Узгодження зі спостереженнями

Псевдооберненням функціонального рівняння, отримуємо множину розв'язків

$$\overline{u} \in \Omega_u = \{u : u = P^{+} B_y + v - P^{y} P v, \forall v \in R^{M_0 + M_\Gamma}\}, \tag{23}$$

де

$$\begin{aligned} P &= \int_{(\cdot)} B^T(s) B(s) ds, \\ B_y &= \int_{(\cdot)} B^T(s) T(s) ds. \end{aligned} \tag{24}$$

Узгодження зі спостереженнями

Матрицю P та вектор B_y подамо у вигляді

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, B_y = \begin{pmatrix} B_{y1} \\ B_{y2} \end{pmatrix} \tag{25}$$

де

$$P_{ij} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x) B_{1j}(x) dx + \int_{\Gamma \times [0,T]} B_{2i}^T(x,t) B_{2j}(x,t) dxdt, \tag{26}$$

$$B_{yi} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x) Y_0(x) dx + \int_{\Gamma \times [0,T]} B_{2i}^T(x,t) Y_\Gamma(x,t) dxdt \quad (i,j = \overline{1,2}). \tag{27}$$

Похибка

Знайдені вектори дозволять знайти функцію стану $y(s)$ з точністю

$$\epsilon_0^2 = \min_{u_0 \in \Omega_0, u_\Gamma \Omega_\Gamma} \Phi == \min_{u \in \Omega_0 \times \Omega_\Gamma} \int_{(\cdot)} ||B(s)u - Y(s)||^2 ds =$$

$$\int_{S_0} Y_0^T(x) Y_0(x) dx + \int_{\Gamma \times [0,T]} Y_\Gamma^T(x,t) Y_\Gamma(x,t) dxdt - B_y^T P^+ B_y. \quad (28)$$

де Φ визначена за (4).

Дякую за увагу