Київський національний університет імені Тараса Шевченка
факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Звіт до лабораторної роботи №2 з предмету
“Основи методів обчислень”
на тему
“Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь”

Студентки групи МСС-3
Мазур Дарини Анатоліївни
Викладач: Риженко Андрій Іванович

Варіант 6

Київ 2020

Зміст

Постановка задачі

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$Ax = b$ порядку n.

I) Одним з прямих методів знайти:

а) розв'язок системи $\bar{x}$;

б) нев'язку $\bar{r} = A\bar{x} - \bar{b}$;

в) число обумовленості матриці А;

г) визначник матриці А (знайдений за допомогою заданого прямого методу) ;

д) обернену матрицю A^{-1} (знайдениу за допомогою заданого прямого методу), вивести також матрицю $A^{-1} \cdot A$.

II) Одним з ітераційних методів знайти:

а) розв'язок системи $\bar{x}$, отриманий з точністю ε ;

б) нев'язку $\bar{r} = A\bar{x} - \bar{b}$;

в) вивести кількість ітерацій.

14) Елементи матриці A та вектора b обчислюються за формулами :

$$a_{ij} = 35/(5 \cdot i \cdot j + (i \cdot j)^{p+1})^{p-0.5}, \ \bar{b} = (n, n-1, \ldots, 1)^T, \ p = 1, \ n_0 = 7, \ (n = 5{,}15);$$

Задамо $n_0 = 7$ і $p = 1$ і побудуємо задану матрицю A і вектор-стовпчик b за формулами, наведеними вище, використовуючи Maple:

```
> p := 1 :
  n_0 := 7 :
```

$$f := (i, j) \mapsto \frac{35}{(5 \cdot i \cdot j + (i \cdot j)^{p+1})^{p-0.5}} :$$

$$A := Matrix(n_0, f);$$

$$\begin{bmatrix} 14.28869016 & 9.354143466 & 7.144345082 & 5.833333334 & 4.949747467 & 4.308202185 & 3.818813078 \\ 9.354143466 & 5.833333334 & 4.308202185 & 3.432032364 & 2.857738034 & 2.450490147 & 2.145987688 \\ 7.144345082 & 4.308202185 & 3.118047822 & 2.450490147 & 2.020725942 & 1.720156155 & 1.497861724 \\ 5.833333334 & 3.432032364 & 2.450490147 & 1.909406540 & 1.565247585 & 1.326671576 & 1.151415466 \\ 4.949747467 & 2.857738034 & 2.020725942 & 1.565247585 & 1.278019301 & 1.080123450 & 0.9354143466 \\ 4.308202185 & 2.450490147 & 1.720156155 & 1.326671576 & 1.080123450 & 0.9110136112 & 0.7877609890 \\ 3.818813078 & 2.145987688 & 1.497861724 & 1.151415466 & 0.9354143466 & 0.7877609890 & 0.6804138173 \end{bmatrix}$$

> $g := j \mapsto n_0 - j + 1 :$
$b := Vector\left(n_0, g\right);$

$$b := \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Розв’язання задачі прямим методом (методом Гаусса)

Теоретичні відомості

$Ax = b$,

A − матриця $n \times n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$

$b = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$, $det(A) \neq 0$.

Маємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_{1n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_{2n+1}, \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = a_{nn+1}, \end{cases}$$

де $a_{in+1} = b_i$ - відомий вектор правих частин

Метод виключення:

1)Виключаємо x_1 з усіх рівнянь, починаючи з другого:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{1n+1}^{(1)}, \\ \quad a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = a_{2n+1}^{(1)}, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \quad a_{n2}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)} x_n = a_{nn+1}^{(1)}, \end{cases}$$

де $a_{11} \neq 0, \quad a_{1i}^{(1)} = a_{1i}/a_{11}, \quad i = \overline{2,n},$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - a_{i1}^{(0)} a_{1j}^{(1)}, \quad i = \overline{2,n}, \; j = \overline{2,n+1}, \quad a_{ij}^{(0)} = a_{ij}.$$

2)Наступний крок - виключити x_2 з усіх рівнянь, починаючи з третього. Продовжуємо цей процес і отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{1n+1}^{(1)}, \\ \qquad x_2 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n = a_{2n+1}^{(2)}, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad x_n = a_{nn+1}^{(n)}, \end{cases}$$

Розглянемо k-тий крок процесу:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{1n+1}^{(1)}, \\ \quad x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}^{(2)} x_n = a_{2n+1}^{(2)}, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad x_{k-1} + a_{k-1k}^{(k-1)} x_k + \ldots\ldots\ldots + a_{k-1n}^{(k-1)} x_n = a_{k-1n-1}^{(k-1)}, \\ \qquad\quad a_{kk}^{(k-1)} x_k + \ldots\ldots\ldots + a_{kn}^{(k-1)} x_n = a_{kn-1}^{(k-1)}, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\quad a_{nk}^{(k-1)} x_k + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}^{(k-1)} x_n = a_{nn+1}^{(k-1)}, \end{cases}$$

Розглянемо k-те рівняння. Припустимо, що $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ і поділимо на нього це рівняння. Далі послідовно множимо це рівняння на $a_{ik}^{(k-1)},\ i = \overline{k+1, n}$, і віднімаємо його від $i-$го рівняння системи. Тоді система набуде вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{1\,n+1}^{(1)}, \\ \quad x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{2n}^{(2)} x_n = a_{2\,n-1}^{(2)}, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad x_k + a_{kk}^{(k)} x_{k-1} + \dots\dots\dots + a_{k\,n}^{(k)} x_n = a_{k\,n+1}^{(k)}, \\ \qquad\quad a_{k+1\,k+1}^{(k)} x_{k+1} + \dots\dots\dots + a_{k+1\,n}^{(k)} x_n = a_{k+1\,n+1}^{(k)}, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad\quad a_{nk}^{(k)} x_{k+1} + \dots\dots\dots + a_{nn}^{(k)} x_n = a_{n\,n+1}^{(k)}, \end{cases}$$

Це прямий хід методу Гауса, його алгоритм можна записати так:

$$a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} \Big/ a_{kk}^{(k-1)}, \quad k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{k+1, n+1},$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k)}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad i = \overline{k+1, n}$$

$j = \overline{k+1, n+1}$

при $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ умові

Зворотній хід методу Гаусса:

$$x_n = a_{n\,n+1}^{(n)}, \quad x_i = a_{i\,n+1}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j, \quad i = \overline{n-1, 1}$$

Загальна кількість операцій має порядок:

$$Q = \frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$$

Наприклад, метод Крамера для розв'язання СЛАР має складність $Q = O(n!n)$.

У матричному вигляді k-тий крок методу Гаусса можна подати у вигляді:

$$A_k = M_k A_{k-1}, \text{ де } A_{k-1} = M_{k-1} M_{k-2} \dots M_1 A,$$

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & m_{(k+1)k} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{nk} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad m_{kk} = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad m_{ik} = \frac{-a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Тоді процес виключення методу Гаусса можна подати у вигляді:

$$MA\bar{x} = M\bar{b}, \quad \text{де} \quad M = M_n M_{n-1} \dots M_1.$$

Далі аналогічно до попереднього(зворотній хід)

Метод Гаусса з вибором головного елемента

Розглянемо цей метод для вибору головного по стовпцях:

$$\left|a_{i_0 k}^{(k-1)}\right| = \max_i \left|a_{ik}\right|, \quad i = \overline{k,n};$$

Відмінність від попереднього заключається в тому, що на k-оту кроці ми обираємо найбільший елемент в стовпчику (починаючи з k-го елемента) та переставляємо, якщо знайшли, місцями з поточним a_{kk}. На кожному кроці можна записати матрицю перестановок

P_{kl} – матриця, що утворюється з одиничної матриці за допомогою перестановки рядків *k* та *l*.

Кількість таких перестановок (*l*) використовується при обчисленні визначника матриці

$$detA = (-1)^l a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)} \ldots a_{nn}^{(n-1)}$$

Все інше виконується аналогічно.

2. Після розв'язання системи отримаємо вектор $\bar{x}$. Нез'язку знаходимо за формулою $\bar{r} = A\bar{x} - b$.

3. Визначник шукаємо за допомогою формули, зазначеної вище.

4. Для обчислення оберненої матриці достатньо розв'язати рівняння:

$$AX = E$$

Усе зводиться до вирішення систем

$$A\overline{x}^{(j)} = \overline{e}^{(j)}, \quad j = \overline{1,n},$$

де $\overline{x}^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{nj})^T$, а у вектора $\overline{e}^{(j)}$ дорівнює одиниці j-та компонента, а всі інші дорівнюють нулю.

5. Число обумовленості - це величина, що характеризує точність розв’язку, отриманого чисельним методом. Якщо точність велика, то дані добре обумовлені, інакше вони погано обумовлені.

Число обумовленості характеризує стійкість СЛАР до обчислювальної похибки. Щоб знайти число обумовленості, треба норму матриці А помножити на норму оберненої матриці. За норму матриці оберемо максимум сум модулів елементів по рядках матриці.

$$||A||_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

Обчислення методу Гаусса

Спочатку знаходимо розв'язок $\overline{x}$ *:*

```
Розв'язок:
    -4650.8845902741
   202992.6881033376
 -2179895.6948133036
  9279942.3470314238
-18306882.8184267581
 16790117.7031403966
 -5790334.5975340949
```

і нев'язку

```
Нев'язка:
0.0000000000e+00
1.6763806343e-08
5.5879354477e-09
5.5879354477e-09
1.8626451492e-09
1.8626451492e-09
2.3283064365e-09
```

Видно, що усі значення несуттєво відхиляються від 0 (існує похибка ЕОМ), отже, розв'язок знайдено правильно.

Визначник матриці: det(A)

```
Визначник:
-3.4835875465e-24
```

```
Оберена матриця :
        20.802822        -1368.865339        18388.489648       -90352.551978       197094.842357      -194788.003021        71175.926336
     -1368.865359        82115.316314     -1036221.206348      4866538.975579    -10258693.940865      9870202.971162     -3529491.142582
     18388.489992     -1036221.212473     12597895.568082    -57716134.270480    119530107.476930   -113484917.378623     40163283.718052
    -90352.553837      4866539.019747    -57716134.466600    260301298.450563   -533265922.342081    502286102.070235   -176685782.478071
    197094.846586    -10258694.053950    119530108.146653   -533265923.550383   1084487568.811122  -1016089323.410190    355994711.434453
   -194788.007287      9870203.092905   -113484918.189922    502286104.022172  -1016089325.077356    948411198.042531   -331341830.795353
     71175.927911     -3529491.189430     40163284.051120   -176685783.379690    355994712.461316   -331341831.210171    115514619.343220
```

```
Добуток заданої матриц? та оберненої до неї:
     1.0000000001        0.0000000000       -0.0000000298       -0.0000001192       -0.0000002384        0.0000002384        0.0000000000
     0.0000000001        1.0000000047       -0.0000000745       -0.0000000596        0.0000001192        0.0000002384        0.0000000596
     0.0000000001       -0.0000000009        1.0000000000       -0.0000002682        0.0000002980        0.0000000000        0.0000000596
     0.0000000000        0.0000000023       -0.0000000894        1.0000000000       -0.0000000596        0.0000004172        0.0000000149
     0.0000000000       -0.0000000014       -0.0000000149       -0.0000002384        1.0000002384        0.0000000596        0.0000000745
     0.0000000000       -0.0000000005       -0.0000000037       -0.0000001490        0.0000000596        1.0000000298        0.0000000596
     0.0000000000       -0.0000000005       -0.0000000112       -0.0000000149        0.0000001788        0.0000001192        1.0000000000
```

Отримали матрицю з одиничними діагональними елементами, інші елементи несуттєво відхиляються від 0 (існує похибка ЕОМ). Отже, обернену матрицю знайдено правильно.

```
Число обумовленост?:
155046721984.3584289551
```

Розв’язання задачі ітераційним методом (методом релаксації)

Теоретичні відомості

Метод релаксації є узагальненням методу Зейделя

Маємо $Ax = f$, тоді ітераційна формула

$$(D + \omega A_L)\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\omega} + Ax^{(k)} = f$$

$D -$ діагональ матриці A

$A_L -$ лівий нижній трикутник матриці A

$w -$ параметр

Обчислення на k+1 кроці:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

Теорема

Нехай А - симетрична, додатно визначена матриця, тоді метод верхньої релаксації збігається при

$0<w<2$.

Для знаходження нев'язки: після розв'язання системи отримаємо вектор $\bar{x}$. Нез'язку знаходимо за формулою $\bar{r} = A\bar{x} - b$.

За умовою потрібно розв'язати задачу з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$. Будемо виконувати ітерації, поки $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \le \varepsilon$.

Норма має вигляд:

$$\|x\|_\infty = \max_{j=\overline{1,n}} |x_j|$$

За умовою дано 3 параметры w: 0.2, 0.5, 0.8. У практичній частині виконаємо завдання для кожного параметра, порівняємо результати та визначимо, який параметр краще обрати для поставленої задачі.

Обчислення методу релаксації

Метод є збіжним для det(A) > 0, A має бути також симетричною, параметр будемо обирати з *0<w<2*.

Матриця A є симетричною. Для заданого вигляду матриці було обчислено визначник:

$det(A);$

```
Визначник:
-3.4835875465e-24
```

Визначник від’ємний, тому метод не буде збіжним.

Додамо до діагональних елементів матриці A 10, отримаємо:

$det(A);$ $3.424580407\ 10^{7}$

Отже, метод буде збіжним.

w=0.2

```
Розв'язок:
0.0747784347
0.2153632345
0.2180961352
0.1763769284
0.1142697428
0.0409970668
-0.0390919441

Кількість ітерацій:
45

Нев'язка:
1.0773487444e-02
-2.5352731686e-03
-1.8483799661e-03
-1.4328846567e-03
-1.1767535713e-03
-9.9035931095e-04
-8.4000237925e-04
```

w=0.5

```
Розв'язок:
0.0741278483
0.2157232909
0.2183589276
0.1765842271
0.1144422250
0.0411442525
-0.0389648500

Кількість ітерацій:
20

Нев'язка:
3.3995359640e-03
4.9889080686e-05
-1.9779984332e-04
-2.6788930407e-04
-2.8941752513e-04
-2.9147348746e-04
-2.8477308727e-04
```

w=0.8

```
Розв'язок:
0.0739255053
0.2157994526
0.2184356329
0.1766530590
0.1145034434
0.0411989663
-0.0389155932

Кількість ітерацій:
11

Нев'язка:
8.7368104149e-04
3.4445826008e-04
1.5120974003e-04
4.6002799671e-05
-1.4979522032e-05
-5.1402735849e-05
-7.3443840569e-05
```

Для методу релаксації розв'язок було найшвидше отримано при w=0.8.

Висновки

Отже, на основі проведеної лабораторної роботи, було розв'язано СЛАР методом Гаусса (з вибором головного елементу) і методом релаксації. За допомогою ітераційного методу було досягнуто точності $\varepsilon = 10^{-4}$.