



Università degli Studi di Salerno  
Dipartimento di Informatica

---

Corso di Laurea Magistrale in Informatica

# **Analisi e contromisure per bitcoin nell'era del quantum computing**

**Docente**

Prof.ssa **Genoveffa Tortora**

**Candidato**

**Tecchia Dario**

0522500736

---

Anno Accademico 2021-2022

# Abstract

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Quantum Computing</b>	<b>5</b>
1.1 Il Quantum Bit . . . . .	7
1.1.1 Definizione di quantum bit . . . . .	7
1.1.2 Rappresentazione geometrica di un qubit . . . . .	11
1.2 Porte logiche quantistiche . . . . .	14
1.2.1 Porte Logiche a singolo qubit . . . . .	15
1.2.2 Porte logiche a qubit multipli . . . . .	19
1.3 Misurazione di un sistema di qubit . . . . .	20
1.4 Registri quantistici . . . . .	21
1.5 Entanglement . . . . .	23
1.6 Realizzazione di un computer quantistico . . . . .	24
1.6.1 Classi di complessità . . . . .	24
1.6.2 Macchina di Turing Quantistica . . . . .	26
1.6.3 Condizioni per la realizzazione . . . . .	28
<b>2 Blockchain</b>	<b>32</b>

INDICE	Cap.0
<b>3 Blockchain nell'era quantistica e Bitcoin QR</b>	<b>33</b>
<b>4 Bitcoin QR Implementato</b>	<b>34</b>
<b>5 Conclusioni</b>	<b>35</b>

# Elenco delle figure

1.1	Rappresentazione di una Sfera di Bloch . . . . .	12
1.2	Visualizzazione dei qubit . . . . .	13
1.3	Visualizzazione dell'applicazione della Porta X . . . . .	16
1.4	Visualizzazione dell'applicazione della Porta Y . . . . .	17
1.5	Visualizzazione dell'applicazione della Porta Z . . . . .	18
1.6	Visualizzazione dell'applicazione della Porta di Hadamard	18
1.7	Visualizzazione degli effetti dell'entanglement . . . . .	24
1.8	Le classi di complessità per $P = NP$ e $P \neq NP$ . . . . .	25
1.9	La classe di complessità BQP rispetto a quelle classiche	27
1.10	Approcci per la realizzazione di qubit . . . . .	30

# Elenco delle tabelle

1.1 Insieme delle possibili operazioni del gate CNOT . . . . 20

# Introduzione

Si può asserire con certezza che il sistema internazionale economico ha subito un drastico cambiamento dopo l'introduzione di concetti come la *blockchain*, il *Bitcoin* e, più in generale, le *criptovalute*. La rivoluzione è iniziata nel 2008 quando venne pubblicato il *white paper* intitolato *"Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System"* di Satoshi Nakamoto [4]. Da allora, la blockchain ha subito rapidamente innumerevoli evoluzioni e ha visto ampliarsi notevolmente i suoi campi di utilizzo, passando dall'essere una semplice base per le monete elettroniche, per poi essere utilizzata come fondamento per il concetto di *smart contract* e *DApp*<sup>1</sup>, fino all'avvento degli *NFT (Non Fungible Token)*.

Come vedremo, la blockchain porta un numero grande di vantaggi che però rischiano di essere compromessi con l'avvento di una recente tecnologia che sta prendendo sempre più piede, il *quantum computing*. Il quantum computing o calcolo quantistico è una tecnologia emergente che sfrutta le leggi della meccanica quantistica per risolvere problemi troppo complessi per i computer classici. Analogamente all'informatica

---

<sup>1</sup>App Decentralizzate simili alle app tradizionali, con la differenza fondamentale che al posto di appoggiarsi su server centralizzati sfruttano le piattaforme blockchain e il loro network distribuito.

tradizionale, anche il calcolo quantistico ha un'unità base che è il *qubit*. L'evoluzione di questi calcolatori, in contrario a quanto affermato dalla Legge di Moore, sta avvenendo in maniera esponenziale passando in pochi anni da pochi qbit ad un centinaio.

Tutta questa capacità computazionale può mettere in seria difficoltà gli attuali algoritmi di firma con l'*ECDSA*<sup>2</sup> che è alla base di bitcoin e di innumerevoli altri sistemi altamente critici. Bisogna quindi trovare un modo per rendere la blockchain immune a questa nuova potenza computazionale. L'implementazione e lo studio degli attuali metodi di protezione proposti sono alla base di questo lavoro di tesi.

È stato implementato un nuovo modello di blockchain, chiamato bitcoin QR, che nasce come fork dell'attuale bitcoin. L'algoritmo hashcash, alla base della proof of work di bitcoin classico, è stato sostituito con *equiash*, che risulta essere resistente nei confronti degli attacchi quantistici basati sull'algoritmo di Grover. Dopodichè, una volta aver analizzato i vari algoritmi di firma post quantistica, l'algoritmo *ECDSA*<sup>2</sup> è stato sostituito con XMSS che, come suggerito dal *PQCCRYPTO (European Consortium of Universities and Companies for Post-Quantum Cryptography Issues)*, risulta essere quantum safe. Infine, è stata proposta una possibile rete ausiliaria off-chain volta a risolvere i problemi di scalabilità di bitcoin, alternativa alla lighting network, denominata quantum lighting network, resa sicura tramite la distribuzione a chiave quantistica QKD.

L'elaborato di tesi si articola sui seguenti capitoli.

---

<sup>2</sup>In crittografia, l'Elliptic Curve Digital Signature Algorithm offre una variante del Digital Signature Algorithm usando la crittografia ellittica.

- Nel **Capitolo 1** viene fatta un'introduzione all'elaborato.
- Nel **Capitolo 2** viene approfondito il concetto di computer-quantistica, da come avviene la rappresentazione dell'informazione fino alla gestione di quest'ultima.
- Nel **Capitolo 3** viene introdotto il concetto di blockchain, dalla nascita fino alle idee rivoluzionarie di Satoshi Nakamoto.
- Nel **Capitolo 4** vengono illustrate le debolezze della blockchain nell'era quantistica e come queste posso essere irrobustite.
- Nel **Capitolo 5** vengono implementati gli irrobustimenti introdotti nei capitoli precedenti.
- Nel **Capitolo 6** vengono tratte le conclusioni e i possibili sviluppi futuri.

# Capitolo 1

# Quantum Computing

L'informatica quantistica combina l'informatica tradizionale con la meccanica quantistica ed è un campo di ricerca in rapida crescita. Questo interesse verso il calcolo quantistico inizia negli anni settanta con lo sviluppo di una serie di tecniche per ottenere il controllo completo di singoli sistemi quantistici.

Fino a quel momento, la teoria classica dell'informatica era stata fondata sulla tesi ampiamente accettata di Church-Turing, secondo la quale era possibile teorizzare una macchina ideale, nota come *Macchina di Turing*, capace di simulare in modo efficiente qualsiasi modello di calcolo esistente.

Tuttavia, l'emergente paradigma di calcolo basato sulle proprietà meccaniche quantistiche della natura portò molti scienziati a realizzare che, mentre un computer ordinario poteva essere usato per simulare un computer quantistico, era impossibile eseguire questa simulazione in modo efficiente: ogni tentativo di simulare l'evoluzione di un ge-

nerico sistema fisico-quantistico su una macchina di Turing sembrava richiedere un overhead esponenziale di risorse.

R. P. Feynman fu tra i primi fisici ad occuparsi della questione, dando le linee guida sul possibile utilizzo di sistemi quantistici come costituenti di un nuovo tipo di calcolatore; sottolineò, inoltre, come un calcolatore di questo tipo sarebbe allo stesso tempo un "simulatore" ideale per i sistemi quantistici. A partire dalle osservazioni sviluppate in quel periodo, si iniziò a costruire una nuova teoria dell'informazione, che tenesse conto delle possibilità, ancora teoriche, offerte dal calcolatore quantistico. In particolare, una nuova classificazione della complessità computazionale si rese necessaria, grazie alle peculiarità ed ai vantaggi offerti dal nuovo paradigma computazionale.

Contributi fondamentali sono stati dati da David Deutsch che, nel 1985, si chiese se le leggi della fisica quantistica potessero essere usate per derivare una versione ancora più forte della tesi di Church-Turing e tentò di definire un dispositivo computazionale che fosse capace di simulare in modo efficiente un sistema fisico arbitrario. Questo dispositivo sarebbe diventato la moderna concezione di un computer quantistico e che questi dispositivi potessero avere poteri di calcolo ben superiori a quelli dei computer tradizionali, indipendentemente dai loro progressi ottenibili nel calcolo classico.

Negli anni seguenti, lo studio degli algoritmi quantistici si è evoluto come un sotto-campo dell'informatica quantistica con applicazioni di diverso tipo: ricerca e ottimizzazione, machine learning, simulazione di sistemi quantistici e crittografia.

Quest'ultimo campo è quello che più ci interessa, infatti, nel 1994 Peter Shor pubblica l'algoritmo che porta il suo nome per la fattorizzazione degli interi in tempo polinomiale.<sup>[3]</sup> Questo è stato una svolta epocale nella materia, perché un importante metodo di crittografia asimmetrica noto come RSA si basa sulla supposizione che la fattorizzazione degli interi sia difficile dal punto di vista computazionale. L'esistenza dell'algoritmo quantistico in tempo polinomiale può dimostrare che uno dei protocolli crittografici più usati al mondo sarebbe vulnerabile a un computer quantistico.

## 1.1 Il Quantum Bit

### 1.1.1 Definizione di quantum bit

L'informazione non può essere considerata separatamente dalla sua natura fisica: non si può, cioè, mantenere, modificare o trasmettere informazione senza un adeguato supporto fisico. Nei computer tradizionali viene utilizzato come modello fondamentale il *bit*, che rappresenta un sistema a due stati, 0 e 1. La scelta della rappresentazione binaria è dettata dalla semplicità e comodità di realizzazione nei sistemi elettronici. Il bit classico, quindi, mantiene correttamente l'informazione relativa ad una scelta esclusiva tra i due stati possibili in cui si può trovare (con  $n$  bit possiamo rappresentare  $2^n$  stati).

La computazione quantistica introduce una nuova unità fondamentale che prende il nome di *quantum bit*, chiamato anche *qubit*. Un

qubit usa i fenomeni meccanici quantistici della sovrapposizione per ottenere una combinazione lineare di due stati. Un bit binario classico può rappresentare solo un singolo valore binario, ad esempio 0 o 1, ovvero può trovarsi solo in uno di due stati possibili. Un qubit tuttavia può rappresentare uno 0, un 1 o qualsiasi proporzione di 0 e 1 nella sovrapposizione di entrambi gli stati, con una determinata probabilità che si tratti di uno 0 e una determinata probabilità che si tratti di un 1.

Fisicamente viene rappresentato con un sistema microscopico a due livelli come lo spin di una particella, la polarizzazione di un singolo fotone o due stati di un atomo ottenibili cambiando il livello energetico di un suo elettrone.

Se volessimo descriverlo matematicamente potremmo definirlo come un vettore unitario descritto in uno spazio vettoriale di Hilbert complesso bidimensionale ( $\mathbb{C}^2$ ).

Per rappresentare gli elementi di uno spazio vettoriale complesso è conveniente utilizzare **la notazione di Dirac** (notazione standard della meccanica quantistica). Tale scelta è motivata dal fatto che quando si opera su un computer quantistico reale si utilizzano numerosi qubit, la cui rappresentazione sotto forma di vettore diventerebbe estremamente difficoltosa.

L'algebra di Dirac comprende due tipi di vettori: **bra** e il suo vettore duale **ket**.

Un ket rappresenta un vettore colonna e viene utilizzato solitamente per descrivere lo stato di un sistema:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Mentre un bra rappresenta la coniugata trasposta del vettore colonna ket:

$$\langle a| = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

Il prodotto scalare tra i due vettori si indica con  $\langle \alpha | \beta \rangle$  in modo che il prodotto formi un **braket**.

Definendo due vettori:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e associandoli rispettivamente agli stati  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , essi formano una base *ortonormale*, cioè una base *ortogonale* di vettori aventi *norma 1*, nota come **base computazionale standard**.

Possiamo inoltre dare una definizione degli stati attraverso la forma matriciale (vettori colonne), ottenendo la seguente rappresentazione:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I due vettori appena introdotti corrispondono esattamente agli stati classici 0 e 1. A questo punto è bene specificare la principale differenza con il bit classico: un qubit, oltre a potersi trovare in uno degli stati

fondamentali, potrà trovarsi contemporaneamente anche in un'altra qualsiasi combinazione di entrambi gli stati base.

Se definiamo  $|\psi\rangle$  la seguente combinazione lineare:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  rappresentano numeri complessi tali che valga:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

allora  $|\psi\rangle$  è un possibile stato del qubit la cui notazione algebrica equivalente sarà:

$$|\psi\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Il che equivale a dire che  $|\psi\rangle$  si trova in una sovrapposizione di stati. Quando abbiamo a che fare con un bit classico possiamo sempre stabilire con assoluta certezza in quale dei due stati esso si trovi, nel caso di un qubit non possiamo determinare con altrettanta precisione il suo stato quantistico, ossia i valori esatti di  $\alpha$  e  $\beta$ .

La meccanica quantistica ci dice che soltanto attraverso l'effettiva misurazione del sistema otterremo un valore discreto del qubit, più precisamente si dice che lo stato collasserà nello stato  $|0\rangle$  con probabilità  $|\alpha|^2$  o in  $|1\rangle$  con probabilità  $|\beta|^2$ . Proprio per questa ragione, i due valori  $\alpha$  e  $\beta$  prendono il nome di **ampiezze di probabilità** (amplitudes). Una prima semplice sovrapposizione è definita dallo stato:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

il quale ci tornerà utile in seguito.

Dunque per ora possiamo immaginare che fino al momento della sua effettiva misurazione, un qubit avrà una probabilità del 50% di trovarsi nello stato  $|0\rangle$  e un altro 50% di trovarsi in  $|1\rangle$ ; come se lanciando una moneta essa continuasse a girare su sé stessa fino al momento in cui la guardiamo e ne osserviamo il valore.

### 1.1.2 Rappresentazione geometrica di un qubit

Per ottenere una visualizzazione geometrica utile per comprendere meglio i diversi stati in cui un qubit può trovarsi, utilizziamo una sfera di raggio unitario la cosiddetta **Sfera di Bloch**, introdotta dal fisico Felix Bloch. Gli stati del qubit verranno collocati in punti precisi della superficie della sfera, associando quindi ad ogni stato un punto. Lo stato  $|1\rangle$  verrà collocato nel polo sud, lo stato  $|0\rangle$  nel polo nord. I punti che giacciono sull'equatore avranno una probabilità del 50% di essere nello stato  $|0\rangle$  e 50% di essere nello stato  $|1\rangle$  così le altre locazioni indicheranno gli altri stati di sovrapposizioni quantistiche di  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ .

Come possiamo vedere nella figura 1.1, possiamo stabilire una corrispondenza biunivoca fra la rappresentazione generica dello stato di un qubit:

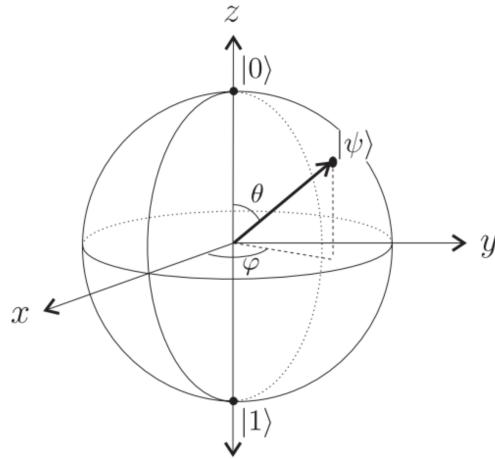


Figura 1.1: Rappresentazione di una Sfera di Bloch

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

E la sua rappresentazione sulla sfera unitaria in  $\mathbb{R}^3$ :

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

Dove  $\theta$  e  $\phi$  sono le coordinate sferiche del punto. Si può quindi scrivere

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + e^{i\phi}\beta|1\rangle$$

Dato che il vettore di stato ha norma 1

$$\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = 1$$

Si usa l'identità trigonometrica:

$$\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$$

Per descrivere  $\alpha$  e  $\beta$  reali in termini della variabile  $\theta$ :

$$\alpha = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \beta = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Da questo lo stato di ogni qubit si può descrivere usando le due variabili  $\theta$  e  $\phi$ :

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$$

Interpretando  $\theta$  e  $\phi$  come coordinate sferiche, si può tracciare qualsiasi stato del qubit sulla superficie della sfera di Bloch. In figura 1.2 vengono visualizzati i seguenti vettori di stato del qubit:

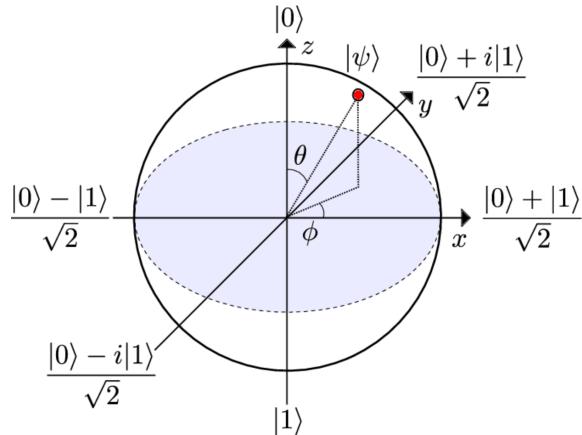


Figura 1.2: Visualizzazione dei qubit

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  con  $\theta = 0$  e  $\phi = 0$  cioè lo stato  $|0\rangle$

- $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  con  $\theta = 180$  e  $\phi = 0$  cioè lo stato  $|1\rangle$
- $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  con  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e  $\phi = \frac{\pi}{2}$
- $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  con  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e  $\phi = 0$  chiamato anche stato  $|+\rangle$
- $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  con  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e  $\phi = \frac{3\pi}{2}$
- $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  con  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  e  $\phi = 0$  chiamato anche stato  $|-\rangle$

Dato che in input inizialmente i qubit hanno sempre stato  $|0\rangle$ , per poter operare sui qubit e ottenere degli stati differenti bisogna ruotare gli assi cardinali con le apposite *porte logiche quantistiche*.

## 1.2 Porte logiche quantistiche

Esattamente come nel modello di computazione classica utilizziamo delle porte logiche come l'AND, OR o il NOT per effettuare delle operazioni tra bit, nel modello quantistico avremo delle porte che si occuperanno di manipolare i qubit per ottenere un risultato. In particolare ogni gate quantistico deve rispettare due criteri fondamentali:

- **Reversibilità:** Un qubit a cui è stato applicato un cambiamento dello stato tramite l'utilizzo di una porta deve poter ritornare nello stato iniziale tramite l'applicazione della stessa porta all'output della prima.
- **Conservazione del vincolo di normalizzazione:** In questo modello, le porte logiche sono rappresentate da matrici unitarie. Una matrice quadrata  $U$  viene definita **unitaria** se vale  $UU^* = I$ , dove  $U^*$  è la matrice **trasposta** e  $I$  è la **matrice identità**.

Proprio come nel modello classico, abbiamo sia porte logiche che agiscono su un singolo qubit, che porte che agiscono su più qubit.

### 1.2.1 Porte Logiche a singolo qubit

Contrariamente a quanto accade per le porte classiche, in ambito quantistico le porte a singolo bit non si limitano al **NOT**. Infatti abbiamo in totale quattro porte: **porta X**, **porta Y**, **porta Z** e **porta di Hadamard**.

Le porte X, Y e Z prendono il nome di *Porte di Pauli* e corrispondono a delle rotazioni rispettivamente sull'asse x, y e z della sfera di Bloch.

#### Porta X

Analoga alla porta NOT classica, la porta X svolge la stessa operazione del NOT classico invertendo lo stato del qubit nel caso sia uno degli

stati base. La differenza con la porta classica sta nel fatto che il NOT nel modello quantistico si dovrà occupare anche di gestire degli stati sovrapposti che sono caratterizzati dai coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  del qubit. Immaginando di rappresentare in forma vettoriale il qubit, e definendo la matrice corrispondente al NOT quantistico come:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è facilmente verificabile che applicando tale porta a un qubit nella forma  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  otterremo, seguendo la notazione vettoriale:

$$X \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

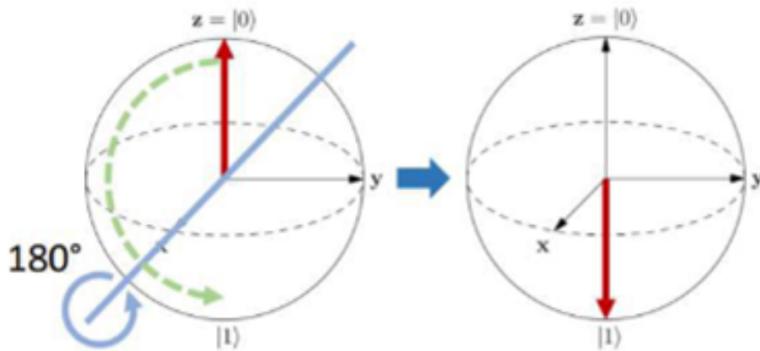


Figura 1.3: Visualizzazione dell'applicazione della Porta X

### Porta Y

La porta Y è rappresentata dalla seguente matrice:

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

che mappa la componente  $|0\rangle$  in  $i|1\rangle$  e la componente  $|1\rangle$  in  $-i|0\rangle$ .

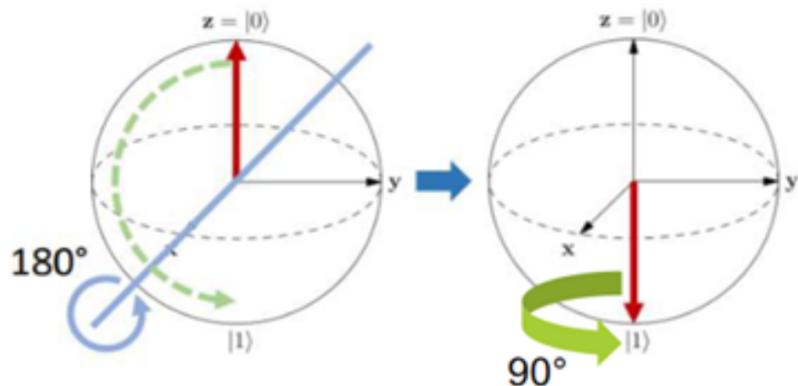


Figura 1.4: Visualizzazione dell'applicazione della Porta Y

## Porta Z

La porta Z è rappresentata dalla seguente matrice:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

che cambia il segno esclusivamente alla componente nello stato  $|1\rangle$ .

## Porta di Hadamard

La porta di Hadamard è rappresentata dalla seguente matrice:

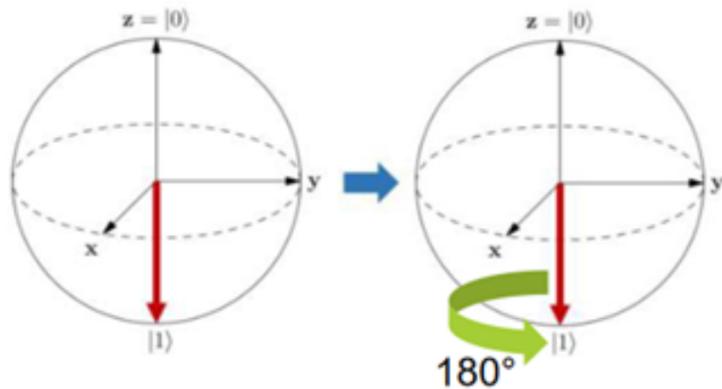


Figura 1.5: Visualizzazione dell'applicazione della Porta Z

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

che si occupa di trasformare uno stato base in una sovrapposizione di tale stato che si trovi con il 50% di probabilità in uno dei due stati fondamentali.

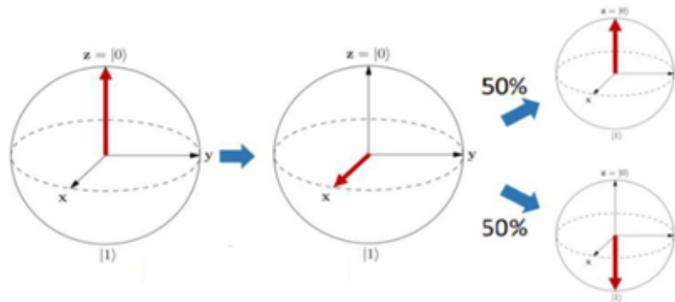


Figura 1.6: Visualizzazione dell'applicazione della Porta di Hadamard

### 1.2.2 Porte logiche a qubit multipli

Proprio come nel modello di computazione classico, anche in questo modello siamo interessati ad avere un insieme di gate capaci di realizzare tutte le operazioni del modello classico. Nel caso del modello quantistico, per ottenere tale risultato, si affiancano le porte a singolo qubit con un operatore chiamato **CNOT** o **NOT Controllato**.

Il CNOT, che corrisponde allo XOR del modello classico, è dotato di due qubit in ingresso, rispettivamente definiti *controllo* e *bersaglio* (o *target*). Dunque nel caso il qubit controllo si trovi nello stato zero allora il target viene lasciato inalterato, al contrario, se il qubit controllo è nello stato uno, allora il target viene invertito. Tale trasformazione può essere scritta come:

$$|A, B\rangle \mapsto |A, B \oplus A\rangle$$

Il gate è rappresentato dalla seguente matrice:

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dove effettivamente possiamo notare come gli ultimi due stati vengano rispettivamente invertiti e prendendo in esempio un sistema composto da due qubit, il CNOT eseguirà operazioni mostrate in tabella 1.1:

Input		Output	
Controllo	Target	Controllo	Target
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$

Tabella 1.1: Insieme delle possibili operazioni del gate CNOT

Una delle proprietà fondamentali delle porte quantistiche, in particolare del CNOT e di tutte le porte viste a singolo qubit, è quella di essere invertibili, infatti a differenza delle porte classiche XOR e NAND generalmente irreversibili, permettono di ottenere l'input avendo a disposizione il valore di output. Combinando opportunamente CNOT e porte a singolo qubit, otteniamo l'insieme dei gate necessari per definire un insieme universale, capace dunque di inglobare le operazioni sufficienti alla rappresentazione di tutte le porte logiche quantistiche e quindi l'universalità delle operazioni quantistiche.

### 1.3 Misurazione di un sistema di qubit

Fin'ora abbiamo parlato di come vengono effettuate le operazioni sui qubit, tralasciando il modo in cui alla fine della computazione le informazioni sono raccolte. Immaginiamo che una particella sia dotata di un numero finito possibile di stati base e che tale particella li possegga tutti contemporaneamente fin quando non avviene l'evento della misurazione che farà ottenere uno degli stati base con probabilità uguale

al quadrato del coefficiente associato a tale stato.

Nel nostro caso dato un qubit  $|\phi\rangle$  generico, il risultato di questa misurazione ci restituisce 0 con probabilità  $|\alpha|^2$  e 1 con probabilità  $|\beta|^2$ .

Il problema in questo caso è che la misurazione disturba il qubit, lasciandolo nello stato  $|0\rangle$  se il risultato della misurazione è 0, e nello stato  $|1\rangle$  se il risultato della misurazione è 1.

In un circuito quantistico, a differenza della controparte classica, dopo la misurazione di un qubit esso viene scartato in quanto il suo stato essendo collassato, non è più valido.

Altra differenza con la controparte classica è il risultato della misurazione è la predicitività ovvero che se l'esperimento effettuato venisse ripetuto rispettando le condizioni, ci aspetteremmo esattamente lo stesso risultato cosa che in ambito quantistico risulta incerta perché coadiuvata dal coefficiente associato allo stato.

## 1.4 Registri quantistici

Fin'ora abbiamo visto come rappresentare un solo qubit, per rappresentare un sistema a più qubit si utilizza un **registro quantistico**, che di fatto indica in che modo i qubit sono collegati tra loro. Per rappresentare questi registri si usa il **prodotto tensore**  $\otimes$ , un operatore che combina spazi vettoriali di una certa dimensione per generarne dei più grandi, infatti:  $\otimes : \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^{km}$  quindi lo spazio totale di un registro quantistico sarà  $\mathbb{C}^{2 \cdot \dots \cdot 2} = \mathbb{C}^{2^n}$ .

Formalmente si definisce un registro quantistico, secondo il quarto postulato della meccanica quantistica<sup>1</sup>, come:

$$|i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \dots |i_n\rangle$$

dove  $i = 0, 1$  e  $n$  è il numero di qubit e per convenienze possiamo rappresentare questo vettore semplicemente come  $|i_1 i_2 \dots i_n\rangle$ . Consideriamo un semplice sistema a due qubit, dove il primo è  $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \beta_0|1\rangle$  mentre il secondo  $|\theta\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ . Lo stato totale sarà una sovrapposizione dalla forma:

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \alpha_0\beta_1|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \beta_0\beta_1|11\rangle$$

Analogamente al singolo qubit dove il risultato della misurazione ci restituisce 0 con probabilità  $|\alpha|^2$  e 1 con probabilità  $|\beta|^2$ . In un sistema di  $n$  qubit possiamo anche misurare solo un sottoinsieme degli  $n$  qubit. Ad esempio lo stato risulterà in  $|00\rangle$  con probabilità  $|\alpha_{01}|^2$ , in  $|01\rangle$  con probabilità  $|\alpha_0\beta_1|^2$  e così via. Inoltre se volessimo sapere la probabilità di ottenere 0 al primo bit basta sommare le probabilità di  $|00\rangle$  e  $|01\rangle$  cioè  $|\alpha_{01}|^2 + |\alpha_0\beta_1|^2$ .

---

<sup>1</sup>Lo spazio degli stati di un sistema fisico composto è il prodotto tensore degli spazi degli stati dei sistemi fisici componenti. Se il sistema è composto da  $n$  sottosistemi e il componente  $i$ -esimo si trova nello stato  $|\phi_i\rangle$  allora lo stato del sistema totale è  $|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes \dots |\phi_n\rangle$

## 1.5 Entanglement

Dopo aver visto i registri quantistici una ulteriore proprietà legata ai possibili stati in cui può trovarsi il sistema è l'entanglement proprietà che non possiamo ritrovare in nessun oggetto della fisica classica. Questi stati chiamati entangled rappresentano quelle possibili configurazioni di  $n$  qubit componenti che non hanno un proprio stato ben definito ma solamente la loro combinazione ne rappresenta uno concreto. Più semplicemente uno stato entangled non può essere descritto come prodotto tensore degli stati dei singoli componenti. Gli stati entangled si comportano come se fossero strettamente connessi l'uno all'altro indipendentemente dalla distanza fisica che li separa di modo che una misurazione o una operazione di uno dei due stati di una coppia entangled fornisce simultaneamente informazioni sulla coppia. Un esempio per spiegare questa proprietà è dato dallo stato  $|00\rangle + |11\rangle$  che non può essere fattorizzato nel prodotto tensore di due qubit indipendenti, in quanto non esistono dei coefficienti  $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2$  tali per cui valga:

$$|00\rangle + |11\rangle = (\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle) \otimes (\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle)$$

L'entanglement è alla base della risoluzione di alcuni di quei problemi informatici non riproducibili classicamente grazie alla sua intrinseca proprietà non esistente nella fisica classica che da possibilità di ottenere un aumento esponenziale nella capacità di calcolo.

## 1.6. REALIZZAZIONE DI UN COMPUTER QUANTISTICO Cap.1

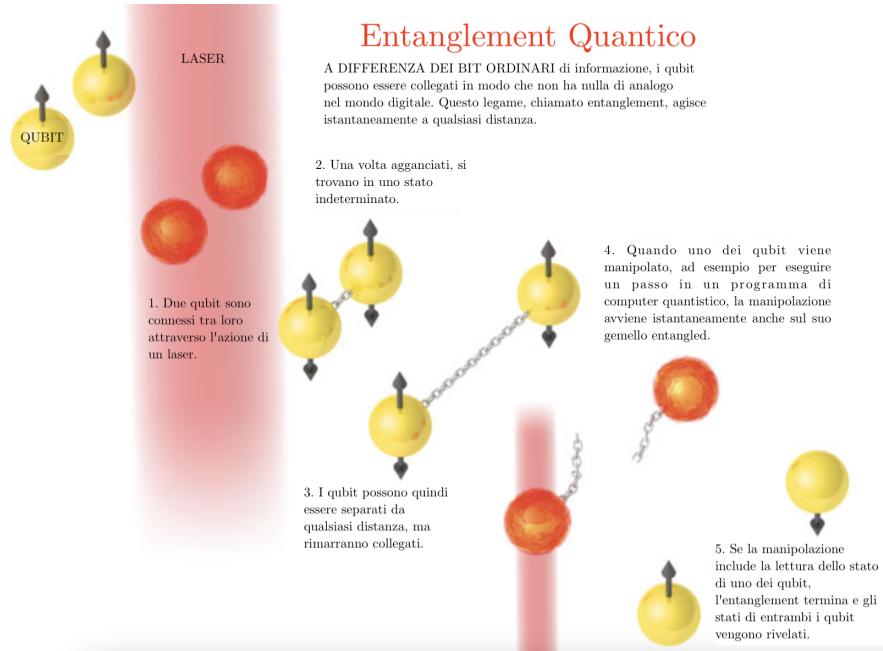


Figura 1.7: Visualizzazione degli effetti dell'entanglement

## 1.6 Realizzazione di un computer quantistico

Definiamo un computer quantistico come un calcolatore che segue il modello di computazione quantistico, sfruttando i dettami della fisica quantistica per eseguire dei calcoli che in alcuni casi risultano essere impossibili da realizzare in un calcolatore classico.

### 1.6.1 Classi di complessità

Prima di proseguire con l'introduzione delle componenti di un computer quantistico è bene tenere a mente le classi di complessità che non

## 1.6. REALIZZAZIONE DI UN COMPUTER QUANTISTICO Cap.1

sono altro un insieme di problemi di una determinata complessità. I problemi vengono eseguiti su una macchina di Turing per individuarne la particolare classe di complessità in cui rientrano. Le due classi più importanti sono **P** e **NP**.

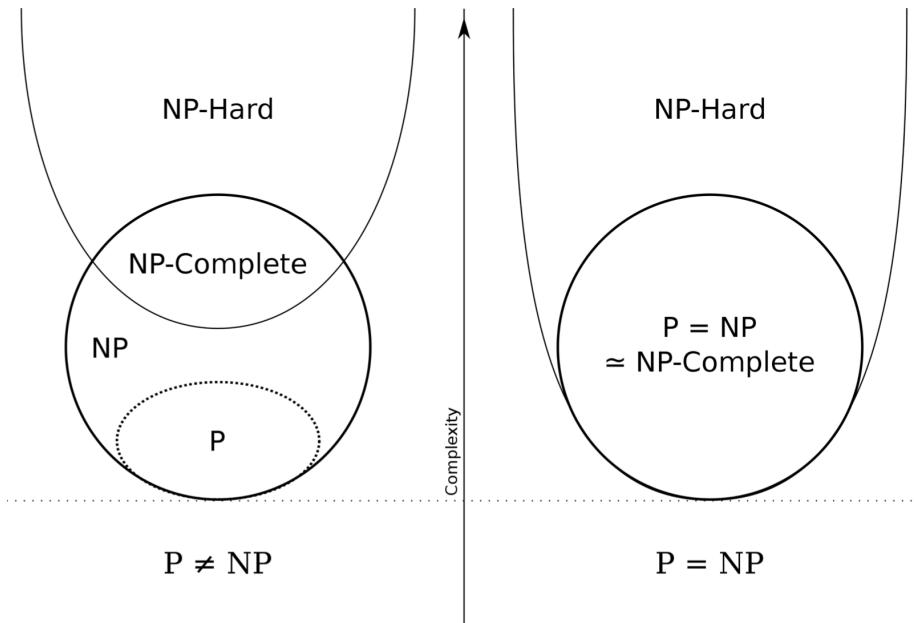


Figura 1.8: Le classi di complessità per  $P = NP$  e  $P \neq NP$

- La classe **P** è l'insieme dei problemi di decisione che possono essere risolti da una macchina di Turing deterministica in tempo polinomiale.
- La classe **NP** è l'insieme dei problemi di decisione che possono essere risolti da una macchina di Turing non deterministica in tempo polinomiale. Inoltre nella classe NP è composta anche dalle classi NP-Complete e NP-Hard.

## 1.6. REALIZZAZIONE DI UN COMPUTER QUANTISTICO Cap.1

- La classe **NP-Complete** è l'insieme dei problemi più difficili nella classe NP nel senso che, se si trovasse un algoritmo in grado di risolvere "velocemente" (in tempo polinomiale) un qualsiasi problema NP-completo, allora si potrebbe usarlo per risolvere "velocemente" ogni problema in NP.
- In teoria della complessità, i problemi NP-difficili o NP-ardui sono una classe di problemi che può essere definita informalmente come la classe dei problemi almeno difficili come i più difficili problemi delle classi di complessità P e NP.

Gli informatici *Bernstein* e *Vazirani* nel 1997 definirono una nuova classe di complessità chiamata **BQP** (*Bounded-error Quantum Polynomial time*) che è la classe di complessità dei problemi decisionali che possono essere risolti con un errore bilaterale su una macchina di Turing quantistica in tempo polinomiale. In breve, tutti i problemi decisionali che i computer quantistici possono risolvere in maniera veloce. Inoltre, è stato dimostrato che  $P \in BPQ$  e quindi è semplice dedurre che i computer quantistici possono risolvere tutti i problemi che i computer classici possono risolvere.

### **1.6.2 Macchina di Turing Quantistica**

La **Macchina di Turing Quantistica (QTM)** è stata descritta per la prima volta da Deutsch [2]. L'idea di base è abbastanza semplice, un QTM è più o meno una Macchina di Turing probabilistica (PTM)

## 1.6. REALIZZAZIONE DI UN COMPUTER QUANTISTICO Cap.1

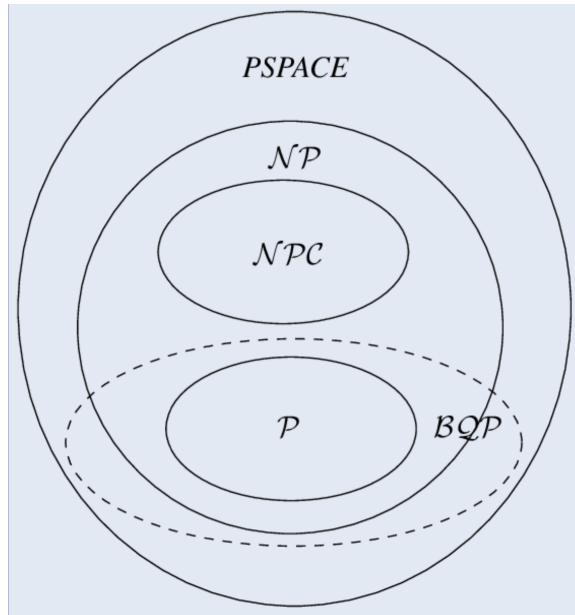


Figura 1.9: La classe di complessità BQP rispetto a quelle classiche

con ampiezze di transizione complesse anzichè probabilità reali. A sua volta una Macchina di Turing Probabilistica (PTM) è identica a una normale Macchina di Turing tranne per il fatto che ad ogni configurazione della macchina ( $q_i S_j$ ) c'è un insieme finito di regole di transizione (ognuna con una probabilità associata) che si applicano e che una scelta casuale determina quale regola applicare. Fissiamo una soglia di probabilità maggiore delle quote pari (diciamo, 75%) e diciamo che una PTM specifica calcola  $f(x)$  sull'input  $x$  se e solo se si ferma con  $f(x)$  come output con probabilità maggiore del 75%.

## 1.6. REALIZZAZIONE DI UN COMPUTER QUANTISTICO Cap.1

### 1.6.3 Condizioni per la realizzazione

Per la realizzazione di un computer quantistico nel 2000 sono stati stilati dal fisico teorico Di Vincenzo i **criteri di DiVincenzo** [1] che consistono in sette condizioni necessarie per costruire un computer seguendo il modello quantistico, le prime cinque sono necessarie per il calcolo quantistico e sono:

1. Il sistema deve essere *scalabile*, con qubit ben caratterizzati;
2. Deve essere possibile preparare uno *stato iniziale generico*, ad esempio  $|0000\rangle$ . Diversamente, sarà impossibile introdurre dati nel computer;
3. I *Tempi di de-coerenza* devono essere abbastanza lunghi, per poter realizzare un numero sufficiente di operazioni sfruttando la correlazione quantistica;
4. Occorre un *insieme universale di porte quantistiche*, ovverosia si deve poter costruire una varietà sufficiente di porte quantistiche per permettere qualsiasi operazione logica;
5. Si deve disporre di un modo per misurare lo stato dei qubit, senza il quale sarebbe impossibile estrarre l'informazione processata dal computer;

Le restanti due servono per la comunicazione quantistica e sono:

## 1.6. REALIZZAZIONE DI UN COMPUTER QUANTISTICO Cap.1

6. Deve esserci un sistema per *convertire i qubit* immagazzinati in qubit messaggeri, ovvero deve esistere un sistema per trasmettere informazioni;
7. La capacità di *trasmettere fedelmente* qubit tra le varie locazioni specificate, per la medesima ragione del punto precedente.

Negli ultimi anni si stanno sperimentando vari modi per la realizzazione dei computer quantistici come:

- Superconduttori
- Ioni intrappolati di un atomo o di una molecola
- Risonanza magnetica nucleare
- Quantum annealing o ricottura quantistica
- Silicium quantum dot

Tra tutti i più utilizzati dai produttori come IBM, Google, Rigetti sono:

**Ioni intrappolati di un atomo** In questa tipologia di approccio, vengono costruite delle cosiddette *ion trap* o trappole di ioni. Il loro scopo è trattenere all'interno degli ioni, come ad esempio un atomo di calcio che tramite l'utilizzo di un raggio laser è stato privato di uno dei due elettroni più esterni. Un chip costruito con questo approccio dei qubit è molto simile ai chip di cui sono

## 1.6. REALIZZAZIONE DI UN COMPUTER QUANTISTICO Cap.1

Atomes		Electrons				Photons	
Technologie de qubit	Ions piégés	Atomes froids	Supraconducteurs	Silicium (+quantum dot)	Impureté diamant (NV center)	Fermion de Majorana (topologique)	Photons
Domaine d'application	métrie, informatique, communication (répéteur, couplage avec photon)	métrie, informatique, communication (couplage avec photon)	métrie, informatique	métrie, informatique	métrie, communication, informatique	informatique	métrie, communication, informatique
Nature des qubits	ions piégés électromagnétiquement	atomes piégés par des pinces laser	boucle/circuit supraconducteur	électrons piégés dans un semi-conducteur	électrons d'une cavité de diamant près d'un atome d'azote	quasi-particules, paires d'anions, dans des nano-fils supraconducteurs	photons circulants dans des guides d'onde
États quantiques des qubits	niveau d'énergie de l'ion piégé	niveau d'énergie de l'atome	3 types: qubit de phase, de charge a.k.a transmon (niveau du courant) et de flux (sens du courant)	spin d'électron	niveau d'énergie des électrons du centre NV	sens de l'anion	l -propriété du photon (polarité ou autre)
Maturité (TRL) et potentiel de « Scale up » pour ordinateur quantique	<b>5</b> Extensibilité : relativement difficile	<b>4</b> Extensibilité : difficile	<b>5</b> Extensibilité : relativement facile	<b>3</b> Extensibilité : pas facile aujourd'hui mais bonne	<b>3</b> Extensibilité : relativement difficile	<b>1</b> Extensibilité : trop tôt pour se prononcer	<b>3</b> Extensibilité : difficile

Figura 1.10: Approcci per la realizzazione di qubit

composte le CPU classiche: si tratta infatti di un chip composto di oro su cui sono presenti gli ioni di calcio e al di sopra di essi, circa ad una distanza pari al diametro di un capelli, è presente un sottile strato di oro che alternando appositamente il suo campo magnetico, riesce a tenere gli ioni nella loro posizione ed evitare che fuoriescano (da qui si capisce il termine ion trap).

Come è possibile trattare questi ioni come qubit? Innanzitutto, gli ioni naturalmente seguono i principi della meccanica quantistica, ed è possibile ottenere i due stati base di un qubit tramite l'utilizzo dello spin, presente in ogni atomo, che rappresenta una intrinseca forma di momento angolare di una particella elementare. Possiamo immaginare lo spin dell'elettrone del nostro atomo di calcio come un magnete: il nord può puntare verso l'alto, ottenendo un qubit in uno stato  $|1\rangle$  che in questo caso corrisponde a  $|\uparrow\rangle$ , oppure verso il basso, ottenendo uno stato  $|0\rangle$  corrisponden-

## 1.6. REALIZZAZIONE DI UN COMPUTER QUANTISTICO Cap.1

te a  $|\downarrow\rangle$ . Per passare fra lo stato  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ , basta utilizzare delle microonde che hanno l'effetto di ruotare lo spin dell'elettrone. È possibile quindi ruotare fermarci in un qualsiasi stato compreso fra i due spin, ottenendo quella che abbiamo in precedenza chiamato superposizione.

**Superconduttori** L'approccio che utilizza i superconduttori per costruire i qubit viene utilizzato ad esempio nei computer quantistici di Google o IBM. Proprio con questo metodo di costruzione, nel 2016 Google ha annunciato di aver raggiunto la Quantum Supremacy [5], cioè è stato risolto un problema che nessun calcolatore classico potrebbe risolvere in un ragionevole lasso di tempo, utilizzando un computer quantistico a 56 qubit, prodotti con questo approccio. Un superconduttore è un particolare materiale che raffreddato ad una temperatura molto vicina allo zero assoluto (0K oppure -273.15C) annulla la sua resistività elettrica completamente e grazie a queste particolari caratteristiche risulta adatto per essere utilizzato come qubit.

# Capitolo 2

# Blockchain

## Capitolo 3

# Blockchain nell'era quantistica e Bitcoin QR

# Capitolo 4

# Bitcoin QR

# Implementato

# Capitolo 5

# Conclusioni

# Bibliografia

- [1] In: 48 (set. 2000). DOI: [10.1002/1521-3978\(200009\)48:9<771::aid-prop771>3.0.co;2-e](https://doi.org/10.1002/1521-3978(200009)48:9<771::aid-prop771>3.0.co;2-e). URL: <https://doi.org/10.1002%2F1521-3978%28200009%2948%3A9%2F11%3C771%3A%3Aaid-prop771%3E3.0.co%3B2-e>.
- [2] David Deutsch. “Quantum theory, the Church–Turing principle and the universal quantum computer”. In: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 400.1818 (1985), pp. 97–117.
- [3] David Mermin. *Breaking RSA Encryption with a Quantum Computer: Shor’s Factoring Algorithm*. URL: <https://web.archive.org/web/20121115112940/http://people.ccmr.cornell.edu/~mermin/qcomp/chap3.pdf>.
- [4] Satoshi Nakamoto. *Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System*. URL: <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>.
- [5] Tavares. *Google and NASA achieve quantum supremacy*. <https://www.nasa.gov/feature/ames/quantum-supremacy/>. Ott. 2019.