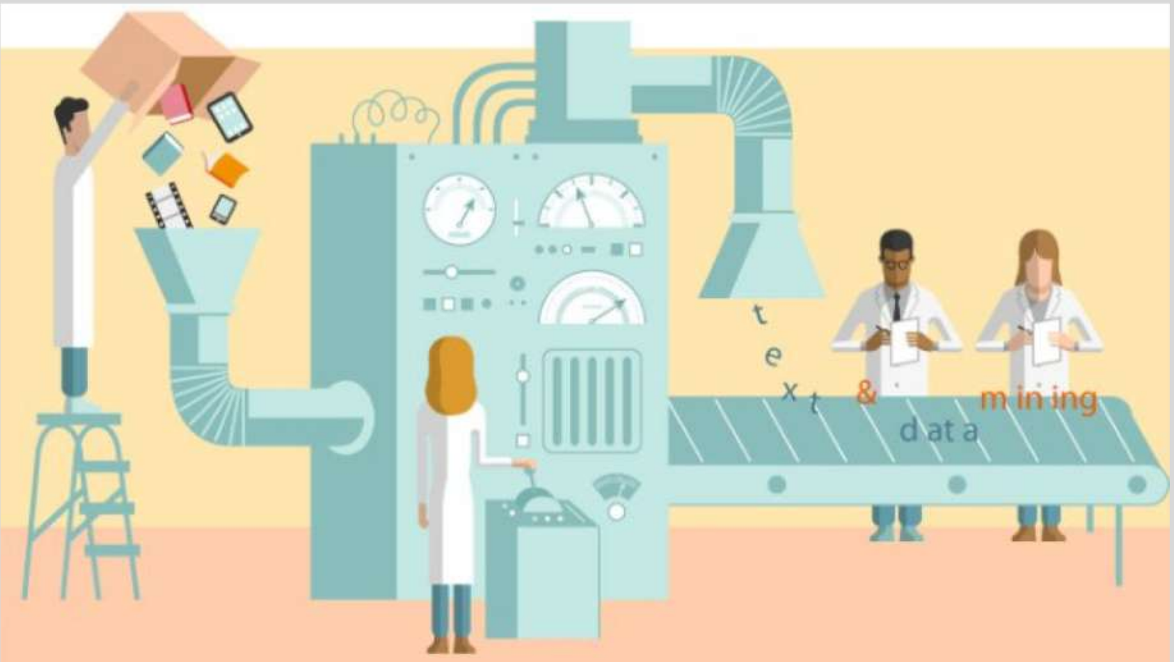


Digital House >
Coding School

DATA SCIENCE

MODULO 6

Series de Tiempo III

Modelos Multivariados

DigitalHouse> Coding School

- Hasta el momento, sólo se han analizado series de tiempo univariadas.
- Es decir, las series de tiempo consideradas tienen una única variable dependiente, la cual se intenta explicar o predecir utilizando un conjunto de variables independientes o explicativas.
- Dentro de este tipo de modelos, se consideraron diferentes alternativas para las variables explicativas, como incluir retardos de la propia variable dependiente, variables independientes con sus retardos, modelos que combinan ambos elementos, etc.

Modelos Multivariados

- El contenido de este módulo consiste en analizar el caso en que el objetivo no es explicar/predecir una única variable dependiente, sino un conjunto de las mismas.

- En otras palabras, el objetivo es el estudio de modelos multivariados, donde se estudia el comportamiento de múltiples variables explicadas.

- En este tipo de modelos, la relación causal es bidireccional, ya que las variables explicativas influyen en las explicadas y viceversa

Modelos Multivariados

- Este es el caso de los modelos de Vectores Autorregresivos (o VAR, por sus siglas en inglés).

- En estos modelos, hay una continua retroalimentación entre variables dependientes e independientes.

- Es el caso de las variables macroeconómicas, donde consumo, inversión, gasto público y exportaciones netas explican el PBI, y a su vez este tiene efectos sobre las restantes variables.

- En estos modelos, todas las variables son endógenas

Modelos Multivariados

DigitalHouse> Coding School

- Analizaremos ejemplos prácticos de las relaciones entre variables multivariadas en el ámbito de las finanzas.

- Veremos los problemas que puede surgir cuando se ejecuta el VAR con determinadas series.

- A partir de dichos ejercicios prácticos, se recomienda la literatura a seguir.

Vectores Autorregresivos

- En módulos anteriores, se estudiaron modelos univariados en los que la variable independiente era explicada por sus propios valores rezagados

$$y_t = \nu + \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + u_t,$$

Vectores Autorregresivos

DigitalHouse>
Coding School

- En el caso de modelos autorregresivos multivariados, cada variable dependiente es explicada por los valores rezagados de la misma variable, así también como por los rezagos de las restantes variables dependientes.

- Es por ello que existe una constante retroalimentación entre variables explicativas y dependientes.

Vectores Autorregresivos

- Por ende, cada ecuación de un modelo autorregresivo multivariado puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\widehat{y}_{k,T+1} &= \nu + \alpha_{k1,1}y_{1,T} + \alpha_{k2,1}y_{2,T} + \cdots + \alpha_{kK,1}y_{K,T} \\ &\quad + \cdots + \alpha_{k1,p}y_{1,T-p+1} + \cdots + \alpha_{kK,p}y_{K,T-p+1}, \\ &\qquad k = 1, \ldots, K.\end{aligned}$$

Vectores Autorregresivos

- Un modelo de vectores autorregresivos de orden p -VAR(p)- puede expresarse matricialmente como:

$$y_t = \nu + A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + u_t,$$

$$y_t = (y_{1t}, \ldots, y_{Kt})'$$

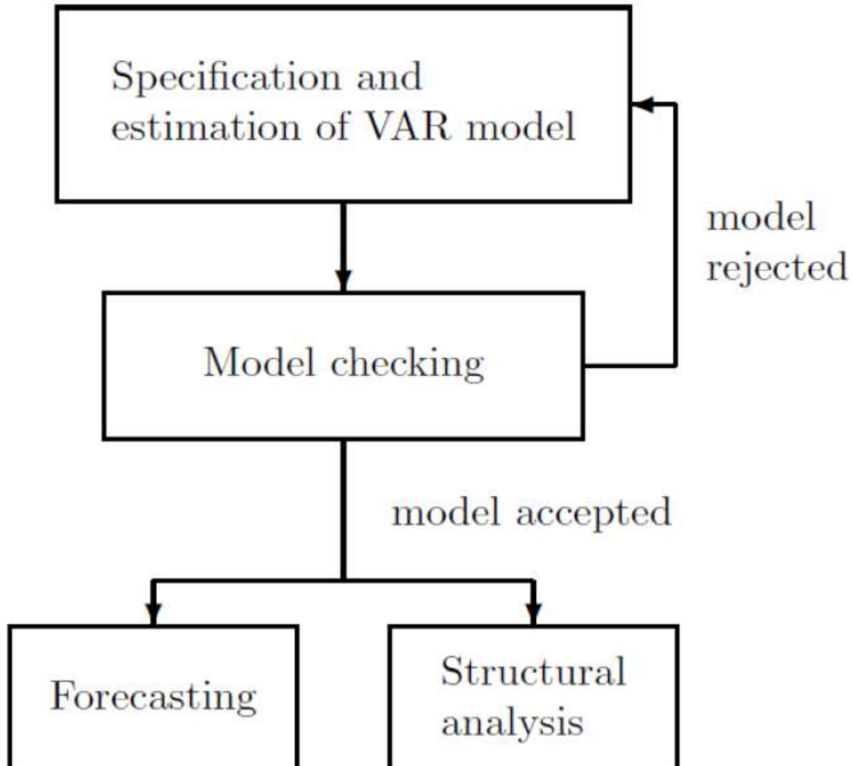
Vectores Autorregresivos

$$A_i := \begin{bmatrix} \alpha_{11,i} & \dots & \alpha_{1K,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{K1,i} & \dots & \alpha_{KK,i} \end{bmatrix}.$$

$$u_t = (u_{1t}, \dots, u_{Kt})'$$

- Donde el vector de perturbaciones ut se distribuye independiente e idénticamente normal con media cero.

Vectores Autorregresivos



Vectores Autorregresivos

- Para simplificar el análisis, comenzaremos con un modelo VAR(1) con 2 variables.

- Para comprender el efecto simultáneo o retroalimentación entre las variables explicativas y explicadas comenzamos con el siguiente sistema (denominado VAR estructural).

$$y_t = b_{10} - b_{12} z_t + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$
$$z_t = b_{20} - b_{21} y_t + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} z_{t-1} + \varepsilon_{zt}$$

Vectores Autorregresivos

- Este sistema puede reexpresarse utilizando el álgebra matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

$$Bx_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix}, x_t = \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}, \Gamma_0 = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}, \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

Vectores Autorregresivos

- Premultiplicando por la inversa de la matriz B, obtenemos el modelo VAR en forma estándar.

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t$$

$$A_0 = B^{-1}\Gamma_0, A_1 = B^{-1}\Gamma_1, \text{ and } e_t = B^{-1}\varepsilon_t.$$

$$y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + e_{1t}$$
$$z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + e_{2t}$$

Vectores Autorregresivos

- En su forma estándar, el efecto contemporáneo entre las variables se encuentra en la correlación cruzada del error de cada ecuación.

$$e_{1t} = (\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt})/(1 - b_{12}b_{21})$$
$$e_{2t} = (\varepsilon_{zt} - b_{21}\varepsilon_{yt})/(1 - b_{12}b_{21})$$

$$Ee_{1t} = E(\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt})/(1 - b_{12}b_{21}) = 0$$

$$\begin{aligned} Ee_{1t}^2 &= E[(\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt})/(1 - b_{12}b_{21})]^2 \\ &= (\sigma_y^2 + b_{12}^2\sigma_z^2)/(1 - b_{12}b_{21})^2 \end{aligned}$$

Vectores Autorregresivos

$$Ee_{1t}e_{1t-i} = E[(\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt})(\varepsilon_{yt-i} - b_{12}\varepsilon_{zt-i})]/(1 - b_{12}b_{21})^2 = 0 \quad \text{for } i \neq 0$$

$$\begin{aligned} Ee_{1t}e_{2t} &= E[(\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt})(\varepsilon_{zt} - b_{21}\varepsilon_{yt})]/(1 - b_{12}b_{21})^2 \\ &= -(b_{21}\sigma_y^2 + b_{12}\sigma_z^2)/(1 - b_{12}b_{21})^2 \end{aligned}$$

- Notar que si b12 = b21 = 0, la covarianza entre los términos de error es 0 y no hay efecto contemporáneo entre las variables.

Vectores Autorregresivos

- La matriz de varianzas y covarianzas entonces será:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \operatorname{var}(e_{1t}) & \operatorname{cov}(e_{1t}, e_{2t}) \\ \operatorname{cov}(e_{1t}, e_{2t}) & \operatorname{var}(e_{2t}) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{var}(e_{it}) = \sigma_i^2 \text{ and } \operatorname{cov}(e_{1t}, e_{2t}) = \sigma_{12} = \sigma_{21}.$$

VAR: Estabilidad y Estacionariedad

- Al igual que en el caso de las series de tiempo univariadas, hay ciertas condiciones que definen la estacionariedad de un VAR.

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t$$

$$\begin{aligned} x_t &= A_0 + A_1(A_0 + A_1 x_{t-2} + e_{t-1}) + e_t \\ &= (I + A_1)A_0 + A_1^2 x_{t-2} + A_1 e_{t-1} + e_t \end{aligned}$$

VAR: Estabilidad y Estacionariedad

DigitalHouse> Coding School

- Reemplazando en forma iterativa en la forma estándar del modelo VAR:

$$x_t = (I + A_1 + \cdots + A_1^n)A_0 + \sum_{i=0}^{n} A_1^i e_{t-i} + A_1^{n+1} x_{t-n-1}$$

- Resulta claro entonces que la condición de estabilidad del VAR requiere que el límite para n que tiene a infinito de la matriz A1 sea 0.

- La estabilidad implica que la esperanza y la varianza del VAR es finita

VAR: Estabilidad y Estacionariedad

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i e_{t-i}$$

$\mu = [\bar{y}\ \ \bar{z}]'$ and

$$\bar{y} = [a_{10}(1 - a_{22}) + a_{12}a_{20}]/\Delta; \qquad \bar{z} = [a_{20}(1 - a_{11}) + a_{21}a_{10}]/\Delta$$
$$\Delta = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}.$$

$$E(x_t) = \mu$$

VAR: Estabilidad y Estacionariedad

DigitalHouse>
Coding School

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i e_{t-i}$$

$\mu = [\bar{y}\ \ \bar{z}]'$ and

$$\bar{y} = [a_{10}(1 - a_{22}) + a_{12}a_{20}]/\Delta; \qquad \bar{z} = [a_{20}(1 - a_{11}) + a_{21}a_{10}]/\Delta$$
$$\Delta = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}.$$

$$E(x_t - \mu)^2 = E\left[\sum_{i=0}^{\infty} A_1^i e_{t-i}\right]^2$$

VAR: Estabilidad y Estacionariedad

DigitalHouse> Coding School

$$E(x_t - \mu)^2 = E\left[\sum_{i=0}^{\infty} A_1^i e_{t-i}\right]^2$$

$$\begin{aligned} Ee_t^2 &= \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t} & e_{2t} \end{bmatrix} \\ &= \Sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x_1 - \mu)^2 &= (I + A_1^2 + A_1^4 + A_1^6 + \cdots)\Sigma \\ &= [I - A_1^2]^{-1}\Sigma \end{aligned}$$

VAR: Estabilidad y Estacionariedad

- Una forma alternativa de expresar la condición de estabilidad es utilizar el operador de Rezago L

$$Lx_t = x_{t-1}$$

$$y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + e_{1t}$$
$$z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + e_{2t}$$

$$(1 - a_{11}L)y_t = a_{10} + a_{12}Lz_t + e_{1t}$$
$$(1 - a_{22}L)z_t = a_{20} + a_{21}Lz_t + e_{2t}$$

VAR: Estabilidad y Estacionariedad

- Una forma alternativa de expresar la condición de estabilidad es utilizar el operador de Rezago L

$$Lx_t = x_{t-1}$$

$$y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + e_{1t}$$
$$z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + e_{2t}$$

$$(1 - a_{11}L)y_t = a_{10} + a_{12}Lz_t + e_{1t}$$
$$(1 - a_{22}L)z_t = a_{20} + a_{21}Lz_t + e_{2t}$$

$$Lz_t = L(a_{20} + a_{21}Ly_t + e_{2t})/(1 - a_{22}L)$$

$$(1 - a_{11}L)y_t = a_{10} + a_{12}L[(a_{20} + a_{21}Ly_t + e_{2t})/(1 - a_{22}L)] + e_{1t}$$

VAR: Estabilidad y Estacionariedad

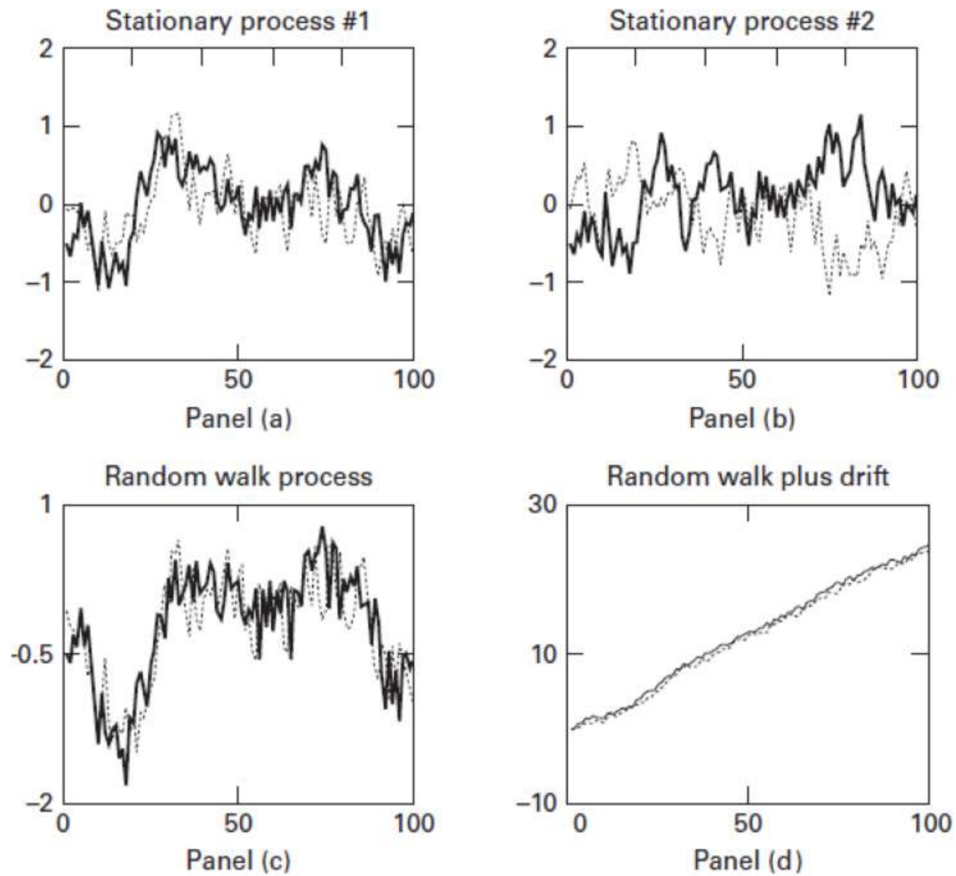
- La condición de estabilidad requiere que las raíces del polinomio característico (en L) se encuentren fuera del círculo unitario (mayores a 1 en valor absoluto).

$$(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2$$

$$y_t = \frac{a_{10}(1 - a_{22}) + a_{12}a_{20} + (1 - a_{22}L)e_{1t} + a_{12}e_{2t-1}}{(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2}$$

$$z_t = \frac{a_{20}(1 - a_{11}) + a_{21}a_{10} + (1 - a_{11}L)e_{2t} + a_{21}e_{1t-1}}{(1 - a_{11}L)(1 - a_{22}L) - a_{12}a_{21}L^2}$$

VAR: Estabilidad y Estacionariedad



VAR: Estabilidad y Estacionariedad

Panel (a): $a_{10} = a_{20} = 0; a_{11} = a_{22} = 0.7 \qquad a_{12} = a_{21} = 0.2$

Panel (b): $a_{10} = a_{20} = 0, a_{11} = a_{22} = 0.5 \qquad a_{12} = a_{21} = -0.2$

Panel (c): $a_{11} = a_{21} = a_{12} = a_{22} = 0.5 \qquad a_{10} = a_{20} = 0$

Panel (d): $a_{11} = a_{21} = a_{12} = a_{22} = 0.5 \qquad a_{10} = 0.5, a_{20} = 0$

VAR: Estabilidad y Estacionariedad

- Raíces características del VAR del panel a): 1.13, 1.81
- Raíces características del VAR del panel b): 1.51, 2.65
- Raíces características del VAR de paneles c) y d): 1, 4

VAR: Estabilidad y Estacionariedad

- El procedimiento anteriormente descripto puede extenderse fácilmente a un modelo VAR(p), ya que el mismo puede expresarse como un VAR(1).

$$y_t = \nu + A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + u_t,$$

$$Y_t = \boldsymbol{\nu} + \mathbf{A} Y_{t-1} + U_t$$

$$Y_t := \underset{(Kp\times 1)}{\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix}}, \qquad \boldsymbol{\nu} := \underset{(Kp\times 1)}{\begin{bmatrix} \nu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}},$$

$$\mathbf{A} := \underset{(Kp\times Kp)}{\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{p-1} & A_p \\ I_K & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_K & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_K & 0 \end{bmatrix}}, \qquad U_t := \underset{(Kp\times 1)}{\begin{bmatrix} u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}.$$

VAR: Estimación e Identificación

DigitalHouse>
Coding School

- El objetivo al momento de estimar un modelo VAR es determinar no sólo qué variables son estadísticamente significativas, sino también determinar el orden óptimo de autorregresión (p).

- Para la estimación, dado que los regresores son los mismos para todas ecuaciones, estimar cada ecuación por separado aplicando mínimos cuadrados da idénticos resultados a aplicar mínimos cuadrados a todo el sistema.

VAR: Estimación e Identificación

DigitalHouse> Coding School

- A su vez, ambos estimadores son iguales al de máxima verosimilitud (ML).

- Por ende, los estimadores son consistentes (convergen en probabilidad al verdadero valor del parámetro) y asintóticamente eficientes (de varianza mínima).

VAR: Estimación e Identificación

- Cuando los regresores no son los mismos en todas las ecuaciones y la correlación entre las ecuaciones es distinta de 0, el estimador de Mínimos Cuadrados Generalizados (GLS) es el más eficiente.

- El método de estimación de OLS y GLS se encuentra en el apéndice

VAR: Estimación e Identificación

- El estimador GLS produce resultados idénticos a aplicar OLS a cada ecuación por separado cuando el conjunto de regresores son los mismos para todas las ecuaciones del VAR.

- El cumplimiento de la condición de estacionariedad es una condición necesaria para efectuar estas estimaciones.

- Es necesario efectuar el test de estacionariedad de cada serie a ser incluida en un VAR. Si alguna no es estacionaria, el VAR tampoco lo será.

VAR: Estimación e Identificación

- Dado que el objetivo de la estimación de modelos es el pronóstico, para elegir el orden ideal de rezagos, se recurre a aquel que tiene el menor error de pronóstico.

- Definiendo al MSE como la medida del error, se utilizan varios criterios, como Akaike o Final Prediction Error (FPE)

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2.$$

VAR: Estimación e Identificación

$$\begin{aligned}
\mathrm{AIC}(m) &= \ln|\widetilde{\Sigma}_u(m)| + \frac{2}{T}(\text{number of freely estimated parameters}) \\
&= \ln|\widetilde{\Sigma}_u(m)| + \frac{2mK^2}{T}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{FPE}(m) &= \det\left[\frac{T+Km+1}{T}\frac{T}{T-Km-1}\widetilde{\Sigma}_u(m)\right] \\
&= \left[\frac{T+Km+1}{T-Km-1}\right]^K \det\widetilde{\Sigma}_u(m).
\end{aligned}$$

VAR: Estimación e Identificación

- El correlograma de los residuos agrega información importante sobre el modelo.

- La presencia de autocorrelación implica que el modelo no está bien especificado.

VAR Estructurales

- Existen situaciones en las cuales se utiliza el modelo VAR en su forma estructural:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

$$Bx_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix}, x_t = \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}, \Gamma_0 = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}, \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

VAR Estructurales

- Es el caso del análisis económico, donde si las ecuaciones representan el PBI y la inversión, el shock estructural representa el componente estocástico y autónomo de cada una de las variables.

- El shock de la forma reducida no tiene interpretación económica.

$$e_{1t} = (\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt})/(1 - b_{12}b_{21})$$
$$e_{2t} = (\varepsilon_{zt} - b_{21}\varepsilon_{yt})/(1 - b_{12}b_{21})$$

VAR Estructurales

- El principal problema al pasar de la forma reducida a la forma estructural, es que el sistema está no identificado (unidentified).

- Es necesario imponer restricciones al VAR estructural

VAR Estructurales

- Por ejemplo, se puede establecer el coeficiente b21 = 0. En ese caso, el sistema está identificado.

- Se denomina: “desomposición de Choleski”.

$$e_{1t} = \varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt}$$
$$e_{2t} = \varepsilon_{zt}$$

$$\mathrm{var}(e_1) = \sigma_y^2 + b_{12}^2\sigma_z^2$$
$$\mathrm{var}(e_2) = \sigma_z^2$$
$$\mathrm{cov}(e_1, e_2) = -b_{12}\sigma_z^2$$

VAR Estructurales

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

- Premultiplicando por la inversa de B.

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} - b_{12}b_{20} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} - b_{12}\gamma_{21} & \gamma_{12} - b_{12}\gamma_{22} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

$$y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + e_{1t}$$
$$z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + e_{2t}$$

VAR Estructurales

- Se estiman 9 parámetros: a10, a20, a11, a12, a21, a22, var(e1t), var(e2t), cov(e1t,e2t).

- Existen 10 parámetros estructurales: b12, b21, b10, b20,

  $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, var(\epsilon_{1t}), var(\epsilon_{2t})$

- Por ello es necesaria la restricción b21 = 0.

VAR: Impulso Respuesta

- Expresando el VAR en su forma de MA, se puede medir el efecto de los shocks. Recordando:

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i e_{t-i}$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} e_{1t-i} \\ e_{2t-i} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - b_{12}b_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

VAR: Impulso Respuesta

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} + \frac{1}{1 - b_{12}b_{21}} \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt-i} \\ \varepsilon_{zt-i} \end{bmatrix}$$

$$\phi_i = \frac{A_1^i}{1 - b_{12}b_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \phi_{11}(i) & \phi_{12}(i) \\ \phi_{21}(i) & \phi_{22}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt-i} \\ \varepsilon_{zt-i} \end{bmatrix}$$

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \varepsilon_{t-i}$$

VAR: Impulso Respuesta - Ejemplo

DigitalHouse> Coding School

$$\text{Model 1:} \begin{pmatrix} y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\phi_i = \frac{\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}}{1 - b_{12}b_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_{21} = 0$$

$$\phi_{11} = 0.7, \phi_{12} = 0.2 - 0.7b_{12}, \phi_{21} = 0.2, \phi_{22} = 0.7 - 0.2b_{12}$$

$$a_{10} = a_{20} = 0$$

VAR: Impulso Respuesta - Ejemplo

- Se supone que:

$$var(e_{1t}) = var(e_{2t}) = 1, cov(e_{1t}, e_{2t}) = 0.8$$

$$e_{1t} = \varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt}$$
$$e_{2t} = \varepsilon_{zt}$$

$$\mathrm{var}(e_1) = \sigma_y^2 + b_{12}^2\sigma_z^2$$
$$\mathrm{var}(e_2) = \sigma_z^2$$
$$\mathrm{cov}(e_1, e_2) = -b_{12}\sigma_z^2$$

- Por ende:

$$b_{12} = -0.8$$

VAR: Impulso Respuesta - Ejemplo

- Por lo tanto:

$$\phi_{12} = 0.76, \phi_{22} = 0.86$$

VAR: Causalidad de Granger

DigitalHouse>
Coding School

- En ocasiones, resulta interesante conocer la dirección de la causalidad en el tiempo.

- Más allá de la relación bidireccional y el feedback constante entre las variables, interesa saber si los rezagos de una variable permiten explicar el movimiento de la restante variable.

$$y_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{p} \begin{bmatrix} \alpha_{11,i} & \alpha_{12,i} & \alpha_{13,i} \\ \alpha_{21,i} & \alpha_{22,i} & \alpha_{23,i} \\ \alpha_{31,i} & \alpha_{32,i} & \alpha_{33,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1,t-i} \\ y_{2,t-i} \\ y_{3,t-i} \end{bmatrix} + u_t.$$

VAR: Causalidad de Granger

- En un VAR(p) de 3 ecuaciones, si se pretende efectuar el test para evaluar si los rezagos de la variable 2 ayudan a explicar a la variable 1, la hipótesis nula será:

$$H_0 : \alpha_{12,i} = 0, \ i = 1, \ldots, p$$

Modelos VAR

- Bibliografía:
    - “Applied Econometric Time Series”, Walter Enders, 4th Edition (2010)
    - “Introduction to Multivariate Time Series”, Helmut Lutkepohl, 2nd Edition (2006)

Modelos VAR

- Para profundizar:

    - Cointegración vectorial.
    - Modelos de corrección del error vectorial (VECM).
    - Modelos VAR con cambios estructurales
    - Modelos de Markov Switching

Estimación de modelos VAR

VAR: Estimación e Identificación

- Operador VEC:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \mathrm{vec}(A) = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix}$$

- Producto de Kronecker:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

VAR: Estimación e Identificación

- Dadas las dimensiones (n x m) de A y (p x q) de B:

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}.$$

VAR: Estimación e Identificación

- Dado un modelo VAR(p), se define:

$$y_t = \nu + A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + u_t,$$

$$\begin{aligned}
Y &:= (y_1, \ldots, y_T) && (K \times T), \\
B &:= (\nu, A_1, \ldots, A_p) && (K \times (Kp+1)), \\
Z_t &:= \begin{bmatrix} 1 \\ y_t \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix} && ((Kp+1) \times 1), \\
Z &:= (Z_0, \ldots, Z_{T-1}) && ((Kp+1) \times T), \\
U &:= (u_1, \ldots, u_T) && (K \times T), \\
\mathbf{y} &:= \operatorname{vec}(Y) && (KT \times 1), \\
\boldsymbol{\beta} &:= \operatorname{vec}(B) && ((K^2p + K) \times 1), \\
\mathbf{b} &:= \operatorname{vec}(B') && ((K^2p + K) \times 1), \\
\mathbf{u} &:= \operatorname{vec}(U) && ((KT \times 1).
\end{aligned}$$

VAR: Estimación e Identificación

DigitalHouse> Coding School

- Utilizando las definiciones anteriores, el modelo puede ser expresado como:

$$Y = BZ + U$$

- Aplicando el operador Vec:

$$\begin{aligned} \mathrm{vec}(Y) &= \mathrm{vec}(BZ) + \mathrm{vec}(U) \\ &= (Z' \otimes I_K)\,\mathrm{vec}(B) + \mathrm{vec}(U) \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} = (Z' \otimes I_K)\beta + \mathbf{u}.$$

VAR: Estimación e Identificación

- Definiendo a la matriz de covarianzas del vector de perturbaciones u como:

$$\Sigma_{\mathbf{u}} = I_T \otimes \Sigma_u.$$

- El objetivo es minimizar la siguiente función:

$$\begin{aligned} S(\beta) &= \mathbf{u}'(I_T \otimes \Sigma_u)^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{u}'(I_T \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{u} \\ &= [\mathbf{y} - (Z' \otimes I_K)\beta]'(I_T \otimes \Sigma_u^{-1})[\mathbf{y} - (Z' \otimes I_K)\beta] \\ &= \operatorname{vec}(Y - BZ)'(I_T \otimes \Sigma_u^{-1}) \operatorname{vec}(Y - BZ) \\ &= \operatorname{tr}\left[(Y - BZ)'\Sigma_u^{-1}(Y - BZ)\right]. \end{aligned}$$

VAR: Estimación e Identificación

DigitalHouse> Coding School

- Aplicando propiedades de álgebra matricial:

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{y}'(I_T \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}'(Z \otimes I_K)(I_T \otimes \Sigma_u^{-1})(Z' \otimes I_K)\boldsymbol{\beta} \\ &\quad - 2\boldsymbol{\beta}'(Z \otimes I_K)(I_T \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}'(I_T \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}'(ZZ' \otimes \Sigma_u^{-1})\boldsymbol{\beta} - 2\boldsymbol{\beta}'(Z \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y}. \end{aligned}$$

- Diferenciando, obtenemos las condiciones de 1er orden:

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 2(ZZ' \otimes \Sigma_u^{-1})\boldsymbol{\beta} - 2(Z \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y}.$$

VAR: Estimación e Identificación

- Igualando a 0 y despejando, obtenemos el valor del estimador:

$$(ZZ' \otimes \Sigma_u^{-1})\widehat{\beta} = (Z \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\beta} &= ((ZZ')^{-1} \otimes \Sigma_u)(Z \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y} \\ &= ((ZZ')^{-1}Z \otimes I_K)\mathbf{y}. \end{aligned}$$

VAR: Estimación e Identificación

- Si los regresores son idénticos, este estimador GLS es idéntico al estimador OLS multivariado:

$$\bar{S}(\beta) = \mathbf{u}'\mathbf{u} = [\mathbf{y} - (Z' \otimes I_K)\beta]'[\mathbf{y} - (Z' \otimes I_K)\beta]$$

$$\begin{aligned} \text{vec}(\widehat{B}) &= \widehat{\beta} = ((ZZ')^{-1}Z \otimes I_K)\ \text{vec}(Y) \\ &= \text{vec}(YZ'(ZZ')^{-1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{B} &= YZ'(ZZ')^{-1} \\ &= (BZ + U)Z'(ZZ')^{-1} \\ &= B + UZ'(ZZ')^{-1}. \end{aligned}$$

Práctica Guiada

Modelos VAR

- A partir de la serie mensual de tipo de cambio y del índice Merval, efectuar un análisis a partir del modelo VAR y efectuar los tests correspondientes.