
SISTEMAS DE CONTROL

Ingeniería Electrónica
Ingeniería en Computación

Guía de Ejercicios Prácticos

Versión 3.6

Con ejercicios seleccionados resueltos

Elaborado por: Mg. Ing. Juan Pablo Pedroni
Correcciones, aportes y sugerencias: Alumnos de Sistemas de Control
Consultas: universidad.pedroni@gmail.com | jp pedroni@unc.edu.ar

ÍNDICE

Guía de Elaboración del Trabajo Integrador.	3
Unidad N° 1: Introducción a los Sistemas de Control	4
Unidad N° 2: Representaciones Matemáticas y Gráfica de Sistemas Lineales de Tiempo Continuo	7
Funciones de Transferencia de Circuitos Básicos	7
Álgebra de Bloques	9
Diagramas de Flujo de Señal y Álgebra de Mason	16
Unidad N° 3: Modelado Matemático de Sistemas Físicos	23
Generalidades	23
Modelado de Sistemas Físicos.....	26
Unidad N° 4: Análisis y Diseño Clásico de Sistemas de Control en el Dominio del Tiempo.....	43
Error en Estado Estable	43
Respuesta Temporal de Sistemas de Primer Orden y Segundo orden.....	48
Identificación de Sistemas de Primer Orden	50
Identificación de Sistemas de Segundo Orden	54
Estabilidad Absoluta.....	64
Estabilidad Relativa.....	65
Resumen de la Técnica del Lugar de Raíces	70
Ejemplo de Aplicación de la Técnica del Lugar de Raíces	72
Diseño de Compensadores Proporcionales.....	78
Compensación por Cancelación de Polos Dominantes	83
Método de la Bisectriz.....	91
Compensación de Perturbación por Adelanto de Señal.....	100
Unidad N° 5: Análisis y Diseño Clásico de Sistemas de Control en el Dominio de la Frecuencia.....	103
Compensación en Frecuencia	113
Unidad N° 6: Análisis en el Espacio de Estados	115
Unidad N° 7: Diseño de los Sistemas de Control en el Espacio de Estados.....	126
Anexo 1:	127
Método de la Bisectriz con Octave.....	127

Guía de Elaboración del Trabajo Integrador.

Requisitos mínimos:

El siguiente listado enumera los contenidos mínimos que deberá incluir el informe del proyecto integrador de la materia.

Introducción

- Descripción cualitativa del sistema, motivación del estudio, requerimientos.

Análisis de la planta

- Modelo matemático en el dominio del tiempo.
- Función de Transferencia.
- Modelo en Simulink.
- Respuesta Temporal
 - Estabilidad.
 - Régimen transitorio.
 - Régimen permanente.

Requisitos de control

- Sobrepasamiento máximo.
- Tiempo de establecimiento. (el valor mínimo se puede obtener de la respuesta a lazo abierto del sistema)
- Error en estado estable.

Diseño del compensador

- Selección de la técnica de diseño:
 - Método de cancelación de polos dominantes.
 - Método de la bisectriz.
 - Compensación en frecuencia.

Validación del compensador

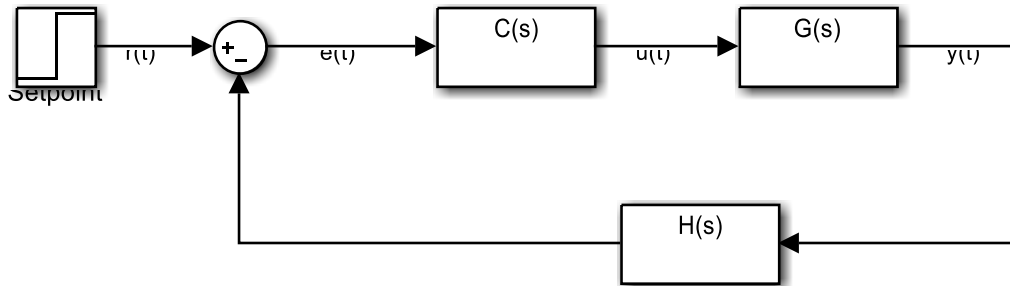
- Simulación del sistema a lazo cerrado.
- Comparación entre la respuesta del sistema compensado y los requerimientos de control. (Verificación)

Conclusiones

Bibliografía

Unidad N° 1: Introducción a los Sistemas de Control

1. Indicar las diferencias entre un sistema a lazo abierto y un sistema a lazo cerrado.
2. Dado el sistema de control a lazo cerrado que se presenta en la figura, identificar las señales $r(t)$, $e(t)$, $u(t)$, $y(t)$ y las funciones de transferencia $C(s)$, $G(s)$, $H(s)$.



3. Determinar si los siguientes sistemas operan a lazo abierto o a lazo cerrado. Justifique la respuesta.
 - 3.1. Lavarropas automático
 - 3.2. Aire acondicionado
 - 3.3. Tostadora
 - 3.4. Robot
 - 3.5. Semáforo
 - 3.6. Encendedor
 - 3.7. Sistema de riego con sensor de humedad
 - 3.8. Caldera / Termotanque
 - 3.9. Horno microondas
 - 3.10. Control de velocidad crucero (en automóvil)
 - 3.11. Autopiloto (en aviones y drones)
 - 3.12. Sistema de alumbrado público
4. Indicar de qué manera responden frente a las perturbaciones los sistemas de lazo abierto y los de lazo cerrado.
5. Establecer las ventajas de implementar un sistema de control de forma digital frente a la analógica.
6. Encontrar las Transformadas de Laplace de las siguientes funciones. Verificar utilizando Octave.

$$g_1(t) = \delta(t)$$

$$g_2(t) = u(t)$$

$$g_3(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$g_4(t) = 7e^{-5t}u(t)$$

$$g_5(t) = (1 + e^{-2t})u(t)$$

$$g_6(t) = (t \sin(2t) + 3e^{-10t})u(t)$$

$$g_7(t) = e^{-5(t-2)}u(t-2)$$

$$g_8(t) = e^{-\alpha t} \cos(\omega t)u(t)$$

Solución con Octave:

```
pkg load symbolic
syms s t a w real
G1=laplace(dirac(t))
G2=laplace heaviside(t)
G3=laplace(exp(-2*t))
G4=laplace(5*exp(-5*t))
G5=1/s-laplace(exp(-2*t))
G6=laplace(t*sin(2*t)+exp(-2*t))
G7=laplace(heaviside(t-2)*exp(-5*(t-2)))
G8=laplace(exp(-a*t)*cos(w*t))
```

7. Sean sistemas modelados por las siguientes funciones de transferencia. Determinar el valor final de las salidas para entradas escalón unitario usando la propiedad del Teorema del Valor Final. Simular la respuesta de los sistemas.

$$G_1(s) = \frac{5}{(s+2)}$$

$$G_5(s) = \frac{5(s+2)}{(s+3)(s+4)}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

$$G_6(s) = \frac{5}{s}$$

$$G_3(s) = \frac{2}{(s+2)} e^{-10s}$$

$$G_7(s) = \frac{12(s+2)}{s(s+4)}$$

$$G_4(s) = \frac{5(s+1)}{(s^2+s+2)}$$

$$G_8(s) = \frac{s}{(s+40)}$$

Solución con Octave:

```
pkg load control
G1=tf(5,[1 2])
step(G1);grid
G2=zpk([],[-2 -3],1)
step(G2);grid
G3=tf(2,[1 2])
G3.inputdelay=10
step(G3);grid
G4=5*tf([1 1],[1 1 2])
step(G4);grid
G5=zpk([-2],[-3 -4],5)
step(G5);grid
G6=tf(5,[1 0])
step(G6);grid
G7=zpk([-2],[0 -4],12)
step(G7);grid
G8=zpk([0],[ -4],1)
step(G8);grid
```

8. Explicar las siguientes propiedades de la Transformada de Laplace, indicando las relaciones entre las señales en el dominio del tiempo y el dominio de Laplace.
- 8.1. Linealidad
 - 8.2. Diferenciación
 - 8.3. Integración
 - 8.4. Traslación en el dominio del tiempo
 - 8.5. Traslación en el dominio de Laplace
 - 8.6. Teorema del valor final

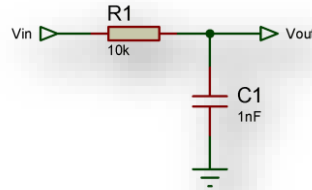
- 8.7. Convolución en el dominio del tiempo
- 8.8. Convolución en el dominio de Laplace
- 9. Definir polos y ceros de una función de transferencia
- 10. Dado un sistema caracterizado por la función de transferencia $G(s)$, se desea conocer el valor de la salida del mismo en estado estable para una entrada escalón unitario $U(s)$. Explique de qué manera se puede determinar ese valor sin abandonar el dominio de Laplace (Es decir, sin antitransformar $G(s)*U(s)$)

Unidad N° 2: Representaciones Matemáticas y Gráfica de Sistemas Lineales de Tiempo Continuo

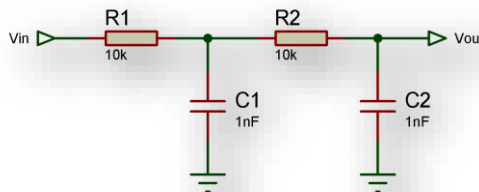
Funciones de Transferencia de Circuitos Básicos

1. Determinar la función de transferencia que relaciona la tensión de salida con la tensión de entrada de los siguientes circuitos. Comparar los resultados.

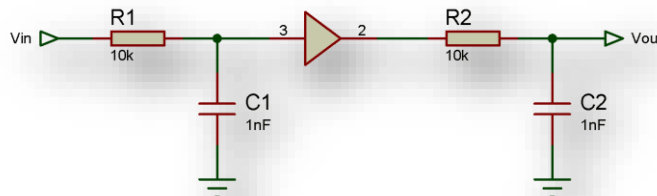
Circuito N° 1:



Circuito N° 2:



Circuito N° 3:



Solución:

```
close all; clear all; clc
syms R1 R2 C1 C2 s real
% Circuito 1
G1=1/(s*R1*C1+1)

% Circuito 2
syms Vin I1 I2 Vout real
X1=1/(s*C1);
X2=1/(s*C2);
%eq1=Vin==I1*(R1+X1)-I2*X1;
%eq2=0==I1*X1+I2*(X1+R2+X2);
I1=I2*(X1+R2+X2)/X1;
%eq3=Vin==I2*(X1+R2+X2)/X1*(R1+X1)-I2*X1
%Vout=I2*X2
I2=Vout/X2
eq4=Vin==Vout/X2*(X1+R2+X2)/X1*(R1+X1)-Vout/X2*X1;
S=solve(eq4,Vout);
```

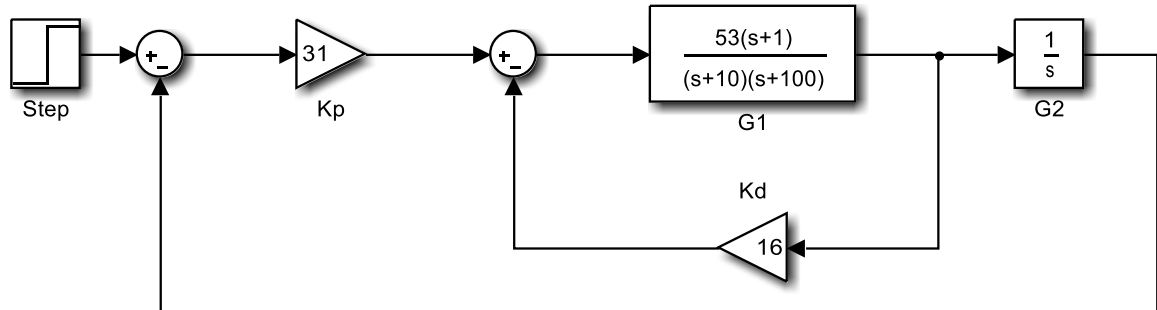
```
G2=S/Vin
% Circuito 3
G31=1/(s*R1*C1+1);
G32=1/(s*R2*C2+1);
G3=G31*G32

disp('Terminado.')
```


Álgebra de Bloques

2. Obtener la Función de Transferencia de los siguientes sistemas utilizando el álgebra de bloques. Simular la respuesta al escalón.

Sistema 1: Sistema a lazo cerrado con realimentación tacométrica

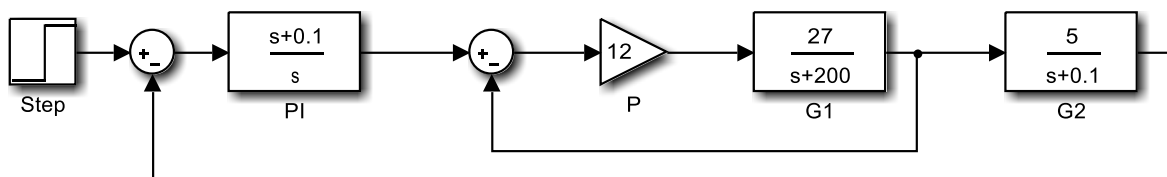


Solución usando Octave:

```
% Unidad 2
% Ejercicio 2
pkg load control
close all; clear all; clc
% Sistema 1.
s=tf('s');
Kp=31;
G1=53*(s+1)/((s+10)*(s+100));
G2=1/s;
Kd=16;

Faux=feedback(G1,Kd);
FdTLA=Kp*Faux*G2;
FdTLC=feedback(FdTLA,1); % Respuesta al escalón
step(FdTLC);
```

Sistema 2: Sistema de control en cascada

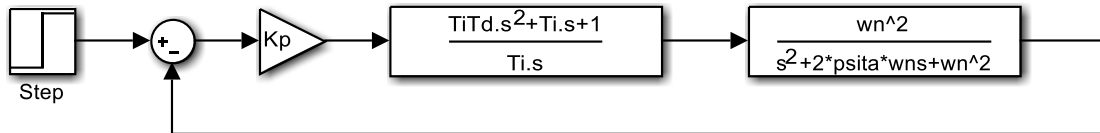


Solución usando Octave:

```
% Sistema 2
pkg load control
close all; clear all; clc
% Sistema 1
% Definiciones
s=tf('s');
PI=(s+0.1)/s;
P=12;
G1=27/(s+200);
G2=5/(s+0.1);
% Lazo Interno
FdTLI=feedback(P*G1,1)
```

```
% Lazo abierto
FdTLA=PI*FdTLI*G2;
% Lazo cerrado
FdTLC=feedback(FdTLA,1)
##% Respuesta al escalón
step(FdTLC,8);
```

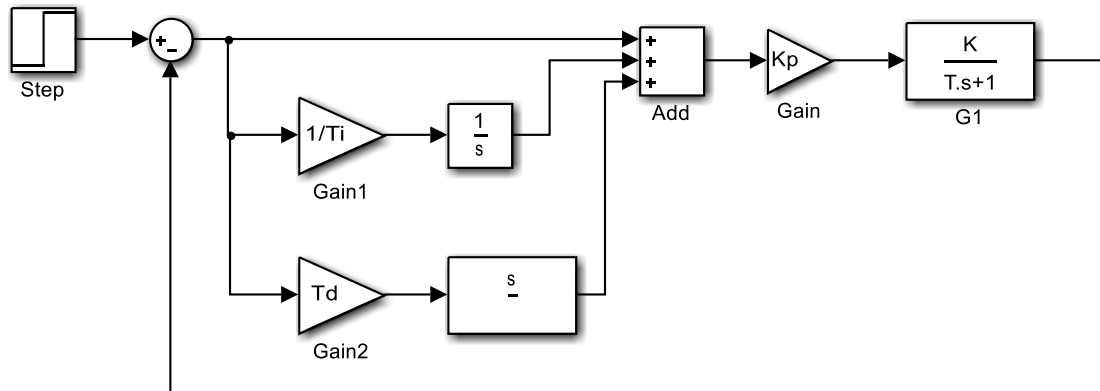
Sistema 3: Sistema a lazo cerrado con controlador PID



Solución usando Octave:

```
% Sistema 3
close all; clear all; clc
pkg load symbolic
% Definición de variables simbólicas
syms Kp Ti Td s wn p real % Paciencia...
% Funciones de transferencia
PID=Kp*(Ti*Td*s^2+Ti*s+1)/(Ti*s)
Planta=wn^2/(s^2+2*p*wn*s+wn^2)
% F d T de lazo abierto:
FdTLA=PID*Planta
% F d T de lazo cerrado:
FdTLC=FdTLA/(1+FdTLA)
% vista simplificada
FdTLC=factor(FdTLC)
% Para saber más sobre la función factor:
help @sym/factor
```

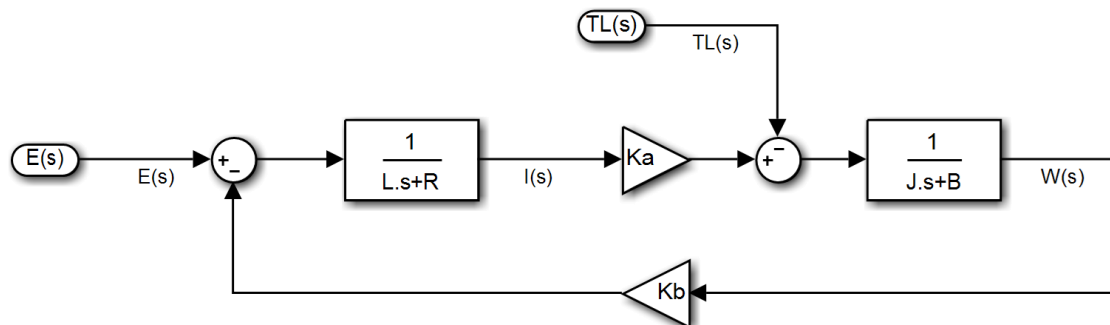
Sistema 4: Sistema a lazo cerrado con controlador PID



Solución usando Octave:

```
% Sistema 4
close all; clear all; clc
pkg load symbolic
% Definiciones de variables simbólicas
syms Kp Ti Td s K T real
% Funciones de transferencia
PID=Kp*(1+1/(Ti*s)+Td*s);
G1=K/(T*s+1);
% Función de transferencia de lazo abierto:
FdTLA=PID*G1;
% Función de transferencia de lazo cerrado:
FdTLC=factor(simplify(FdTLA/(1+FdTLA)))
```

3. En la figura se muestra el diagrama de bloques de un motor de corriente continua, donde $E(s)$ representa la entrada de tensión, $W(s)$ la salida de velocidad del eje, $I(s)$ la corriente que circula por el motor y $T_L(s)$ la carga del sistema, que puede verse como una perturbación. Se pide:
 - 3.1. Determinar las cuatro funciones de transferencia que modelan el sistema.
 - 3.2. Simular la respuesta del sistema para $e(t) = 24u(t)$ y $t_L(t) = 0.01u(t - 2)$.



Considerar para la simulación los siguientes valores:

$$L = 1 \times 10^{-6} H$$

$$R = 2 \Omega$$

$$K_a = 0.042 Nm / A$$

$$J = 10 \times 10^{-6} Kg m^2$$

$$B = 0.30 \times 10^{-5} N / rad / seg$$

$$K_b = 0.042 V / rad / seg$$

Solución de la primera función de transferencia:

$$G_1(s) = \frac{1}{Ls + R}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{Js + B}$$

La F de T de trayectoria directa:

$$G(s) = G_1(s) K_a G_2(s) = \frac{1}{Ls + R} K_a \frac{1}{Js + B}$$

$$G(s) = \frac{K_a}{(Ls + R)(Js + B)} = \frac{K_a}{LJs^2 + (LB + JR)s + RB}$$

La F de T de lazo cerrado:

$$M(s) = \frac{G(s)}{1 + K_b G(s)} = \frac{\frac{K_a}{LJs^2 + (LB + JR)s + RB}}{1 + K_b \frac{K_a}{LJs^2 + (LB + JR)s + RB}}$$

$$M(s) = \frac{W(s)}{E(s)}_{Tl(s)=0} = \frac{K_a}{LJs^2 + (LB + JR)s + RB + K_a K_b}$$

Solución con Octave:

```
% Sistemas de Control
```

```
% Unidad 2 - Ejercicio 3
```

```
pkg load control
```

```
close all; clear all; clc
```

```
% Definición de constantes
```

```
L=1e-6;
```

```
R=2;
```

```
Ka=0.042;
```

```
J=10e-6;
```

```
B=0.3e-5;
```

```
Kb=0.042;
```

```
% Determinación de la F d T entre la velocidad y la tensión
```

```
s=tf('s')
```

```
G1=1/(L*s+R);
```

```
G2=1/(J*s+B);
```

```
M=G1*Ka*G2/(1+G1*Ka*G2*Kb); % FdT=G/(1+GH)
```

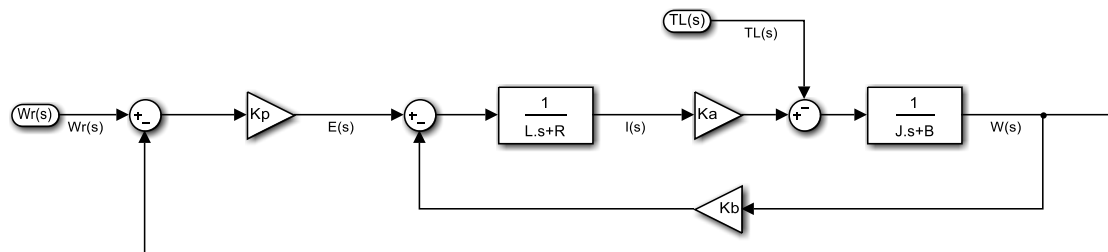
```
M=minreal(M);
```

```
% Señal de referencia
p=0.001;
t=0:p:0.1-p;
u=24*ones(length(t),1);

% Simulación
lsim(M,u,t);

disp('Terminado')
```

4. En la figura se muestra el diagrama de bloques de un motor de corriente continua con realimentación de velocidad, donde $W_r(s)$ representa la referencia de velocidad, $W(s)$ la salida de velocidad del eje, $I(s)$ la corriente que circula por el motor y $T_L(s)$ la carga del sistema, que puede verse como una perturbación. Se pide:
- 4.1. Determinar las funciones de transferencia $W(s)/W_r(s)$ y $W(s)/T_L(s)$.
 - 4.2. Simular la respuesta del sistema para $W_r(t) = 300u(t)$ y $t_L(t) = 0.01u(t-2)$.



Considerar los mismos valores que para el ejercicio anterior para la simulación. Determinar la influencia del valor de K_p en la respuesta del sistema.

Solución con Octave:

```
% Sistemas de Control
% Unidad 2 - Ejercicio 4

pkg load control
close all; clear all; clc
% Definición de constantes
L=1e-6;
R=2;
Ka=0.042;
J=10e-6;
B=0.3e-5;
Kb=0.042;

% Controlador
Kp=1;
% Determinación de la F d T
s=tf('s');
G1=1/(L*s+R);
G2=1/(J*s+B);

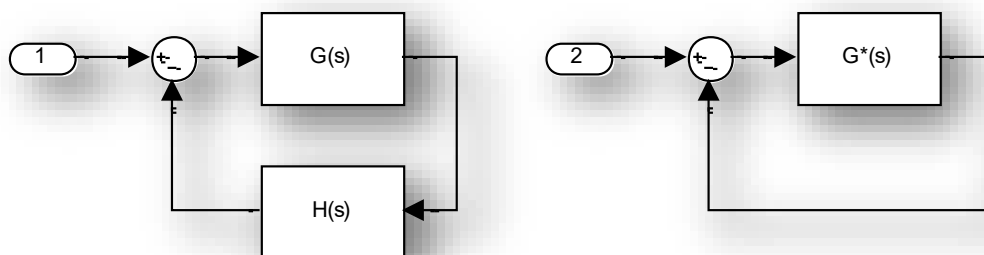
M=minreal(G1*Ka*G2/(1+G1*Ka*G2*Kb)); % FdT=G/(1+GH), F d T del motor
```

```
% Función de transferencia de lazo cerrado
FdTLC=minreal (Kp*M/ (1+Kp*M) )

% Señal de referencia
p=0.0001;
t=0:p:0.02-p;
u=300*ones (length(t) ,1) ;

% Simulación
lsim(FdTLC,u,t) ;
disp('Terminado')
```

5. Encontrar $G^*(s)$ de manera tal que los sistemas que se muestran a continuación sean equivalentes.



Solución: Igualando las funciones de transferencia de lazo cerrado:

$$\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{G^*(s)}{1+G^*(s)}$$

$$G(s)(1+G^*(s)) = G^*(s)(1+G(s)H(s))$$

$$G(s) + G(s)G^*(s) = G^*(s) + G^*(s)G(s)H(s)$$

$$G(s) = G^*(s)(1+G(s)H(s) - G(s))$$

$$G^*(s) = \frac{G(s)}{(1+G(s)H(s) - G(s))}$$

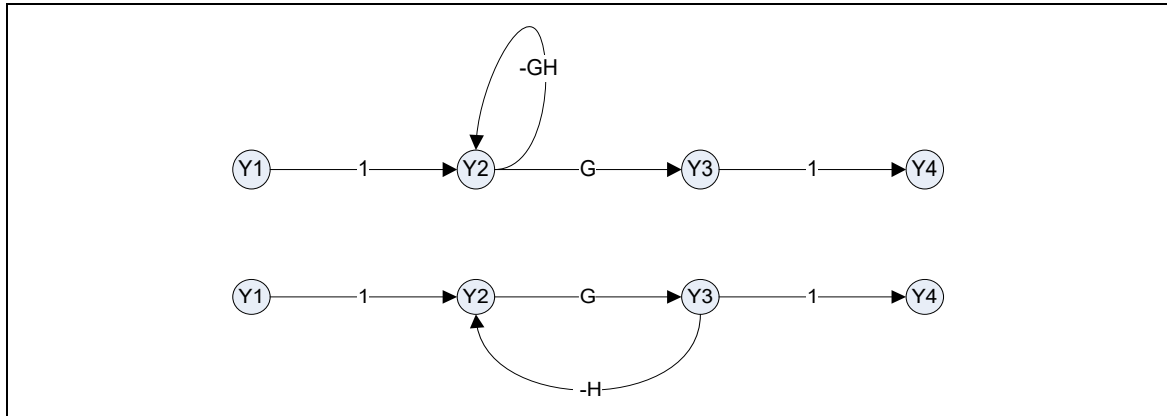
Ejemplo:

```
% Sistemas de Control
% Unidad 2 - Ejercicio 5
pkg load symbolic
close all; clear all; clc
syms a b ka kb s
% Funciones de transferencia de prueba
G=ka/(s+a);
H=kb/(s+b);
% Función de transferencia de lazo cerrado
FdTLCG=G/(1+G*H);
% Reescribiendo:
FdTLCG=factor(FdTLCG,'s')
% Por otro lado, G*:
Gstar=factor(simplify(G/(1+G*H-G)),'s');
% Y la función de transferencia de lazo cerrado
FdTLCGstar=factor(simplify(Gstar/(1+Gstar)),'s')
```

```
disp('Terminado')
```

Diagramas de Flujo de Señal y Álgebra de Mason

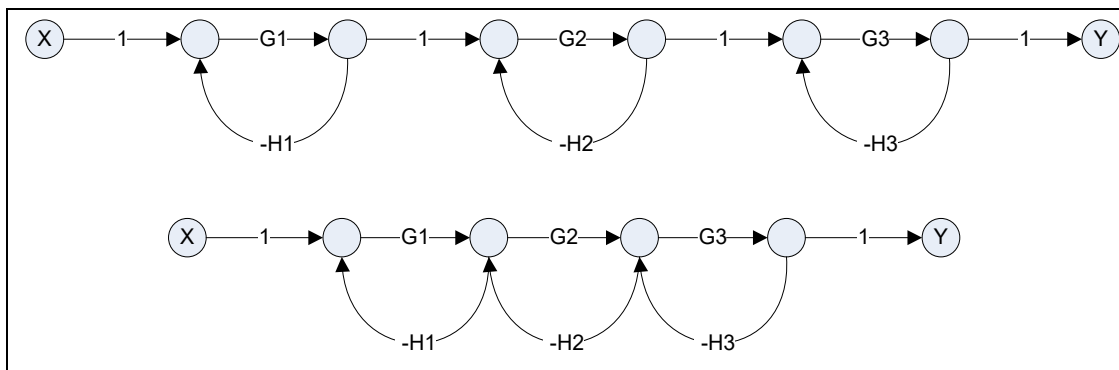
6. Demostrar que los siguientes sistemas son equivalentes.



Solución con Octave

```
% Sistemas de Control
% Unidad 2 - Ejercicio 6
pkg load symbolic
close all; clear all; clc
% Definición de las funciones.
syms G H real
% Sistema 1.
M1=G;
l1=-G*H;
D=1-l1;
D1=1;
FdTS1=M1*D1/D
% Sistema 2.
M1=G;
l1=-G*H;
D=1-l1;
D1=1;
FdTS2=M1*D1/D
```

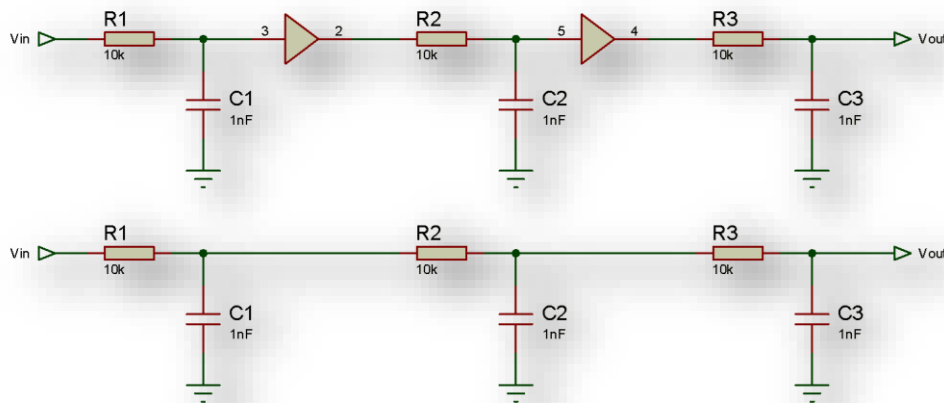
7. Demostrar que los siguientes sistemas no son equivalentes.



Solución con Octave:

```
% Sistemas de Control
% Unidad 2 - Ejercicio 7
pkg load symbolic
close all; clear all; clc
% Definición de las funciones.
syms G1 G2 G3 H1 H2 H3 real
% Función de Transferencia del sistema 1.
M1=G1*G2*G3;
l1=-G1*H1;
l2=-G2*H2;
l3=-G3*H3;
D=1-(l1+l2+l3)+(l1*l2+l1*l3+l2*l3)-(l1*l2*l3);
D1=1;
disp('Función de Transferencia del Sistema 1')
FdTLCs1=factor(simplify(M1*D1/D),'s')
% Función de Transferencia del sistema 2.
M1=G1*G2*G3;
l1=-G1*H1;
l2=-G2*H2;
l3=-G3*H3;
D=1-(l1+l2+l3)+(l1*l3);
D1=1;
disp('Función de Transferencia del Sistema 2')
FdTLCs2=factor(simplify(M1*D1/D),'s')
```

8. Demostrar que los siguientes circuitos no son equivalentes.

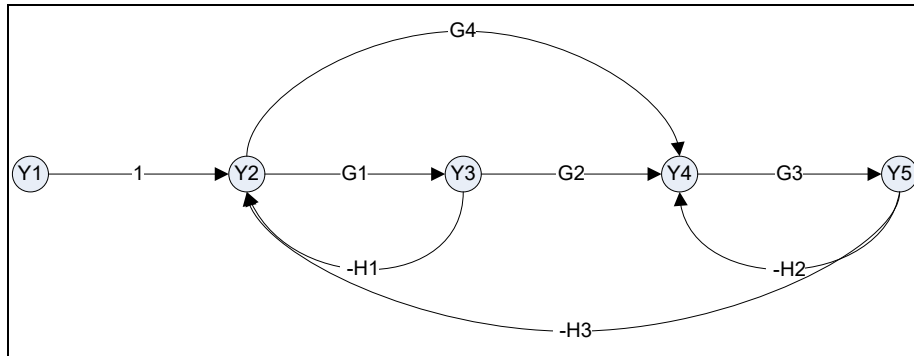


9. Calcular las Funciones de Transferencia de los sistemas que se presentan en el ejercicio 3 de la pág. 11 y ejercicio 4 de la pág. 13 transformando los diagramas de bloques en diagramas de flujo de señal y aplicando la regla de Mason.

10. Aplicar la Regla de Mason para encontrar las siguientes Funciones de Transferencia.

$$\frac{Y_5}{Y_1} \quad \frac{Y_4}{Y_1} \quad \frac{Y_2}{Y_1}$$

Sistema 1:



Solución:

$$k = 2$$

$$M_1 = G_1 G_2 G_3$$

$$M_2 = G_3 G_4$$

$$l_1 = -G_1 H_1$$

$$l_2 = -G_3 H_2$$

$$l_3 = -G_1 G_2 G_3 H_3$$

$$l_4 = -G_3 G_4 H_3$$

$$\Delta = 1 - (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + (l_1 l_2)$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1$$

$$\frac{Y_5}{Y_1} = \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2}{\Delta}$$

$$\frac{Y_5}{Y_1} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_3 G_4}{1 + G_1 H_1 + G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_3 + G_3 G_4 H_3 + G_1 H_1 G_3 H_2}$$

Con Octave:

```
close all; clear all; clc
syms G1 G2 G3 G4 H1 H2 H3 real
M1=G1*G2*G3;
M2=G3*G4;
l1=-G1*H1;
l2=-G3*H2;
l3=-G1*G2*G3*H3;
l4=-G3*G4*H3;
```

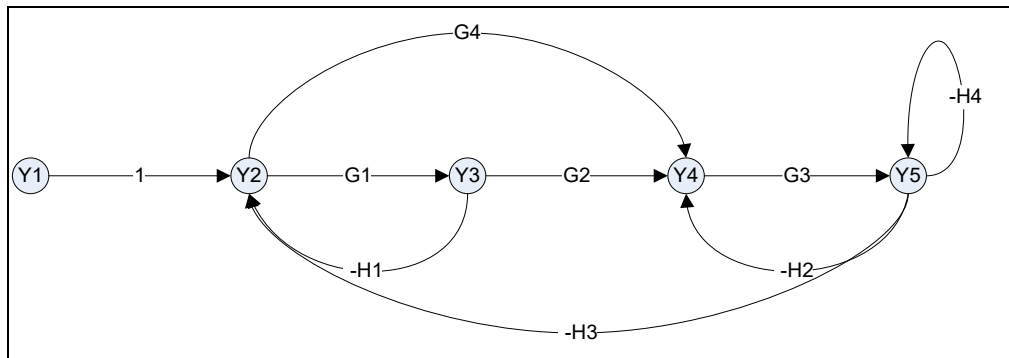
```
D=1-(l1+l2+l3+l4)+(l1*l2);
```

```
D1=1;
```

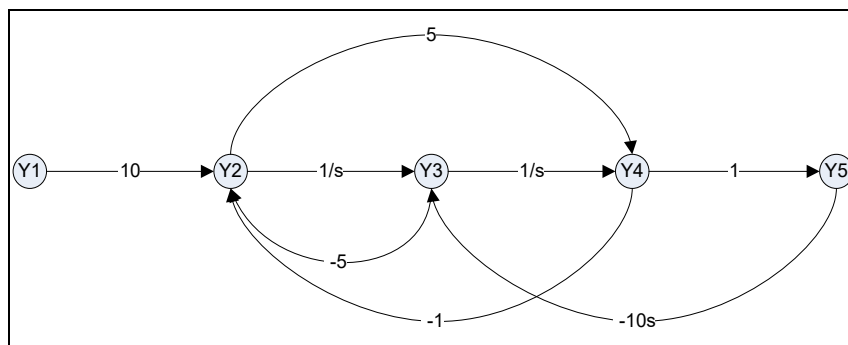
```
D2=1;
```

```
Y5_Y1=(M1*D1+M2*D2)/D
```

Sistema 2:



Sistema 3:

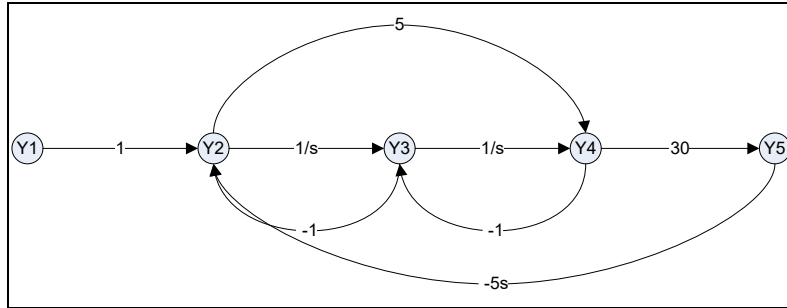


Solución con Octave:

```
% Sistemas de Control
% Unidad 2 - Ejercicio 10
% Sistema 3
pkg load control
close all; clear all; clc
% Definición de las funciones.
s=tf('s');
% Parámetros del algoritmo de Mason
M1=10*1/s*1/s*1;
M2=10*5;
l1=-5/s;
l2=-1*1/s*1/s;
l3=-10*s*1/s*1;
l4=-5;
l5=5*1*(-10*s)*(-5);
D=1-(l1+l2+l3+l4+l5);
D1=1;
D2=1;

G=minreal((M1*D1+M2*D2)/D)
disp('Terminado')
```

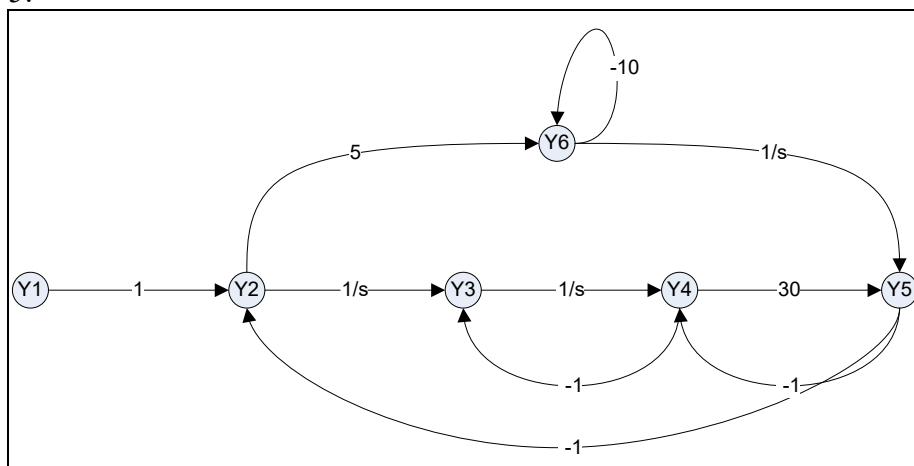
Sistema 4:



Solución:

```
%% Sistema 4, Ejercicio 10, Unidad 2
close all; clear all; clc
s = tf('s');
l1 = -1/s;
l2 = -1/s;
l3 = -5 * s * 30 * 1/s * 1/s;
l4 = -5 * s * 30 * s;
l5 = 5;
Det = 1 - (l1 + l2 + l3 + l4 + l5);
%% FdT Y5/Y1;
M1 = 1/s * 1/s * 30;
M2 = 5 * 30;
D1 = 1; D2 = 1;
Y5_Y1 = minreal((M1 * D1 + M2 * D2) / Det);
%% FdT Y4/Y1
M1 = 1/s * 1/s;
M2 = 5;
D1 = 1; D2 = 1;
Y4_Y1 = minreal((M1 * D1 + M2 * D2) / Det);
%% FdT Y2 / Y1
M1 = 1;
D1 = 1 - l2;
Y2_Y1 = minreal((M1 * D1) / Det);
```

Sistema 5:



11. A partir de las ecuaciones que modelan matemáticamente el comportamiento dinámico de un motor de corriente continua, dibujar el diagrama de flujo de señal y determinar la función de transferencia entre la velocidad de salida y la tensión de entrada aplicando la fórmula de Mason.

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K\omega(t)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = Ki(t) - B\omega(t) - T_L(t)$$

Solución

Se despeja la derivada de mayor orden de cada ecuación diferencial:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} e(t) - \frac{R}{L} i(t) - \frac{K}{L} \omega(t)$$

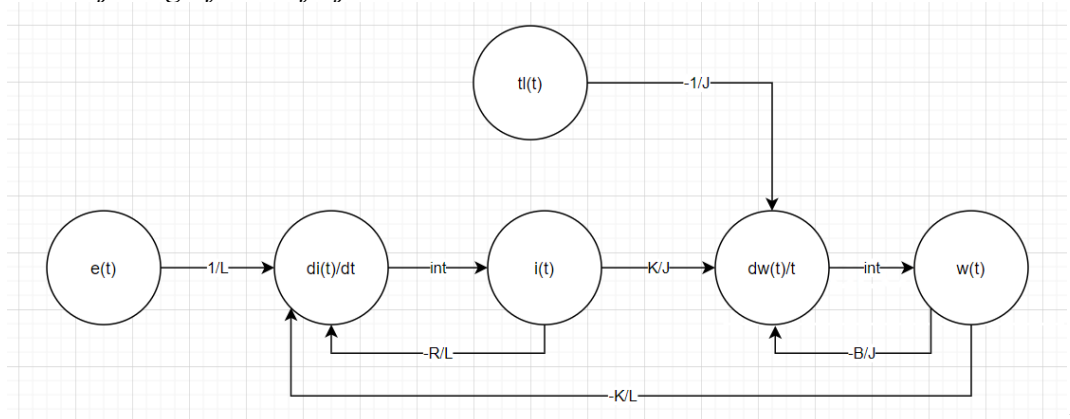
$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{K}{J} i(t) - \frac{B}{J} \omega(t) - \frac{1}{J} T_L(t)$$

Se transforma al dominio de Laplace

$$sI(s) = \frac{1}{L} E(s) - \frac{R}{L} I(s) - \frac{K}{L} \Omega(s)$$

$$s\Omega(s) = \frac{K}{J} I(s) - \frac{B}{J} \Omega(s) - \frac{1}{J} T_L(s)$$

Se dibuja el gráfico de flujo de señal



Se aplica la fórmula de Mason, haciendo $Tl(s)=0$:

```

close all; clear all; clc
pkg load symbolic
syms R L K J B s real
% Trayectorias directas
M1=1/L*1/s*(K/J)*1/s;
l1=-R/(s*L);
l2=-B/(s*J);
l3=1/s*K/J*1/s*(-K/L);
D=1-(l1+l2+l3)+l1*l2;
D1=1;
G=factor(M1*D1/D,'s')
  
```

12. Dibujar los diagramas de flujo de señal para las siguientes funciones de transferencia.

$$G_1(s) = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 4s + 10}$$

¹ <https://app.diagrams.net/>

$$G_2(s) = \frac{6(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

Solución:

1. Multiplicar numerador y denominador por s elevada al inverso del grado de la FdT.

$$G_1(s) = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 4s + 10} \frac{s^{-3}}{s^{-3}}$$

2. Multiplicar numerador y denominador por la variable auxiliar Q(s)

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10s^{-3}}{1 + 5s^{-1} + 4s^{-2} + 10s^{-3}} \frac{Q(s)}{Q(s)}$$

3. Igualar numeradores y denominadores

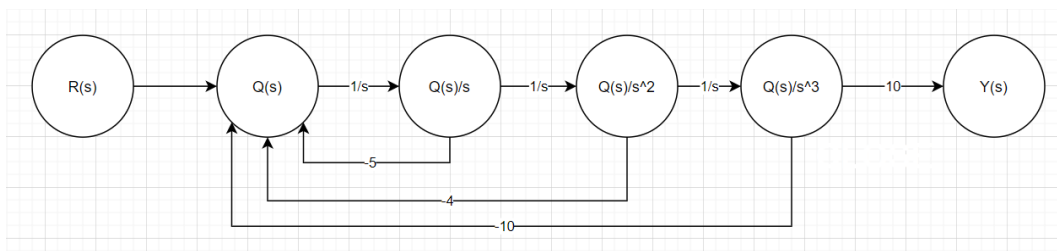
$$Y(s) = 10s^{-3}Q(s)$$

$$R(s) = Q(s) + 5s^{-1}Q(s) + 4s^{-2}Q(s) + 10s^{-3}Q(s)$$

4. Despejar Q(s) de la ecuación del denominador.

$$Q(s) = R(s) - 5s^{-1}Q(s) - 4s^{-2}Q(s) - 10s^{-3}Q(s)$$

5. Dibujar el diagrama, partiendo de el dibujo de las variables $s^n Q(s) \rightarrow s^{n-1}Q(s) \rightarrow \dots \rightarrow Q(s)$



Unidad N° 3: Modelado Matemático de Sistemas Físicos

Generalidades

1. Sea $y(t)$ la salida de un sistema continuo que se obtiene como respuesta a una entrada $x(t)$. Se sabe que la ecuación diferencial que describe el comportamiento de dicho sistema, y que relaciona ambas variables es la siguiente:

$$5 \frac{d^2 y(t)}{dt} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) - 5 \frac{dx(t)}{dt} - x(t) = 0$$

- 1.1. Calcular la expresión de la función de transferencia $G(s)$, suponiendo condiciones iniciales nulas. Considerar $Y(s)$ como la salida del sistema y $X(s)$ la entrada
- 1.2. Justificar si se trata de un sistema estable.
- 1.3. Simular el sistema modelando la ecuación diferencial y la función de transferencia. Comparar los resultados.

Solución:

$$5 \frac{d^2 y(t)}{dt} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t) + 5 \frac{dx(t)}{dt}$$

$$5s^2 Y(s) + 2sY(s) + 3Y(s) = X(s) + 5sX(s)$$

$$Y(s)(5s^2 + 2s + 3) = X(s)(5s + 1)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(5s + 1)}{(5s^2 + 2s + 3)}$$

Los polos del sistema son: $-2 \pm 0,75j$, por lo tanto es estable.

```
% Unidad N° 3 Ejercicio 1
close all; clear all; clc
% Ec Dif:
% 5DDy+2Dy+3y-5Dx-x=0
% 1.1 Determinar Y(s)/X(s)
% Primero:
% y(t)    -> Y(s)
% Dy(t)   -> sY(s)
% DDy(t)  -> s^2Y(s)
% x(t)    -> X(s)
% Dx(t)   -> sX(s)
% 5s^2Y(s)+2sY(s)+3Y(s)=5sX(s)+X(s)
% Segundo:
% Y(s) (5s^2+2s+3)=X(s) (5s+1)
% Tercero:
% Y(s) (5s^2+2s+3)/X(s)=(5s+1)
% Y(s)/X(s)=(5s+1)/(5s^2+2s+3)
s=tf('s');
Ys_Xs=(5*s+1)/(5*s^2+2*s+3)
% 1.2 Determinar la estabilidad.
p=pole(Ys_Xs);
if real(p)<0
    disp('Sistema Estable')
```

```

else
    disp('Sistema Inestable')
endif

%roots([5 2 3])
% 1.3 Simulación
step(Ys_Xs,50)
% ramp(Ys_Xs,50)

disp('Terminado')

```

2. La función de transferencia que relaciona el voltaje de armadura aplicado a la armadura del motor DC de excitación independiente y la velocidad de giro en rad/s es:

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{3000}{(s^2 + 156.25s + 1837.5)}$$

- 2.1. Determinar la velocidad de giro en estado estacionario si se aplica un voltaje de 10 voltios.
- 2.2. Calcular la ganancia, el amortiguamiento, la frecuencia propia del sistema y el tiempo de establecimiento. ¿Qué tipo de respuesta tiene el sistema ante una entrada tipo escalón?
- 2.3. Simular la respuesta al escalón y verificar los valores obtenidos en el punto anterior.
- 2.4. Dibujar el mapa de polos y ceros del sistema.

Solución:

Aplicando el teorema del valor final:

$$\frac{W(s)}{V(s)} = \frac{3000}{s^2 + 156.25s + 1838}$$

$$V(s) = \frac{10}{s}$$

$$W(s) = \frac{3000}{s^2 + 156.25s + 1838} \cdot \frac{10}{s}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s W(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \times \frac{3000}{s^2 + 156.25s + 1838} \times \frac{10}{s}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \times \frac{3000}{0^2 + 156.25 \times 0 + 1838} \times \frac{10}{s} = \frac{30000}{1838} = 16.32 \frac{rad}{seg}$$

```

% Unidad N° 3 Ejercicio 2
close all; clear all; clc
%% Función de Transferencia del sistema:
s = tf('s');
%syms s real
W_V = 3000 / (s^2 + 156.25*s + 1837.5);
Vin = 10; % Voltaje de entrada

```



```

%% 1. Velocidad si Vin = 10;
% Aplicando el teorema del valor final w = 16.32 rad/seg
V = Vin / s;
W = W_V * V;
Wtinf = dcgain(s * W); % w = 16.32 rad/seg
% Por simulación
step(Vin * W_V);grid % w = 16.32 rad/seg
% Para usar la función lsim creamos un escalón de 10v
h = 1e-3;
t = 0:h:0.5;
u = 10 * ones(size(t));
%u = 10 * ones(1, length(t));
plot(t, u, 'o', 'linewidth', 2); grid on
lsim(W_V, u, t); grid
%% Dibujar el diagrama de polos y ceros
pzmap(W_V);grid

disp('Terminado')

```

También se puede resolver usando el paquete de matemática simbólica:

```

%% Función de Transferencia del sistema:
syms s real
W_V = 3000 / (s^2 + 156.25*s + 1837.5);
Vin = 10; % Voltaje de entrada
V = Vin / s;
W = collect(W_V * V, 's')
Wtinf = W * s % Para aplicar el teorema del valor final
Wtinf = collect(Wtinf)
s = 0; eval(Wtinf) % w = 16.32 rad/seg

```

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{3000}{s^2 + 156.25s + 1837.5}$$

$$\omega_n^2 = 1837.5$$

$$\omega_n = \sqrt{1837.5} = 42.87 \text{ rad / seg}$$

$$K\omega_n^2 = K \times 1837.5 = 3000$$

$$K = \frac{3000}{1837.5} = 1.63 \text{ rad / seg / V}$$

$$2\zeta\omega = 2\zeta \times 1837.5 = 156.25$$

$$\zeta = \frac{156.25}{2 \times 42.87} = 1.82$$

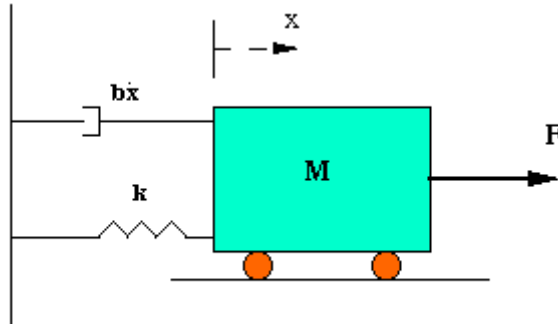
$$ts \approx \frac{4}{\zeta\omega} = \frac{4}{1.82 \times 42.87} = 0.05 \text{ seg}$$

Modelado de Sistemas Físicos

3. La figura representa un sistema masa-resorte-amortiguador, que puede ser modelada matemáticamente por la siguiente ecuación diferencial:

$$Ma(t) + Bv(t) + Kx(t) = f(t)$$

Donde M, B, K representan las constantes de masa, fricción viscosa y del resorte, mientras que $a(t), v(t), x(t)$ representan la aceleración, velocidad y posición de la masa respectivamente. La fuerza externa aplicada al sistema es $f(t)$.



Se pide determinar las funciones de transferencia entre la posición, velocidad y aceleración de la masa con relación a la fuerza de entrada.

$$\frac{X(s)}{F(s)} = ?$$

$$\frac{V(s)}{F(s)} = ?$$

$$\frac{A(s)}{F(s)} = ?$$

Por qué todas comparten el mismo denominador?

4. La figura representa el sistema de suspensión de un automóvil mientras se desplaza sobre el pavimento. Se pide;

4.1. Realizar el diagrama de cuerpo libre del sistema

4.2. Verificar que las ecuaciones diferenciales que representan al sistema son:

$$M_A \ddot{x}_A = B_A (\dot{x}_S - \dot{x}_A) + K_R (x_S - x_A)$$

$$M_S \ddot{x}_S = B_A (\dot{x}_A - \dot{x}_S) + K_R (x_A - x_S) + K_C (w - x_S)$$

Donde $x_a(t), x_s(t), w(t)$ representan la altura del automóvil, la altura de la suspensión y el perfil del camino respectivamente.

4.3. Escribir la Función de Transferencia que relaciona el camino (entrada) con el desplazamiento del chasis del vehículo (salida)

4.4. Modelar utilizando Simulink, considerando:

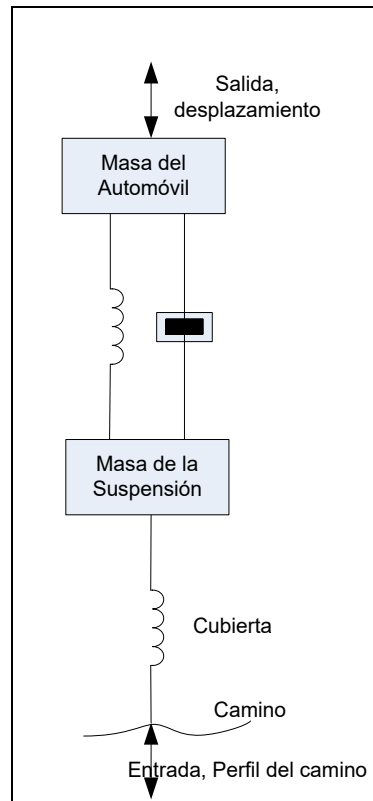
$$M_{Automóvil} = 500Kg$$

$$M_{Suspensión} = 50Kg$$

$$K_{Resorte} = 10N / m$$

$$K_{Cubierta} = 50N / m$$

$$B_{Amortiguador} = 80Nseg / m$$



Solución: Aplicando la transformada de Laplace en ambas ecuaciones:

$$M_A s^2 X_A(s) = B_A s (X_S(s) - X_A(s)) + K_R (X_S(s) - X_A(s))$$

$$M_S s^2 X_S(s) = B_A s (X_A(s) - X_S(s)) + K_R (X_A(s) - X_S(s)) + K_C (W(s) - X_S(s))$$

Sacando factor común:

$$(M_A s^2 + B_A s + K_R) X_A(s) = (B_A s + K_R) X_S(s)$$

$$(M_S s^2 + B_A s + K_R + K_C) X_S(s) = (B_A s + K_R) X_A(s) + K_C W(s)$$

Luego:

$$X_S(s) = \frac{(M_A s^2 + B_A s + K_R)}{(B_A s + K_R)} X_A(s)$$

Y reemplazando en la segunda ecuación:

$$(M_S s^2 + B_A s + K_R + K_C) \frac{(M_A s^2 + B_A s + K_R)}{(B_A s + K_R)} X_A(s) = (B_A s + K_R) X_A(s) + K_C W(s)$$

$$(M_S s^2 + B_A s + K_R + K_C) (M_A s^2 + B_A s + K_R) X_A(s) = (B_A s + K_R)^2 X_A(s) + K_C (B_A s + K_R) W(s)$$

$$\left[(M_S s^2 + B_A s + K_R + K_C) (M_A s^2 + B_A s + K_R) - (B_A s + K_R)^2 \right] X_A(s) = K_C (B_A s + K_R) W(s)$$

$$(M_A M_S s^4 + (B_A M_A + B_A M_S) s^3 + (M_A (K_C + K_R) + K_R M_S) s^2 + B_A K_C s + K_C K_R) X_A(s) = K_C (B_A s + K_R) W(s)$$

Finalmente, la función de transferencia queda:

$$\frac{X_A(s)}{W(s)} = \frac{K_C (B_A s + K_R)}{M_A M_S s^4 + (B_A M_A + B_A M_S) s^3 + (M_A (K_C + K_R) + K_R M_S) s^2 + B_A K_C s + K_C K_R}$$

Para la simulación se puede utilizar el siguiente código:

```
close all; clear all; clc
MA=500; % Masa del automóvil
MS=50; % Masa de la suspensión
KR=10; % Resorte de la suspensión
KC=50; % Constante elástica de la cubierta
BA=80; % Amortiguador

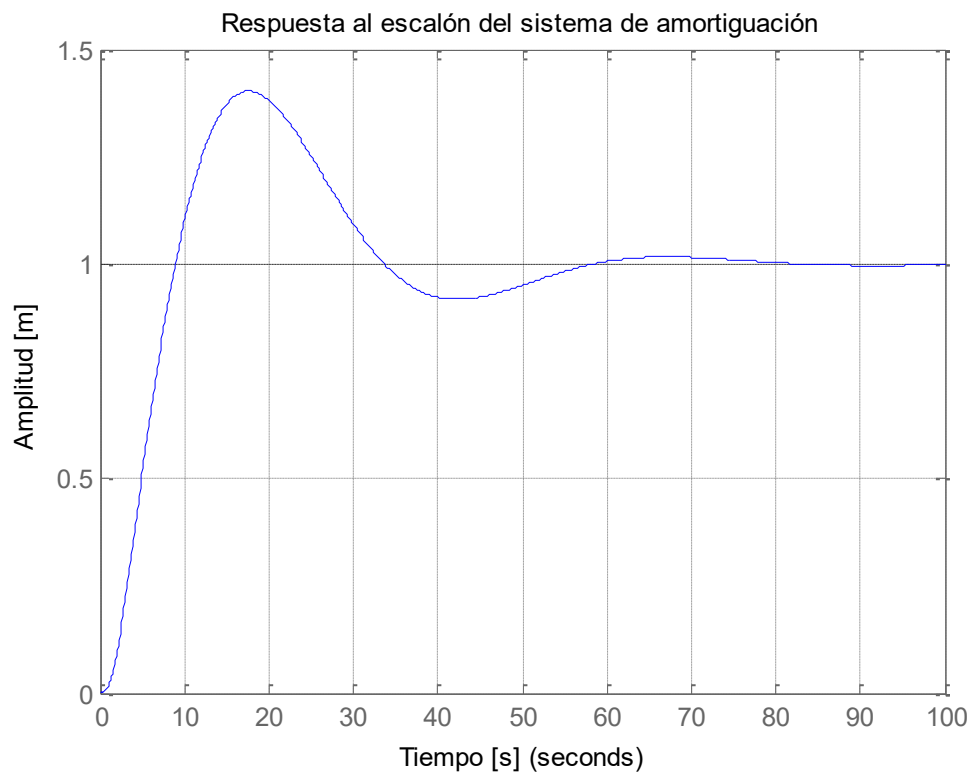
G=tf(KC*[BA KR],[MA*MS BA*MA+BA*MS MA*(KC+KR)+KR*MS BA*KC KC*KR])
```

Este código devuelve la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{4000s + 500}{25000s^4 + 44000s^3 + 30500s^2 + 4000s + 500}$$

Y la respuesta al escalón unitario es:

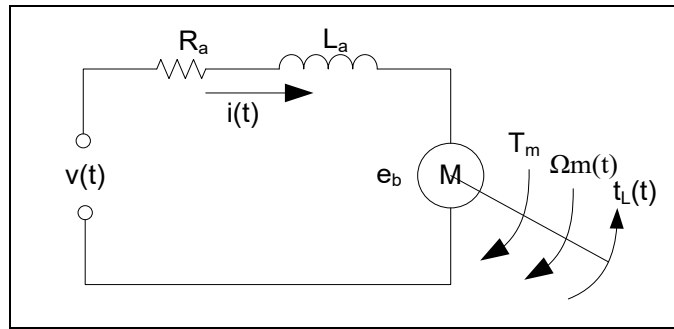
```
step(G); grid
title('Respuesta al escalón del sistema de amortiguación')
xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Amplitud [m]')
```



Otra manera de resolver el problema es usando el siguiente código:

```
close all; clear all; clc
pkg load symbolic
syms s Ma Xa Xs Ba Kr Ms Kc U real
eq1=Ma*s^2*Xa==Ba*s*(Xs-Xa)+Kr*(Xs-Xa)
eq2=Ms*s^2*Xs==Ba*s*(Xa-Xs)+Kr*(Xa-Xs)+Kc*(W-Xs)
S=solve(eq1,eq2,Xa,W) % resuelve las ecuaciones, da estructura S.Xa y S.U
G=factor(S.Xa/S.W,s,'s'); % hace el cociente en potencias de s
G=simplify(G)
```

5. El siguiente circuito representa al motor de corriente continua. Se pide:



5.1. Verificar que las ecuaciones diferenciales que lo modelan son:

$$v(t) = R_a i(t) + L_a \frac{di(t)}{dt} + K_b \omega_m(t)$$

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = K_t i(t) - B_m \omega_m(t) - t_L(t)$$

5.2. Obtener la función de transferencia del sistema, tomando la tensión $v(t)$ como entrada y a la velocidad de giro del eje de rotor $\omega_m(t)$ como salida.

5.3. Obtener la función de transferencia del sistema, tomando la tensión $v(t)$ como entrada y a la posición del eje de rotor $\theta_m(t)$ como salida.

5.4. Obtener la función de transferencia del sistema, tomando la tensión $v(t)$ como entrada y el torque motriz $t_m(t)$ como salida.

5.5. Obtener el modelo del motor en Simulink.

5.6. Encontrar la velocidad de régimen y la cantidad de vueltas dadas por el eje para $t=10\text{seg}$ para una entrada escalón de 24 voltios de amplitud. Considerar:

$$L_a = 10e-3H$$

$$K_b = 0.024V / rad / seg$$

$$R_a = 10\Omega$$

$$B_m = 10e-5N / rad / seg$$

$$K_t = 0.024Nm / A$$

$$J_m = 10e-6Kgm^2$$

Solución:

Para determinar la FdT entre la velocidad de giro y la tensión de entrada, comenzamos buscando la Transformada de Laplace de las ecuaciones del modelo, haciendo la entrada de perturbación $t_L(t)$ nula.

$$V(s) = R_a I(s) + L_a s I(s) + K_b \Omega_m(s)$$

$$J_m s \Omega_m(s) = K_t I(s) - B_m \Omega_m(s)$$

Luego, de la segunda ecuación se despeja $I(s)$ y se reemplaza en la primera:

$$I(s) = \frac{J_m s + B_m}{K_t} \Omega_m(s)$$

$$V(s) = (L_a s + R_a) \frac{(J_m s + B_m)}{K_t} \Omega_m(s) + K_b \Omega_m(s)$$

$$K_t V(s) = (L_a s + R_a) (J_m s + B_m) \Omega_m(s) + K_b K_t \Omega_m(s)$$

Reacomodando la última ecuación llegamos a la Función de Transferencia buscada:

$$\frac{\Omega_m(s)}{V(s)} = \frac{K_i}{L_a J_m s^2 + (J_m R_a + L_a B_m) s + R_a B_m + K_b K_i}$$

Otra forma de resolver el problema es usando el siguiente código:

```
close all; clear all; clc
pkg load symbolic
syms V Ra La I Kb w Jm Kt Bm s real
eq2=Jm*s*w==Kt*I-Bm*w
eq1=V==Ra*I+La*s*I+Kb*w
S1=solve(eq1,eq2,w,V)
G=factor(S1.w/S1.V,'s');
pretty(G)
```

Para determinar la FdT entre el ángulo girado por el eje del rotor y la tensión de entrada se puede considerar:

$$\frac{\theta_m(s)}{V(s)} = \frac{\theta_m(s)}{\Omega_m(s)} \frac{\Omega_m(s)}{V(s)}$$

Recordando que la velocidad angular es la derivada de la posición angular:

$$\frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t)$$

$$s\theta(s) = \Omega(s)$$

$$\frac{\theta(s)}{\Omega(s)} = \frac{1}{s}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\theta_m(s)}{V(s)} = \frac{K_i}{L_a J_m s^3 + (J_m R_a + L_a B_m) s^2 + (R_a B_m + K_b K_i) s}$$

Finalmente, para calcular la FdT entre el torque motriz y la tensión de entrada, se parte de las ecuaciones originales, recordando la relación entre la corriente y el toque:

$$V(s) = R_a I(s) + L_a s I(s) + K_b \Omega_m(s)$$

$$J_m s \Omega_m(s) = K_i I(s) - B_m \Omega_m(s)$$

$$T_m(s) = K_i I(s)$$

Podemos usar la segunda y tercera ecuación para escribir la velocidad en función del toque:

$$(J_m s + B_m) \Omega_m(s) = T_m(s)$$

$$\Omega_m(s) = \frac{T_m(s)}{(J_m s + B_m)}$$

Y reemplazando en la primera ecuación:

$$V(s) = (L_a s + R_a) \frac{T_m(s)}{K_i} + K_b \frac{T_m(s)}{(J_m s + B_m)}$$

Y operando algebraicamente:

$$K_i (J_m s + B_m) V(s) = (L_a s + R_a) (J_m s + B_m) T_m(s) + K_i K_b T_m(s)$$

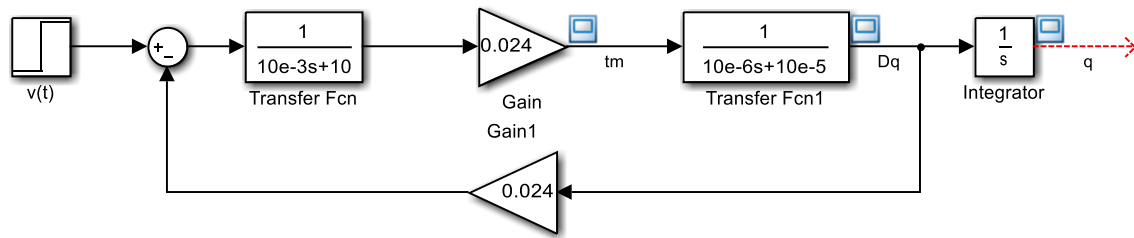
Finalmente:

$$\frac{T_m(s)}{V(s)} = \frac{K_i (J_m s + B_m)}{L_a J_m s^2 + (J_m R_a + L_a B_m) s + R_a B_m + K_b K_i}$$

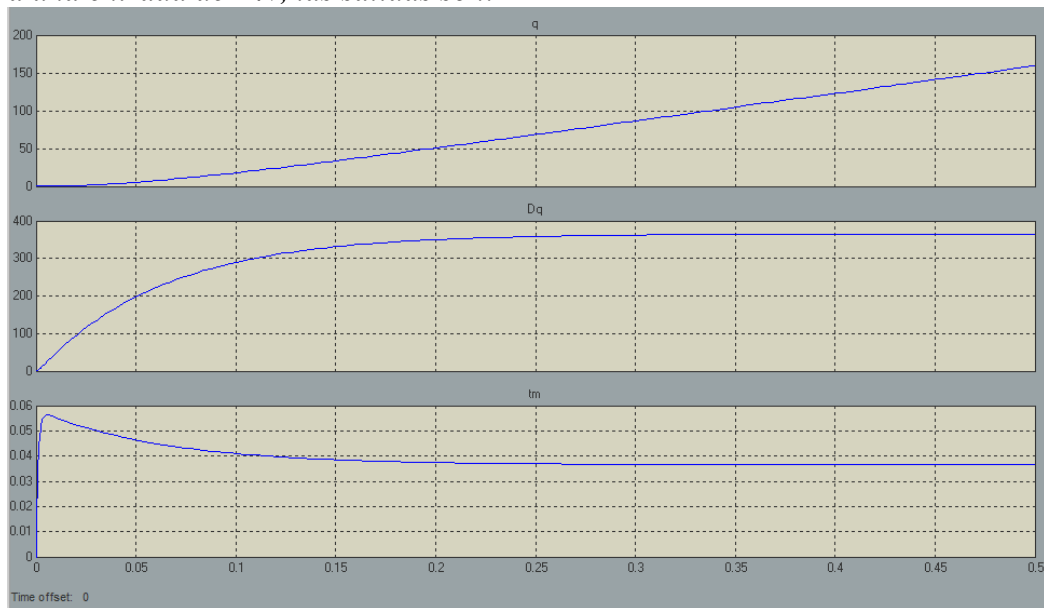
Nuevamente, se puede resolver con Octave usando:

```
syms Tm
S2=solve(eq1,eq2,I,V) % resuelve respecto de la corriente y tension
G2=factor(Kt*S2.I/S2.V,'s'); % multiplica por la cte de cupla Kt
pretty(G2)
```

El modelo de Simulink del motor permite visualizar las tres señales de interés al mismo tiempo.



Para una entrada de 24v, las salidas son:



Las señales se muestran en gráficas diferentes porque sus unidades de medida son distintas: $\vartheta(t)$ [rad], $\omega(t)$ [rad/seg], $tm(t)$ [Nm].

6. Determinar la función de transferencia del motor Faulhaber modelo 1741 012 CXR cuya hoja de datos se presenta a continuación. Simular la respuesta temporal para una entrada escalón de 12 voltios de amplitud.

NEW**FAULHABER****DC-Micromotors****8 mNm**

Graphite Commutation

For combination with
Gearheads:
16/7, 20/1
Encoders:
IE2-1024, IE2-16

Series 1741 ... CXR

	1741 U	006 CXR	012 CXR	018 CXR	024 CXR	
1 Nominal voltage	U_n	6	12	18	24	V
2 Terminal resistance	R	1,3	5,8	15	26,9	Ω
3 Output power	$P_{2 \max}$	5,71	5,58	5,01	5,03	W
4 Efficiency, max.	η_{\max}	75	77	78	79	%
5 No-load speed	n_0	7 000	7 500	7 200	7 200	rpm
6 No-load current (with shaft \varnothing 2 mm)	I_0	0,039	0,02	0,013	0,009	A
7 Stall torque	M_{st}	31,3	28,5	26,7	26,8	mNm
8 Friction torque	M_{fr}	0,29	0,29	0,29	0,29	mNm
9 Speed constant	k_n	1 285	660	415	310	rpm/V
10 Back-EMF constant	k_E	0,778	1,515	2,41	3,226	mV/rpm
11 Torque constant	k_M	7,43	14,48	23,02	30,82	mNm/A
12 Current constant	k_i	0,135	0,069	0,043	0,032	A/mNm
13 Slope of n-M curve	$\Delta n / \Delta M$	225	265	270	270	rpm/mNm
14 Rotor inductance	L	35	135	340	600	μ H
15 Mechanical time constant	τ_m	4,2	4,4	4,2	4,2	ms
16 Rotor inertia	J	1,8	1,6	1,5	1,5	gcm ²
17 Angular acceleration	α_{\max}	174	178	178	179	$\cdot 10^3$ rad/s ²
18 Thermal resistance	R_{th1} / R_{th2}	7 / 23				K/W
19 Thermal time constant	τ_{w1} / τ_{w2}	8 / 440				s
20 Operating temperature range:						
– motor		-30 ... +100				°C
– rotor, max. permissible		+125				°C
21 Shaft bearings		ball bearings, preloaded				
22 Shaft load max.:						
– with shaft diameter		2				mm
– radial at 3 000 rpm (3 mm from bearing)		8				N
– axial at 3 000 rpm		0,8				N
– axial at standstill		10				N
23 Shaft play						
– radial	\leq	0,015				mm
– axial	\leq	0				mm
24 Housing material		steel, zinc galvanized and passivated				
25 Weight		45				g
26 Direction of rotation		clockwise, viewed from the front face				

7. A continuación, se pide modelar el motor utilizando solamente la ganancia y la constante de tiempo mecánica. Obtener una función de transferencia equivalente de 1er orden y otra función equivalente de 2do orden. Simular y comparar con la función de transferencia completa.

$$G(s) = \frac{\omega_{\max} / V_{in}}{\tau_m s + 1}$$

Función de transferencia equivalente de
1er orden

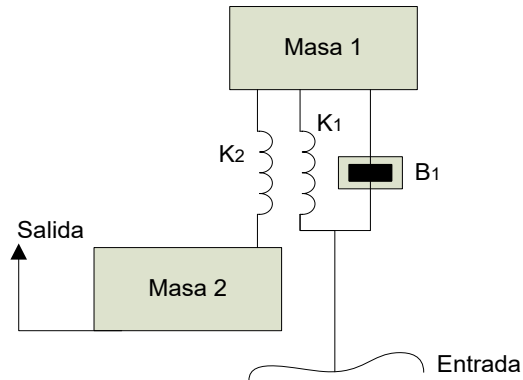
$$G(s) = \frac{\omega_{\max} / V_{in}}{\left(\frac{\tau_m}{2} s + 1\right)^2}$$

Función de transferencia equivalente de
2do orden

Ayuda: En <http://www.robolabo.etsit.upm.es/asignaturas/seco/apuntes/modelado.pdf> ecuación (2.30) se determina que la constante de tiempo mecánica viene dada por:

$$\tau_m = \frac{RJ}{RB + K_i K_b}$$

6. El sistema que se muestra en la figura puede ser modelado matemáticamente por las ecuaciones que se presentan a continuación. Determinar las funciones de transferencia que relacionan la posición de cada una de las masas ($x_1(t), x_2(t)$) con respecto a la posición de entrada $u(t)$



$$M_1 \frac{dx_1(t)^2}{dt^2} = B_1 \left(\frac{du(t)}{dt} - \frac{dx_1(t)}{dt} \right) + K_1 (u(t) - x_1(t)) + K_2 (x_2(t) - x_1(t))$$

$$M_2 \frac{dx_2(t)^2}{dt^2} = K_2 (x_1(t) - x_2(t))$$

Solución con Octave:

```
pkg load symbolic
syms M1 B1 K1 K2 M2 s real
syms X1 X2 u real

eq1=M1*(s^2)*X1 == B1*s*(u-X1)+K1*(u-X1)+K2*(X2-X1)
eq2=M2*s^2*X2==K2*(X1-X2)
S=solve(eq1,eq2,X1,X2)
X1_U=simplify(factor(S.X1/u,'s'))
X2_U=simplify(factor(S.X2/u,'s'))
```

Solución de $X_1(s)/U(s)$ de manera tradicional:

$$M_1 s^2 X_1(s) = B_1 s (U(s) - X_1(s)) + K_1 (U(s) - X_1(s)) + K_2 (X_2(s) - X_1(s)) \quad \text{equ 1}$$

$$M_2 s^2 X_2(s) = K_2 (X_1(s) - X_2(s)) \quad \text{equ 2}$$

Determinar $X_1(s)/U(s)$:

$$(M_2 s^2 + K_2) X_2(s) = K_2 X_1(s)$$

$$X_2(s) = \frac{K_2}{(M_2 s^2 + K_2)} X_1(s)$$

$$(M_1 s^2 + B_1 s + K_1 + K_2) X_1(s) = (B_1 s + K_1) U(s) + K_2 X_2(s)$$

$$(M_1 s^2 + B_1 s + K_1 + K_2) X_1(s) = (B_1 s + K_1) U(s) + K_2 \frac{K_2}{(M_2 s^2 + K_2)} X_1(s)$$

$$\left(M_1 s^2 + B_1 s + K_1 + K_2 - K_2 \frac{K_2}{(M_2 s^2 + K_2)} \right) X_1(s) = (B_1 s + K_1) U(s)$$

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{(B_1 s + K_1)}{M_1 s^2 + B_1 s + K_1 + K_2 - K_2 \frac{K_2}{(M_2 s^2 + K_2)}} = \frac{(M_2 s^2 + K_2)(B_1 s + K_1)}{(M_2 s^2 + K_2)(M_1 s^2 + B_1 s + K_1 + K_2) - K_2^2}$$

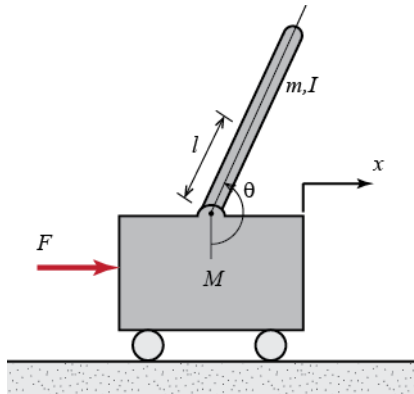
$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{(M_2 s^2 + K_2)(B_1 s + K_1)}{M_2 M_1 s^4 + B_1 M_2 s^3 + K_1 M_2 s^2 + K_2 M_2 s^2 + K_2 M_1 s^2 + K_2 B_1 s + K_1 K_2}$$

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{M_2 B_1 s^3 + M_2 K_1 s^2 + K_2 B_1 s + K_1 K_2}{M_2 M_1 s^4 + B_1 M_2 s^3 + K_1 M_2 s^2 + K_2 M_2 s^2 + K_2 M_1 s^2 + K_2 B_1 s + K_1 K_2}$$

8. En la figura se muestra el esquema de un péndulo invertido, donde I representa el momento de inercia de la barra, m la masa de la barra, l su longitud. M representa a la masa del móvil, b el coeficiente de fricción entre las ruedas y el piso. También, $\theta(t), x(t)$ representan el ángulo del péndulo y el desplazamiento del móvil respectivamente. La fuerza actuante sobre el móvil es $f(t)$.

Se pide:

- 8.1. Determinar la Función de Transferencia que relaciona el ángulo de la varilla con la fuerza $f(t)$ actuante sobre el móvil.
- 8.2. Determinar la estabilidad del sistema.



$$I \ddot{\theta}(t) + m l^2 \ddot{\theta}(t) = m g l \theta(t) + m l \ddot{x}(t)$$

$$(M + m) \ddot{x}(t) = f(t) - b \dot{x}(t) + m l \ddot{\theta}(t)$$

Solución.

Comenzamos llevando las ecuaciones que modelan al sistema al dominio de Laplace.

$$Is^2\theta(s) + ml^2s^2\theta(s) = mgl\theta(s) + mls^2X(s)$$

$$(M + m)s^2X(s) + bsX(s) - mls^2\theta(s) = F(s)$$

Luego, de la primera ecuación:

$$\left[(ml^2 + I)s^2 - mgl \right] \theta(s) = mls^2X(s)$$

$$X(s) = \frac{(ml^2 + I)s^2 - mgl}{mls^2} \theta(s)$$

Luego utilizamos el siguiente código para determinar la relación entre $\vartheta(s)$ y $F(s)$

```
close all; clear all; clc
pkg load symbolic
syms M m l I g b s Qs real
Xs = ( (m*l^2+I)*s^2-m*g*l) / (m*l*s^2)*Qs;
```

```
Fs = (M+m)*s^2*Xs+b*s*Xs-m*l*s^2*Qs
QsFs=1/factor(Fs/Qs, 'Qs')
```

Obtenemos:

$$\frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{lms}{-(MI + mI + Ml^2m)s^3 - (I - l^2m)bs^2 + (M + m)glms + bglm}$$

Ahora, para el análisis de estabilidad: Siendo que todas las constantes son positivas, el coeficiente que acompaña al término cúbico de s es un número negativo. Por lo tanto, el sistema será inestable.

Otra forma de resolver el problema, partiendo directamente de las ecuaciones de la definición:

```
close all; clear all; clc
pkg load symbolic
syms M m l J g b s X Theta F real
eq1=J*s^2*Theta+m*l^2*s^2*Theta==m*g*l*Theta+m*l*s^2*X
eq2=(m+M)*s^2*X+b*s*X-m*l*s^2*Theta==F
S=solve(eq1,eq2,Theta,F)
G=simplify(factor(S.Theta/S.F,'s'))
```

9. Es posible modelar cada grado de libertad de un robot mediante la siguiente ecuación diferencial (linealizada para este caso de estudio):

$$M \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + C \frac{d\theta(t)}{dt} + G\theta(t) = t_m(t)$$

Donde M , C y G representan las constantes de Inercia, Fuerzas de Coriolis y el efecto de la gravedad respectivamente, y $\theta(t), t_m(t)$ representan la posición angular de la articulación y el torque actuante.

Por lo general se utilizan motores eléctricos para mover las articulaciones. Sabiendo que el modelo matemático del motor eléctrico es el que se muestra a continuación,

determinar la función de transferencia entre la entrada de tensión del motor y la posición angular del robot.

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

$$J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = K_a i(t) - B \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

$$t_m(t) = K_a i(t)$$

Nota:

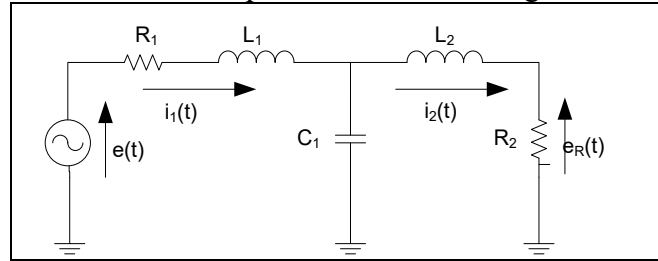
$\theta(t)$ = posición angular de la articulación del robot

$\theta_m(t)$ = posición angular del rotor del motor

Solución:

```
close all; clear all; clc
syms M C G s Q Tm real
% Ecuación del robot
eq1 = M*s^2*Q + C*s*Q + G*Q == Tm
% Ecuación del motor
syms V L R Kb real
syms J B Ka real
I = Tm / Ka;
eq2 = V == (L*s + R)*I + Kb*s*Q
eq3 = J*s^2*Q == Tm - B*s*Q
% Necesito encontrar: Q(s)/Tm(s), y Tm(s)/V(s), ->
Q(s)/Tm(s)*Tm(s)/V(s)
% Haciendi solve(eq1,Q) encontramos Q(s) = Tm/(M*s^2 + C*s + G)
Q_Tm = 1/(M*s^2 + C*s + G)
% De eq3 buscamos Q como función de Tm solve(eq3, Q)
Q = Tm/(J*s^2 + B*s);
eq2p = eval(eq2);
% De solve(eq2p, Tm) -> Tm = V/((R + L*s)/Ka + (Kb*s)/(J*s^2 + B*s))
Tm_V = 1/((R + L*s)/Ka + (Kb*s)/(J*s^2 + B*s))
% Finalmente
Q_V = collect(Q_Tm * Tm_V, s)
```

10. Considerando el circuito eléctrico que se muestra en la figura, encontrar:



- 10.1. Las ecuaciones que lo representan matemáticamente.
- 10.2. La relación entre la tensión de entrada $e(t)$ y la de salida $e_R(t)$.
- 10.3. Simular el circuito con Simulink, considerando;

$$R_1 = 100\Omega$$

$$R_2 = 250\Omega$$

$$C_1 = 1\mu F$$

$$L_1 = 100mHy$$

$$L_2 = 100mHy$$

11. El control de posición de un brazo robótico industrial se puede describir por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + 5\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 4\frac{d\theta(t)}{dt} = 2i(t)$$

$$\frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{dv_3(t)}{dt}$$

$$v_3(t) = r(t) - v_1(t) - v_2(t)$$

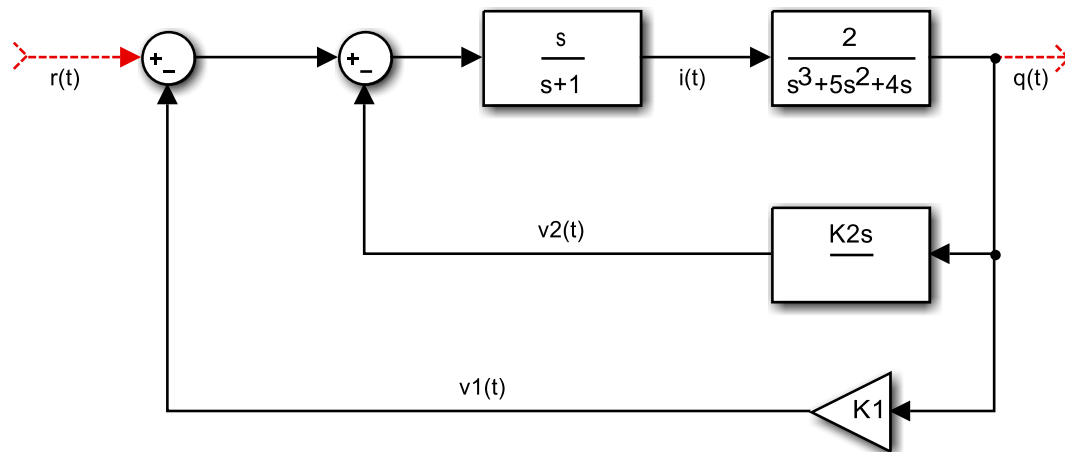
$$v_1(t) = K_1\theta(t)$$

$$v_2(t) = K_2\frac{d\theta(t)}{dt}$$

Donde $r(t)$ representa la posición angular deseada, $\theta(t)$ la posición angular de la herramienta del robot, $i(t)$ la corriente que circula por el motor que mueve la articulación, $v_1(t)$ la salida del sensor de posición y $v_2(t)$ la salida del sensor de velocidad.

Se pide:

- 11.1. Determinar la función de transferencia $\theta(s)/R(s)$
- 11.2. Verificar que el diagrama de bloques que se presenta a continuación representa al mismo sistema



Solución:

Como siempre, comenzamos llevando al dominio de Laplace a las ecuaciones que caracterizan el sistema:

$$(s^3 + 5s^2 + 4s)\theta(s) = 2I(s)$$

$$(s+1)I(s) = s(R(s) - K_1\theta(s) - K_2s\theta(s))$$

Luego, a partir de la primera ecuación:

$$I(s) = \frac{(s^3 + 5s^2 + 4s)}{2}\theta(s)$$

Reemplazando en la segunda ecuación:

$$\left[(s+1)\frac{(s^3 + 5s^2 + 4s)}{2} + K_1s + K_2s^2 \right] \theta(s) = sR(s)$$

$$\left[(s+1)(s^3 + 5s^2 + 4s) + 2K_1s + 2K_2s^2 \right] \theta(s) = 2sR(s)$$

$$\left[s^4 + 6s^3 + (9 + 2K_2)s^2 + (4 + 2K_1)s \right] \theta(s) = 2sR(s)$$

$$\left[s^3 + 6s^2 + (9 + 2K_2)s + (4 + 2K_1) \right] \theta(s) = 2R(s)$$

Finalmente, la Función de Transferencia queda:

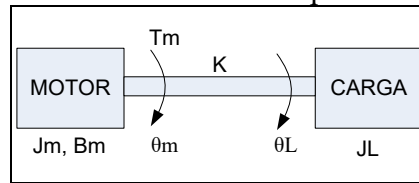
$$\frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^3 + 6s^2 + (9 + 2K_2)s + (4 + 2K_1)}$$

Para determinar la FdT del diagrama de bloques, se puede usar Octave:

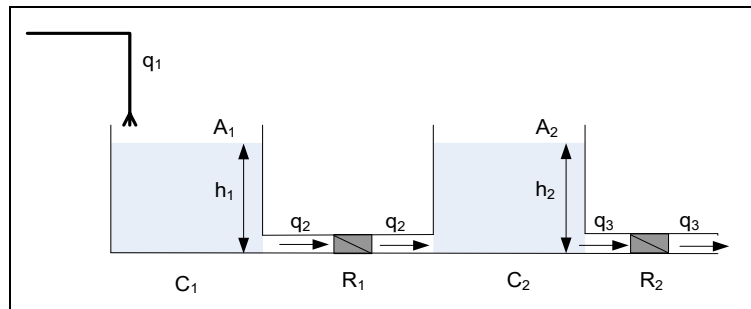
```
close all; clear all; clc
pkg load symbolic
syms K1 K2 s real
% Funciones de Transferencia
G1s=s/(s+1);
G2s=2/(s^3+5*s^2+4*s);
H1s=K2*s;
H2s=K1;
% Lazo Interno:
Gint=G1s*G2s/(1+G1s*G2s*H1s);
% Lazo Externo:
Gext=factor(Gint/(1+Gint*H2s), 's')
```

Llegando al mismo resultado

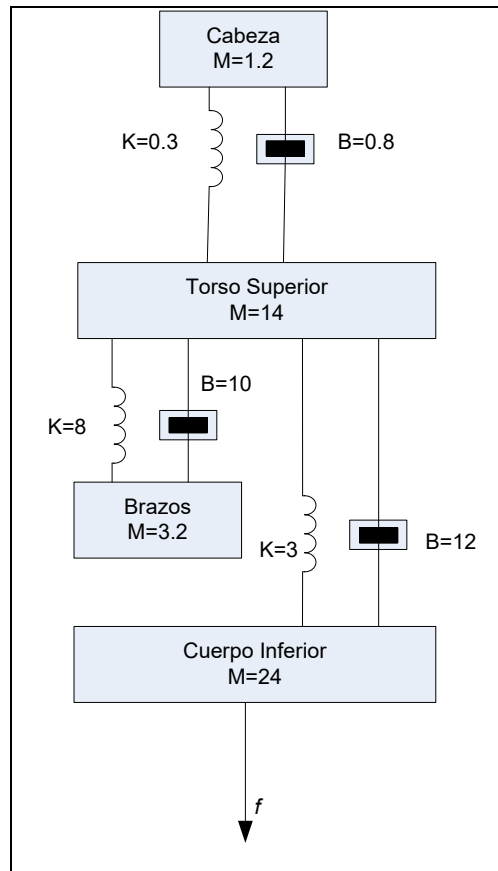
12. La figura muestra el diagrama de un motor acoplado a una carga inercial a través de un eje con una constante de resorte K . Un acoplamiento no rígido entre dos componentes mecánicos en un sistema de control puede causar resonancias torsionales que se pueden transmitir a todas las partes del sistema.



- 12.1. Realizar el diagrama de cuerpo libre del sistema.
 - 12.2. Obtener las ecuaciones que modelan el sistema.
 - 12.3. Encontrar las funciones de transferencia que relacionan el par motor $T_m(t)$ con el desplazamiento del motor $\theta_m(t)$ y con el desplazamiento de la carga $\theta_L(t)$
13. En la siguiente figura se muestra un sistema hidráulico. Obtener las relaciones que describen cómo las alturas del líquido en los contenedores cambian con el tiempo. Considerar que la inercia (inercia) es despreciable.

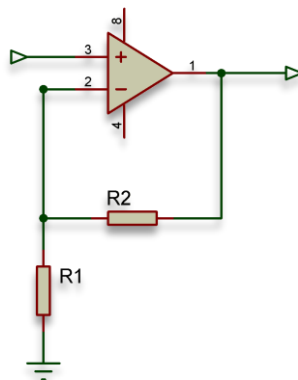


12. En estudios de vibraciones, el cuerpo de los seres humanos con frecuencia se modela mediante resortes, masas y amortiguadores. Para el modelo de un cuerpo sentado con una fuerza aplicada f , según se muestra en la figura, encontrar las ecuaciones que modelan el sistema.

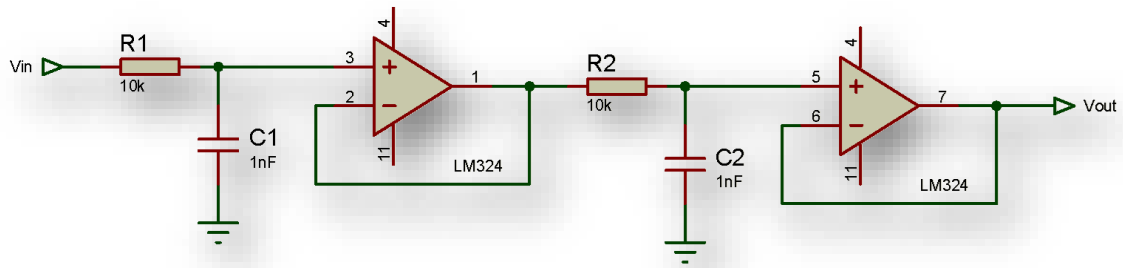


13. Encontrar las funciones de transferencia de los siguientes circuitos

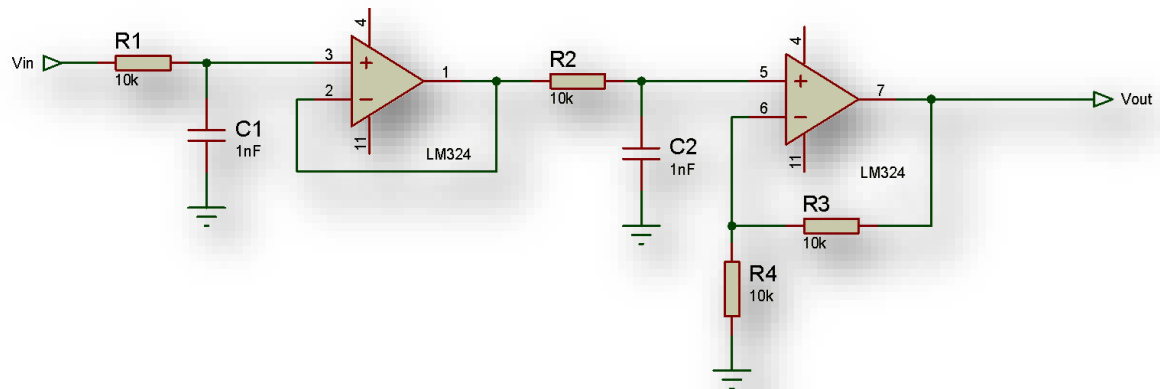
Circuito N° 1: Amplificador no inversor



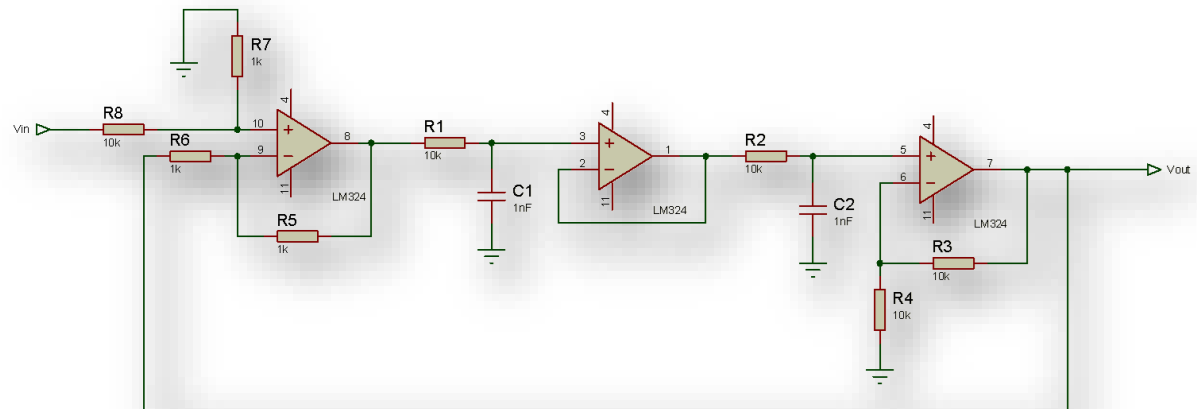
Circuito N° 2: Circuito con dos polos reales y ganancia unitaria, no inversor



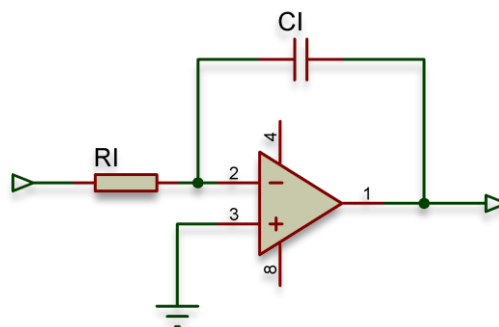
Circuito N° 3: Circuito con dos polos reales y ganancia no unitaria, no inversor



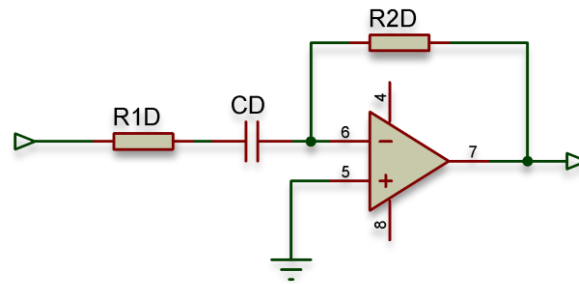
Circuito N° 4: Circuito a lazo cerrado con dos polos y ganancia no unitaria, no inversor



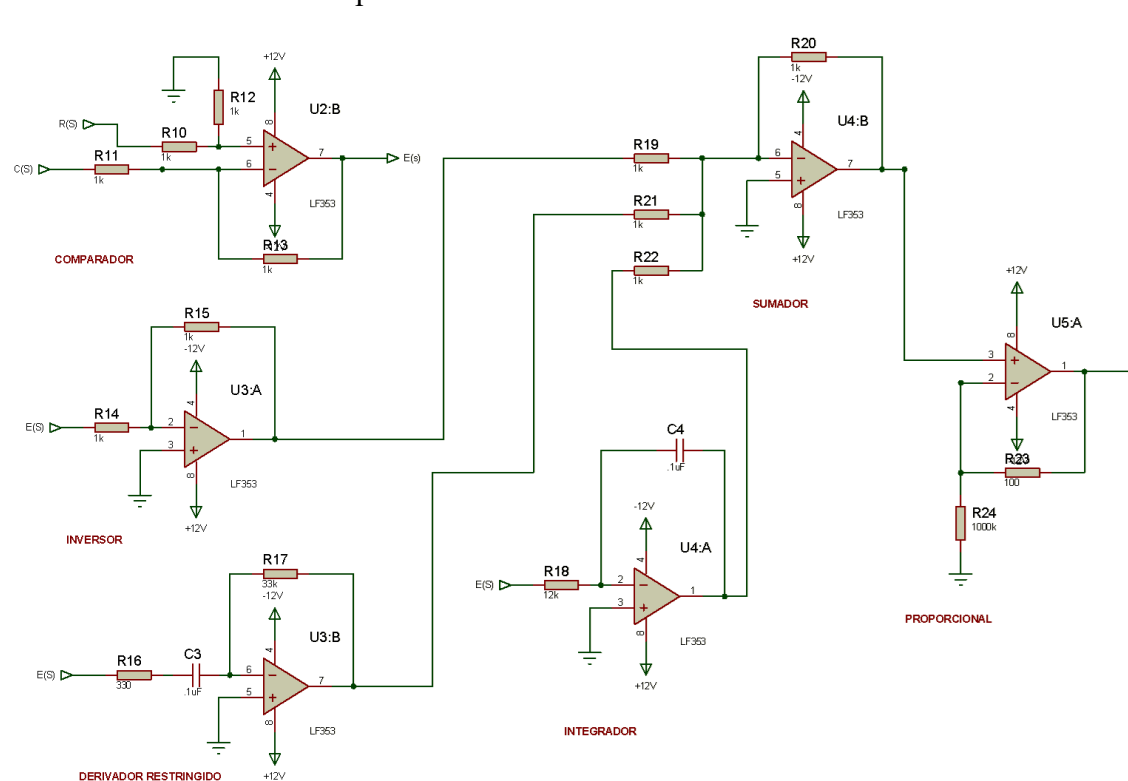
Circuito N° 5: Integrador, inversor



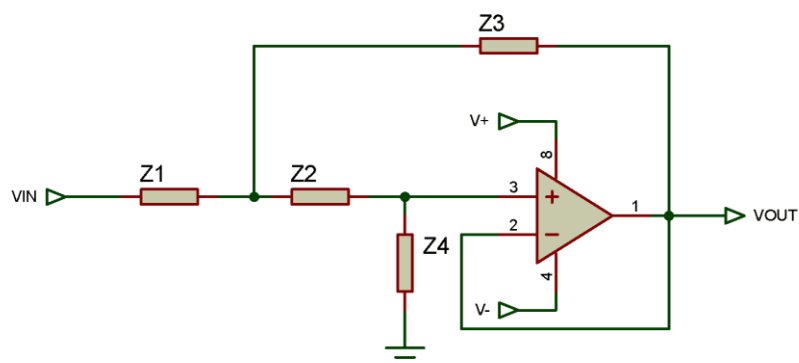
Circuito N° 6: Derivador, inversor



Circuito N° 7: PID con comparador



Circuito N° 8: Configuración Sallen-Key

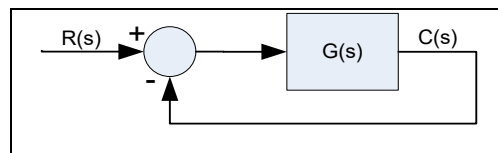


Ver: https://en.wikipedia.org/wiki/Sallen-key_topology

Unidad N° 4: Análisis y Diseño Clásico de Sistemas de Control en el Dominio del Tiempo

Error en Estado Estable

1. Dado el siguiente sistema se pide:
 - 1.1. Determinar las constantes de error de posición, velocidad y aceleración (K_p , K_v , K_a)
 - 1.2. Determinar el error de estado estable para los distintos tipos de entradas.



$$G_1(s) = \frac{50}{(1+0.5s)(1+2s)}$$

$$G_2(s) = \frac{2}{s(1+0.1s)(1+0.5s)}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{s(s^2+4s+200)}$$

$$G_4(s) = \frac{30(1+2s)(1+4s)}{s(s^2+2s+10)}$$

$$G_5(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+4)(4s^2+6s+1)}$$

$$G_6(s) = \frac{K}{(1+s)(1+10s)(1+20s)}$$

$$G_7(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+5)(s+6)}$$

$$G_8(s) = \frac{10(s+1)}{s^3(s^2+5s+5)}$$

$$G_9(s) = \frac{10e^{-0.2s}}{(1+s)(1+10s)(1+20s)}$$

$$G_{10}(s) = \frac{100(s+1)}{s^2(s+5)(s+6)^2}$$

$$G_{11}(s) = \frac{1000}{s(s+10)(s+100)}$$

$$G_{12}(s) = \frac{3s}{s^2(s+6)}$$

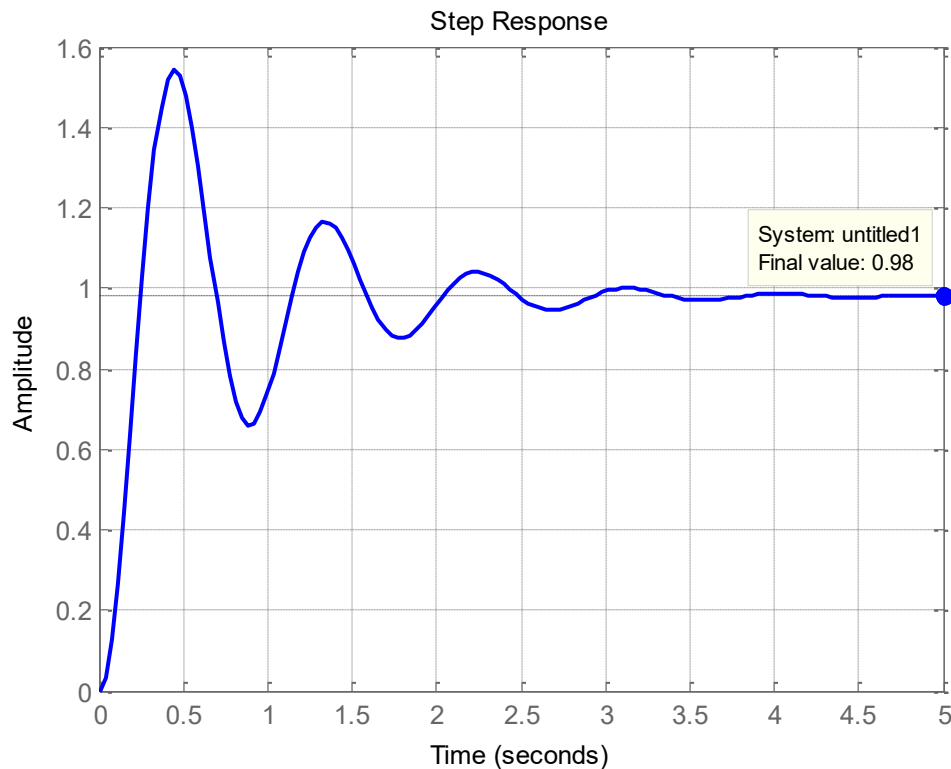
Solución con Octave (sirve para resolver todos los ejemplos)

```
close all; clear all; clc
pkg load symbolic
syms s real
% Función de transferencia
G=50/((1+0.5*s)*(1+2*s))
%G=2/(s*(1+0.1*s)*(1+0.5*s))
% Constantes de error
Kp=G
Kv=simplify(s*G)
Ka=simplify(s^2*G)
s=0;
eval(Kp)
eval(Kv)
```

```
eval(Ka)
% Error para las distintas entradas
ess_e=eval(1/(1+Kp))
ess_r=eval(1/Kv)
ess_p=eval(1/Ka)
```

Solución con Octave

```
close all; clear all; clc
s=tf('s')
G=50/((1+0.5*s)*(1+2*s))
% % G=2/(s*(1+0.1*s)*(1+0.5*s))
% % G=1/(s*(s^2+4*s+200))
% % G=30*(1+2*s)*(1+4*s)/(s*(s^2+2*s+10))
% % G=10*(s+1)/(s*(s+4)*(s^2+6*s+1))
% % G=10*(s+1)/(s^2*(s+5)*(s+6))
% Las constantes de error son:
Kp=evalfr(G,0)
Kv=evalfr(minreal(s*G),0)
Ka=evalfr(minreal(s^2*G),0)
% Mientras que el ess para las distintas entradas:
ess_e=1/(1+Kp) % Error para entrada escalón
ess_r=1/Kv      % Error para entrada rampa
ess_p=1/Ka      % Error para entrada parábola
% Se puede verificar el ess para entrada escalón haciendo:
step(feedback(G,1));grid
```



2. Un sistema con realimentación unitaria tiene una Función de Transferencia representada por:

$$G(s) = \frac{K_t(2s+1)}{s(4s+1)(s+1)^2}$$

Se aplica una entrada $r(t) = 1 + 5t$. Se desea que el error permanente sea igual o menor a 0.1 para la entrada dada. Determinar el valor de K_t . Verificar utilizando Simulink.

Solución:

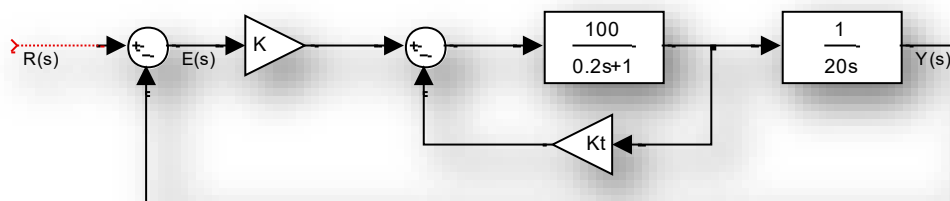
1er Camino. Teniendo en cuenta la propiedad de linealidad de la transformada de laplace se analiza el error para la entrada escalón ($ess=0$) y para la entrada rampa ($ess=5/K_v$, con $K_v=K_t$ para este caso) en forma independiente y se suman los resultados. K_t debe ser mayor a 50.

2do Camino. Definiendo $E(s) = R/(1+G(s))$ y haciendo uso de la propiedad del Teorema del Valor Final se determina el mismo valor.

A continuación se presenta solución usando el segundo camino con Octave.

```
close all; clear all; clc
pkg load symbolic
syms s K real
R=1/s+5/s^2
G=K*(2*s+1)/(s*(4*s+1)*(s+1)^2)
E=factor(s*R/(1+G),'s')
s=0
eval(E)
```

3. En la siguiente figura se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control con realimentación tacométrica. Encontrar las constantes de error de estado estable al escalón, rampa y parábola. Encontrar los errores de estado estable en términos de K y K_t cuando se aplican las mismas entradas:



Solución con Octave

```
%% Solución
close all; clear all; clc
pkg load symbolic
syms K Kt s real
G1=100/(0.2*s+1);
G1LC=factor(G1/(1+G1*Kt),'s');
G2=1/(20*s);
G=factor(K*G1LC*G2,'s');
disp('=====')
disp('Sist. Tipo 1')
pretty(G)
Kv=factor(s*G,'s');
```

```
%% Comprobación.
G1s=tf(100,[0.2 1]);
G1sLC=minreal(G1s/(1+G1s*Kt));
G2s=tf(1,[20 0]);
G=K*G1sLC*G2s;
GLC=minreal(G/(1+G));
t=0:0.001:100;
u=t; %Rampa Unitaria
c=lsim(GLC,u,t); % Salida del sistema
disp('=====')
```

```

s=0;
eval(Kv);
disp('=====')
disp('Kv:')
pretty(Kv)
disp('=====')
disp('Error en Estado Estable:')
pretty(1/Kv)
K=50;Kt=5;
disp('=====')
disp('Error en Estado Estable
para K=50 y Kt=5:')
eval(1/Kv)
disp('Error en estado estable
(Simulado):')
u(length(t))-c(length(t))

```

4. Verificar utilizando Simulink los valores obtenidos en el punto anterior si $K = 50$ y $K_t = 5$.
5. La función de transferencia que relaciona el voltaje de armadura aplicado a la armadura del motor DC de excitación independiente y la velocidad de giro en rad/s es:

$$\frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{3000}{s^2 + 156.25s + 1837.5}$$

- 5.1. Determinar la velocidad de giro en estado estacionario si se aplica un voltaje de 10 voltios.
- 5.2. Calcular la ganancia, el amortiguamiento, la frecuencia propia del sistema y el tiempo de establecimiento. ¿Qué tipo de respuesta tiene el sistema ante una entrada tipo escalón?
- 5.3. Simular la respuesta al escalón y verificar los valores obtenidos en el punto anterior.
- 5.4. Dibujar el mapa de polos y ceros del sistema.
6. Determinar el error en estado estable para los ejercicios de álgebra de bloques de la Unidad N° 2.

Ejemplo de Solución

```

%% Ess para ejercicio 2, Álgebra de bloques.
s = tf('s');
Kp = 31;
G1 = 53*(s + 1) / ((s + 10)*(s + 100));
G2 = 1/s;
Kd = 16;
%% Función de transferencia de lazo abierto:
FdTLA = Kp * feedback(G1, Kd) * G2;
%% Cantidad de polos al origen
p = pole(FdTLA);
pOrigen = sum(p == 0);
fprintf('El sistema es tipo %d. \n', pOrigen);
%% Determinación del valor del error.
K = dcgain(s^pOrigen * FdTLA); % K puede ser Kp, Kv o Ka
%% Presentación de resultados
switch pOrigen
    case 0 % Sistema tipo 0

```

```
        fprintf('El ess para entrada escalón es %.2f\n', 1/(1 +  
K));  
    case 1 % Sistema tipo 1  
        fprintf('El ess para entrada rampa es %.2f\n', 1/K);  
    case 2 % Sistema tipo 2  
        fprintf('El ess para entrada parábola es %.2f\n', 1/K);  
    otherwise  
        fprintf('El error será 0 para las tres entradas de  
prueba\n');  
end
```

Respuesta Temporal de Sistemas de Primer Orden y Segundo orden

7. Esbozar la respuesta temporal al escalón unitario de los sistemas caracterizados por las siguientes funciones de transferencia. Verificar usando Octave.

$$G_1(s) = \frac{15}{5s+1}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{5s+1}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{s+5}$$

$$G_4(s) = \frac{15}{s+5}$$

$$G_5(s) = \frac{15}{5s+1} e^{-2s}$$

$$G_6(s) = \frac{625}{s^2+60s+625}$$

$$G_7(s) = \frac{1875}{s^2+60s+625}$$

$$G_8(s) = \frac{1875}{s^2+60s+625} e^{-0.1s}$$

$$G_9(s) = \frac{1875}{(s+46.58)(s+13.42)} e^{-0.1s}$$

$$G_{10}(s) = \frac{187500}{s^2+600s+62500}$$

$$G_{11}(s) = \frac{0.1875}{s^2+0.6s+0.0625}$$

$$G_{12}(s) = \frac{0.0625}{s^2+0.35s+0.0625}$$

$$G_{13}(s) = \frac{0.0625}{s^2+0.3s+0.0625}$$

$$G_{14}(s) = \frac{0.0625}{s^2+0.3s+0.0625} e^{-5s}$$

$$G_{15}(s) = \frac{0.1563}{s^2+0.3s+0.0625} e^{-5s}$$

$$G_{16}(s) = \frac{0.0625}{s^2+0.0625}$$

$$G_{17}(s) = \frac{0.25}{s^2+0.25}$$

$$G_{18}(s) = \frac{0.5}{s^2+0.25}$$

$$G_{19}(s) = \frac{2}{(3s+1)^2}$$

$$G_{20}(s) = \frac{2}{(3s+1)^2} e^{-4s}$$

Solución con Octave:

```
s=tf('s')
G1=15/(5*s+1);step(G1);grid
G2=1/(5*s+1);step(G2);grid
G3=1/(s+5);step(G3);grid
G4=15/(s+5);step(G4);grid
G5=15/(5*s+1);G5.inputdelay=2;step(G5);grid

G6=625/(s^2+60*s+625);step(G6);grid
G7=1875/(s^2+60*s+625);step(G7);grid
G8=1875/(s^2+60*s+625);G8.inputdelay=0.1;step(G8);grid
G9=1875/((s+46.58)*(s+13.42));G9.inputdelay=0.1;step(G9);grid
G10=187500/(s^2+600*s+62500);step(G10);grid

G11=0.1875/(s^2+0.6s+0.0625);step(G11);grid
G12=0.0625/(s^2+0.35s+0.0625);step(G12);grid
G13=0.0625/(s^2+0.3s+0.0625);step(G13);grid
G14=0.0625/(s^2+0.3s+0.0625);G14.inputdelay=5;step(G14);grid
G15=0.1563/(s^2+0.3s+0.0625);G15.inputdelay=5;step(G15);grid

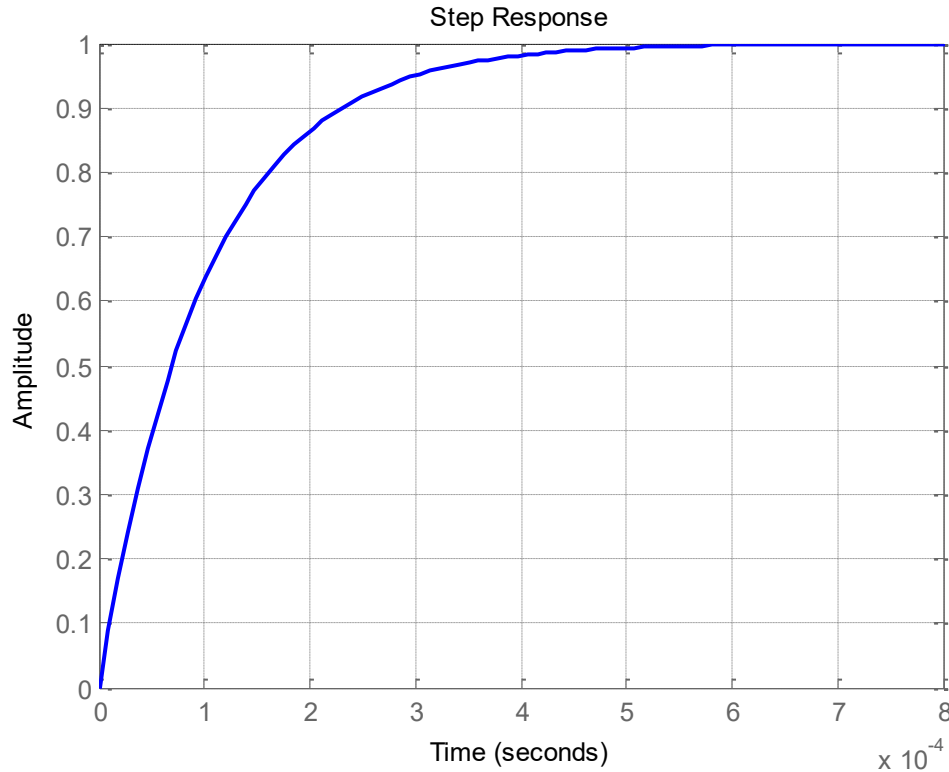
G16=0.0625/(s^2+0.0625);step(G16,50);grid
G17=0.25/(s^2+0.25);step(G17,50);grid
G18=0.5/(s^2+0.25);step(G18,50);grid
```



```
G19=2/(3*s+1)^2;step(G19);grid  
G20=2/(3*s+1)^2;G20.inputdelay=4;step(G20);grid
```

Identificación de Sistemas de Primer Orden

8. Determinar la Función de transferencia de los sistemas cuyas respuestas temporales al escalón unitario se muestran a continuación. Validar usando Octave.
- a) Sistema 1:



Solución con Octave.

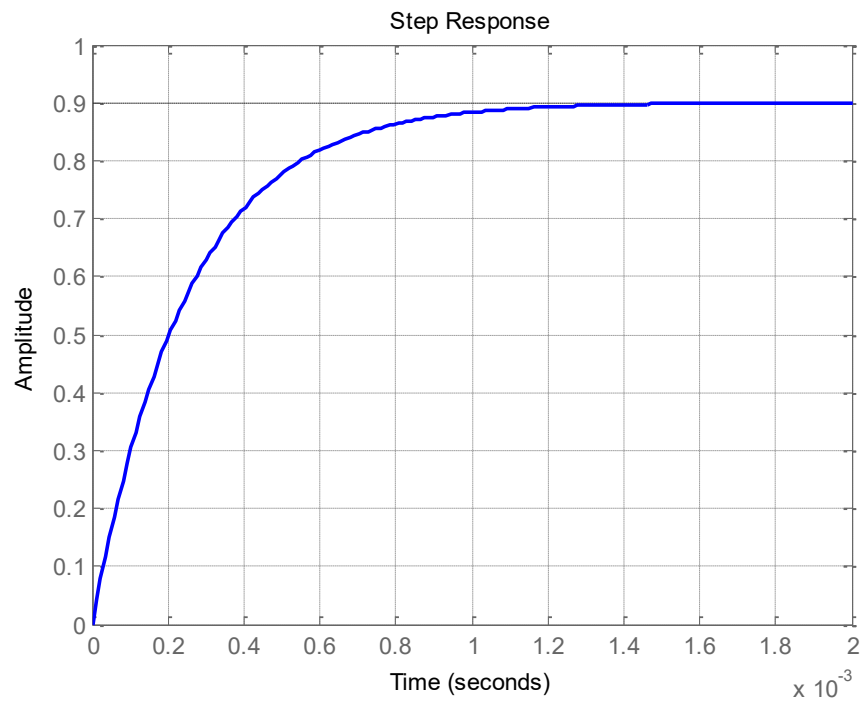
De la gráfica de la respuesta temporal se observa que la ganancia del sistema es unitaria y que se establece en $5\tau = 5 \times 10^{-4}$, por lo tanto $\tau = 0.1 \text{ ms}$

Para verificar usamos el siguiente código:

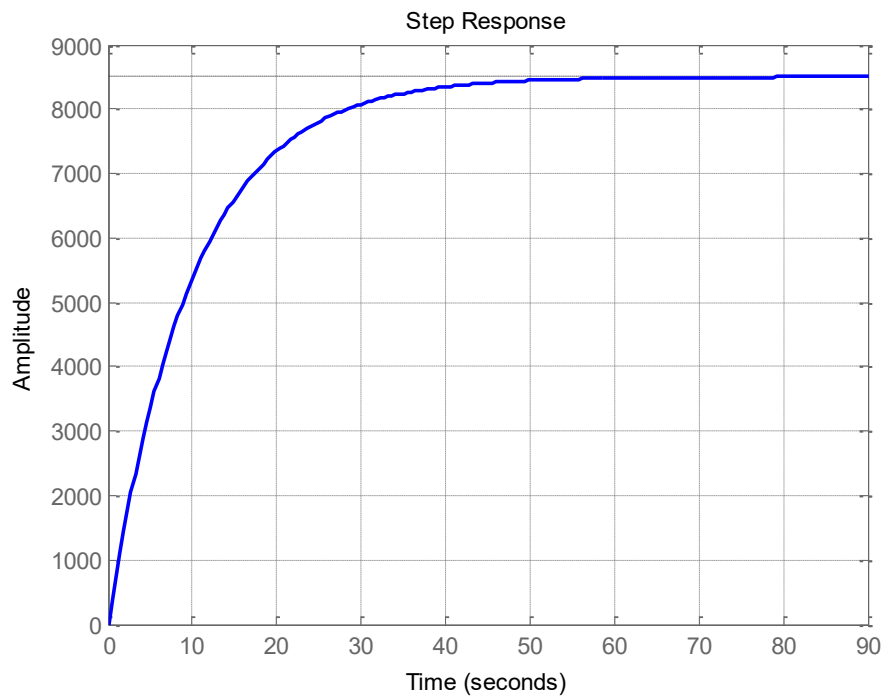
```
G=tf(1,[0.1e-3 1]);
Tfinal=8e-4;
step(G,Tfinal);grid
```

Que devuelve una curva que puede ser comparada con la respuesta temporal dada. Es importante notar el segundo parámetro de la función step, llamado Tfinal. Este parámetro indica a Octave cuánto debe durar la simulación del escalón. Mantener la misma escala temporal en ambas gráficas permite hacer más simples y exactas las comparaciones visuales.

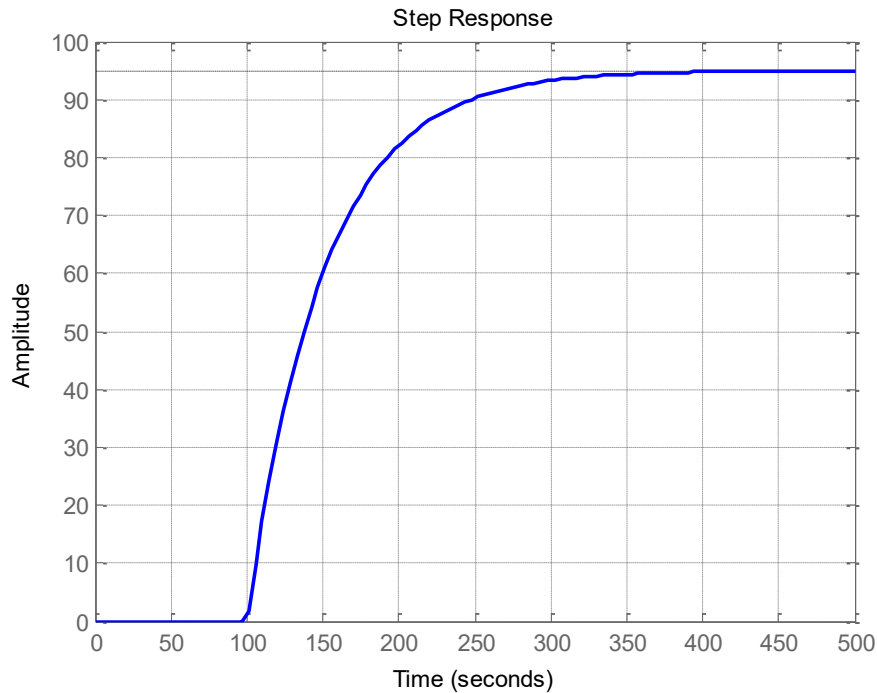
- b) Sistema 2:



c) Sistema 3:



d) Sistema 4:

*Solución:*

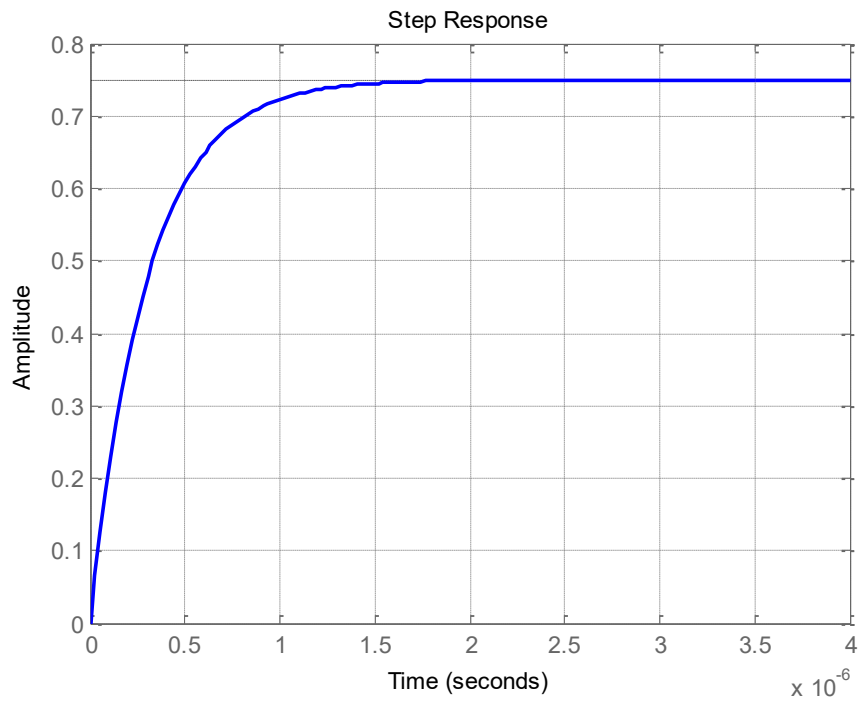
Este sistema presenta una particularidad: un retardo temporal. Esto significa que pasa un tiempo desde que las variaciones de la señal de entrada se presentan a la salida. Un ejemplo de un sistema temporal es un sistema conformado por una caldera que calienta el agua, una cañería por donde el agua caliente se desplaza a una cierta velocidad, y un radiador, donde se produce el intercambio de calor entre el agua caliente y el medio.

En este caso, los parámetros de este sistema son: $K = 95$, $5\tau = 300\text{seg}$, $t_d = 100\text{seg}$.

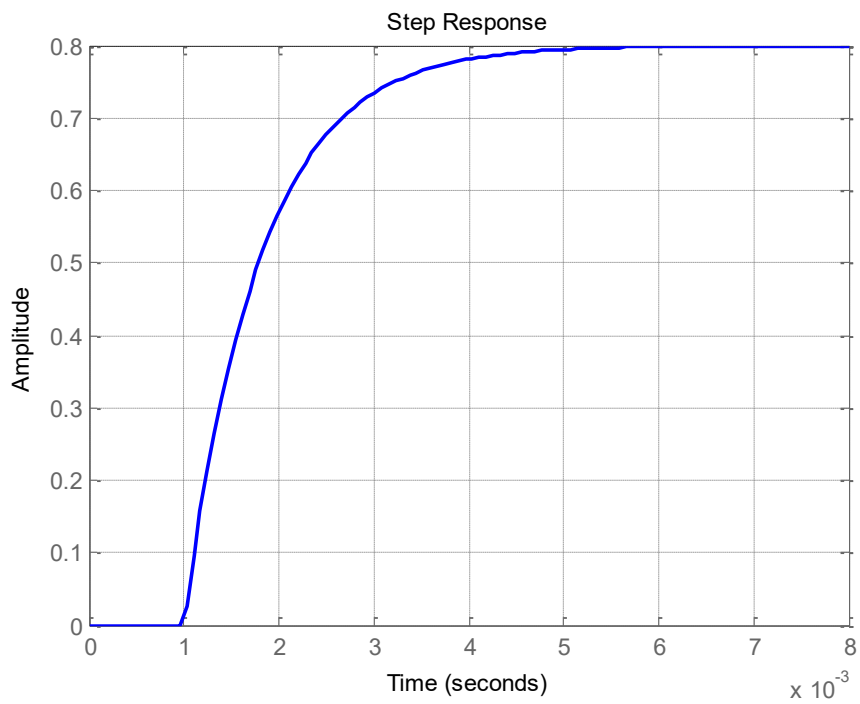
Es importante remarcar que el tiempo de retardo (delay time, t_d) no se debe considerar al momento de calcular el tiempo de establecimiento. Para verificar se puede usar el siguiente código:

```
close all; clear all, clc
s=tf('s')
K=95; % Ganancia del sistema
ts=300; % [seg] Tiempo de establecimiento al 100%
td=100; % [seg] Tiempo de retardo
Tfinal=500; % [seg] Tiempo a simular
G=K/(ts/5*s+1) % Función de transferencia del sistema
G.inputdelay=td; % Tiempo de retardo del sistema
step(G,Tfinal);grid % Simulación
```

e) Sistema 5:

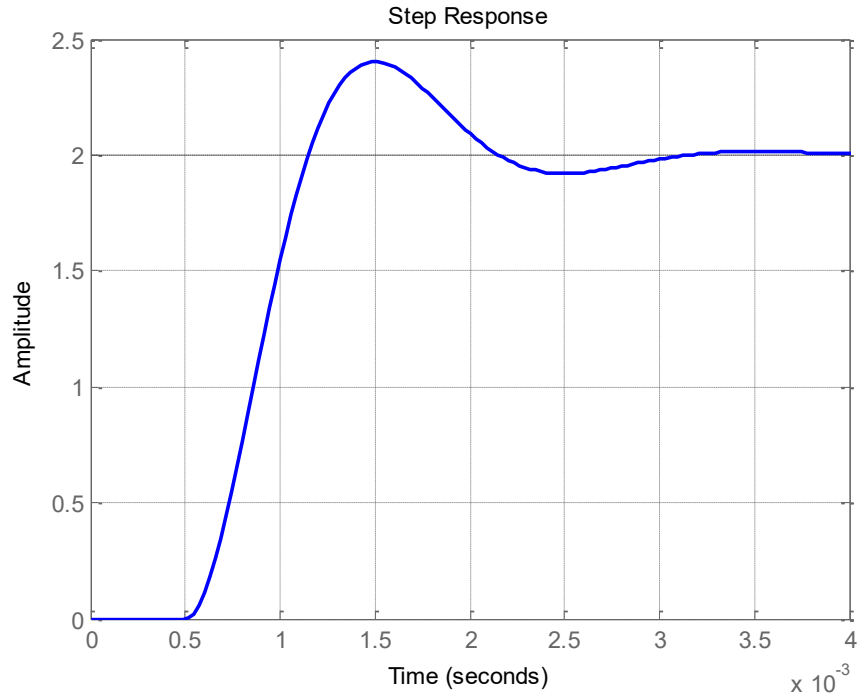


f) Sistema 6:



Identificación de Sistemas de Segundo Orden

9. Determinar la Función de transferencia del sistema cuya respuesta al escalón unitario se muestra en la figura:

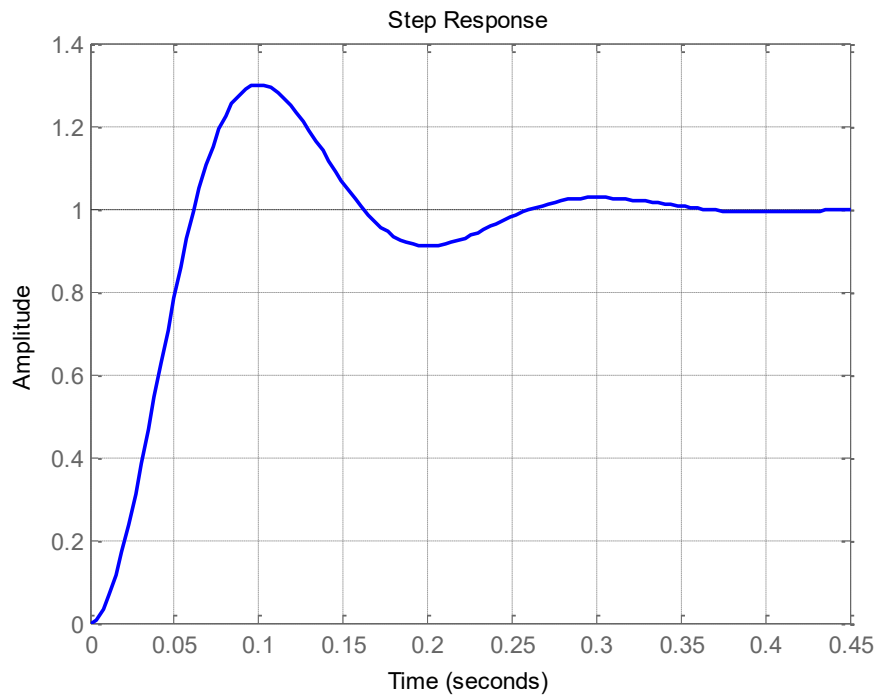


Solución:

```
close all; clear all; clc
ymax=2.4;      % Valor máximo de la salida del sistema
yss=2;         % Valor de estado estable
tp=0.001;     % [seg] tiempo pico
td=0.0005;    % [seg] tiempo de retardo
Tfinal=4e-3;  % [seg] tiempo a simular
K=yss;
Mp=(ymax-yss)/yss;
psita=sqrt(log(Mp)^2/(pi^2+log(Mp)^2));
wn=pi/(tp*sqrt(1-psita^2));
G=tf(K*wn^2,[1 2*psita*wn wn^2])
G.inputdelay=td;
step(G,Tfinal);grid
```

10. Determinar la Función de transferencia de los sistemas cuyas respuestas al escalón unitario se muestran a continuación:

a) Sistema 1:

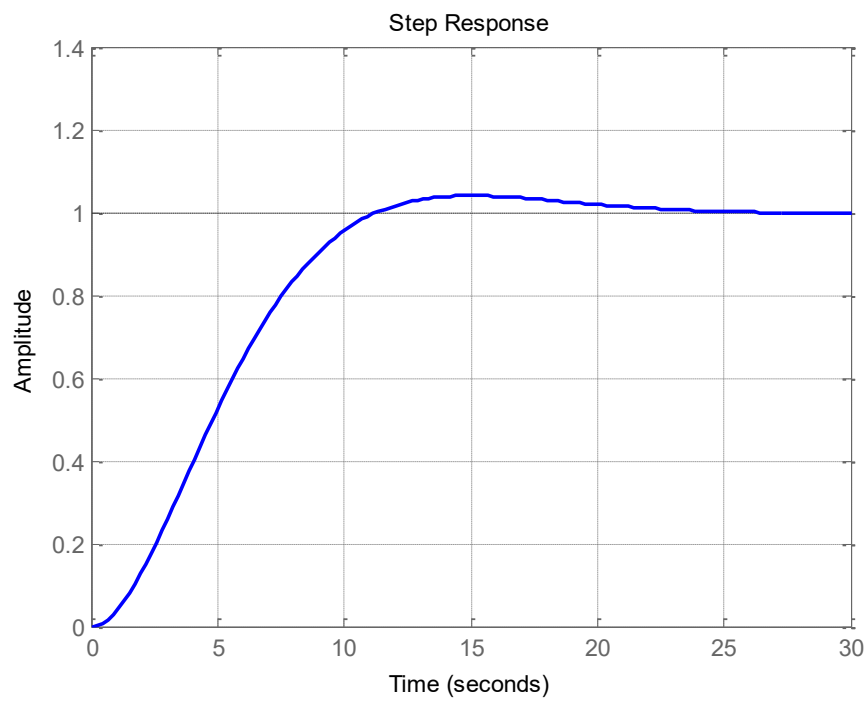


Solución con Octave:

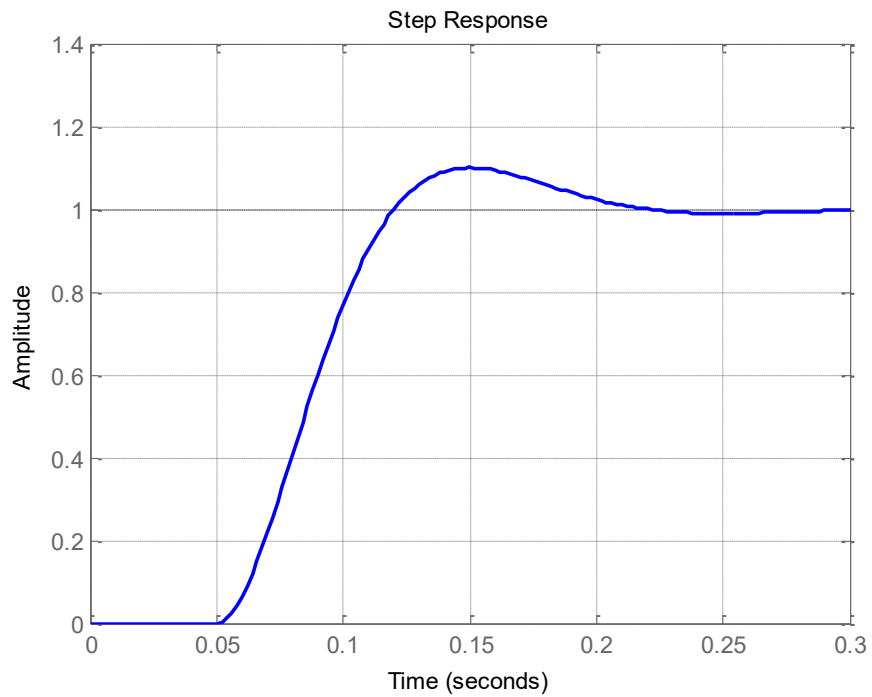
```
close all; clear all; clc
pkg load control
% Constantes
K=3.5;
Td=0.005;
ts=0.014-Td;
T=ts/4;

% Función de Transferencia:
s=tf('s');
G1=K/(T*s+1);
G2=K/(T/2*s+1)^2;
step(G1,G2,0.02-Td);
% Retardo temporal (aproximación de Pade de primer orden)
expTds=(1-Td*s/2)/(1+Td*s/2);
G1=G1*expTds;
G2=G2*expTds;
step(G1,G2,0.02);
```

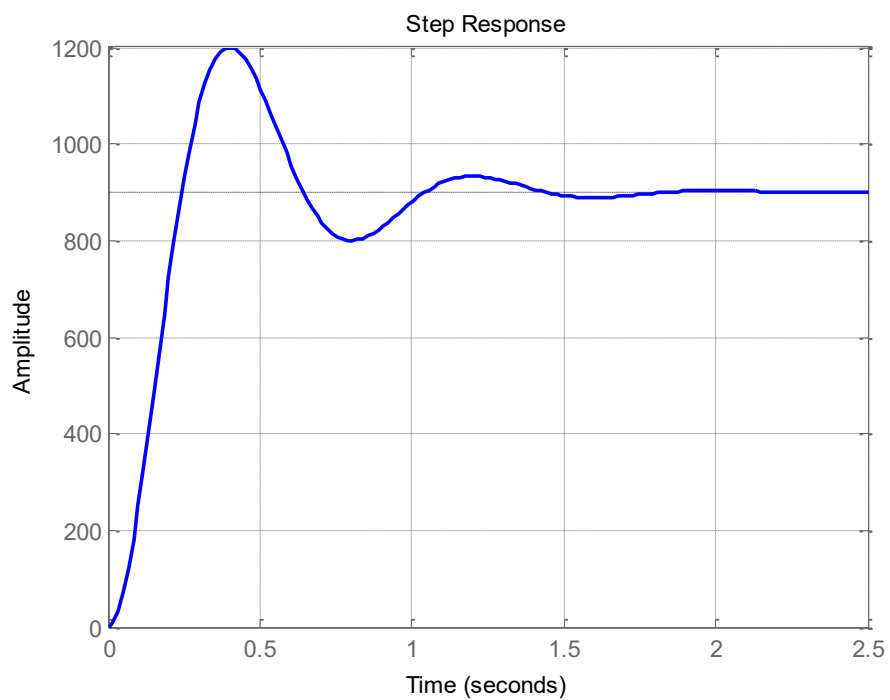
b) Sistema 2:



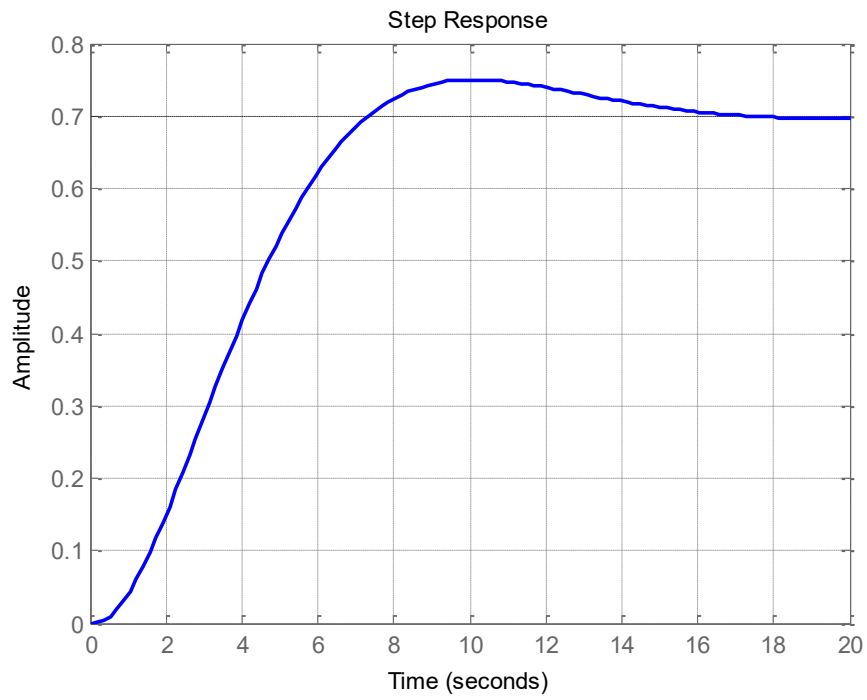
c) Sistema 3:



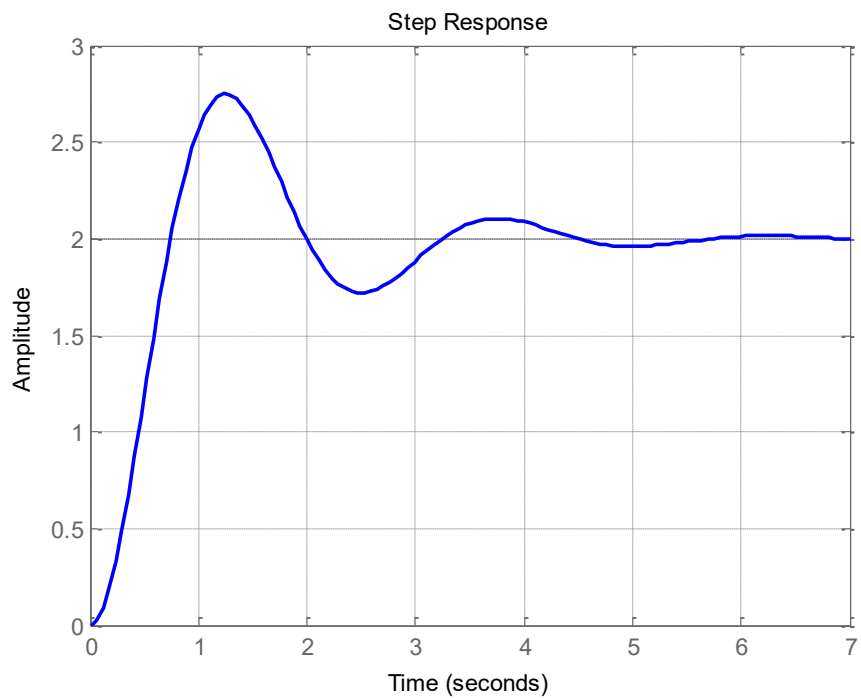
d) Sistema 4:



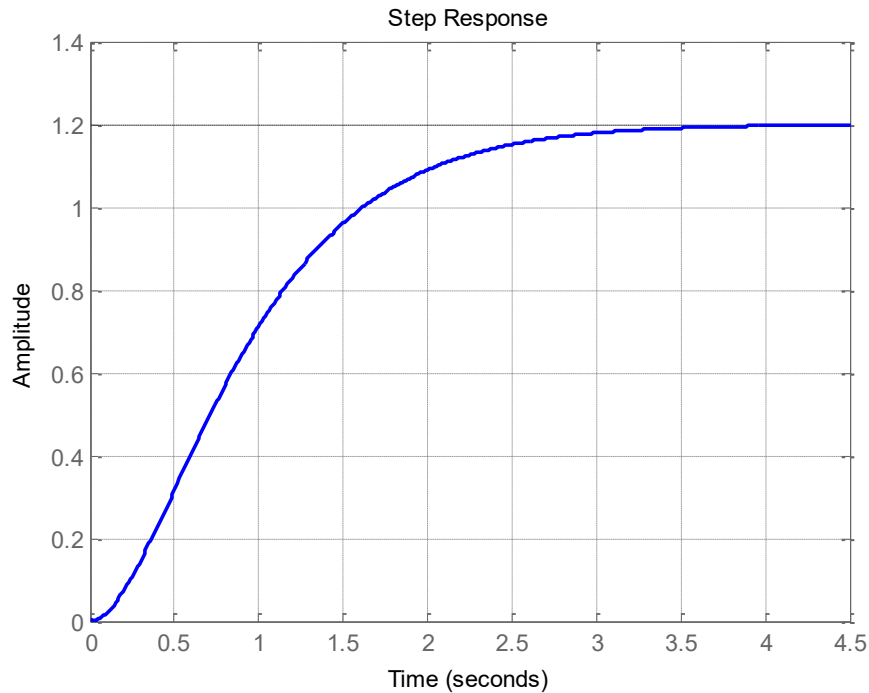
e) Sistema 5:



f) Sistema 6:



g) Sistema 7:



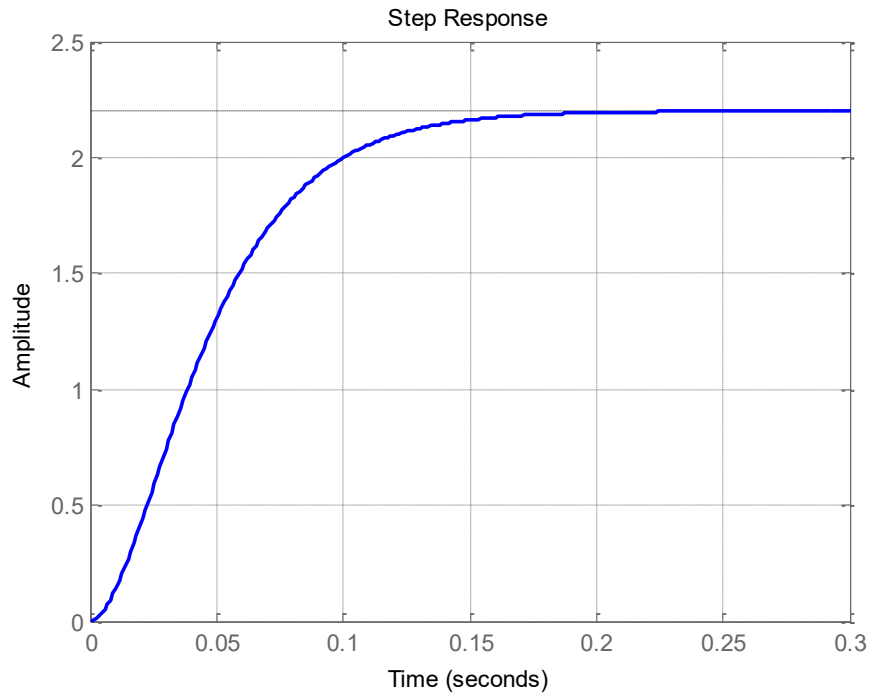
Solución:

Este sistema es de segundo orden sobreamortiguado, por lo que no se puede aplicar el mismo modelo que usamos en los ejercicios anteriores. Una forma de determinar la Función de transferencia de este sistema es aproximar los parámetros de uno de primer orden y con ellos implementar una función de transferencia de segundo orden críticamente amortiguada:

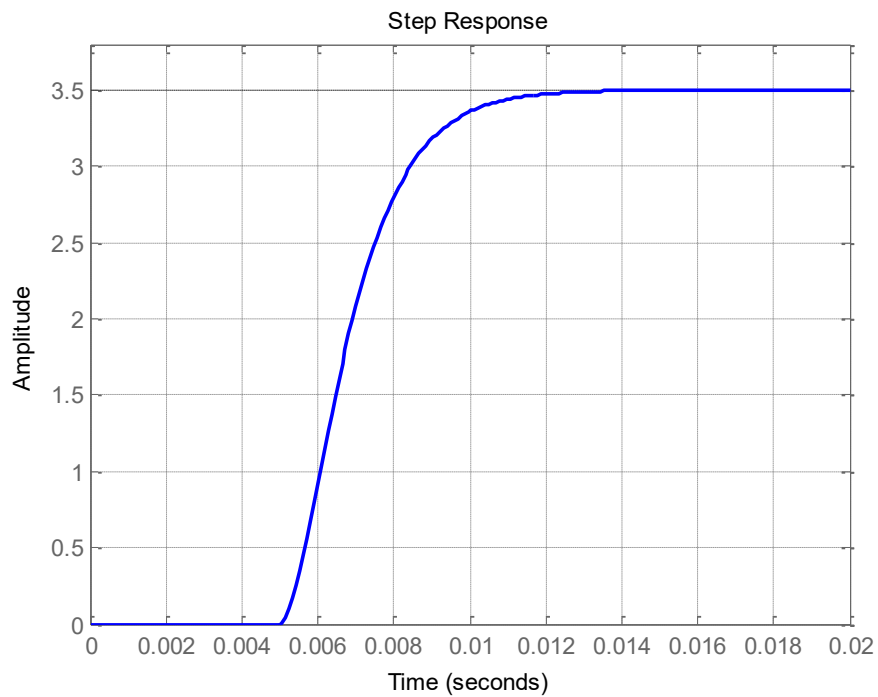
Haciendo $K=1.2$ y $5\tau=4\text{seg}$ se puede usar el siguiente código para resolver el problema:

```
close all; clear all; clc
yss=1.2;      % Valor de estado estable (para entrada escalón
unitario)
ts=5;         % [seg] tiempo de establecimiento
td=0;         % [seg] tiempo de retardo
Tfinal=4.5;   % [seg] duración de la simulación
s=tf('s');
K=yss;
Tau=ts/5;
G=K/(Tau/2*s+1)^2
G.inputdelay=td;
step(G,Tfinal);grid
```

h) Sistema 8:



i) Sistema 9:



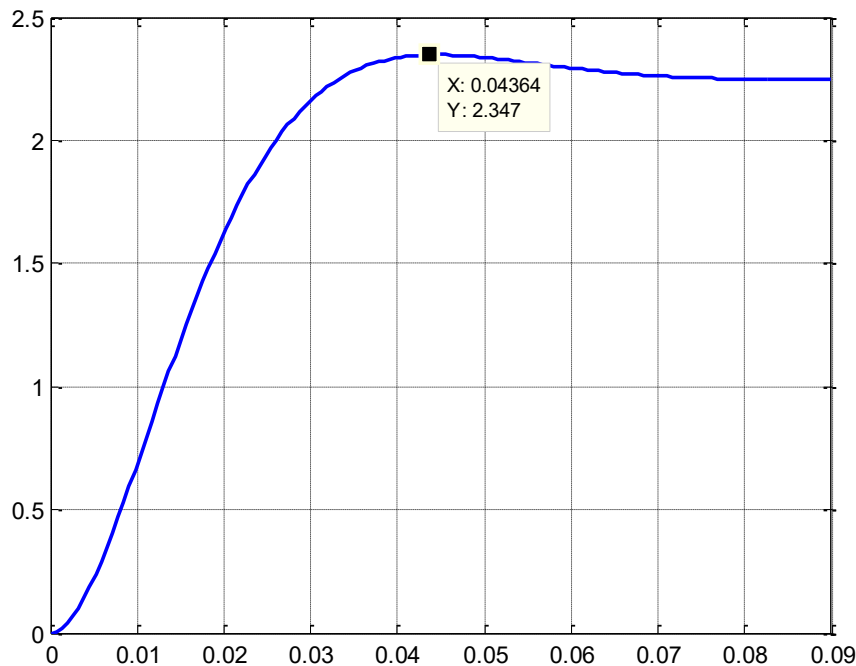
11. Para el siguiente ejercicio, considere esta situación: Un equipo de ingenieros ha determinado la respuesta temporal de distintos sistemas en el laboratorio y le han enviado los datos recabados para que usted obtenga el modelo matemático de cada sistema.

Los datos se encuentran en un archivo llamado **EnsayosRespuestaTemporal.mat**, y deberá buscarlo en el aula virtual del curso o solicitárselo a su profesor.

Solución.

Para resolver este problema vamos a necesitar los códigos que usamos en los ejercicios anteriores. Vamos a ver cómo se resuelve el primero.

```
close all; clear all; clc
load('EnsayosRespuestaTemporal.mat')
%% Solución del Primer ejercicio
t=t1; % En t se guarda el vector con los valores del tiempo
y=y1; % en y se guarda la salida del sistema
% Lo primero que haremos es graficar la respuesta temporal
plot(t,y);grid
% Observamos que el sistema puede modelarse como uno de segundo orden
% subamortiguado. Usando la herramienta datacursor del plot de Octave
% podemos determinar que ymax=2.347 para tp=0.043.
```



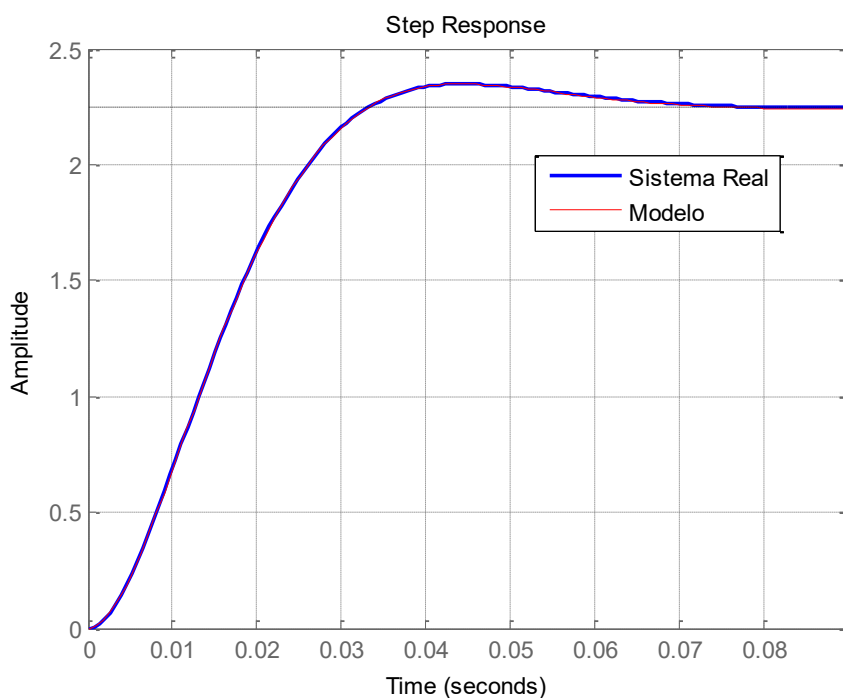
```
% De la misma forma, podemos establecer el valor final en: yss=2.246.
```

```
% Para verificar los valores determinados de forma empírica, podemos
usar
% el siguiente código:
[ymax,index]=max(y); % Determinamos el valor máximo (ymax) y su
posición (index)
tp=t(index); % Usamos el index para encontrar tp
yss=y(end); % fijamos yss como el último valor adquirido
```

```
% También observamos que
td=0; % [seg] tiempo de retardo
Tfinal=t(end); % [seg] tiempo a simular
```

```
% A continuación reutilizaremos el siguiente código para encontrar los
% parámetros de la función de transferencia:
K=yss;
Mp=(ymax-yss)/yss;
psita=sqrt(log(Mp)^2/(pi^2+log(Mp)^2));
wn=pi/(tp*sqrt(1-psita^2));
G=tf(K*wn^2,[1 2*psita*wn wn^2])
G.inputdelay=td;

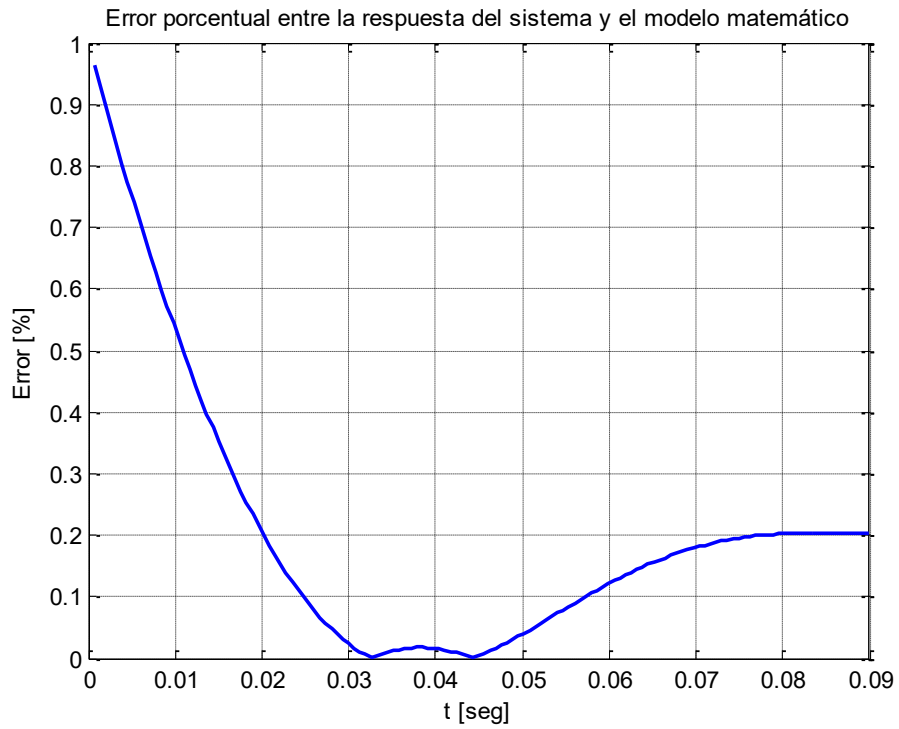
% Finalmente, graficamos la respuesta temporal del modelo en el mismo
% gráfico que los datos del sistema para poder compararlos.
hold on
step(G,Tfinal,'r');grid
legend('Sistema Real','Modelo','location','best')
```



Como vemos, los gráficos se parecen mucho, por lo que podemos anticipar que el modelo es bueno. No siempre vamos a obtener resultados tan similares, lo normal es que encontremos pequeñas discrepancias entre la respuesta temporal del sistema real y el modelo matemático.

Para evaluar cuantitativamente el error entre el sistema y el modelo podemos usar el siguiente código:

```
[yy,~]=step(G,t,'r');grid
plot(t,abs(y-yy)./y*100);grid
title('Error porcentual entre la respuesta del sistema y el modelo
matemático')
ylabel('Error [%]');xlabel('t [seg]')
```



Donde vemos que el error máximo es menor al 1%.

Estabilidad Absoluta

12. Estudiar la estabilidad de los sistemas cuyas ecuaciones características son:

12.1. $s^3 + 2.996s^2 + 3s + 10.998 = 0$

12.2. $2(s+1)^2 = 0$

12.3. $3s^2 + (2+k)s + 1 = 0$

13. Para los sistemas que se muestran a continuación:



1. Determinar los valores de los polos de la función de transferencia
2. Dibujar los polos y ceros en el plano complejo
3. Determinar la estabilidad del sistema
4. Simular la respuesta temporal para verificar el punto anterior.

$$G_1(s) = \frac{50s + 8}{s^3 + 11s^2 + 23s - 8}$$

$$G_2(s) = \frac{50s + 8}{s^3 + 11s^2 + 23s + 8}$$

$$G_3(s) = \frac{50s - 8}{s^3 + 11s^2 + 23s + 8}$$

$$G_4(s) = \frac{50s + 8}{s^3 + 23s + 8}$$

$$G_5(s) = \frac{s - 4}{s^5 + s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 16s + 10}$$

$$G_6(s) = \frac{s + 8}{s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3}$$

$$G_7(s) = \frac{s^2 + 3s + 8}{s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4}$$

$$G_8(s) = \frac{2s^5 + s^4 + 2s^3 + 4s^2 + s + 6}{54}$$

$$G_9(s) = \frac{s^3 + 13s^2 + 55s + 75}{54}$$

14. La función de transferencia del péndulo invertido estudiado en la unidad anterior se repite a continuación. Determinar si el sistema es estable o no. Considerar que todas las constantes son positivas.

$$\frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{lms}{-(MI + mI + Ml^2m)s^3 - (I - l^2m)bs^2 + (M + m)glms + bglm}$$

Solucion: $-(MI + mI + Ml^2m) < 0$ $(M + m)glm > 0$ $bglm > 0$, Hay al menos 2 coeficientes que no tienen el mismo signo, eso asegura que el sistema es inestable.

Estabilidad Relativa

15. Determinar si los sistemas cuyas ecuaciones características se listan a continuación son estables. Verificar usando Octave

- a) $2(s+1)^2 = 0$
- b) $s^3 + 11s^2 + 10s + k = 0$
- c) $s^3 + 2.996s^2 + 3s + 10.998 = 0$
- d) $2s^6 + 2s^5 + 3s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 1 = 0$
- e) $s^5 + 3s^4 - 2s^2 + 7s + 12 = 0$
- f) $s^5 + s^4 + s^3 + 3s^2 + (2+k)s + 1 = 0$
- g) $6s^4 + s^3 + 3s^2 + ks + 1 + k = 0$

Solución de la ecuación 1.2.

El arreglo de Routh se muestra a continuación:

$$\begin{array}{ccc}
 s^3 & 1 & 10 \\
 s^2 & 11 & k \\
 s^1 & \frac{110-k}{11} & 0 \\
 s^0 & k &
 \end{array}$$

De las últimas dos filas:

$$\begin{aligned}
 \frac{110-k}{11} &> 0 & k > 0 \\
 110-k &> 0 \\
 -k &> -110 \\
 k &< 100
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que el sistema sea estable: $0 < k < 110$.

Para verificar se puede usar el comando roots, reemplazando k por el valor límite encontrado:

roots([1 11 10 110])

ans =

$$\begin{aligned}
 &-11.0000 + 0.0000i \\
 &0.0000 + 3.1623i \\
 &0.0000 - 3.1623i
 \end{aligned}$$

Observamos que las raíces tienen parte real negativa o nula, lo que indica que el sistema está al límite de la estabilidad. Haciendo k un poco más grande aparecen raíces con parte real positiva.

roots([1 11 10 111])

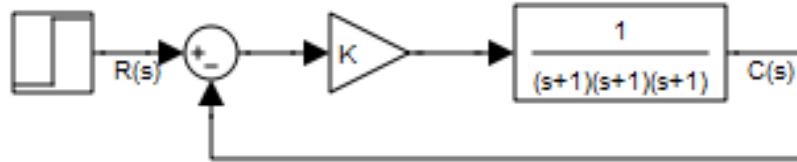
ans =

$$-11.0076 + 0.0000i$$

$$0.0038 + 3.1755i$$

$$0.0038 - 3.1755i$$

16. Determinar los límites de estabilidad del siguiente sistema:



Solución:

Para determinar la estabilidad del sistema es necesario estudiar su ecuación característica, por lo tanto necesitamos la función de transferencia de lazo cerrado. Este sistema es sencillo y no da trabajo calcularla a mano. Sin embargo, vamos a ver la forma de hacerlo con Octave:

```
syms k s real
G=1/(s+1)^3
FdTLC=k*G/(1+k*G)
collect(simplify(FdTLC), 's')
```

Entonces:

$$FdTLC(s) = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 3s + k + 1}$$

La ecuación característica del sistema es:

$$s^3 + 3s^2 + 3s + k + 1 = 0$$

Y el arreglo de Routh:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 3 & k+1 \\ s^1 & \frac{8-k}{3} & 0 \\ s^0 & k+1 & \end{array}$$

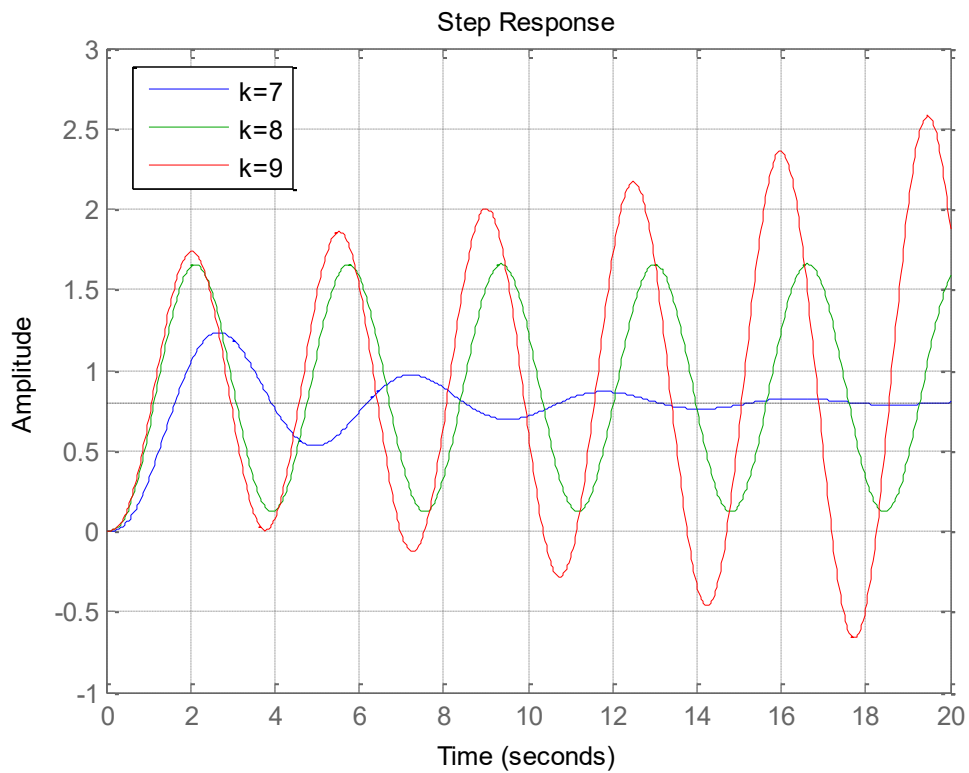
De donde determinamos que el sistema es estable para $0 < k < 8$ ²

Una forma de verificarlo es usar el siguiente código:

```
G=zpk([], [-1 -1 -1], 1)
step(feedback(4*G, 1), feedback(8*G, 1), feedback(9*G, 1), 20); grid
legend('k=7', 'k=8', 'k=9', 'location', 'best')
```

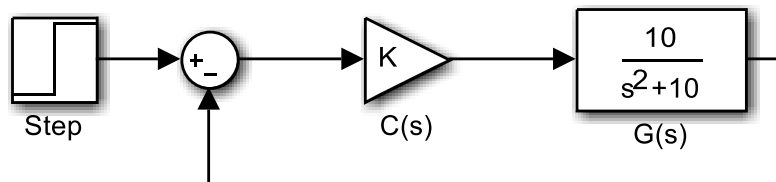
Que devuelve esta imagen:

² Si bien desde el punto de vista estrictamente matemático $-1 < k < 8$, normalmente no se usan ganancias negativas en los compensadores de sistemas de control.

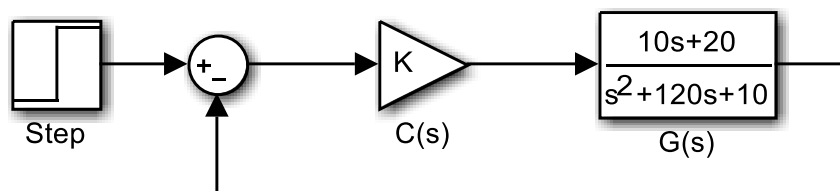


17. Determinar la estabilidad relativa de los siguientes sistemas. Validar los resultados obtenidos.

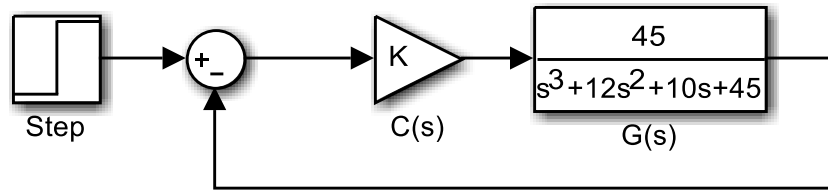
a) Sistema 1:



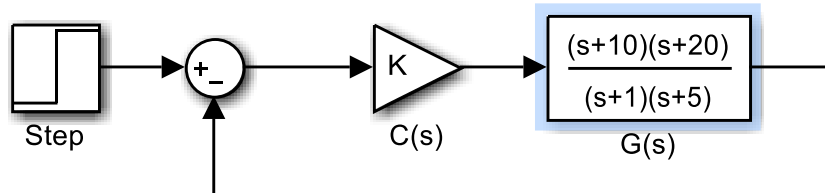
b) Sistema 2:



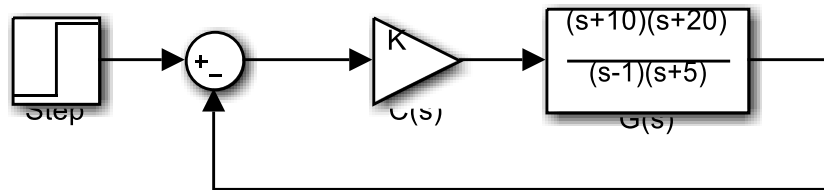
c) Sistema 3:



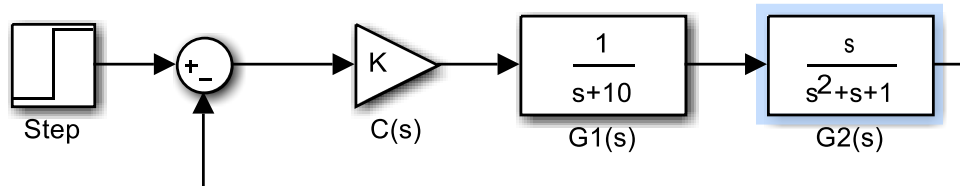
d) Sistema 4:



e) Sistema 5:



f) Sistema 6:



Solución:

Usando el siguiente código se puede dibujar el lugar de raíces de los sistemas y determinar el rango de valores de ganancia K para los cuales los sistemas a lazo cerrado se mantienen estables.

```
close all; clear all; clc
s=tf('s');
G1=10/(s^2+10);
rlocusx(G1); % Inestable para todo valor de K
G2=(10*s+20)/(s^2+120*s+10);
rlocusx(G2); % Estable para K>0
G3=45/(s^3+12*s^2+10*s+45);
rlocusx(G3); % Estable para K<1.67
G4=((s+10)*(s+20))/((s+1)*(s+5));
rlocusx(G4); % Estable para K>0
G5=((s+10)*(s+20))/((s-1)*(s+5));
rlocusx(G5); % Estable para K>0.026
G6=1/(s+10)*s/(s^2+s+1);
rlocusx(G6) % Estable para K>0
```

Los resultados se pueden validar simulando la respuesta temporal al escalón unitario para cada sistema. Por ejemplo:

```
step(feedback(0.5*G3,1))
```

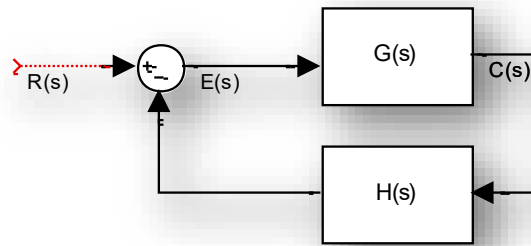
devuelve una gráfica que se estabiliza con el tiempo, mientras que:

```
step(feedback(1.70*G3,1),100)
```

devuelve la respuesta de un sistema inestable

Resumen de la Técnica del Lugar de Raíces

Dado el siguiente sistema:



La Función de Transferencia de Lazo Cerrado del sistema es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

Y la ecuación característica:

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

Las reglas para la construcción del Lugar de Raíces son:

1. **Puntos de Inicio** $K = 0$: Los polos de lazo abierto indican los lugares del plano complejo donde las ramas comienzan
2. **Puntos de Llegada** $K = \infty$: Los ceros de lazo abierto indican los lugares del plano complejo donde las ramas terminan (puede ubicarse en el infinito)
3. **Número de Ramas**: El número de ramas es igual al número de polos de lazo abierto (y por ende, igual al número de ceros de lazo abierto)
4. **Lugar de Raíces sobre el Eje Real**: Un punto del eje real pertenece al lugar de raíces si la cantidad de polos y ceros de lazo abierto a la izquierda de dicho punto es impar.
5. **Simetría**: El lugar de raíces es simétrico con respecto al eje real.
6. **Asíntotas**: Las ramas que terminan en el infinito son asíntóticas para grandes valores de s a rectas cuyos ángulos con el eje real son:

$$\theta_i = \frac{(2i+1) \times 180^\circ}{|n-m|}, i = 0, 1, \dots, |n-m|-1$$

Donde n representa la cantidad de polos finitos y m la cantidad de ceros finitos de $G(s)H(s)$.

7. **Intersección de las Asíntotas**: Las asíntotas se intersecan en el eje real en el punto:

$$\sigma = \frac{\sum \text{Re}(p) - \sum \text{Re}(z)}{|n-m|}$$

8. **Ángulos de Salida y Llegada de Polos y Ceros Complejos**: Para trazar los lugares geométricos de las raíces con una precisión razonable, debemos encontrar las direcciones de los lugares geométricos de las raíces cercanas a los polos y ceros complejos. Si se selecciona un punto de prueba y se mueve en la cercanía precisa del polo complejo (o del cero complejo), se considera que no cambia la suma de las contribuciones angulares de todos los otros polos y ceros. Por tanto, el ángulo de llegada (o ángulo de salida) del lugar geométrico de las raíces de un polo complejo (o

de un cero complejo), se encuentra restando a 180° la suma de todos los ángulos de vectores, desde todos los otros polos y ceros hasta el polo complejo (o cero complejo) en cuestión, incluyendo los signos apropiados.

9. **Puntos de Desprendimiento e Ingreso:** Si un lugar geométrico de las raíces se ubica entre dos polos en lazo abierto adyacentes sobre el eje real, existe al menos un punto de desprendimiento entre dichos dos polos. Asimismo, si el lugar geométrico de las raíces está entre dos ceros adyacentes sobre el eje real, siempre existe al menos un punto de ingreso entre los dos ceros.

Por tanto, los puntos de desprendimiento y de ingreso se determinan a partir de las raíces de:

$$\frac{dK}{ds} = - \frac{dG(s)H(s)}{ds} = 0$$

10. **Cruce con el Eje Imaginario:** Para determinar los puntos donde el lugar de raíces cruza el eje imaginario se aplica el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz. Primero se determina el valor de K crítico. Luego, armando la ecuación auxiliar en s^2 y valuando en K crítico se encuentran los valores $j\omega$ de corte del eje imaginario.

Ejemplo de Aplicación de la Técnica del Lugar de Raíces

Sea un sistema con realimentación unitaria y

$$G(s) = \frac{K(s+10)}{(s+5)(s^2+4s+8)} = \frac{K(s+10)}{s^3+9s^2+28s+40}$$

La ecuación característica es:

$$1 + KG(s) = 0$$

$$1 + \frac{K(s+10)}{s^3+9s^2+28s+40} = 0$$

$$s^3 + 9s^2 + 28s + 40 + K(s+10) = 0$$

1. Puntos de Inicio $K=0$:

$$p_1 = -5, p_2 = -2 - 2j, p_3 = -2 + 2j$$

2. Puntos de Llegada $K=\infty$:

$$z_1 = -10, z_2 = \infty, z_3 = \infty$$

3. Número de Ramas: 3

4. Lugar de Raíces sobre el Eje Real: En el intervalo $[-5, -10]$.

5. Simetría: El lugar de raíces es simétrico con respecto al eje real.

6. Asíntotas:

$$\theta_i = \frac{(2i+1) \times 180^\circ}{|3-1|}, i = 0, 1, \dots, |3-1|-1$$

$$\theta_0 = \frac{(2 \times 0 + 1) \times 180^\circ}{|2|} = 90^\circ, \theta_1 = \frac{(2 \times 1 + 1) \times 180^\circ}{|2|} = 270^\circ$$

7. Intersección de las Asíntotas:

$$\sigma = \frac{\sum \text{Re}(p) - \sum \text{Re}(z)}{|n-m|} = \frac{-5-2-2-(-10)}{2} = 0.5$$

8. Ángulos de Salida y Llegada de Polos y Ceros Complejos:

$$-\angle p_1 - \angle p_2 - \angle p_3 + \angle z_1 = 180^\circ(2i+1)$$

$$\angle p_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.7^\circ$$

$$\angle p_3 = 90^\circ$$

$$\angle z_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{8}\right) = 14^\circ$$

$$-33.7^\circ - \angle p_2 - 90^\circ + 14^\circ = -180^\circ$$

$$-109.7^\circ - \angle p_2 = -180^\circ$$

$$-\angle p_2 = -70.3^\circ$$

Por lo tanto el ángulo de salida es $\angle p_2 = 70.3^\circ$

9. Puntos de Desprendimiento e Ingreso

$$-\frac{dG(s)H(s)}{ds} = -\frac{d}{ds} \frac{(s+10)}{s^3 + 9s^2 + 28s + 40} = 0$$

$$-\frac{dG(s)H(s)}{ds} = -\frac{1(s^3 + 9s^2 + 28s + 40) - (s+10)(3s^2 + 18s + 28)}{(s^3 + 9s^2 + 28s + 40)^2} = 0$$

$$\frac{-2s^3 - 39s^2 - 180s - 240}{(s^3 + 9s^2 + 28s + 40)^2} = 0$$

$$2s^3 + 39s^2 + 180s + 240 = 0$$

$$r_1 = -13.49, r_2 = -3.39, r_3 = -2.63$$

Ninguna raíz es punto de desprendimiento.

10. Cruce con el Eje Imaginario: A partir de la ecuación característica se plantea el criterio de Routh-Hutwitz:

$$s^3 + 9s^2 + 28s + 40 + K(s+10) = 0$$

$$s^3 + 9s^2 + (28+K)s + 40+10K = 0$$

s^3	1	$28+K$
s^2	9	$40+10K$
s^1	$\frac{9(28+K)-40-10K}{9}$	0
s^0	$40+10K$	

El sistema es estable para $-4 < K < 212 \rightarrow 0 < K < 212$

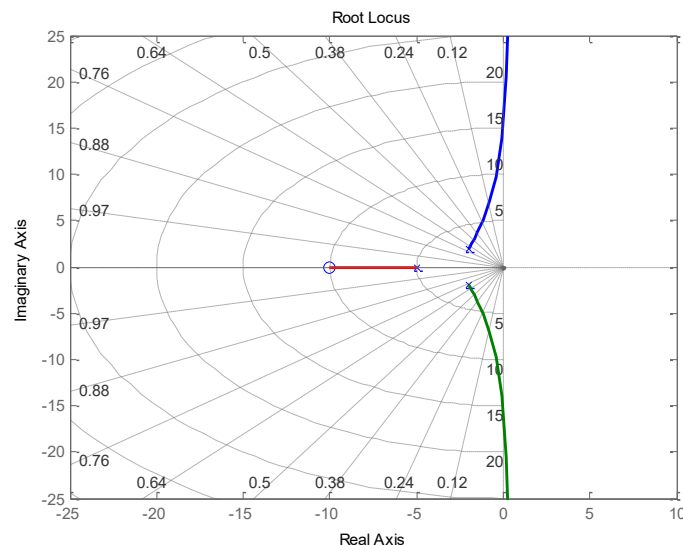
Planteando la ecuación auxiliar:

$$9s^2 + 40 + 10K = 0$$

$$9s^2 + 40 + 2120 = 0$$

$$r_1 = -15.49j, r_2 = 15.49j$$

Se encuentran los puntos donde el lugar de raíces cruza el eje imaginario



Solución con Octave:

```

%% Técnica del lugar de raíces
close all; clear all; clc
G=tf([1 10],conv([1 5],[1 4 8])); % Función de Transferencia.
figure
% Lugar de raíces.
rlocus(G); sgrid(0.707,[4 8 12])
axis([-25 10 -25 25]);
% Asintotas
h=line([0.5 0.5],[-25 25])
set(h,'LineStyle','-.')

```

18. Construya el diagrama del lugar de raíces para cada uno de los sistemas de control para los cuales se dan los polos y ceros de $G(s)H(s)$. La ecuación característica se obtiene haciendo $1+KG(s)H(s)=0$. Verificar los límites de estabilidad a lazo cerrado con Octave.

Solución Utilizando Octave:

- | | |
|---|---|
| a) Polo en 0, cero en -8. | <code>rlocus(zpk([-8],[0],1));sgrid</code> |
| b) Polos en 0,-2, cero en -4 | <code>rlocus(zpk([-4],[0 -2],1));sgrid</code> |
| c) Polos en -1,-1,-1 | <code>rlocus(zpk([],[-1 -1 -1],1));sgrid</code> |
| d) Polos en 0,-1, ceros en -4, -6 | <code>rlocus(zpk([-4 -6],[0 -1],1));sgrid</code> |
| e) Polos en -3, -5, ceros en 4,-1 | <code>rlocus(zpk([4 -1],[-3 -5],1));sgrid</code> |
| f) Polos en 3, -4, ceros en -8,-10 | <code>rlocus(zpk([-8 -10],[3 -4],1));sgrid</code> |
| g) Polos en 0, -1, -3, -4 | <code>rlocus(zpk([],[0 -1 -3 -4],1));sgrid</code> |
| h) Polos en -2+j,-2-j | <code>rlocus(zpk([],[-2+j -2-j],1));sgrid</code> |
| i) Polos en -2+j,-2-j,-10 | <code>rlocus(zpk([],[-2+j -2-j -10],1));sgrid</code> |
| j) Polos en -2+j,-2-j,-1 | <code>rlocus(zpk([],[-2+j -2-j -1],1));sgrid</code> |
| k) Polos en -2+j,-2-j, cero en -10 | <code>rlocus(zpk([-10],[-2+j -2-j],1));sgrid</code> |
| l) Polos en -2+j,-2-j, ceros en -1,-4 | <code>rlocus(zpk([-1 -4],[-2+j -2-j],1));sgrid</code> |
| m) Polos en -2+j,-2-j, ceros en 1,-4 | <code>rlocus(zpk([1 -4],[-2+j -2-j],1));sgrid</code> |
| n) Polos en -8+j,-8-j, ceros en 1+3j,1-3j | <code>rlocus(zpk([1+3j 1-3j],[-8+j -8-j],1));sgrid</code> |
| o) Polos en -8.1, ceros en 1+3j,1-3j | <code>rlocus(zpk([1+3j 1-3j],[-8 1],1));sgrid</code> |

19. La ecuación característica de distintos sistemas de control lineales se dan a continuación. Construir el lugar geométrico de las raíces para $K \geq 0$. Verificar con Octave.

- | | |
|-------|--|
| 19.1. | $s^3 + 3s^2 + (K + 2)s + 5K = 0$ |
| 19.2. | $s^3 + s^2 + (K + 2)s + 3K = 0$ |
| 19.3. | $s^3 + 5Ks^2 + 10 = 0$ |
| 19.4. | $s^4 + (K + 3)s^3 + (K + 1)s^2 + (2K + 5)s + 10 = 0$ |
| 19.5. | $s^4 + 6s^3 + 9s^2 + K(s^2 + 4s + 5) = 0$ |
| 19.6. | $s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2Ks + 5K = 0$ |
| 19.7. | $s(s^2 - 1) + K(s + 2)(s + 0.5) = 0$ |

20. La función de transferencia de un sistema de control a lazo cerrado con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{100(s+40)}{(s+1)(s+5)}; H(s) = 1$$

20.1. Construir el lugar de raíces para $K \geq 0$.

20.2. Construir el lugar de raíces si:

$$H(s) = \frac{1}{s+20}$$

20.3. En ambos casos, encontrar el valor de K para el cual la respuesta temporal del sistema tiene un sobrepasamiento máximo del 4%.

20.4. Verificar los valores obtenidos simulando la respuesta temporal del sistema.

Solución con Octave

```
close all; clear all; clc
G=zpk([-40],[-1 -5],100)
H1=1;
H2=tf(1,[1 20])
rlocus(G*H1,G*H2); sgrid(0.707,[20 40 60 80])
```

```
K1=0.7;
K2=0.05;
```

```
step(feedback(K1*G,H1),feedback(K2*G,H2))
```

21. Dibujar el lugar de raíces de los sistemas que se listan a continuación, considerando en todos los casos realimentación unitaria. Determinar si existe algún valor de K que hace que la salida del sistema a lazo cerrado oscile. Simular.

$$G_1(s) = \frac{100}{s(s+5)}$$

$$G_2(s) = \frac{100(s^2 + 40s + 800)}{(s+80)(s+50)}$$

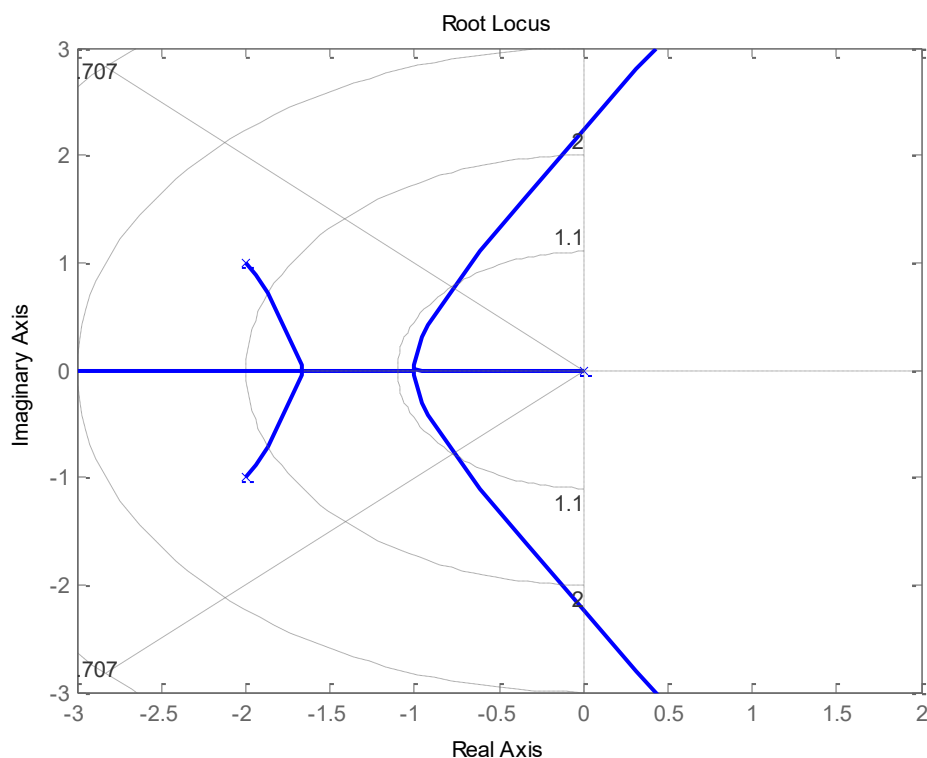
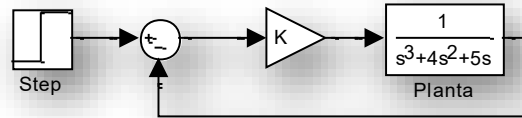
$$G_3(s) = \frac{100}{(s+80)(s+50)(s-10)}$$

$$G_4(s) = \frac{100(s+40)}{(s+5)(s^2 + 20s + 1700)}$$

$$G_5(s) = \frac{100(s+40)}{(s-5)(s^2 + 20s + 1700)}$$

$$G_6(s) = \frac{100(s-40)}{(s+25)(s^2 + 20s + 1700)}$$

22. Para los sistemas del punto anterior, encontrar los valores de K que hacen que el factor de amortiguamiento relativo del sistema en lazo cerrado sea igual a 0.707, siempre que tal solución exista.
23. Considerar el sistema que se muestra a continuación. Determinar el valor de K de manera tal que $\zeta = 0.66$. Simular la respuesta al escalón del sistema con la ganancia especificada.



Solución con Octave

```
% Ejercicio 23
close all; clear all; clc
G=tf(1,[1 4 5 0]);
figure
rlocus(G);sgrid(0.707,[1.1 2 3 4])
axis([-4 2 -3 3])

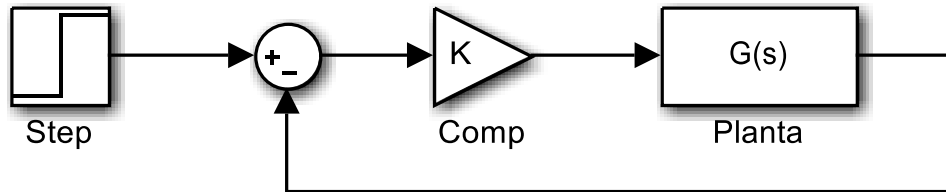
% Determinación del punto de diseño.
% Del gráfico se obtiene
psita=0.707; wn=1.1;
s1=-wn*psita+1i*wn*sqrt(1-psita^2);
% El módulo de K se determina:
[z,p,k]=zpkdata(G,'v')
modp1=abs(s1-p(1));
modp2=abs(s1-p(2));
```

```
modp3=abs(s1-p(3));  
K=(modp1*modp2*modp3);  
figure  
step(feedback(K*G,1));grid
```

Diseño de Compensadores Proporcionales

24. Dados los sistemas de lazo cerrado caracterizados por las siguientes funciones de transferencia de lazo abierto y realimentación unitaria, se pide:

- 24.1. Determinar, siempre que sea posible, los valores de ganancia K que hacen que la respuesta temporal ante una entrada escalón unitario sea críticamente amortiguada.
- 24.2. Determinar, siempre que sea posible, los valores de ganancia K que hacen que la respuesta temporal ante una entrada escalón unitario tenga un sobrepasamiento máximo del 4%.
- 24.3. Simular las respuestas.



$$G_1(s) = \frac{20}{(s+10)(s+100)}$$

$$G_7(s) = \frac{25}{(s-1)(s+20)}$$

$$G_2(s) = \frac{5}{s+10}$$

$$G_8(s) = \frac{s^2 + 300s + 20000}{s^3 + 25s^2 + 100s}$$

$$G_3(s) = \frac{1200}{s^2 + 70s + 1000}$$

$$G_9(s) = \frac{100}{s^3 + 120s^2 + 2700s - 40000}$$

$$G_4(s) = \frac{12(s+10)}{s(s+30)}$$

$$G_{10}(s) = \frac{90000}{(s+10)(s+20)(s+500)}$$

$$G_5(s) = \frac{0.75}{(s+1)^3}$$

$$G_{11}(s) = \frac{s+10}{s^3 + 9s^2 + 28s + 40}$$

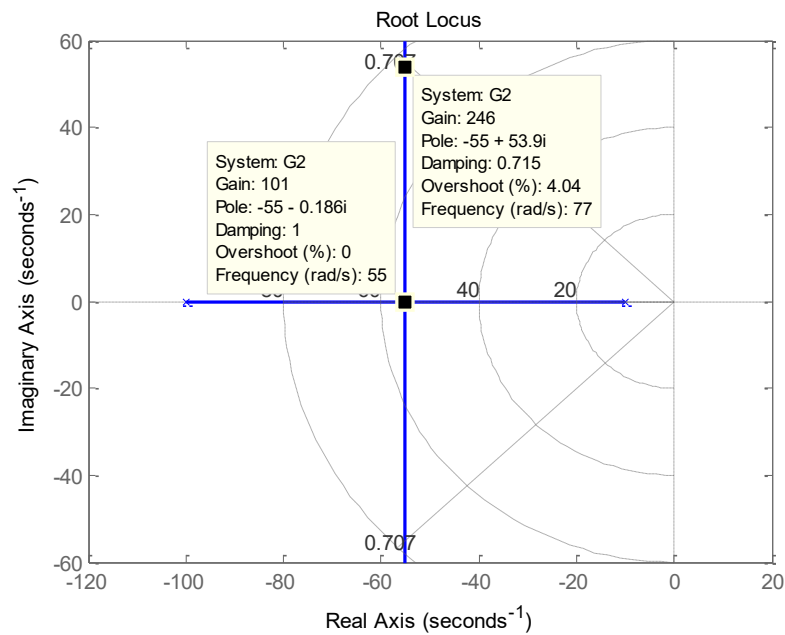
$$G_6(s) = \frac{150(s+10)(s+20)}{s(s+5)}$$

$$G_{12}(s) = \frac{40(25s+1)}{s(5s+1)(40s+1)}$$

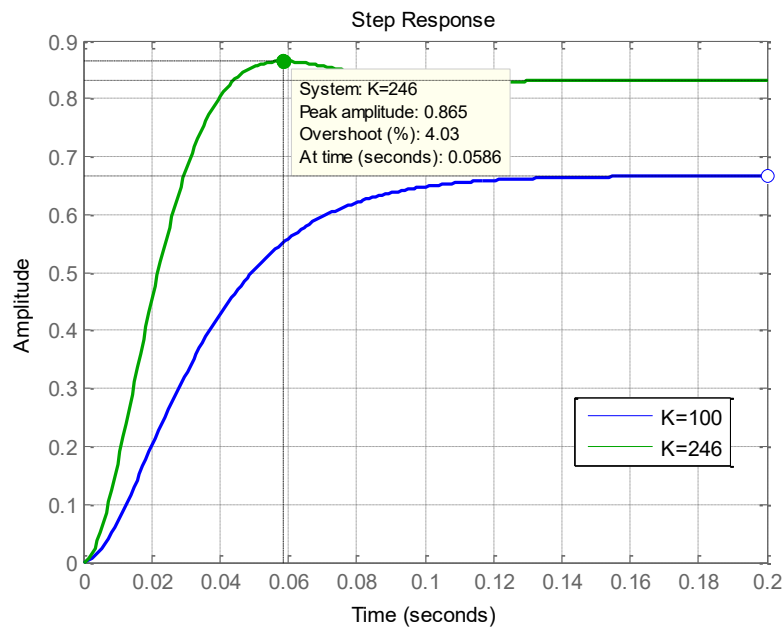
Solución de $G_1(s)$

```
close all; clear all; clc
G2=zpk([], [-10 -100], 20)
rlocus(G2) % Cálculo de la ganancia
sgrid(0.707, [20 40 60 80])3
K1=100;
K2=246;
```

³ Una forma de determinar el rango de frecuencias a mostrar con el comando `sgrid()` es dibujar el lugar de raíces y seleccionar algunos valores a partir del gráfico, considerando las escalas de los ejes real e imaginario, recordando que los lugares con ωn constante forman semicírculos a partir del origen.



```
FdTLC1=feedback(K1*G2,1); % F de T de lazo cerrado
FdTLC2=feedback(K2*G2,1); % F de T de lazo cerrado
step(FdTLC1,FdTLC2);grid; % simulación
legend('K=100','K=246','location','best')
```



Una solución algo más detallada se presenta a continuación.

```
close all; clear all; clc
s=tf('s');
G1=20/((s+10)*(s+100))
```

```
rlocus(G1,1,0,1000)
sgrid(0.707,100)
```

% Primer caso: Respuesta críticamente amort.

```

s1=-55;
% A partir de la condición de módulo:
% |G(s)H(s)|=1/K
invK=abs(20/((s1+10)*(s1+100)));
K=1/invK;
% Verificación
FdTLC=feedback(K*G1,1)
pole(FdTLC)
% Simulación
step(FdTLC,0.4)

% Segundo Caso: Respuesta con sobrep. 4%
s2=-55+55i;
invK2=abs(20/((s2+10)*(s2+100)));
K2=1/invK2;
% Verificación
FdTLC2=feedback(K2*G1,1)
pole(FdTLC2)

step(FdTLC,FdTLC2,0.4)

##figure
##hold on
##for K=0:1:1000
##  FdTLC=feedback(K*G1);
##  pzmap(FdTLC);
##end

```

Solución de $G_2(s)$

```

close all; clear all; clc
G1=tf(5,[1 10]); % F de T de Lazo abierto
rlocus(G1) % Cálculo de la ganancia
K=2;
FdTLC=feedback(K*G1,1); % F de T de lazo cerrado
step(FdTLC);grid; % simulación

```

25. La función de transferencia de un sistema de control a lazo cerrado con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{100(s+40)}{(s+1)(s+5)}; H(s) = 1$$

- 25.1. Construir el lugar de raíces para $K \geq 0$.
- 25.2. Construir el lugar de raíces si:

$$H(s) = \frac{1}{s+20}.$$

- 25.3. En ambos casos, encontrar el valor de K para el cual la respuesta temporal del sistema tiene un sobrepasamiento máximo del 4%.
- 25.4. Verificar los valores obtenidos simulando la respuesta temporal del sistema.

Solución con Octave

```

close all; clear all; clc

```

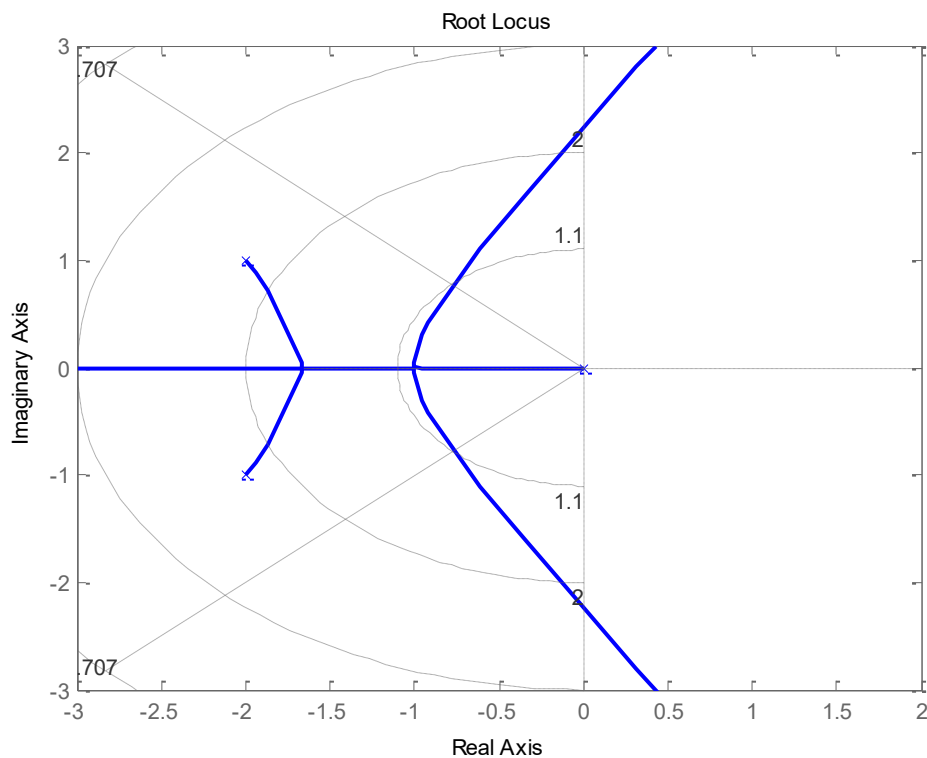
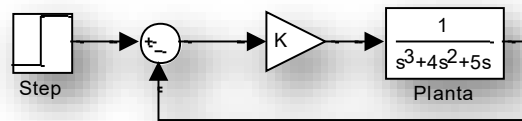


```
G=zpk([-40],[-1 -5],100)
H1=1;
H2=tf(1,[1 20])
rlocus(G*H1,G*H2); sgrid(0.707,[20 40 60 80])
```

```
K1=0.7;
K2=0.05;
```

```
step(feedback(K1*G,H1),feedback(K2*G,H2))
```

26. Considerar el sistema que se muestra a continuación. Determinar el valor de K de manera tal que $\zeta = 0.66$. Simular la respuesta al escalón del sistema con la ganancia especificada.



Solución con Octave

```
% Ejercicio 23
close all; clear all; clc
G=tf(1,[1 4 5 0]);
figure
rlocus(G);sgrid(0.707,[1.1 2 3 4])
axis([-4 2 -3 3])
```

```
% Determinación del punto de diseño.
% Del gráfico se obtiene
```

```
psita=0.707; wn=1.1;
s1=-wn*psita+1i*wn*sqrt(1-psita^2);
% El módulo de K se determina:
[z,p,k]=zpkdata(G,'v')
modp1=abs(s1-p(1));
modp2=abs(s1-p(2));
modp3=abs(s1-p(3));
K=(modp1*modp2*modp3);
figure
step(feedback(K*G,1));grid
```

Compensación por Cancelación de Polos Dominantes

27. Para cada uno de los siguientes sistemas, diseñar un compensador PI utilizando el método de cancelación de polos de manera tal de eliminar el error en estado estable. Ajustar la ganancia del compensador para que la respuesta al escalón unitario sea críticamente amortiguada, con el menor tiempo de establecimiento posible. Simular y comparar las respuestas del sistema original a lazo abierto y el sistema compensado a lazo cerrado.

$$G_1(s) = \frac{10}{(s+10)(s+100)}$$

$$G_4(s) = \frac{1.24}{(s+1)^3}$$

$$G_2(s) = \frac{0.8}{(0.1s+1)(0.05s+1)}$$

$$G_5(s) = \frac{20(s+60)}{(s+10)(s+20)}$$

$$G_3(s) = \frac{125}{s^2 + 33s + 200}$$

$$G_6(s) = \frac{800s + 320000}{s^3 + 330s^2 + 29000s + 600000}$$

Solución del Sistema 1:

Podemos considerar a $G_1(s)$ como el producto de dos sistemas de primer orden en cascada, de forma tal que $G_1(s) = G_{10}(s)G_{100}(s)$. En la Figura 1 se muestra la respuesta al escalón de $G_1(s)$, además de la respuesta al escalón de $G_{10}(s) = 0.1/(s+10)$ y $G_{100}(s) = 1/(s+100)$. Se aprecia que el polo dominante es el que gobierna la respuesta transitoria del sistema.

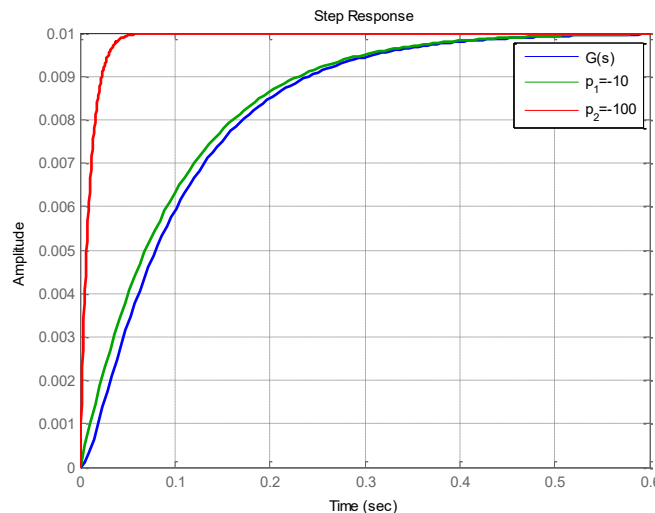


Fig. 1: Resp. al Escalón a Lazo Abierto

En el diagrama de polos y ceros presentado en la Fig 2 se comprueba que el polo dominante es el más cercano al eje imaginario.

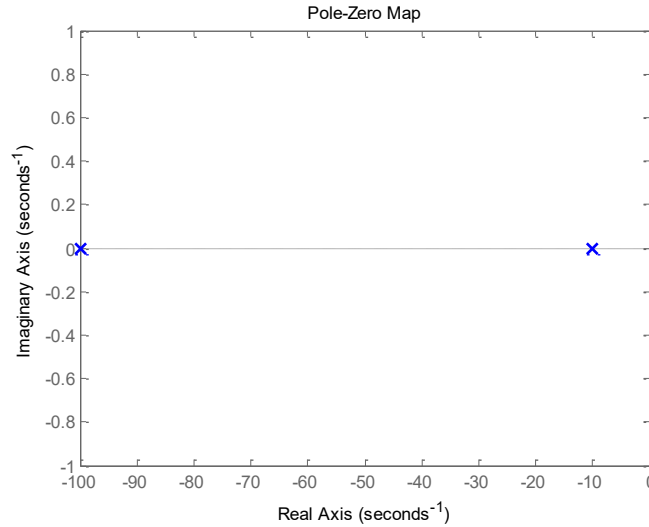


Fig. 2: Diagrama de polos y ceros de $G(s)$

Una forma de minimizar la duración del transitorio y eliminar el error en estado estable consiste en cerrar el lazo de control agregando un compensador proporcional integrador:

$$PI(s) = \frac{K_p(T_i s + 1)}{T_i s} = \frac{K_p \left(s + \frac{1}{T_i} \right)}{s}$$

Donde los parámetros que se deben ajustar son K_p y T_i .

Entonces, la función de transferencia de lazo abierto queda:

$$FT_{la} = PI(s)G_1(s) = \frac{K_p \left(s + \frac{1}{T_i} \right)}{s} \frac{10}{(s+10)(s+100)}$$

El valor de T_i se ajusta para cancelar la mayor constante de tiempo, $T_i = 0.1$, luego:

$$FT_{la} = \frac{K_p}{s} \frac{10}{(s+100)}$$

De esta forma lo que resta calcular es el valor de K_p . El mismo se puede determinar a partir del lugar de raíces de FT_{la} de la Fig 3:

En la figura se presentan dos valores opcionales para K_p , uno para $\zeta = 1$ y otro para $\zeta = 0.707$. Se escoge $K_p = 250$ para minimizar el tiempo de establecimiento mientras se mantiene la respuesta transitoria sin oscilaciones. Valores inferiores aumentarán el tiempo de establecimiento. Valores superiores provocarán oscilaciones en la respuesta temporal. La respuesta temporal al escalón unitario del sistema realimentado (con ambas opciones de ganancias) se presenta en la Fig 4.

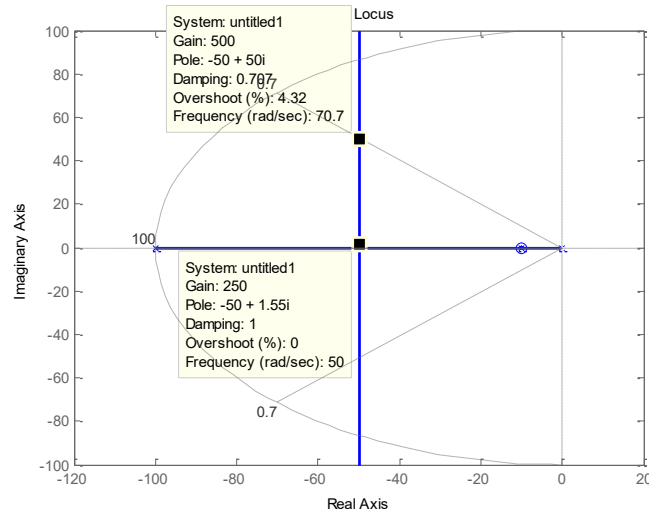


Fig. 3: Lugar de Raíces para Determinar Kp

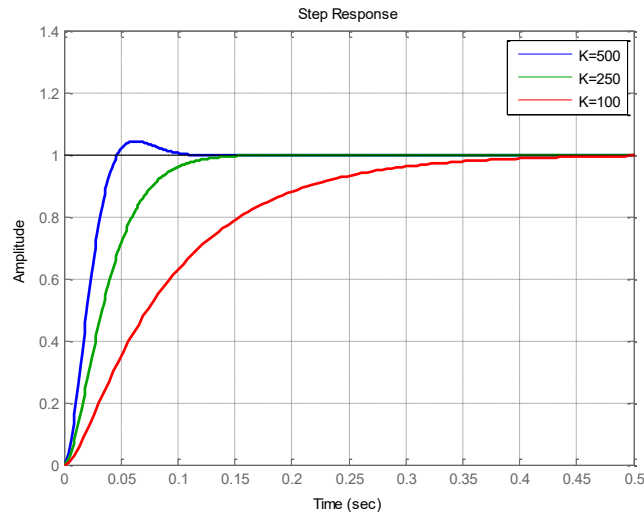


Fig. 4: Respuesta Temporal del Sistema Compensado

28. Para los sistemas del punto anterior, determinar la ganancia del compensador para un sobrepasamiento máximo del 4% de la respuesta temporal ante una entrada escalón unitario.

Solución usando Octave

%% Compensación por Cancelación de Polos Dominantes

```
% Ejercicio 1
close all; clear all; clc
G=zpk([],[-10 -100],10);
Ti=1/10;
PI=tf([1 1/Ti],[1 0]);
figure
rlocus(PI*G);sgrid(0.7,100)
axis([-120 20 -100 100])
% Para psita=[0.707 1]
K=[500 250];
```

```
figure
step(feedback(K(1)*PI*G,1),feedback(K(2)*PI*G,1),G);grid
legend('K=500','K=250','LA')
```

```
% Ejercicio 2
close all; clear all; clc
G=tf(0.8,conv([0.1 1],[0.05 1]));
[z,p,k]=zpkdata(G,'v');
Ti=-1/max(p);
PI=tf([1 1/Ti],[1 0]);
figure
rlocus(PI*G);sgrid(0.7,[10 20]);
axis([-25 15 -25 25]);
% Para psita=[0.707 1]
K=[1.27 0.625];
figure
step(feedback(K(1)*PI*G,1),feedback(K(2)*PI*G,1),G);grid
legend('K=1.27','K=0.625','LA')
```

```
% Ejercicio 3
close all; clear all; clc
G=tf(125,[1 33 200]);
[z,p,k]=zpkdata(G,'v');
Ti=-1/max(p);
PI=tf([1 1/Ti],[1 0]);
figure
rlocus(PI*G);sgrid(0.7,[10 20]);
axis([-25 15 -25 25]);
% Para psita=[0.707 1]
K=[2.5 1.25];
figure
step(feedback(K(1)*PI*G,1),feedback(K(2)*PI*G,1),G);grid
legend('K=2.5','K=1.25','LA')
```

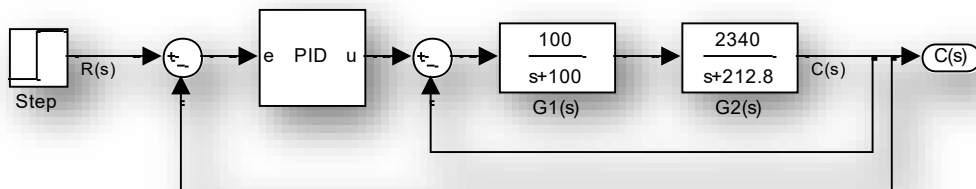
```
% Ejercicio 4
close all; clear all; clc
G=zpk([],[-1 -1 -1],1.24);
[z,p,k]=zpkdata(G,'v');
Ti=-1/max(p);
PI=tf([1 1/Ti],[1 0]);
figure
rlocus(PI*G);sgrid(0.7,[1 2]);
axis([-2 1 -2 2]);
% Para psita=[0.707 1]
K=[0.195 0.12];
figure
step(feedback(K(1)*PI*G,1),feedback(K(2)*PI*G,1),G);grid
legend('K=0.195','K=0.12','LA')
```

```
% Ejercicio 5
close all; clear all; clc
G=zpk([-60],[-10 -20],20);
[z,p,k]=zpkdata(G,'v');
Ti=-1/max(p);
PI=tf([1 1/Ti],[1 0]);
figure
rlocus(PI*G);sgrid(0.7,[20 50 80]);
axis([-150 50 -60 60]);
% Para psita=[0.707 1]
K=[3.7 9.9];
figure
```

```
step(feedback(K(1)*PI*G,1),feedback(K(2)*PI*G,1),G);grid
legend('K=3.7','K=9.9','LA')
```

```
% Ejercicio 6
close all; clear all; clc
G=tf([800 320000],[1 330 29000 600000]);
[z,p,k]=zpkdata(G,'v');
Ti=-1/max(p);
PI=tf([1 1/Ti],[1 0]);
figure
rlocus(PI*G);sgrid(0.7,[50 100 150]);
axis([-450 50 -500 500])
% Para psita=[0.707 0.707 1]
K=[2.45 1.35];
figure
step(feedback(K(1)*PI*G,1),feedback(K(2)*PI*G,1),G);grid
legend('K=2.45','K=1.35','LA')
```

29. En la figura se presenta el diagrama de bloques de un sistema de control. Diseñar un compensador PID(s) que mejore la respuesta transitoria y elimine el error en estado estable.



Solución:

La función de transferencia del primer pasa bajos es:

$$G_1(s) = \frac{100}{s+100} \quad (0.1)$$

Mientras que la función de transferencia del segundo pasa bajos es:

$$G_2(s) = \frac{2340}{s+212.8} \quad (0.2)$$

El comparador cierra el lazo, por lo tanto la función de transferencia de la planta es:

$$G = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} = \frac{234042}{s^2 + 312.8s + 255300} \quad (0.3)$$

Donde:

$$f_n = \sqrt{255300} = 505 \text{ Hz} \quad (0.4)$$

$$\zeta = \frac{312.8}{2f_n} = 0.31 \quad (0.5)$$

$$k = 234042 / f_n^2 = 0.92 \quad (0.6)$$

$$e_{ss, \text{escalón}} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)G_2(s)} = 0.083 \quad (0.7)$$

Otra manera de determinar la respuesta temporal de la planta, es estudiar la función de transferencia a lazo abierto. El lugar de raíces de $G_1(s)G_2(s)$ se muestra en la Fig 5:

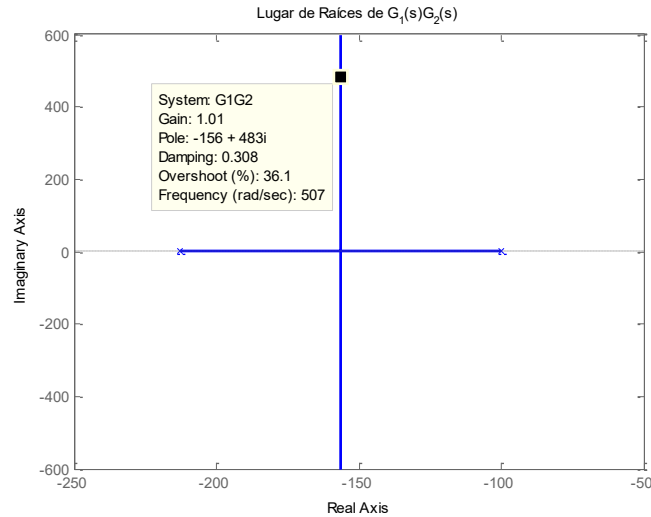


Fig. 5: Lugar de Raíces de $G_1(s) G_2(s)$

Se observa que los parámetros característicos son similares a los calculados en las ecuaciones anteriores.

La respuesta al escalón de la planta se muestra en la Fig 6, junto con los parámetros que la caracterizan:

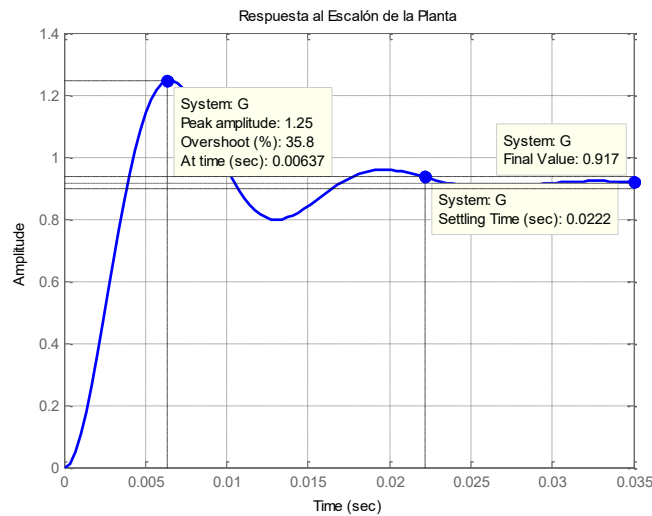


Fig. 6: Respuesta al Escalón de la planta

Para mejorar la respuesta transitoria y el error en estado estable se implementará un controlador PID. La función de transferencia del controlador es:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] = K_p \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s} \quad (0.8)$$

Se puede diseñar el PID de forma tal que los dos ceros cancelen los polos de la planta. Reescribiendo la Función de Transferencia de la planta:

$$G = \frac{234042}{s^2 + 312.8s + 255300} = \frac{0.9167}{3.92 \times 10^{-6} s^2 + 0.0012s + 1} \quad (0.9)$$

Comparando el numerador del PID(s) con el denominador de G(s):

$$T_i = 0.0012 \quad (0.10)$$

$$T_d = \frac{3.92 \times 10^{-6}}{T_i} = 0.0032 \quad (0.11)$$

Finalmente, el valor de K_p se ajusta a partir del lugar de raíces a lazo abierto de $PID(s)G(s)$. Arbitrariamente se escoge:

$$K_p = 1 \quad (0.12)$$

Por lo que la Función de Transferencia del PID(s) se convierte en:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s} = \frac{3.92 \times 10^{-6} s^2 + 0.0012 s + 1}{0.0012 s} \quad (0.13)$$

La respuesta temporal del sistema a lazo cerrado se muestra a continuación:

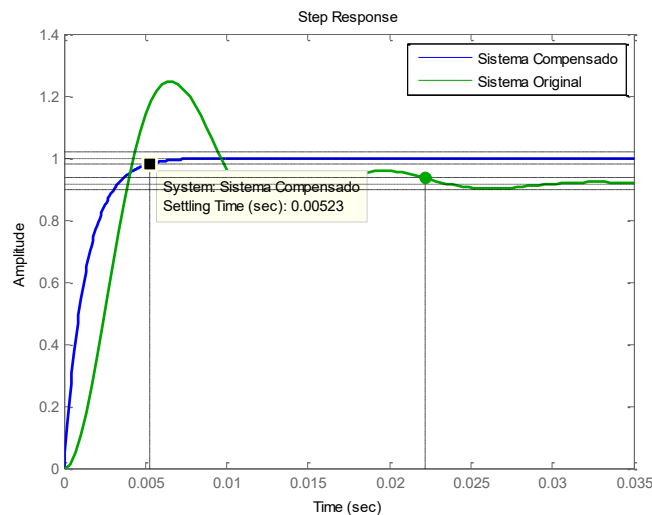


Fig. 7: Respuesta Temporal del Sistema Compensado

30. Diseñar un compensador PID que mejore la respuesta transitoria del sistema de suspensión de un automóvil presentado en la Unidad N°3.

Solución usando Octave

```
close all; clear all; clc
Ma=350;
Ms=20;
K1=100;
K2=300;
B=500;

G=tf([B*K2 K1*K2],[Ma*Ms B*Ma+B*Ms K1*Ma+K2*Ma+K1*Ms B*K2 K1*K2]);
figure
step(G);grid

zpk(G)
```

```

%% Diseño del Compensador con Kp, Ti y Td
d=[1 0.5211 0.7048];

Td=1/d(2);
Ti=1/(d(3)*Td);
Kp=1;
P_I_D=tf(Kp*[Ti*Td Ti 1],[Ti 0]);
rlocus(P_I_D*G); sgrid
step(G,feedback(2*P_I_D*G,1),feedback(4*P_I_D*G,1),...
      feedback(6*P_I_D*G,1))
grid
legend('Lazo Abierto','Kp=2','Kp=4','Kp=6')

```

$$PID = Kp \frac{TiTds^2 + Tis + 1}{Tis} = KpTd \frac{s^2 + \frac{1}{Td}s + \frac{1}{TiTd}}{s}$$

$$G = 21.43 \frac{s + 0.2}{(s + 25.67)(s + 0.24)(s^2 + 0.52s + 0.70)}$$

$$FdTLA(s) = PID \times G$$

$$FdTLA(s) = KpTd \frac{s^2 + \frac{1}{Td}s + \frac{1}{TiTd}}{s} 21.43 \frac{s + 0.2}{(s + 25.67)(s + 0.24)(s^2 + 0.52s + 0.70)}$$

$$s^2 + \frac{1}{Td}s + \frac{1}{TiTd} = s^2 + 0.52s + 0.70$$

$$Td = 1/0.52$$

$$Ti = 1/(0.70 \times Td)$$

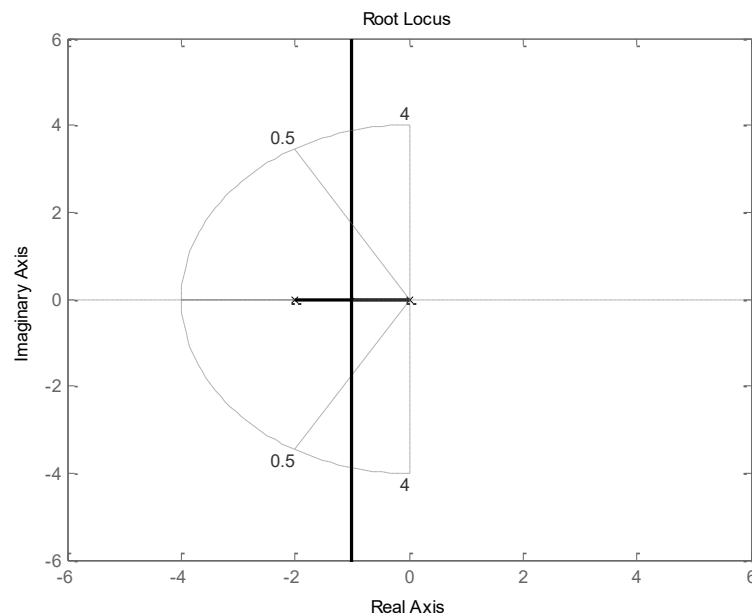
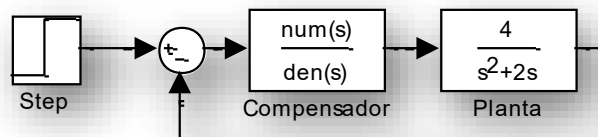
Método de la Bisectriz

En el Anexo 1 se presenta el código de Octave para codificar la función que calcula automáticamente compensadores usando el método de la bisectriz.

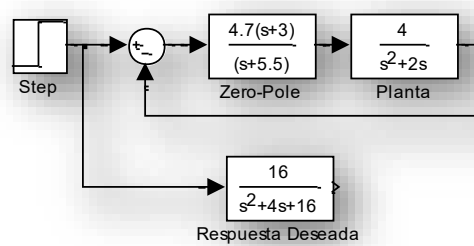
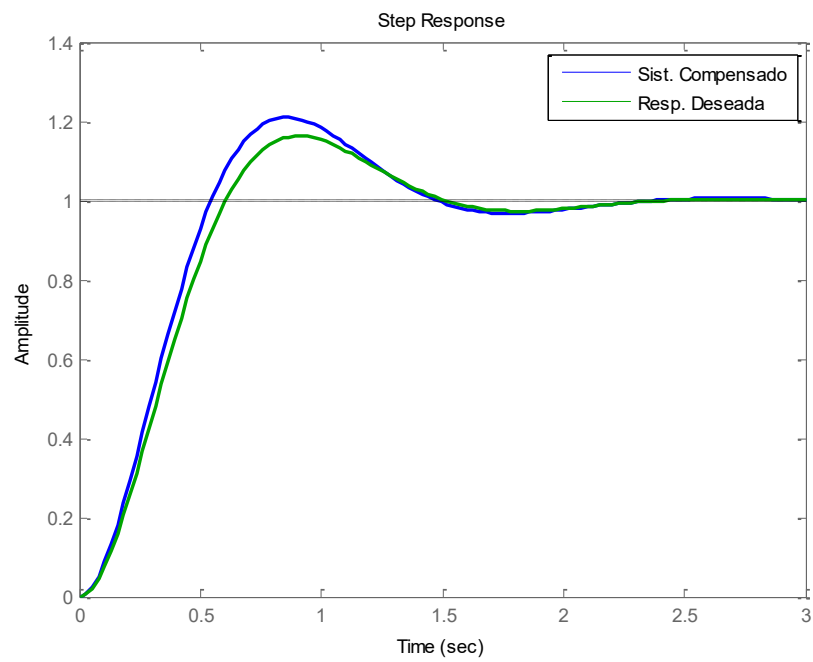
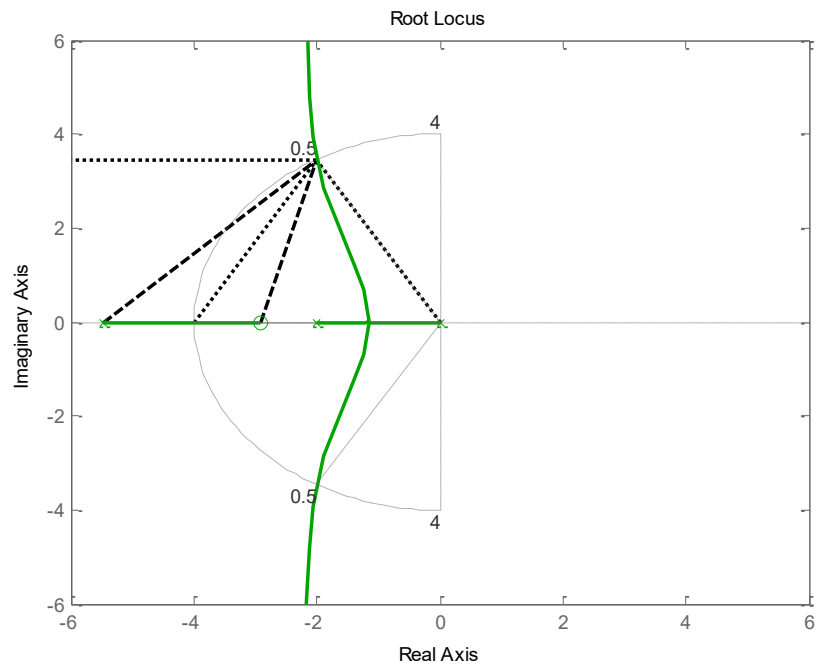
31. Considerar el sistema que se muestra en la figura, junto con su lugar de raíces.

Se pide:

- 31.1. Diseñar un compensador para obtener $\omega_n = 4 \text{ rad / seg}$ y $\zeta = 0.5$.
- 31.2. Comparar la respuesta al escalón del sistema deseado y del sistema compensado utilizando Simulink.
- 31.3. Ajustar la ganancia del compensador hasta encontrar la mejor respuesta.



Utilizando el método de la bisectriz se localiza el cero del compensador en -2.9 y el polo en -5.4 . Con estos valores se arma el compensador y se grafica el lugar de raíces del sistema compensado, de donde se obtiene el valor de K_c , que en este caso es igual a 4.68 . El próximo paso es armar los sistemas en Simulink y comparar la respuesta al escalón de los mismos.

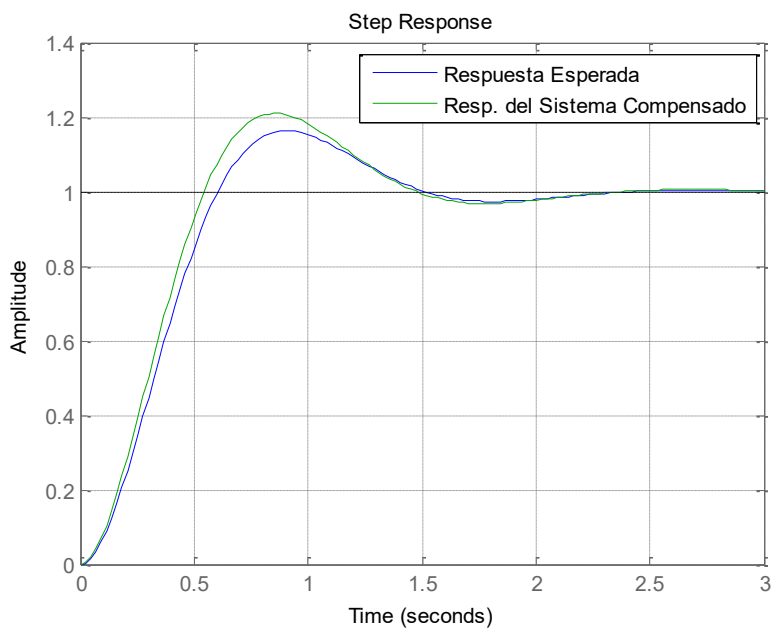
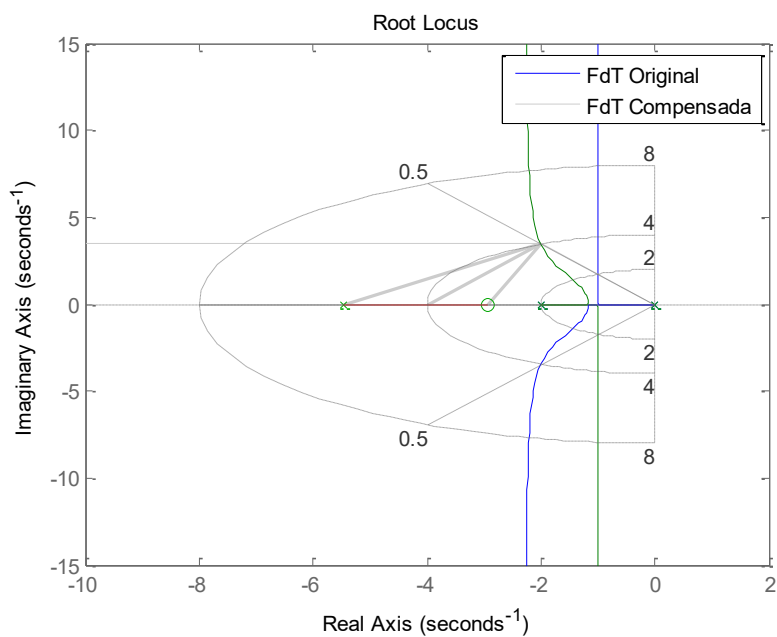


```
% Técnica de la bisectriz
close all, clear all; clc
%% F de T de trayectoria directa
G=tf(4,[1 2 0])

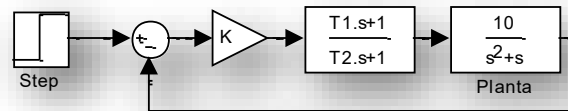
% Requerimientos de diseño:
psita=0.5;
wn=4;
% Usando la función MetodoBisectriz:
MetodoBisectriz(G, psita, wn)
```

La función devuelve:

$$C(s) = \frac{4.7321(s + 2.928)}{(s + 5.464)}$$



32. Dado el sistema que se presenta en la figura, se pide:
- 32.1. Determinar los valores de K , T_1 y T_2 del sistema de la figura de manera tal que los polos dominantes en lazo cerrado tengan el factor de amortiguamiento relativo $\zeta = 0.5$ y la frecuencia natural no amortiguada $\omega_n = 3 \text{ rad/seg}$.
 - 32.2. Identificar el compensador diseñado como compensador en adelante o en atraso.
 - 32.3. Simular.

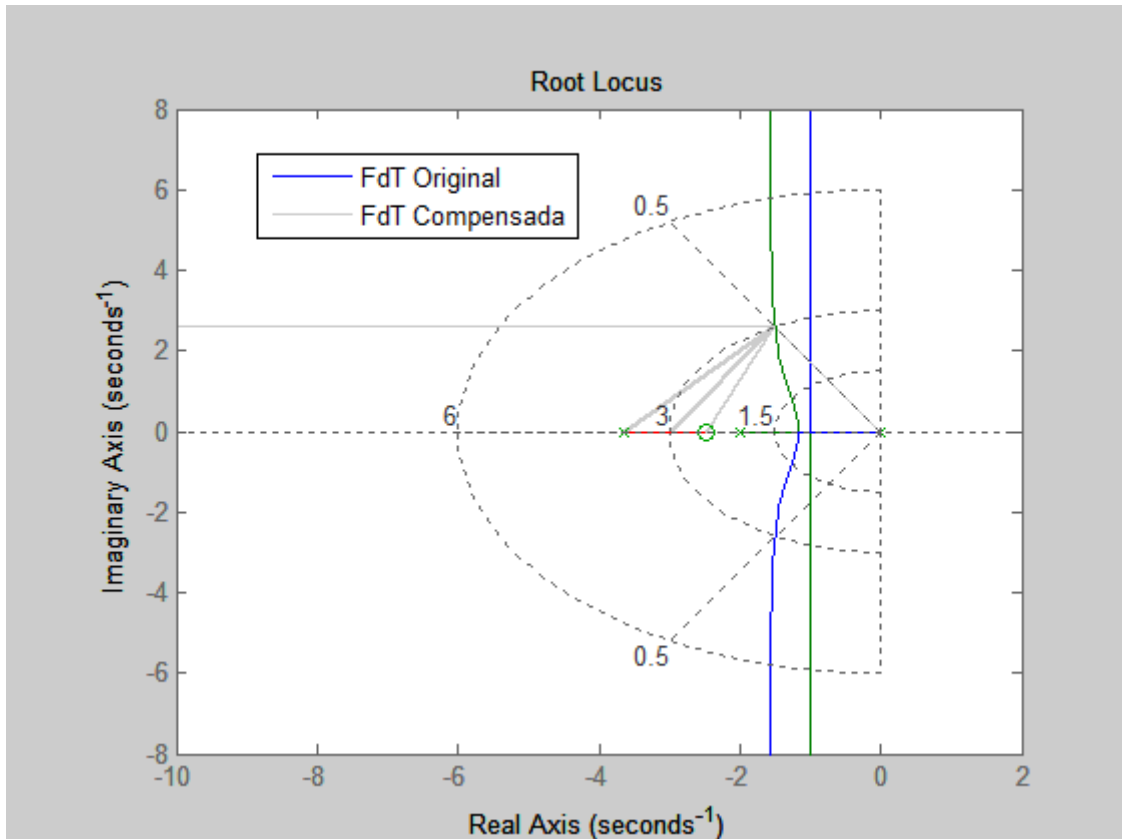


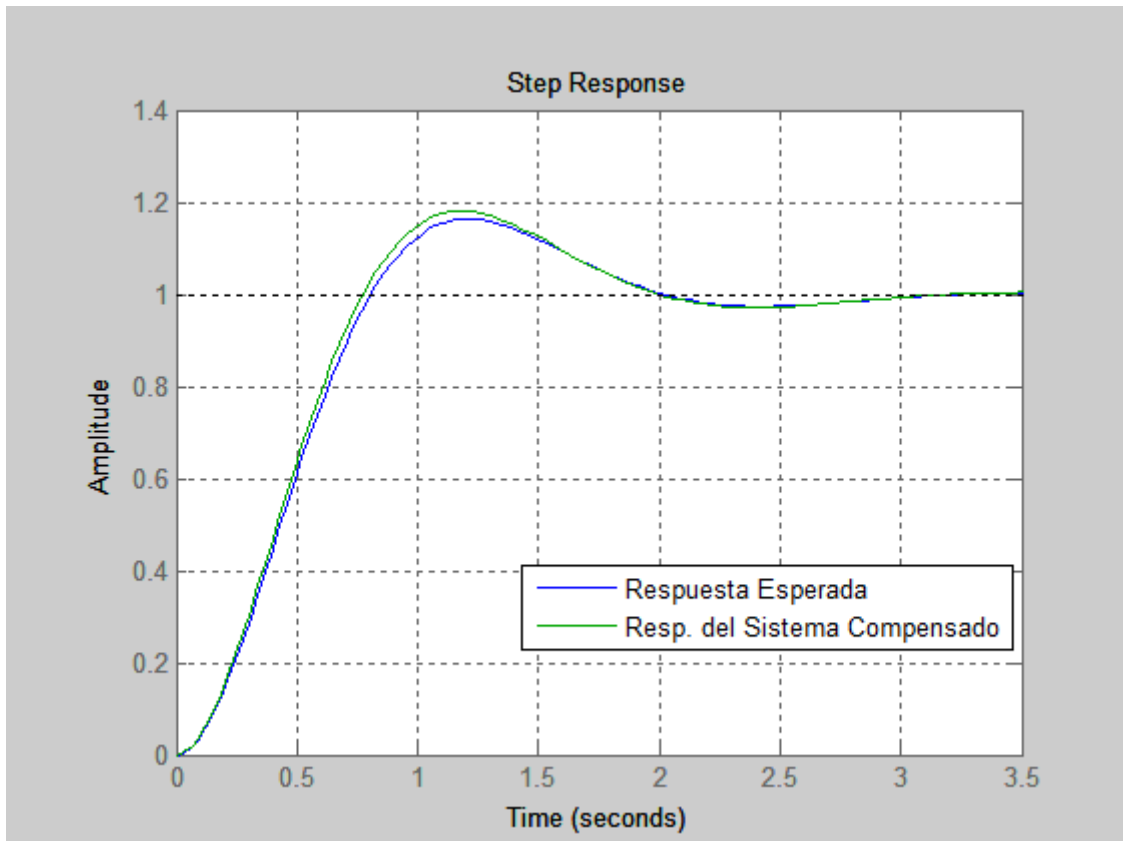
Solución usando Octave

```
close all; clear all; clc
% F d T de la planta
G=tf(10,[1 1 0]);
% Punto de Diseño:
wn=3;psita=0.5;
% Usando la función MetodoBisectriz:
MetodoBisectriz(G, psita, wn)
```

La función devuelve:

$$C(s) = \frac{0.964(s + 2.469)}{(s + 3.646)}$$



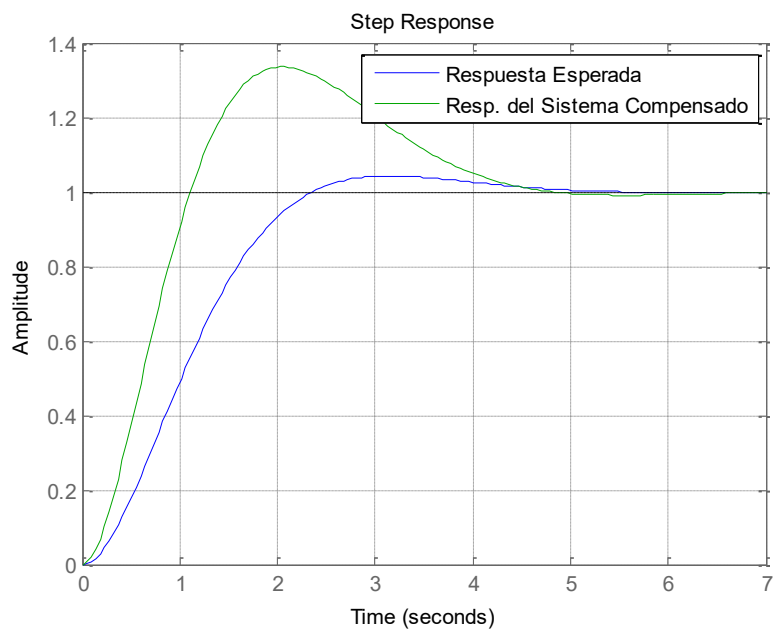
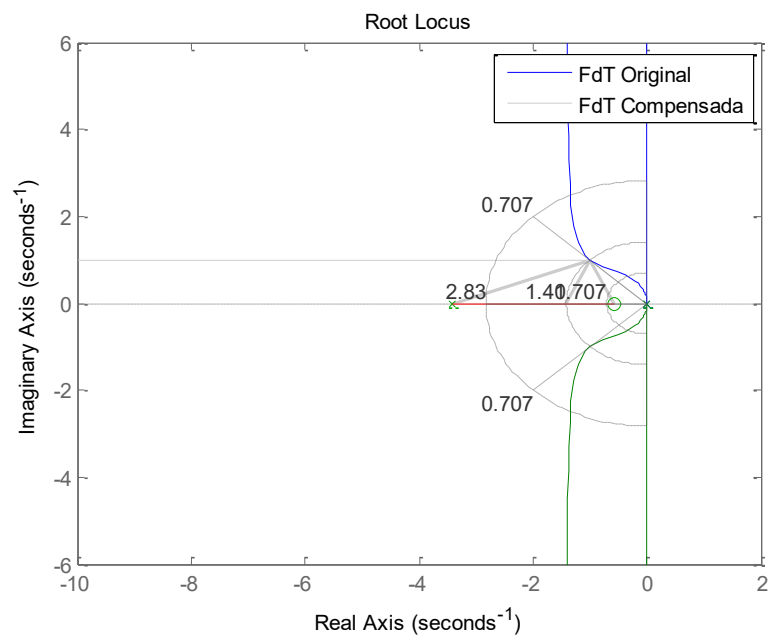


33. Considere el sistema con realimentación unitaria donde $G(s) = \frac{1}{s^2}$. Diseñar un compensador en adelante tal que los polos dominantes en lazo cerrado se ubiquen en $s = -1 \pm j$. Simular la respuesta del sistema.

Solución usando Octave

```
%% F de T de trayectoria directa
G=tf(1,[1 0 0]);
% Punto de diseño
s1=-1+1i;
% Requerimientos de diseño:
psita=cosd(atan2(imag(s1)/-real(s1)));
wn=abs(s1);
% Usando la función MetodoBisectriz:
MetodoBisectriz(G, psita, wn)
```

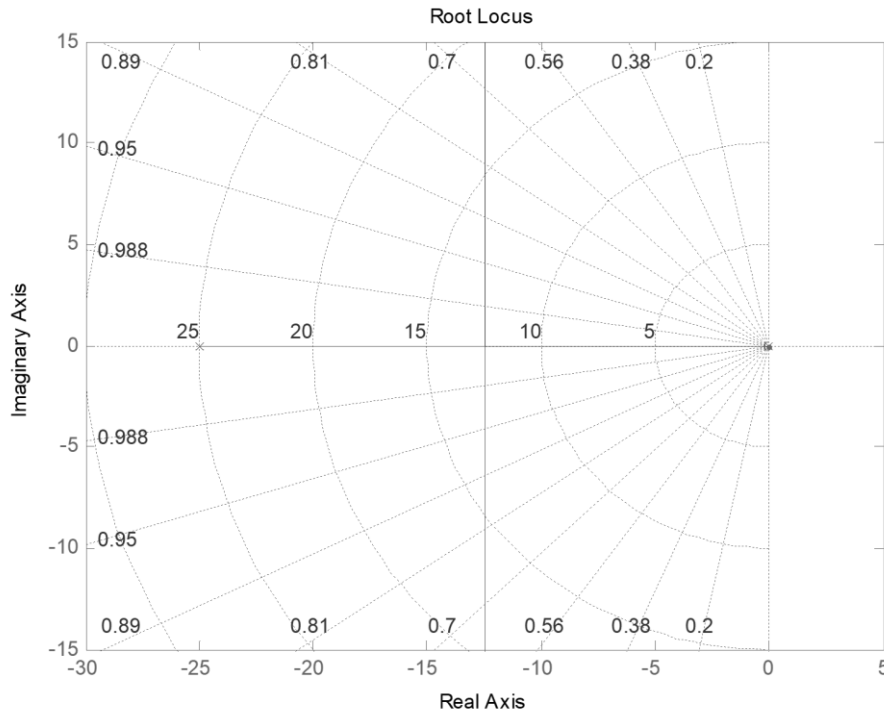
$$C(s) = \frac{4.8284(s+0.5858)}{(s+3.414)}$$



Ejercicios Varios

34. Para el sistema cuya función de transferencia de trayectoria directa se muestra a continuación, diseñar un compensador que cumpla con las siguientes especificaciones:

- 34.1. Error de estado estable menor al 1%
- 34.2. Sobrepaso máximo de la respuesta al escalón menor al 5%
- 34.3. Tiempo de levantamiento menor a 0.5 seg.
- 34.4. Simular el sistema sin compensar y el compensado.



$$G(s) = \frac{2500K}{s(s+25)}$$

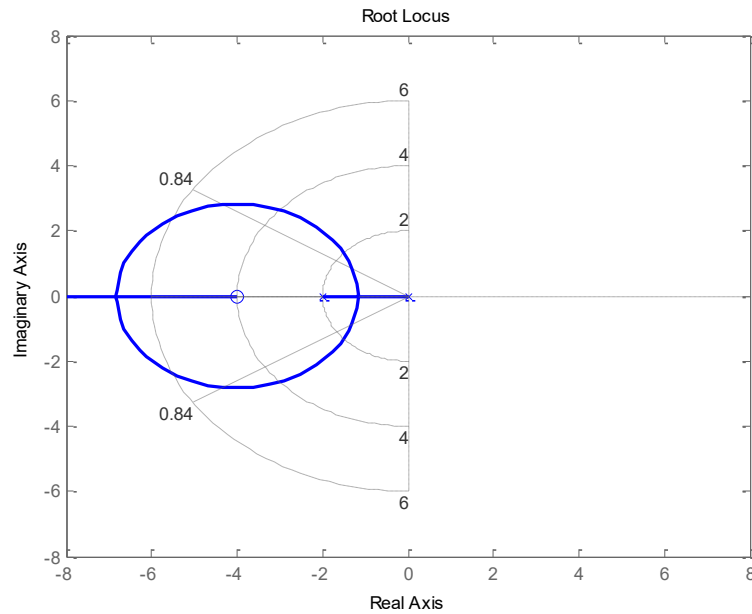
35. Un sistema con realimentación unitaria está representado por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+2)}$$

Se pide:

Calcular un compensador para obtener $\zeta = 0.84$, buscando el menor tiempo de establecimiento.

El Lugar de Raíces se muestra a continuación.



36. A continuación se muestra la función de transferencia a lazo abierto de un motor de corriente continua.

$$G(s) = \frac{K}{(Js + B)(Ls + R) + K^2}$$

Donde:

$J = 0.01 \text{ kg.m}^2/\text{s}^2$, momento de inercia del sistema

$B = 0.1 \text{ Nms}$, coeficiente de fricción

$K = 0.01 \text{ Nm/Amp}$, constante de fuerza contraelectromotriz

$R = 1\Omega$, resistencia de armadura

$L = 5 \text{ mH}$, inductancia de armadura

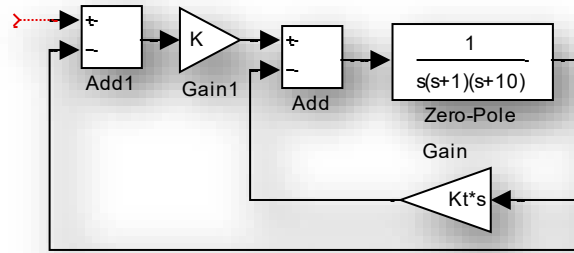
Diseñar un compensador tal que el sistema cumpla con las siguientes especificaciones:

- Tiempo de establecimiento menor a 2 seg.
- Sobrepaso menor al 5%.
- Error de estado estable menor al 1%.

Simular la respuesta al escalón del sistema a lazo cerrado compensado.

37. En la figura se muestra el diagrama de bloques de un sistema con realimentación tacométrica. Encuentre los valores de K y K_t que satisfagan las siguientes especificaciones:

- Constante de error-rampa $K_v = 1$.
- Factor de amortiguamiento relativo cercano a 0.707.



Solución:

```
close all; clear all; clc
syms K Kt s real
Gs=1/(s*(s+1)*(s+10));
%Lazo interno
Gli=collect(Gs/(1+Kt*s*Gs),'s')
% El lazo interno es tipo 1.
% El valor de Kv se calcula:
Kv=collect(s*Gli,'s')
s=0; eval(Kv)
%Kv=1/(Kt+10)<1 -> kt>-9.
% Haciendo Kt=10;
Kt=10;
%Lazo externo
syms s real
eval(Gli)
Glis=tf(1,[1 11 20 0]);
rlocus(Glis)
% Del lugar de raíces se determina:
K=12.6
```

Compensación de Perturbación por Adelanto de Señal

38. En la Figura 1 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control de una antena de campo de colectores solares, donde la señal $R(s)$ representa a la entrada del sistema, $Y(s)$ representa a la salida del sistema, y $N(s)$ denota las perturbaciones que actúan sobre las salidas.

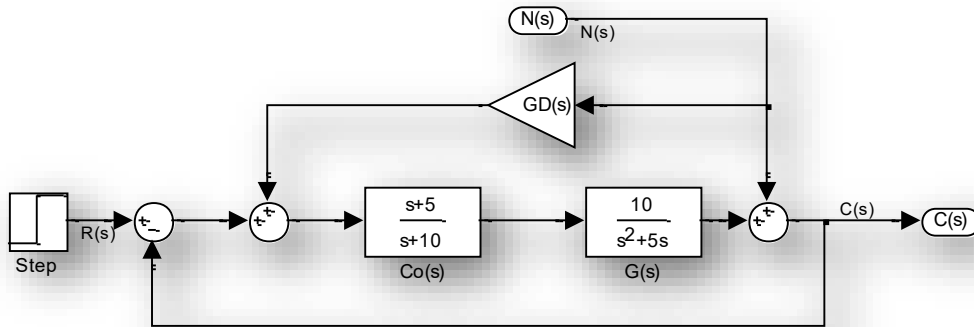


Figura 1

Diseñar la función de transferencia $G_D(s)$ para eliminar el efecto de las perturbaciones sobre la salida.

Solución:

Esto se logra minimizando la función de transferencia $C(s)/N(s)$ para $R(s)=0$.

La expresión de $G_D(s)$ queda $1/(C(s)G(s))$.

La forma más simple de determinar las Funciones de Transferencia es aplicando la fórmula de Mason. Se comprueba que:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Co(s)G(s)}{1 + Co(s)G(s)}$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1 + G_D(s)Co(s)G(s)}{1 + Co(s)G(s)}$$

Haciendo:

$$\frac{C(s)}{R(s)}_{N(s)=0} = \frac{Co(s)G(s)}{1 + Co(s)G(s)}$$

$$\frac{C(s)}{N(s)}_{R(s)=0} = \frac{1 + G_D(s)Co(s)G(s)}{1 + Co(s)G(s)} = 0$$

$$C(s) = N(s) + W(s)Co(s)G(s)$$

$$W(s) = N(s)G_D(s) + E(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s) \Rightarrow E(s) = -C(s)$$

$$W(s) = N(s)G_D(s) - C(s)$$

$$C(s) = N(s) + (N(s)G_D(s) - C(s))Co(s)G(s)$$

$$C(s) = N(s)(1 + G_D(s)Co(s)G(s)) + (-C(s)Co(s)G(s))$$

$$C(s) + C(s)Co(s)G(s) = N(s)(1 + G_D(s)Co(s)G(s))$$

$$C(s)(1 + Co(s)G(s)) = N(s)(1 + G_D(s)Co(s)G(s))$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1 + G_D(s)Co(s)G(s)}{1 + Co(s)G(s)}$$

$$1 + G_D(s)Co(s)G(s) = 0$$

$$G_D(s)Co(s)G(s) = -1$$

$$G_D(s) = -\frac{1}{Co(s)G(s)}$$

De la última Función de Transferencia, para que la perturbación no tenga efecto sobre la salida,

$$1 + G_D(s)Co(s)G(s) = 0$$

O, lo que es lo mismo:

$$G_D(s) = -\frac{1}{Co(s)G(s)}$$

Siendo:

$$Co(s)G(s) = \frac{s+5}{s+10} \frac{10}{s(s+5)} = \frac{10}{s(s+10)}$$

De donde,

$$G_D(s) = -0.1s(s+10) = -s(0.1s+1)$$

La cual no es realizable. Sin embargo, despreciando el cero en -10 se la puede aproximar con la Función de Transferencia de un controlador D restringido:

$$G_D(s) = -\frac{0.1s}{\alpha 0.1s+1}$$

Con $\alpha = 0.1$. A partir de las simulaciones se ajusta el valor de la ganancia para maximizar el efecto, quedando:

$$G_D(s) = -0.7 \frac{s}{0.07s+1}$$

39. En la Figura 2 se muestra otra forma de aplicar esta técnica. Aplicando los mismos conceptos, diseñar $G_D(s)$.

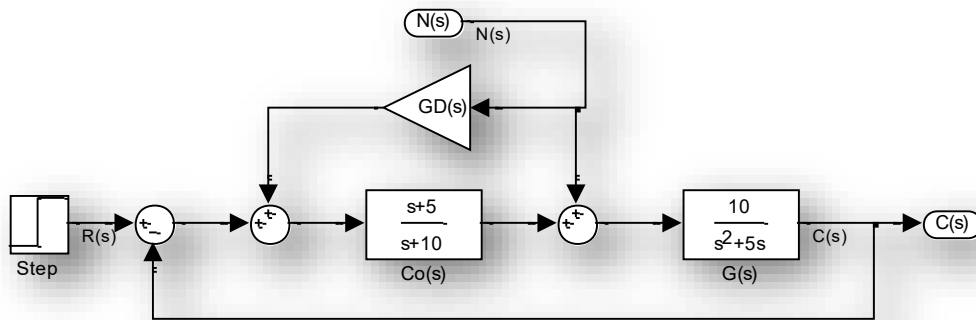


Figura 2

Solución:

En este caso, se demuestra que la expresión de $G_D(s)$ queda $-1/Co(s)$.

Unidad N° 5: Análisis y Diseño Clásico de Sistemas de Control en el Dominio de la Frecuencia

Gráficas de Bode

1. Para las siguientes funciones, graficar sus correspondientes Diagramas de Bode.

$$G_1(s) = \frac{1}{s+10}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{10s+1}$$

$$G_3(s) = \frac{1000}{(s+10)^2}$$

$$G_4(s) = \frac{100(s+10)}{s(s+10000)}$$

$$G_5(s) = \frac{10000s}{(s+1000)}$$

$$G_6(s) = \frac{100000s^2}{(s+100)^2(s+10000)}$$

$$G_7(s) = \frac{100000(s+10)(s+800)}{s(s+100)^2(s+2000)}$$

$$G_8(s) = \frac{1000s(s+1000)}{(s+100)^2(s+8000)}$$

Solución:

Representación de la función 1 en

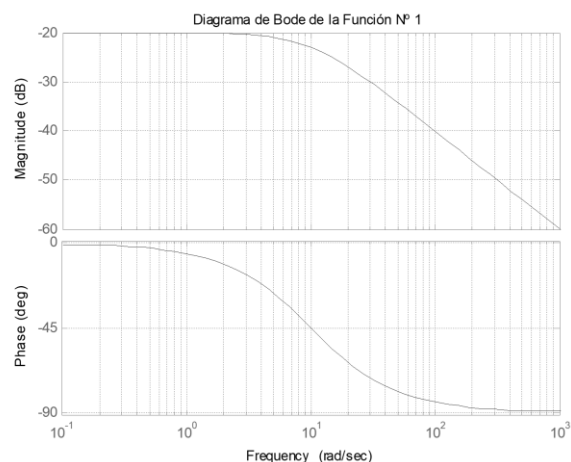
Octave:

```
num=1;
den=[1 10];
sys=tf(num,den)
```

Transfer function:

```
1
-----
s + 10
```

```
bode(sys);grid
title('Diagrama de Bode de la
Función N° 1')
```



Solución del ejercicio 3:

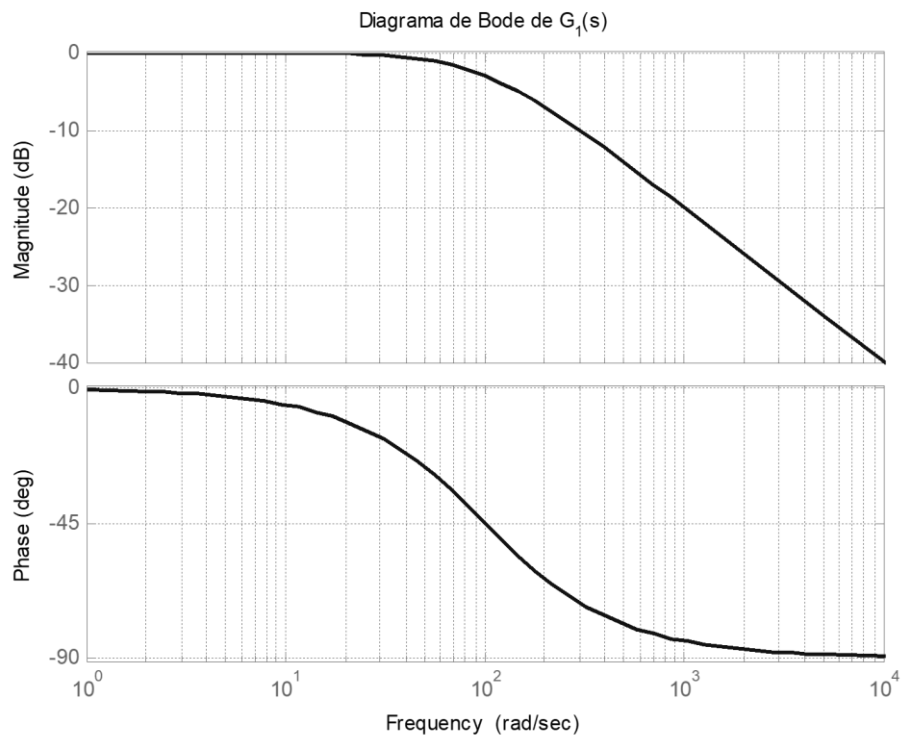
```
close all; clear all; clc
G3=zpk([], [-10 -10], 1000);
Kb=tf(1000/10^2, 1);
G3p=zpk([], [-10 -10], 10^2)
bode(G3, Kb, G3p); grid
```

Solución del ejercicio 4:

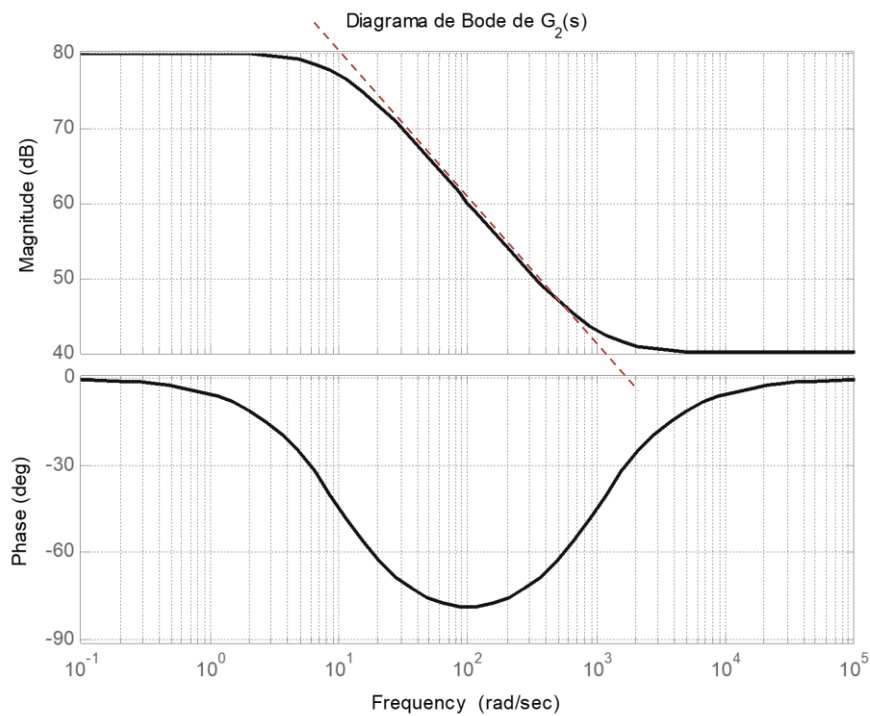
```
close all; clear all; clc
G4=zpk([-10], [-10000 0], 100);
Kb=tf(10*100/10000, 1);
G4z=zpk([-10], [], 0.1);
G4p1=zpk([], [-10000], 10000);
G4p2=zpk([], [0], 1);
bode(G4, Kb, G4z, G4p1, G4p2); grid
```

2. Identificar los sistemas caracterizados por los siguientes Diagramas de Bode. Comprobar los resultados utilizando Octave.

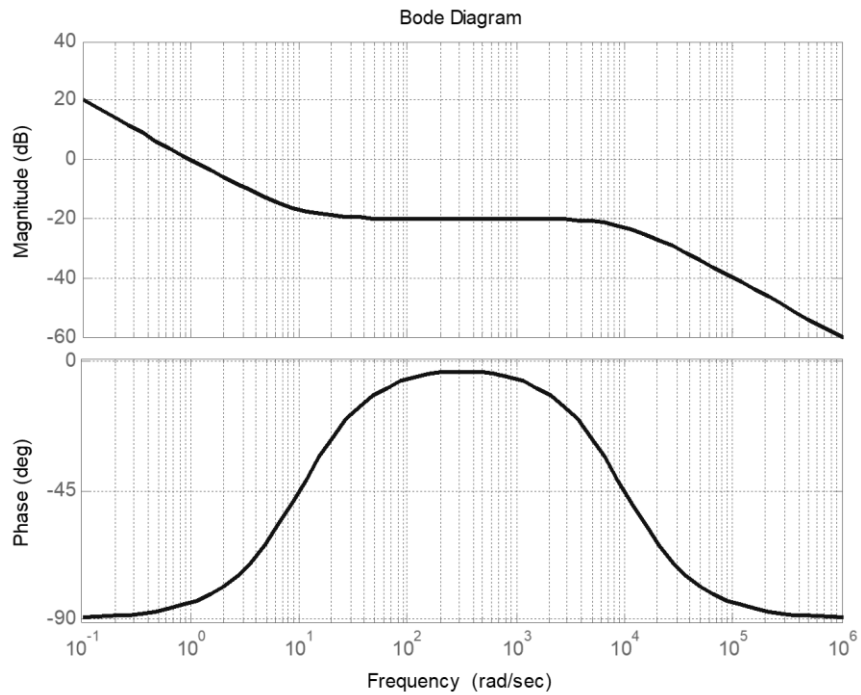
a) Sistema 1:



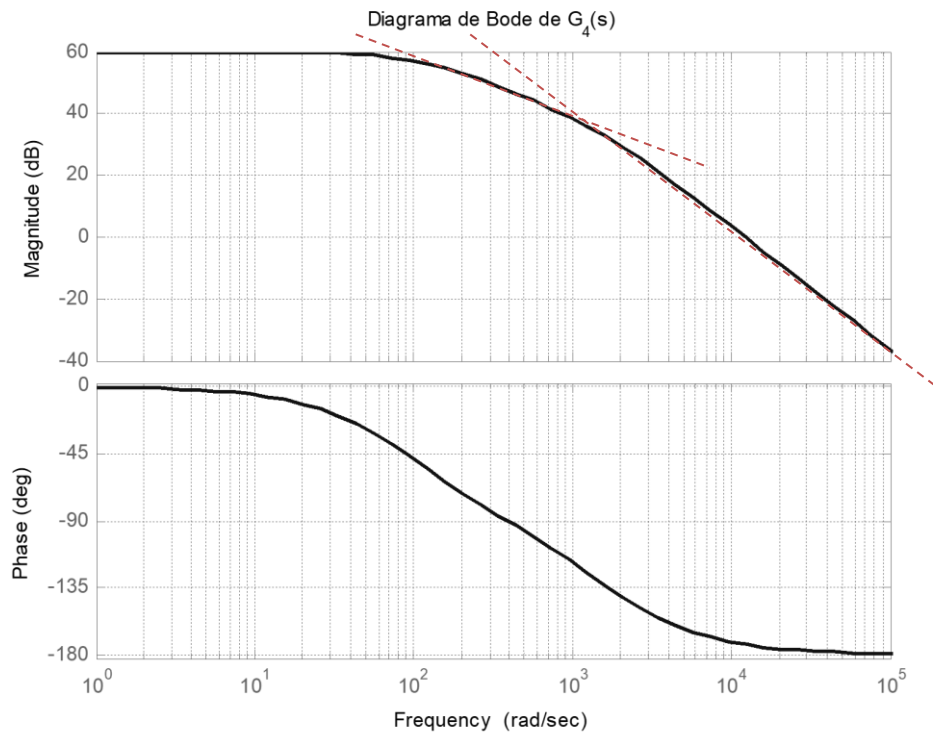
b) Sistema 2:



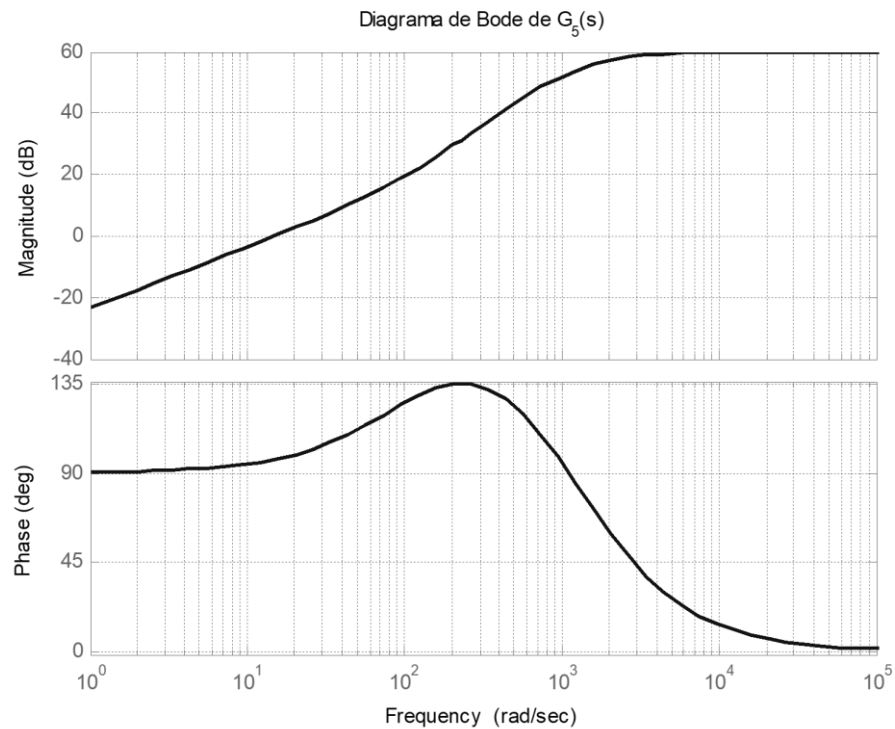
c) Sistema 3:



d) Sistema 4:



e) Sistema 5:



Solución con Octave:

```
%% Sist 1:
Kb=0;
K=10^(Kb/20);
p1=100;
G1=tf(K,[1/p1 1]);
zpk(G1);
bode(G1);grid

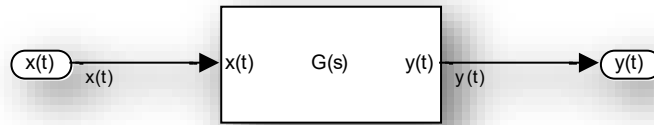
%% Sist 2
Kb=80;
K=10^(Kb/20);
p1=10;
z1=1000;
G2=tf(K*[1/z1 1],[1/p1 1]);
bode(G2);grid

%% Sist 3
Kb=0;
K=10^(Kb/20);
p1=0;
z1=10;
p2=1e4;
G3=zpk([-z1],[-p1 -p2],K*p2/z1);
bode(G3,{0.1 1e6});grid

%% Sist 4.
Kb=60;
K=10^(Kb/20);
p1=100;
p2=2000;
G4=zpk([],[-p1 -p2],K*p1*p2);
bode(G4,{1 1e5});grid

%% Sist 5.
Kb=-22;
K=10^(Kb/20);
z1=0;
z2=100;
p1=1200;
p2=1100;
G5=zpk([-z1 -z2],[-p1 -p2],K*p1*p2/z2);
bode(G5,{1 1e5});grid
```

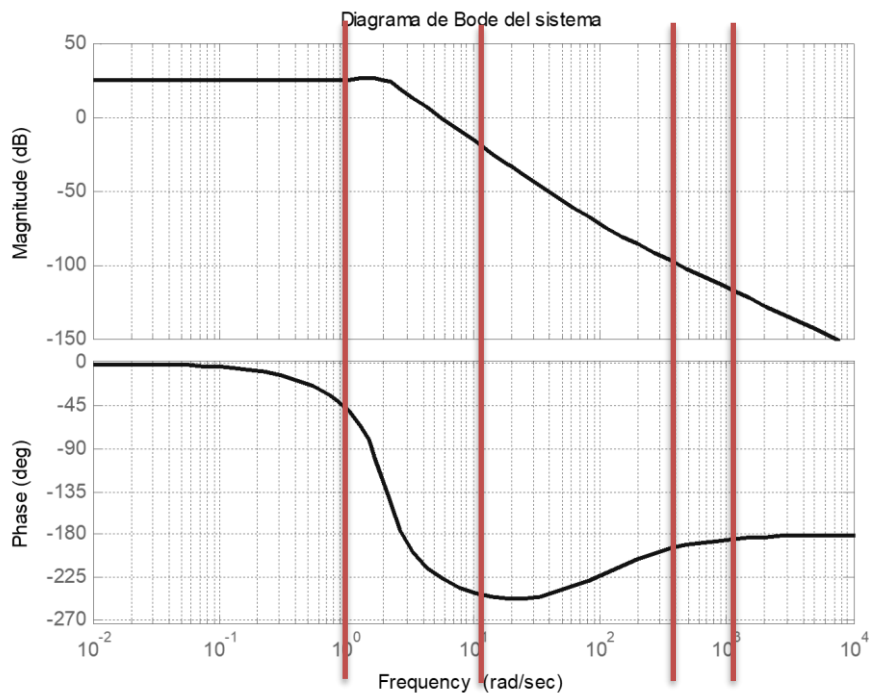
3. Encontrar la magnitud y fase de la salida en estado estable para los siguientes sistemas y señales de entrada:



- 3.1. $x(t) = 2\sin(3t + 60^\circ)$ para $G(s) = \frac{4}{s+1}$
- 3.2. $x(t) = 1.5\sin(100t + 45^\circ)$ para $G(s) = \frac{4s}{s+10}$
- 3.3. $x(t) = 20\sin(200t)$ para $G(s) = \frac{100 \times 10^3}{(s+100)(s+1000)}$
- 3.4. $x(t) = 12\sin(150t - 30^\circ)$ para $G(s) = \frac{10(s+10)}{(s+1)(s+100)}$

4. Para el sistema representado por el siguiente Diagrama de Bode, encontrar las salidas $y(t)$ para las siguientes entradas:

- 4.1. $x_1(t) = 10\sin(t)$
- 4.2. $x_2(t) = 5\sin(11t)$
- 4.3. $x_3(t) = 0.5\sin(400t - 30^\circ)$
- 4.4. $x_4(t) = \sin(1200t + 34^\circ)$



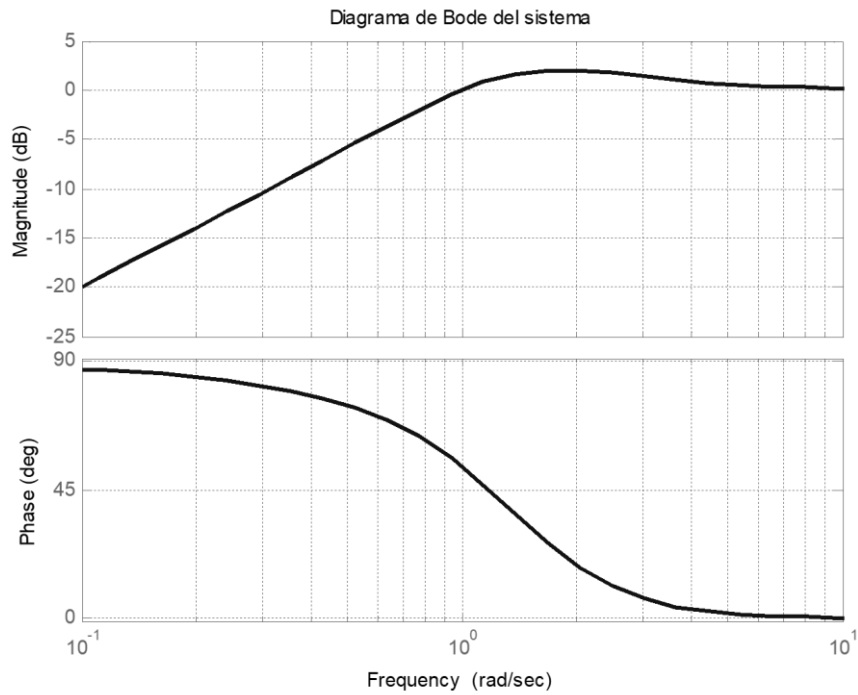
5. Para el sistema representado por el siguiente Diagrama de Bode, encontrar las salidas $y(t)$ para las siguientes entradas:

5.1. $x_1(t) = 8 \sin(2t + 25^\circ)$

5.2. $x_2(t) = \sin(0.5t - 8^\circ)$

5.3. $x_3(t) = \sin(t)$

5.4. $x_4(t) = 9 \sin(500t + \pi \text{ rad})$



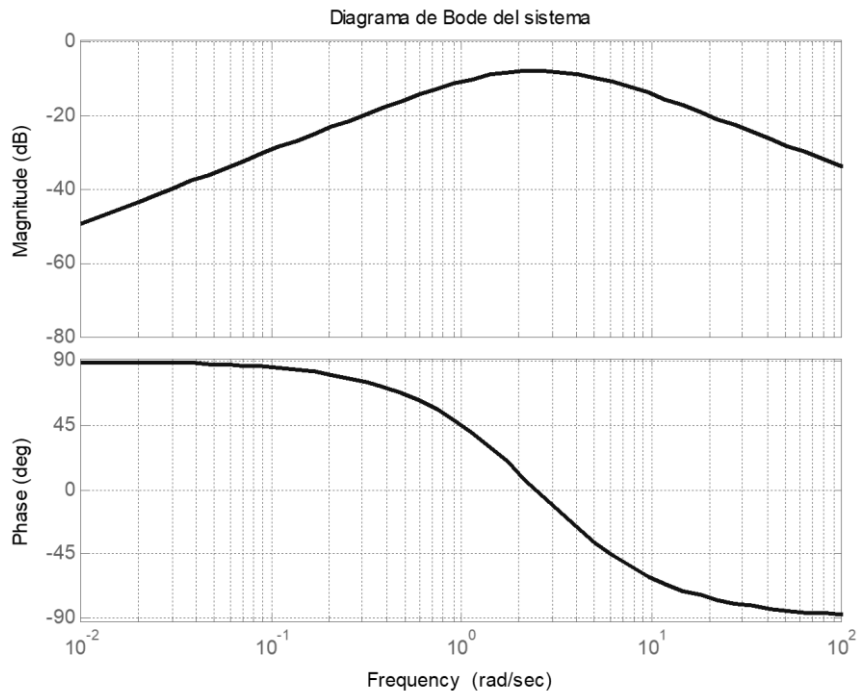
6. Para el sistema representado por el siguiente Diagrama de Bode, encontrar las salidas $y(t)$ para las siguientes entradas:

6.1. $x_1(t) = 2 \sin(0.04t - \pi/4 \text{ rad})$

6.2. $x_2(t) = 1.2 \sin(90t + \pi/12 \text{ rad})$

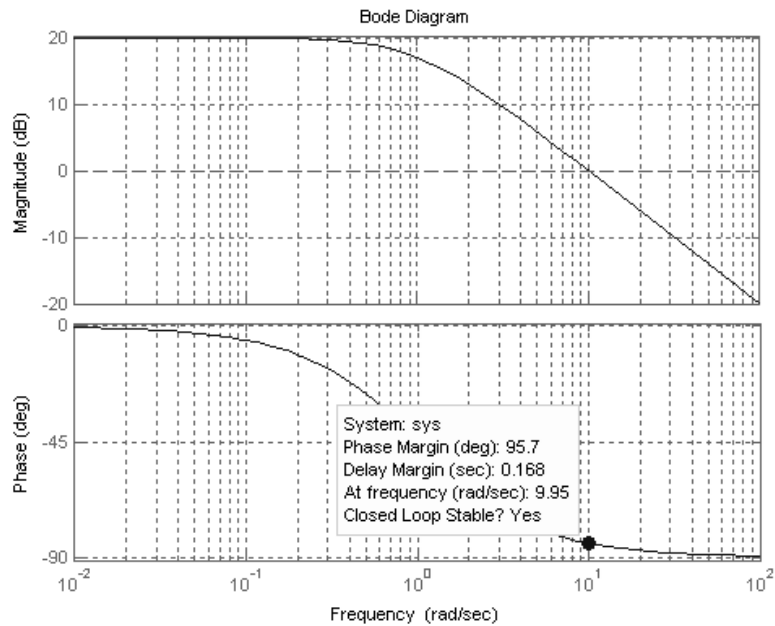
6.3. $x_3(t) = 11 \sin(0.8t - 3\pi/4 \text{ rad})$

6.4. $x_4(t) = 5.2 \sin(45t)$

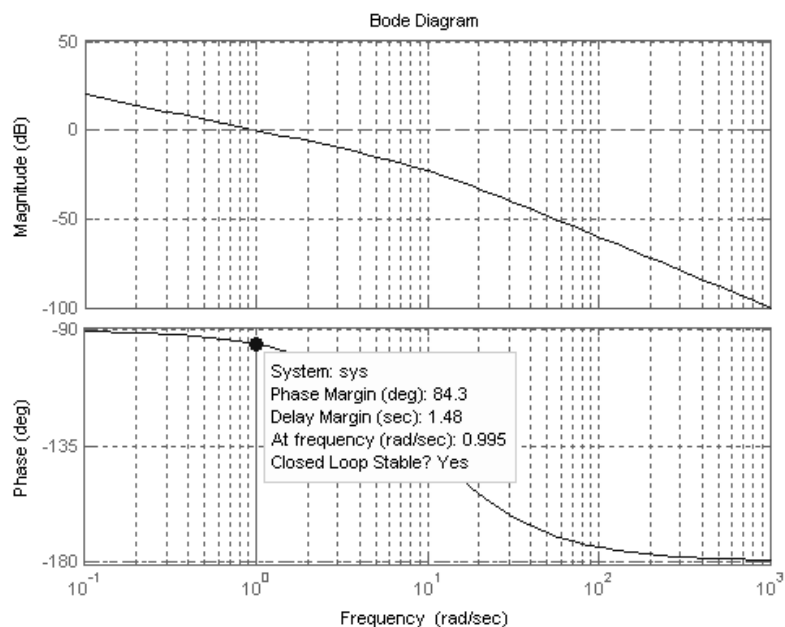


7. Los siguientes sistemas con realimentación unitaria son representados por sus correspondientes $G(s)$. Para cada uno de ellos se pide el diagrama de Bode, indicando en ambos gráficos los márgenes de ganancia y fase.

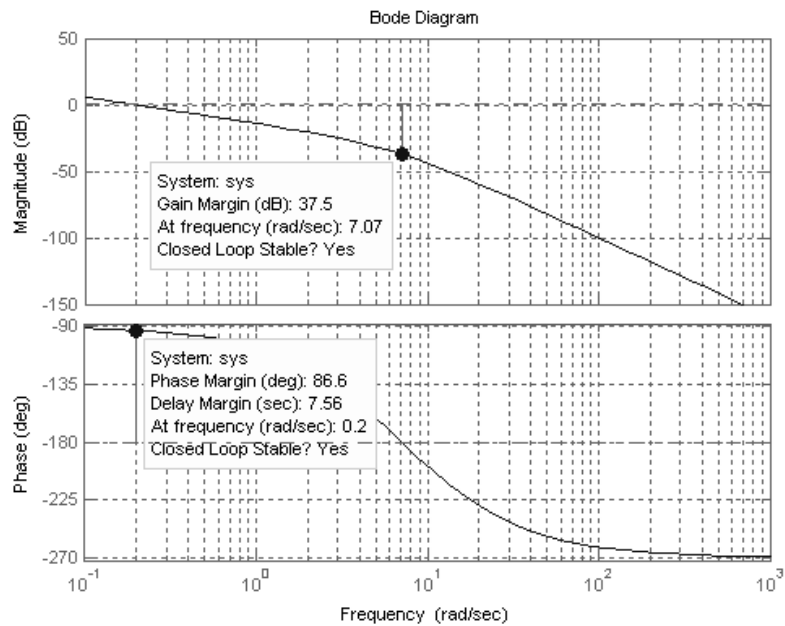
$$G_1(s) = \frac{10}{s+1}$$



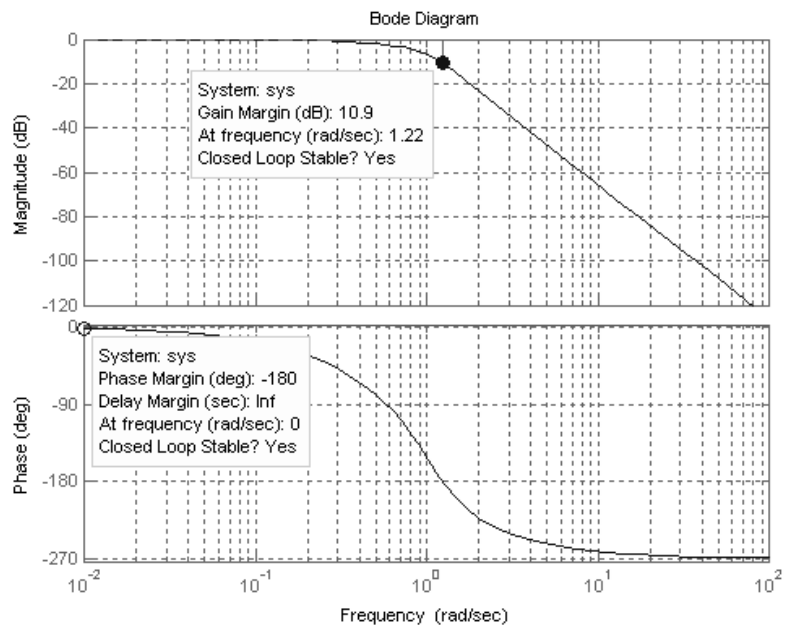
$$G_2(s) = \frac{10}{s(s+10)}$$



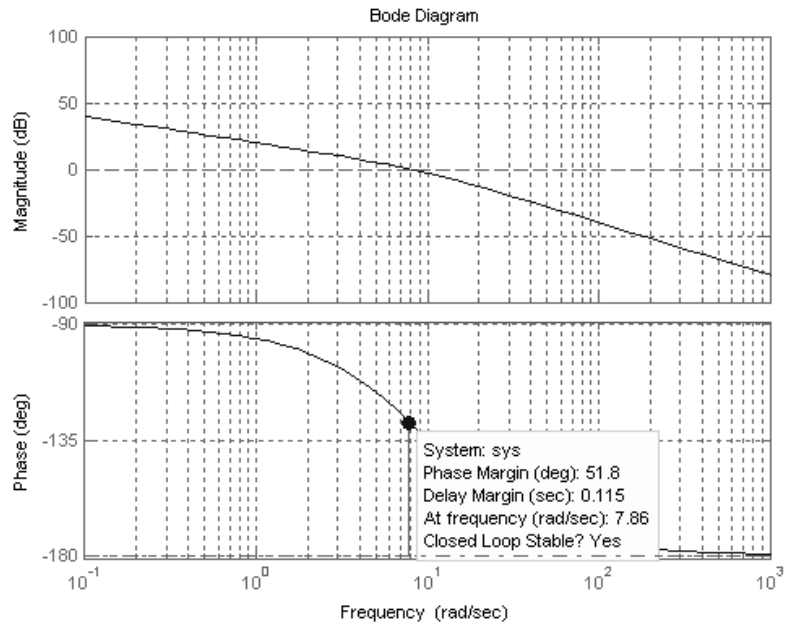
$$G_3(s) = \frac{10}{s^3 + 15s^2 + 50s}$$



$$G_4(s) = \frac{1}{(2s+1)(s^2+s+1)}$$



$$G_5(s) = \frac{10}{s(0.1s+1)}$$



Compensación en Frecuencia

8. Dado el sistema cuya función de transferencia se muestra a continuación, diseñar un compensador tal que el margen de fase del sistema a lazo cerrado sea de al menos 60° , con un error en estado estable no mayor a 0.025.

$$G(s) = \frac{500(s+100)}{s(s+10)(s+2500)}$$

Solución con Octave

```
close all; clear all; clc
kg=500;
zg=-100;
pg=[0 -10 -2500 ];
Gs=zpk(zg,pg,kg);
Kv=abs(kg*zg/pg(2)/pg(3))
ess=1/Kv;
K=20;
essnuevo=1/(Kv*K);
bode(Gs,K*Gs); grid
%% Diseño en Atraso
% Buscamos la frecuencia para la cual el margen de fase es el
solicitado

wm(1)=5.2; %rad/seg (más 5°)
wm(2)=4.03; %rad/seg (más 10°)
wm(3)=3.54; %rad/seg (más 12°)
% La atenuación que debe proporcionar el comp es entonces
Gwm(1)=16.7; % dB
Gwm(2)=19; % dB
Gwm(3)=20; % dB
b=10.^(Gwm./20);

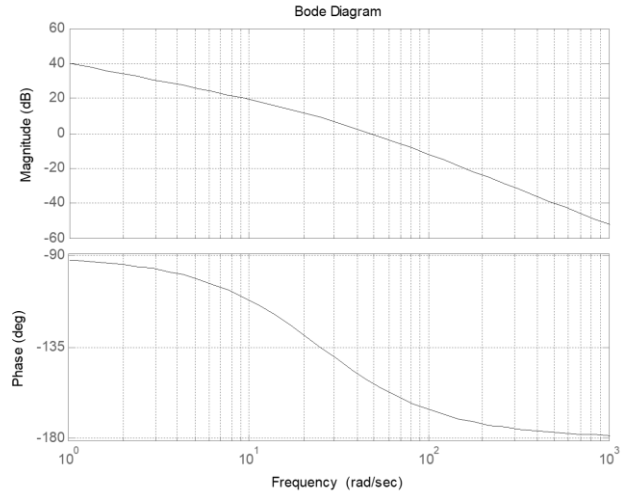
% Tomamos 1/T a distintas distancias de wm.
T=10./wm;

% Con lo que queda definido el Kc:
Kc=K./b;

%% Compensadores
Kk=Kc.*b;
num=[T; 1 1 1]';
den=[b.*T; 1 1 1]';
Cs1=tf(Kk(1)*num(1,:),den(1,:));
Cs2=tf(Kk(1)*num(2,:),den(2,:));
Cs3=tf(Kk(1)*num(3,:),den(3,:));
figure('Name','Diagrama de Bode del Sistema Compensado a Lazo
Abierto','NumberTitle','off')
bode(Gs,K*Gs,Cs1*Gs,Cs2*Gs,Cs3*Gs); grid
legend('Gs','KGs','C1Gs','C2Gs','C3Gs')
```

9. Para el sistema cuya función de transferencia de trayectoria directa se muestra a continuación, diseñar un compensador tal que el margen de fase sea mayor a 45° , manteniendo el error en estado estable. Simular el sistema sin compensar y el compensado.

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$



10. En los sistemas cuyas funciones de transferencia de lazo cerrado son:

a) $M(s) = \frac{K}{s(1+0.001s)(1+0.025s)(1+0.1s)}$

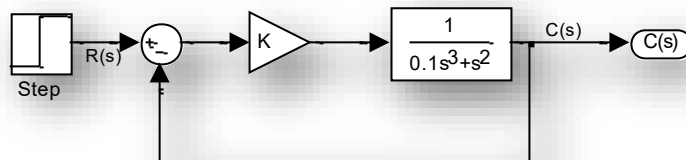
b) $M(s) = \frac{K(1+0.2s)}{(1+0.1s)(2+3s+s^2)}$

Determinar a partir de los diagramas de Bode el valor requerido de K de manera que cada sistema tenga un margen de fase positivo de 45° .

11. En la figura se muestra un sistema de control tipo 2. El sistema debe cumplir con las siguientes especificaciones de diseño:

11.1. Constante de aceleración $K_a = 5[s^{-2}]$

11.2. Factor de Resonancia $M_p \leq 1.5$



Proyectar un controlador serie de avance de fase para satisfacer estas exigencias. Trazar el diagrama de Bode y el lugar de raíces de los sistemas sin compensar y compensados. ¿Cuáles son los valores del coeficiente de amortiguamiento y del ancho de banda del sistema compensado?

12. Para el sistema del ejemplo anterior, diseñar un controlador para que el sistema tenga un margen de fase de al menos 40° .

Unidad N° 6: Análisis en el Espacio de Estados

1. Representar las ecuaciones diferenciales que se presentan a continuación como ecuaciones de estado.

a) $\dot{y} = -ay$

b) $\dot{y} = -ay + bu$

c) $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$

d) $a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_1u$

e) $a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_1u_1 + b_2u_2$

f)
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + 2y_2 \\ \dot{y}_2 = -2y_2 + 3y_3 + u \\ \dot{y}_3 = -y_1 - 3y_2 - y_3 + u_2 \end{cases}$$

g) $\tau\dot{y} + y = Ku$

h) $\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2y = K\omega_n^2u$

Solución.

La solución de 7.1 y 7.2 es trivial. Para 7.3:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

$$\ddot{y} = -a_0y - a_1\dot{y} + u$$

$$x_1 = y$$

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -a_0x_1 - a_1x_2 + u$$

Representando las últimas dos ecuaciones de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

2. Para cada uno de los sistemas

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Revise la controlabilidad y observabilidad con Octave.

2.1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 2]$

2.2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0]$

2.3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1]$

2.4. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 0]$

2.5. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 0]$

Solución:

Alternativa 1:

Podemos usar el siguiente código:

```
close all; clear all; clc
```

```
A=[-1 0; 0 -3];
B=[1 2]';
C=[1 2];
%% Controlabilidad
V=ctrb(A,B); % Matriz de Controlabilidad
rank(V)
% Como el rango de la matriz V es igual al tamaño de A, el
sistema es
% controlable.
%% Observabilidad
S=obsv(A,C); % Matriz de Observabilidad
det(S)
% Como el determinante de la matriz S es distinto de 0, el
sistema es
% observable.
```

Alternativa 2:

Podemos usar el siguiente código para determinar automáticamente la controlabilidad y observabilidad de cualquier sistema:

```
close all; clear all; clc
A=[-1 0; 0 -3];
B=[1 2]';
C=[1 2];
% A=[-1 2 0; 1 -2 1; 0 0 3];
% B=[1 1 0]';
% C=[1 0 0];
%% Controlabilidad
V=ctrb(A,B); % Matriz de Controlabilidad
if(rank(V)==length(A))
    disp('Sistema Controlable')
else
    disp('Sistema no Controlable')
end
%% Observabilidad
S=obsv(A,C); % Matriz de Observabilidad
if(det(S)~=0)
    disp('Sistema Observable')
else
    disp('Sistema no Observable')
end
```

Alternativa 3:

Si las funciones no están disponibles, podemos usar el siguiente código para evaluar la controlabilidad y observabilidad de sistemas 2x2 y 3x3 de forma automática.

```
close all; clear all; clc
% A=[-1 0; 0 -3];
% B=[1 2]';
% C=[1 2];
A=[-1 2 0; 1 -2 1; 0 0 3];
B=[1 1 0]';
C=[1 0 0];
%% Controlabilidad: S=[B AB A^2B... An-1B]
if(size(A,1)==2)
    S=[B A*B];
elseif(size(A,1)==3)
    S=[B A*B A^2*B];
end
```

```

if(rank(S)==size(A,1))
    disp('Sistema Controlable')
else
    disp('Sistema No Controlable')
end

%% Observabilidad V=[C; CA; CA^2;... CAn-1 ]
if(size(A,1)==2)
    V=[C; C*A];
elseif(size(A,1)==3)
    V=[C; C*A; C*A^2];
end

if(det(V)~=0)
    disp('Sistema Observable')
else
    disp('Sistema No Observable')
end

```

3. La figura representa el sistema de suspensión de un automóvil mientras se desplaza sobre el pavimento. Se pide;
 - 3.1. Determinar el modelo de estados del sistema
 - 3.2. Modelar utilizando Simulink, considerando:

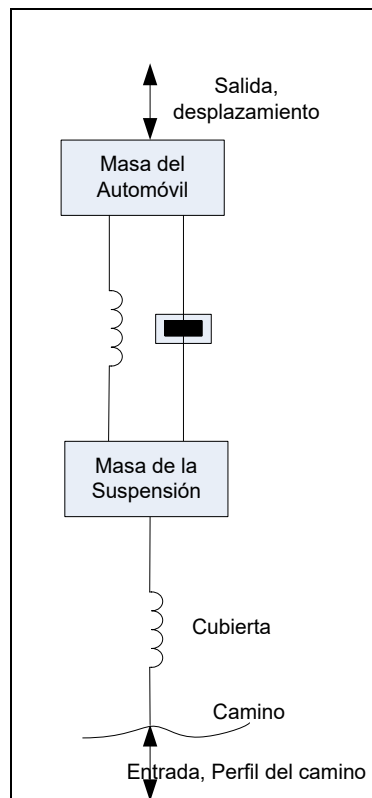
$$M_{Autom\acute{o}vil} = 500Kg$$

$$M_{Suspensi\acute{o}n} = 50Kg$$

$$K_{Resorte} = 10N / m$$

$$K_{Cubierta} = 50N / m$$

$$B_{Amortiguador} = 80Nseg / m$$



Solución:

```
syms s Ma Xa Xs Ba Kr Ms Kc U
eq1=Ma*s^2*Xa==Ba*s*(Xs-Xa)+Kr*(Xs-Xa)
eq2=Ms*s^2*Xs==Ba*s*(Xa-Xs)+Kr*(Xa-Xs)+Kc*(U-Xs)
S=solve(eq1,eq2,Xa,U) % resuelve las ecuaciones, da estructura S.Xa y S.U
G=collect(S.Xa/S.U,s); % hace el cociente en potencias de s
pretty(G)
```

*También se puede resolver aplicando la técnica de modelado en variables de estado:
A partir del conjunto de ecuaciones diferenciales que modelan el sistema:*

$$\begin{aligned}x_1 &= x_a \\x_2 &= x_s \\\dot{x}_1 &= \dot{x}_a = x_3 \\\dot{x}_2 &= \dot{x}_s = x_4 \\\dot{x}_3 &= \ddot{x}_a = \frac{B_A}{M_A}(x_4 - x_3) + \frac{K_R}{M_A}(x_2 - x_1) \\\dot{x}_4 &= \ddot{x}_s = \frac{B_A}{M_S}(x_3 - x_4) + \frac{K_R}{M_S}(x_1 - x_2) + \frac{K_C}{M_S}(u - x_2)\end{aligned}$$

Finalmente, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_R}{M_A} & \frac{K_R}{M_A} & -\frac{B_A}{M_A} & \frac{B_A}{M_A} \\ \frac{K_R}{M_S} & -\frac{(K_R+K_C)}{M_S} & \frac{B_A}{M_S} & -\frac{B_A}{M_S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_C}{M_S} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Para simular la respuesta del sistema se puede usar el siguiente código⁴:

```
close all; clear all; clc
MA=500; % Masa del automóvil
MS=50; % Masa de la suspensión
KR=10; % Resorte de la suspensión
KC=50; % Constante elástica de la cubierta
BA=80; % Amortiguador

A=[0 0 1 0;...
  0 0 0 1;...
  -KR/MA KR/MA -BA/MA BA/MA;...
  KR/MS -(KR+KC)/MS BA/MS -BA/MS];
```

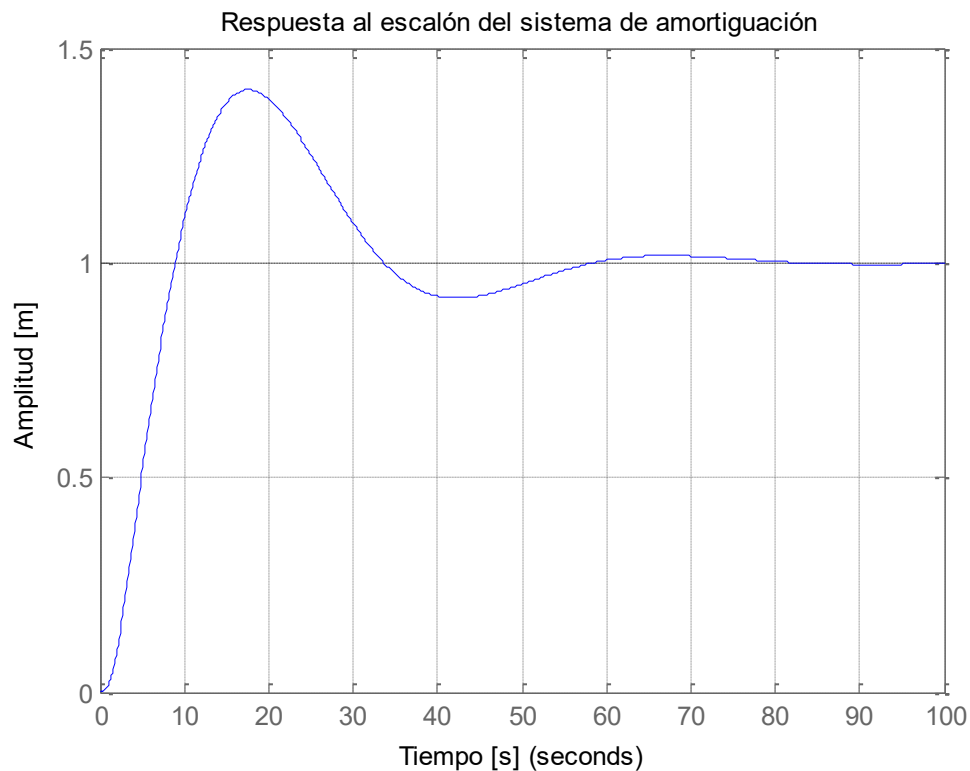
⁴ En algunas versiones, la matriz A deberá ingresarse como:

```
A=[0 0 1 0; 0 0 0 1; -KR/MA KR/MA -BA/MA BA/MA; KR/MS -(KR+KC)/MS BA/MS -BA/MS];
```

```
B=[0 0 0 KC/MS]';
C=[1 0 0 0];
D=0;

Gss=ss(A,B,C,D);
step(Gss,100);grid
title('Respuesta al escalón del sistema de amortiguación')
xlabel('Tiempo [s]'); ylabel('Amplitud [m]')
```

Obteniéndose la respuesta de la figura, que por supuesto es idéntica a la respuesta temporal del sistema caracterizado mediante la Transformada de Laplace y la Función de Transferencia:



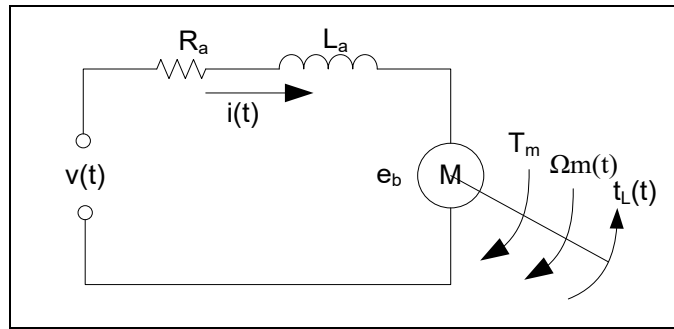
También es posible, a partir del modelo en variables de estado, obtener la función de transferencia del sistema, usando el siguiente código:

```
[n,d]=ss2tf(A,B,C,D)
Gs=tf(n,d)
```

Que devuelve la siguiente Función de Transferencia:

$$G_s(s) = \frac{0.16s + 0.02}{s^4 + 1.76s^3 + 1.22s^2 + 0.16s + 0.02}$$

4. El siguiente circuito representa al motor de corriente continua. Se pide:



4.1. Verificar que las ecuaciones diferenciales que lo modelan son:

$$v(t) = R_a i(t) + L_a \frac{di(t)}{dt} + K_b \omega_m(t)$$

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = K_t i(t) - B_m \omega_m(t) - t_L(t)$$

4.2. Determinar el modelo del sistema en el espacio de estados.

4.3. Obtener el modelo del motor en Simulink.

4.4. Encontrar la velocidad de régimen y la cantidad de vueltas dadas por el eje para $t=10\text{seg}$ para una entrada escalón de 24 voltios de amplitud. Considerar:

$$L_a = 10e-3H$$

$$K_b = 0.024V / rad / se g$$

$$R_a = 10\Omega$$

$$B_m = 10e-5N / rad / seg$$

$$K_t = 0.024Nm / A$$

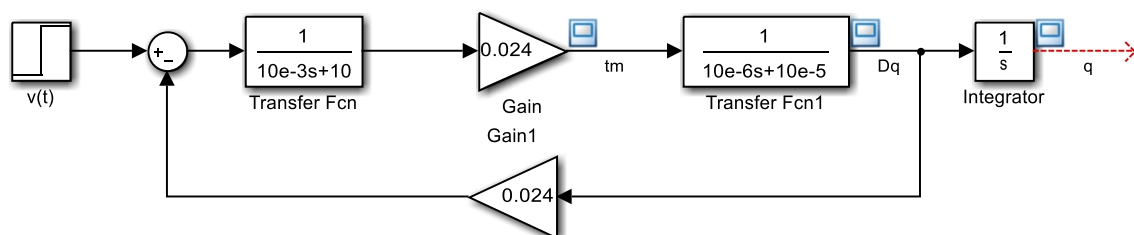
$$J_m = 10e-6Kgm^2$$

Solución:

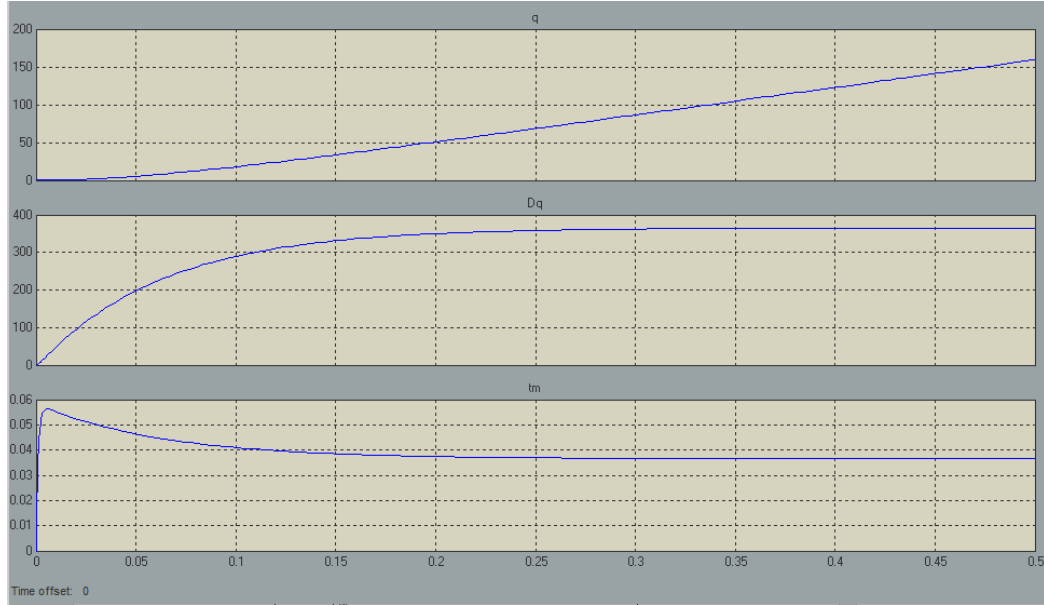
```
syms V Ra La I Kb w Jm Kt Bm s real
eq2=Jm*s*w==Kt*I-Bm*w
eq1=V==Ra*I+La*s*I+Kb*w
S1=solve(eq1,eq2,w,V)
G=collect(S1.w/S1.V,s);
pretty(G)
```

```
syms Tm
S2=solve(eq1,eq2,I,V) % resuelve respecto de la corriente y tension
G2=collect(Kt*S2.I/S2.V,s); % multiplica por la cte de cupla Kt
pretty(G2)
```

El modelo de Simulink del motor permite visualizar las tres señales de interés al mismo tiempo.



Para una entrada de 24v, las salidas son:



Las señales se muestran en gráficas diferentes porque sus unidades de medida son distintas: $\vartheta(t)$ [rad], $\omega(t)$ [rad/seg], $t_m(t)$ [Nm].

El mismo problema puede resolverse aplicando la técnica de modelado en variables de estado: Nuevamente, a partir de las ecuaciones que modelan el sistema, se tiene:

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$\dot{x}_1 = \omega = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{R_a}{L_a}x_2 - \frac{K_b}{L_a}x_3 + \frac{1}{L_a}v$$

$$\dot{x}_3 = \frac{K_i}{J_m}x_2 - \frac{B_m}{J_m}x_3 - \frac{1}{J_m}t_L$$

Expresando el sistema de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} \\ 0 & \frac{K_i}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ t_L \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & K_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Este caso magnifica las ventajas de esta técnica de modelado sobre la función de transferencia: Para el caso anterior, necesitamos 3 funciones de transferencia diferentes para expresar las relaciones entre el ángulo rotado, la velocidad de giro del rotor y el torque motriz con respecto a la tensión de alimentación, y debimos anular el torque

resistivo. Por otro lado, la técnica de modelado en variables de estado permite incluir toda la información en un único conjunto de matrices.

```
close all; clear all; clc
%% Constantes
La=10e-3; % [H], inductancia del bobinado
Ra=10; % [Ohm], resistencia del bobinado
Ki=0.024; % [Nm/A], constante de torque
Kb=0.024; % [V/rad/seg], constante de fcm
Bm=10e-5; % [N/rad/seg], coeficiente de fricción
Jm=10e-6; % [Kgm2], momento de inercia del rotor
%% Modelado en espacio de estados
A=[0 0 1;...
    0 -Ra/La -Kb/La;...
    0 Ki/Jm -Bm/Jm];
B=[0 0;...
    1/La 0;...
    0 -1/Jm];
C=[1 0 0;...
    0 0 1;...
    0 Ki 0];

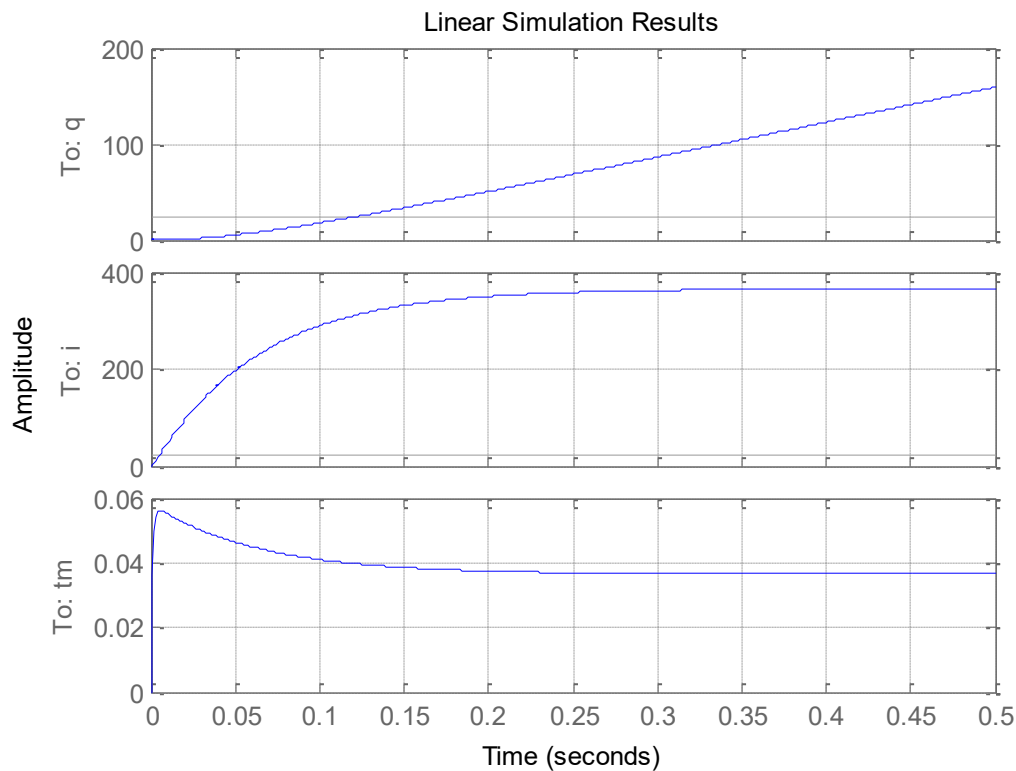
D=[0 0;...
    0 0;...
    0 0];
Gss=ss(A,B,C,D)
% Opcional: Se puede dar nombres a las variables de entrada y salida
Gss.inputName=({'v','tL'});
Gss.outputName=({'q','i','tm'})
```

En este caso, la simulación es un poco más compleja, ya que el sistema tiene dos entradas de magnitudes diferentes. A fines de poder comparar con el modelo de simulink, usaremos los valores $v = 24, t_L = 0$ como entradas.

Bajo estas condiciones, la simulación requiere el siguiente código:

```
%% Simulación
t=0:0.001:0.5;
v=24*ones(size(t));
tL=zeros(size(t)); % La perturbación es nula
u=[v; tL];
lsim(Gss,u,t);grid
axis([0 0.5 0 0.06]) % Ajuste de escala
```

Los gráficos que devuelve la simulación se muestran a continuación: Observamos que son iguales a los presentados en Simulink.



Ahora, para determinar las funciones de transferencia de las distintas salidas con respecto a la entrada de tensión, se puede usar:

`[n,d]=ss2tf(A,B,C,D,1)`

Que devuelve un único vector denominador, y un conjunto de tres vectores numeradores, uno por cada función de transferencia:

$$n(1,:) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 240000]$$

$$n(2,:) = [0 \quad 0 \quad 240000 \quad 0]$$

$$n(3,:) = [0 \quad 2.4 \quad 24 \quad 0]$$

$$d = [1 \quad 1010 \quad 15760 \quad 0]$$

Con estos datos se pueden armar las funciones de transferencia haciendo:

`G1=tf(n(1,:),d)`

$$G_1(s) = \frac{240000}{s^3 + 1010s^2 + 15760s}$$

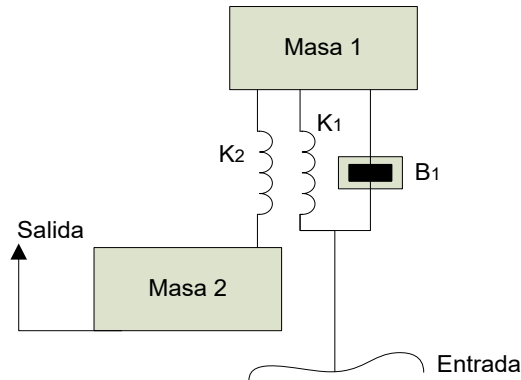
`G2=tf(n(2,:),d)`

$$G_2(s) = \frac{240000s}{s^3 + 1010s^2 + 15760s}$$

`G3=tf(n(3,:),d)`

$$G_3(s) = \frac{2.4s^2 + 24s}{s^3 + 1010s^2 + 15760s}$$

5. El sistema que se muestra en la figura puede ser modelado matemáticamente por las ecuaciones que se presentan a continuación. Determinar el modelo en espacio de estados relacionan la posición de cada una de las masas ($x_1(t), x_2(t)$) con respecto a la posición de entrada $u(t)$



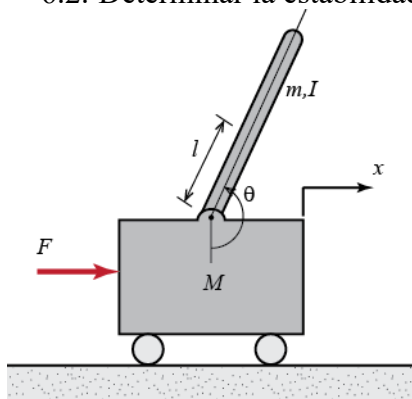
$$M_1 \frac{dx_1(t)^2}{dt^2} = B_1 \left(\frac{du(t)}{dt} - \frac{dx_1(t)}{dt} \right) + K_1 (u(t) - x_1(t)) + K_2 (x_2(t) - x_1(t))$$

$$M_2 \frac{dx_2(t)^2}{dt^2} = K_2 (x_1(t) - x_2(t))$$

6. En la figura se muestra el esquema de un péndulo invertido, donde I representa el momento de inercia de la barra, m la masa de la barra, l su longitud. M representa a la masa del móvil, b el coeficiente de fricción entre las ruedas y el piso. También, $\theta(t), x(t)$ representan el ángulo del péndulo y el desplazamiento del móvil respectivamente. La fuerza actuante sobre el móvil es $f(t)$.

Se pide:

- 6.1. Determinar el modelo del sistema en el espacio de estados.
- 6.2. Determinar la estabilidad del sistema.



$$I\ddot{\theta}(t) + ml^2\ddot{\theta}(t) = mgl\theta(t) + ml\ddot{x}(t)$$

$$(M + m)\ddot{x}(t) = f(t) - b\dot{x}(t) + ml\ddot{\theta}(t)$$

Solución:

```
syms M m l J g b s X Theta F
eq1=J*s^2*Theta+m*l^2*s^2*Theta==m*g*l*Theta+m*l*s^2*X
eq2=(m+M)*s^2*X+b*s*X-m*l*s^2*Theta==F
S=solve(eq1,eq2,Theta,F)
G=simplify(collect(S.Theta/S.F,s))
pretty(G)
```


Unidad N° 7: Diseño de los Sistemas de Control en el Espacio de Estados

Anexo 1:

Método de la Bisectriz con Octave

```
function MetodoBisectriz(G,psita,wn,dibujar)
%% Esta función devuelve el compensador que hace que el sistema a lazo cerrado
cumpla con los requerimientos de
% psita y wn
% Parámetros de entrada:
% G; función de transferencia del sistema a compensar
% psita: Requerimiento de coeficiente de amortiguamiento relativo
% wn: Requerimiento de frecuencia natural no amortiguada
% dibujar: Dibuja las rectas auxiliares en el LdR. Opcional
% Autor: Mg. Ing. Juan Pablo Pedroni

%% Algunas definiciones
COMP_ADELANTO = 1;
COMP_ATRASO = 2;
SIN_COMP = 3;

compensador = SIN_COMP;
%% Se revisa si el usuario desea el dibujo completo del método (valor
verdadero por defecto)
if nargin < 4
    dibujar = true;
end

%% Planteo de condiciones iniciales. LdR original y punto de diseño.
figure
rlocus(G);
sgrid(psita,wn.*[0.5 1 2])
%% Diseño del compensador
% Punto de diseño
s1=-psita*wn+1i*wn*sqrt(1-psita^2);
% Ang. del compensador
% Condición de Ángulo:
[z,p,~]=zpkdata(G,'v');
angcomp = rad2deg(unwrap(-pi -sum(angle(s1-z)) + sum(angle(s1-p))));
% Se determina si el compensador será en adelante o atraso
if (angcomp>0)    %Comp en adelante
    compensador = COMP_ADELANTO;
end
if (angcomp<0)    %Comp en atraso
    compensador = COMP_ATRASO;
end

if (angcomp==0)% El punto de diseño forma parte del lugar de raíces
end

% Implementación del método de la bisectriz
if ((compensador == COMP_ADELANTO) || (compensador == COMP_ATRASO))
    % Bisectriz de s1:
    angbisectriz=180-acosd(psita);%180-angp1/2-atand(imag(s1)/real(abs(s1)));
    % Aplicando el teorema del seno:
    angaux=180-angbisectriz/2-acosd(psita);
    % Los ángulos alrededor de la bisectriz son::
    angaux1=180-(angbisectriz/2-angcomp/2)-acosd(psita);
    angaux2=180-(angbisectriz/2+angcomp/2)-acosd(psita);
    % Aplicando el teorema del seno:
    if (compensador == COMP_ADELANTO)
        cero=-sind(angbisectriz/2-angcomp/2)*abs(s1)/sind(angaux1);
        polo=-sind(angbisectriz/2+angcomp/2)*abs(s1)/sind(angaux2);
    else
        polo=-sind(angbisectriz/2-angcomp/2)*abs(s1)/sind(angaux1);
        cero=-sind(angbisectriz/2+angcomp/2)*abs(s1)/sind(angaux2);
    end
end
```

```

% El compensador queda (aún falta determinar la ganancia):
C = zpk(cero,polo,1);
hold on
% Se dibuja el LDR con el compensador
rlocus(C*G);
legend('FdT Original','FdT Compensada')
end
%%Cálculo de la Ganancia
if((compensador == COMP_ADELANTO) || (compensador == COMP_ATRASO))
    FdTLA = C*G;
else
    FdTLA = G;
end
[n,d]=tfdata(FdTLA,'v');
n=sym2poly(poly2sym(n));
d=sym2poly(poly2sym(d));
K=abs(polyval(d,s1)/polyval(n,s1));

%% Gráficas adicionales
if ((compensador == COMP_ADELANTO) || (compensador == COMP_ATRASO)) &&
dibujar) % Se debe diseñar un compensador
    line([0,real(s1)], [0 imag(s1)], 'Color', [.8 .8 .8])
    line([real(s1) -10], [imag(s1),imag(s1)], 'Color', [.8 .8 .8])
    base=sind(angbisectriz/2)*abs(s1)/sind(angaux);
    line([-base,real(s1)], [0 imag(s1)], 'Color', [.8 .8 .8], 'linewidth',2)
    line([cero,real(s1)], [0 imag(s1)], 'Color', [.8 .8 .8], 'linewidth',2)
    line([polo,real(s1)], [0 imag(s1)], 'Color', [.8 .8 .8], 'linewidth',2)
end

%% Presentación de Resultados
if ((compensador == COMP_ADELANTO) || (compensador == COMP_ATRASO))
    C = K*C;
else
    C = K;
end
disp('El compensador es:')
C
%% Función de Transferencia según los requerimientos:
Gp=tf(wn^2,[1 2*psita*wn wn^2]);
FdTLC=feedback(C*G,1);
figure
step(Gp,FdTLC);grid
legend('Respuesta Esperada','Resp. del Sistema Compensado')
disp('La Función de Transferencia del sistema a lazo cerrado es:')
FdTLC
disp('Terminado')

```