Teoría de Grupos
TP4 - 2017

1. Investigar si las siguientes operaciones son operaciones binarias sobre A. En caso afirmativo examinar sus propiedades:

   (a) $A = N \quad a * b = a - b$
   (b) $A = Z \quad a * b = a - b$
   (c) $A = Z \quad a * b = \frac{a}{b+1}$
   (d) $A = N \quad a * b = 3.a.b$
   (e) $A = R \quad a * b = a + b - a.b$
   (f) $A = Z \quad a * b = \frac{a+b}{2+a.b}$
   (g) $A = \{f : R \to R : f \text{ es función}\}, \quad f * g = fog$
   Qué ocurre si tomamos el conjunto de las funciones biyectivas?

2. Mostrar que los enteros con la multiplicación usual tienen estructura de monoide

3. Si existe el elemento neutro, éste es único.

4. Si para un elemento existe el inverso, es único.

5. Probar que en todo Grupo los elementos son regulares.

6. Sea un A un conjunto y $*$ una operación interna para lo cual existe neutro en A, probar que ese neutro es único.

7. Si para una operación $*$ asociativa en A existe un elemento neutro e y todo elemento tiene su inverso, entonces vale en A la llamada *propiedad cancelativa*:
   $ab = ac \Rightarrow b = c$ (de modo similar, $ba = ca \Rightarrow b = c$)

8. Estudiar las propiedades de las operaciones en los siguientes conjuntos y decidir si son: semigrupos, monoides, grupos, etc

   (a) $(M, .)$ siendo M el conjunto de las matrices no singulares y la operación es el producto de matrices
   (b) $(M, +)$ siendo M el conjunto de las matrices no singulares y la operación es la suma de matrices
   (c) $(R^2, *)$ siendo R^2 el conjunto de los pares ordenados de números reales y la operación $*$ definida por: $(x, y) * (z, w) = (xz, yz + w)$
   (d) $(D_6, *)$ con $x * y = [x, y]$
   (e) $(D_6, *)$ con $x * y = (x, y)$

9. Demostrar que en todo Grupo, la ecuación

   (a) $x.a.x = b.b.a^{-1}$ tiene solución.
   (b) $a.x.b.c.x = a.b.x$ tiene solución única.

10. Probar que en todo Grupo el único elemento *idempotente* es el neutro. (a es idempotente sii $a^2 = a$)

11. Dado un grupo abeliano $(G, *)$ probar que para todo x, y en G vale que $(x * y)^2 = x^2 * y^2$

12. En un Grupo G se considera el conjunto $S = \{x \in G : \forall a \in G : a.x = x.a\}$
    Probar que S es un Subgrupo de G.

13. Pruebe que la unión de dos subgrupos de un grupo G es un subgrupo de G si y sólo si uno de los subgrupos contiene al otro. Pruebe que un grupo nunca es unión de dos subgrupos propios.

14. Analizar si las siguientes aplicaciones son morfismos. En caso afirmativo hallar núcleo e imagen.
    (a) $f : (Z, *) \to (Z, o) : \quad f(x) = -x$ con las operaciones: $a * b = a + b + ab \qquad aob = a + b - ab$
    (b) $f : (R, +) \to (R, .) : \quad f(x) = e^x$
    (c) $f : (R, +) \to (R^2, +) : \quad f(x) = (x, x^2)$
    (d) $f : (R, +) \to (R^2, *) : \quad f(x) = (x, x^2)$ con la operación $*$ tal que $(a, b) * (c, d) = (a.c, b.d)$
    (e) $f : (R^3, +) \to (R^{2x2}, +) : \quad f((x, y, z)) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix}$

15. Mostrar que la siguiente aplicación es un monomorfismo:
    $f : (R^2, +) \to (R^3, +); \qquad f(x, y) = (x + y, 0, x - y)$

16. Probar que $f : (R^2, +) \to (M, +)$ dada por $f((a, b)) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ es un isomorfismo entre los grupos indicados: $R^2 = \{(x, y) : x, y \in R\}$; $\quad M = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in R^{2x2} : x = w, y = -z \right\}$