Enteros - TP 3

1. Demostrar las siguientes propiedades básicas:
   (a) $a|a$
   (b) $1|a$ y $a|0$
   (c) Si $a|b$ entonces $a|-b$; $-a|b$ y $-a|-b$

2. Demostrar:
   (a) $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$
   (b) $a|b$ entonces $a|bc$
   (c) $a|b$ y $a|c$ entonces $a|b+c$
   (d) $a|b+c$ y $a|b$ entonces $a|c$

3. Analizar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
   (a) $a|b$ y $b|a$ entonces $|a| = |b|$
   (b) $a|bc$ entonces $a|b$ ó $a|c$
   (c) $a|b+c$ entonces $a|c$ ó $a|b$
   (d) $a|b$ y $b \neq 0$ entonces $|a| \leq |b|$

4. Determinar cociente y resto de cada una de las siguientes divisiones enteras:
   (i) $(-305) : 13$ (ii) $120 : 50$ (iii) $(-384) : 16$ (iv) $3 : 17$ (v) $(-9) : 15$ (vi) $254 : (-16)$

5. Un número natural n excede en 35 a un cierto múltiplo de 24. Cuál es el resto de dividirlo por 8 ? Y cuál si lo divido por 6 ?

6. Si se divide a un entero positivo n por 113 se obtiene resto 11 y si se lo divide por 108 se obtiene el mismo cociente q y resto 36. Hallar n y q

7. El resto de dividir n por 18 es el doble de su cociente. Hallar ese número n

8. Hallar un número n tal que el cociente de dividirlo por 15 es el doble de su resto.

9. Calcular el máximo común divisor entre:
   (i) $(16, 38)$ (ii) $(120, 50)$ (iii) $(31, 57)$ (iv) $(120, 245)$ (v) $(9834, 1430)$
   (vi) $(-60, 45)$ (vii) $(187, 77)$ (viii) $(-187, 77)$

10. Escribir (x, y) en la forma $sx + ty$ con $s, t \in Z$ para los primeros cuatro casos del ejercicio anterior.

11. Un pastelero debe despachar 150 tortas y 315 budines empleando el menor número posible de bandejas que contengan tortas y budines cada una. En cada bandeja debe haber sólo tortas o sólo budines, y todas deben contener el mismo número de unidades. Cuántas unidades debe contener cada bandeja?

12. Hallar dos números a y b tales que $(a, b) = 18$ y los cocientes sucesivos por aplicación del algoritmo de Euclides son : 11, 5, 11, 2

13. Calcular el mínimo común múltiplos entre:
    (i) $[16, 8]$ (ii) $[2, 5]$ (iii) $[36, 12]$ (iv) $[32, 84]$ (v) $[72, 108]$

14. Probar que para cualquier a entero se cumple que a y $a+1$ son coprimos

15. Demostrar que: a y b, enteros no simultáneamente nulos, son coprimos si y sólo si existen enteros s y t tales que $1 = sa + tb$

16. Demostrar:
    (a) Si $(a, b) = d$; $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|cd$
    (b) $a + b$ es coprimo con a
    (c) $a + b$ y ab son coprimos
    (d) Sean a y b coprimos y $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$

17. Si p es primo, entonces a y p son coprimos sí y sólo si p no divide a a.

18. Probar que si $(a, m) = (b, m) = 1$, entonces $(ab, m) = 1$

19. Considerando la relación de *congruencia módulo n* en Z (con n no nulo)
    (a) Probar que dos enteros son congruentes módulo n si y sólo si los respectivos restos de su división por n son iguales.
    (b) Hallar las respectivas clases de 13, 6, 11 y -49 $mod \quad 4$
    (c) Hallar las respectivas clases de 2, -1, 13 y -246 $mod \quad 7$

20. Probar en Z
    (a) $a \equiv b \quad (n) \Leftrightarrow a + c \equiv b + c \quad (n)$
    (b) $a \equiv b \quad (n) \Leftrightarrow ac \equiv bc \quad (n)$
    (c) $a \equiv 0 \quad (n) \Leftrightarrow n|a$

21. Probar: todo número es congruente, módulo n, con el resto de su división por n

22. Resolver:
    (a) $3x \equiv 2 \quad (mod \quad 5)$
    (b) $5x \equiv 4 \quad (mod \quad 8)$
    (c) $2x \equiv 1 \quad (mod \quad 7)$
    (d) $6x \equiv 3 \quad (mod \quad 4)$
    (e) $5x \equiv 9 \quad (mod \quad 7)$
    (f) $10x \equiv 2 \quad (mod \quad 22)$