

Representación de números fraccionarios: Punto Flotante

Organización de computadoras

Universidad Nacional de Quilmes

9 de junio de 2014

① Máscaras

② Punto Fijo

- ① Motivación
- ② Interpretación
- ③ Rango
- ④ Resolución
- ⑤ Representación
- ⑥ Errores

Interpretación en $BSS(n, m)$: dos mecanismos

Interpretación en $BSS(n, m)$: dos mecanismos

(A)

Sumar considerando los
pesos fraccionarios

(B)

Interpretar el número
como en $BSS()$ y dividir
por 2^m

Interpretación en $BSS(n, m)$: dos mecanismos

(A)

Sumar considerando los
pesos fraccionarios

(B)

Interpretar el número
como en $BSS()$ y dividir
por 2^m

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{bss(5,2)}(00101) &= 2^0 + 2^{-2} \\ &= 1,25\end{aligned}$$

Interpretación en $BSS(n, m)$: dos mecanismos

(A)

Sumar considerando los
pesos fraccionarios

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{bss(5,2)}(00101) &= 2^0 + 2^{-2} \\ &= 1,25\end{aligned}$$

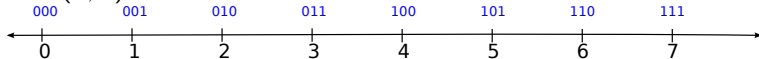
(B)

Interpretar el número
como en $BSS()$ y dividir
por 2^m

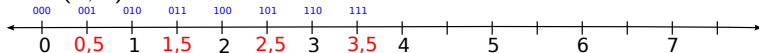
$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{bss(5,2)}(00101) &= \frac{\mathcal{I}_{bss(5)}(00101)}{4} \\ &= \frac{5}{4} = 1,25\end{aligned}$$

Punto Fijo: Rango y Resolución

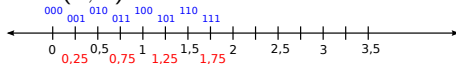
$BSS(3, 0)$




$BSS(3, 1)$




$BSS(3, 2)$



(Separando partes)

La parte Entera:  como en $BSS(n - m)$.

La parte Fraccionaria:  con el método de las multiplicaciones sucesivas

(Corriendo la coma)

Correr el punto fraccionario para poder utilizar la representación en $BSS(n)$

¿Porqué otro sistema nuevo?

¿Porqué otro sistema nuevo?

Con el enfoque de punto fijo:

- 1 No pueden representarse números muy grandes a no ser que se agreguen muchos bits.
- 2 Tampoco pueden representarse fracciones muy pequeñas

¿Porqué otro sistema nuevo?

Con el enfoque de punto fijo:

- 1 No pueden representarse números muy grandes a no ser que se agreguen muchos bits.
- 2 Tampoco pueden representarse fracciones muy pequeñas



El error relativo es muy importante en los valores pequeños

¿Porqué otro sistema nuevo?

Con el enfoque de punto fijo:

- 1 No pueden representarse números muy grandes a no ser que se agreguen muchos bits.
- 2 Tampoco pueden representarse fracciones muy pequeñas



El error relativo es muy importante en los valores pequeños



No es bueno tener la misma "ajuste" en todo el rango

Punto Flotante

La notación científica

La notación científica

(35×10^9)

Una que conocemos todos: Notación científica

permite representar de manera compacta números muy grandes y muy pequeños

Una que conocemos todos: Notación científica

permite representar de manera compacta números muy grandes y muy pequeños

Ejemplo

$$87,000,000,000,000,000,000 = 0,87 \times 10^{23}$$

$$0,00000000000000087 = 0,87 \times 10^{-14}$$

Una que conocemos todos: Notación científica

permite representar de manera compacta números muy grandes y muy pequeños

Ejemplo

$$87,000,000,000,000,000,000,000 = 0,87 \times 10^{23}$$

$$0,000000000000000087 = 0,87 \times 10^{-14}$$

- deslizar en forma dinámica el punto decimal a una posición conveniente
- usar el exponente del 10 para tener registro de donde estaba la coma originalmente

- Codificación de números mediante **Mantisa** y **Exponente**.

$$0,87 \times 10^{-14}$$

- Codificación de números mediante **Mantisa** y **Exponente**.

$$0,87 \times 10^{-14}$$

- Codificación de números mediante **Mantisa** y **Exponente**.

$$0,87 \times 10^{-14}$$

- Codificación de números mediante **Mantisa** y **Exponente**.

$$0,87 \times 10^{-14}$$

- Los números se escriben como:

$$N = M * B^E$$

Donde N es el número que se quiere representar, M y E son la Mantisa y el Exponente respectivamente, y B la base del sistema.

De esta forma, representaremos los números con dos partes:

- Mantisa
- Exponente

De esta forma, representaremos los números con dos partes:

- Mantisa
- Exponente

La base del sistema será fija (2) y por eso no será necesario representarla, quedando implícita.

Las partes de Mantisa y Exponente utilizarán sistemas ya vistos anteriormente.

Las dos partes pueden organizarse:

Las dos partes pueden organizarse:

Mantisa	Exponente
---------	-----------

Las dos partes pueden organizarse:

Mantisa	Exponente
---------	-----------

ó bien:

Exponente	Mantisa
-----------	---------

Interpretación en Punto Flotante

- 1 Interpretar la mantisa para obtener el número **M**

Punto Flotante: Interpretación

- 1 Interpretar la mantisa para obtener el número **M**
- 2 Interpretar el exponente para obtener el número **e**

Punto Flotante: Interpretación

- 1 Interpretar la mantisa para obtener el número **M**
- 2 Interpretar el exponente para obtener el número **e**
- 3 Componer el número $N = M * 2^e$

Punto Flotante: Interpretación

- 1 Interpretar la mantisa para obtener el número **M**
- 2 Interpretar el exponente para obtener el número **e**
- 3 Componer el número $N = M * 2^e$

¿Cómo?

Usando los sistemas de mantisa y exponente por separado

Ejemplo

Mantisa $BSS(2)$	Exponente $BSS(2)$
------------------	--------------------

¿Cuánto vale $\mathcal{I}(0110)$?

Ejemplo

Mantisa $BSS(2)$	Exponente $BSS(2)$
------------------	--------------------

¿Cuánto vale $\mathcal{I}(0110)$?

Mantisa

Exponente

$$\mathcal{I}_{bss(2)}(01) = 1 = M$$

$$\mathcal{I}_{bss(2)}(10) = 2 = E$$

$$N = M * 2^E = 1 * 2^2 = 4$$

Ejemplo

Mantisa $BSS(2)$	Exponente $BSS(2)$
------------------	--------------------

¿Cuánto vale $\mathcal{I}(1111)$?

Ejemplo

Mantisa $BSS(2)$	Exponente $BSS(2)$
------------------	--------------------

¿Cuánto vale $\mathcal{I}(1111)$?

Mantisa

Exponente

$$\mathcal{I}_{bss(2)}(11) = 3 = M$$

$$\mathcal{I}_{bss(2)}(11) = 3 = E$$

$$N = M * 2^E = 3 * 2^3 = 24$$

Ejemplo

Mantisa $BSS(2)$	Exponente $BSS(2)$
------------------	--------------------

¿Cuánto vale $\mathcal{I}(0001)$?

Ejemplo

Mantisa $BSS(2)$	Exponente $BSS(2)$
------------------	--------------------

¿Cuánto vale $\mathcal{I}(0001)$?

Mantisa

Exponente

$$\mathcal{I}_{bss(2)}(00) = 0 = M$$

$$\mathcal{I}_{bss(2)}(01) = 1 = E$$

$$N = M * 2^E = 0 * 2^1 = 0$$

Ejemplo

Mantisa en $SM(11)$ y exponente en $CA2(5)$

Mantisa $BSS(10)$	S	Exp $CA2(5)$
-------------------	---	--------------

Ejemplo

Mantisa en $SM(11)$ y exponente en $CA2(5)$

Mantisa $BSS(10)$	S	Exp $CA2(5)$
-------------------	---	--------------

¿Cuánto vale la cadena 0001101010000010?

Ejemplo

Mantisa en $SM(11)$ y exponente en $CA2(5)$

Mantisa $BSS(10)$	S	Exp $CA2(5)$
-------------------	---	--------------

¿Cuánto vale la cadena 000110101000010?

- $M = \mathcal{I}_{bss}(0001101010) = 106$
- $S = 0 = \text{positivo}$
- $E = \mathcal{I}_{ca2}(00010) = 2$

$$N = M * B^E = 106 * 2^2 = 424$$

Completar la tabla

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------

Completar la tabla

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	2	$2 * 2^1 = 4$
0111	1	3	$3 * 2^1 = 6$

Completar la tabla

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------

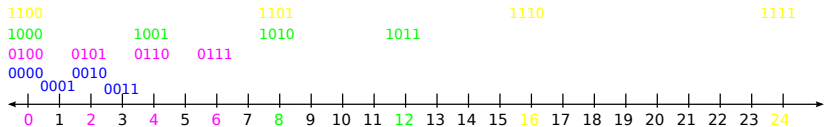
Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	2	$2 * 2^1 = 4$
0111	1	3	$3 * 2^1 = 6$
1000	2	0	$0 * 2^2 = 0$
1001	2	1	$1 * 2^2 = 4$
1010	2	2	$2 * 2^2 = 8$
1011	2	3	$3 * 2^2 = 12$

Completar la tabla

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	2	$2 * 2^1 = 4$
0111	1	3	$3 * 2^1 = 6$
1000	2	0	$0 * 2^2 = 0$
1001	2	1	$1 * 2^2 = 4$
1010	2	2	$2 * 2^2 = 8$
1011	2	3	$3 * 2^2 = 12$
1100	3	0	$0 * 2^3 = 0$
1101	3	1	$1 * 2^3 = 8$
1110	3	2	$2 * 2^3 = 16$
1111	3	3	$3 * 2^3 = 24$

Completar la tabla



- $\text{exponente} = 0$
- $\text{exponente} = 1$
- $\text{exponente} = 2$
- $\text{exponente} = 3$

¿Cuántos números pueden representarse?:

$$\#\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\} = 10$$

Completar la tabla: mantisa $SM(2)$

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------

Completar la tabla: mantisa $SM(2)$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0111	1	-1	$-1 * 2^1 = -2$

Completar la tabla: mantisa $SM(2)$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------

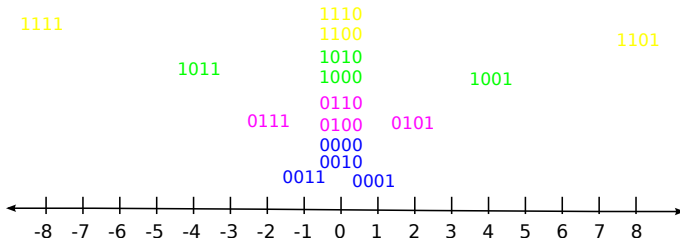
Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0111	1	-1	$-1 * 2^1 = -2$
1000	2	0	$0 * 2^2 = 0$
1001	2	1	$1 * 2^2 = 4$
1010	2	0	$0 * 2^2 = 0$
1011	2	-1	$-1 * 2^2 = -4$

Completar la tabla: mantisa $SM(2)$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0111	1	-1	$-1 * 2^1 = -2$
1000	2	0	$0 * 2^2 = 0$
1001	2	1	$1 * 2^2 = 4$
1010	2	0	$0 * 2^2 = 0$
1011	2	-1	$-1 * 2^2 = -4$
1100	3	0	$0 * 2^3 = 0$
1101	3	1	$1 * 2^3 = 8$
1110	3	0	$0 * 2^3 = 0$
1111	3	-1	$-1 * 2^3 = -8$

Completar la tabla



- exponente = 0
- exponente = 1
- exponente = 2
- exponente = 3

¿Cuántos números pueden representarse?:

$$\#\{-8, -4, -2, -1, 0, 1, 2, 4, 8\} = 9$$

Completar la tabla: exponente $SM(2)$

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $BSS(2)$
-------------------	------------------

Completar la tabla: exponente $SM(2)$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $BSS(2)$
-------------------	------------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	2	$2 * 2^1 = 4$
0111	1	3	$3 * 2^1 = 6$

Completar la tabla: exponente $SM(2)$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $BSS(2)$
-------------------	------------------

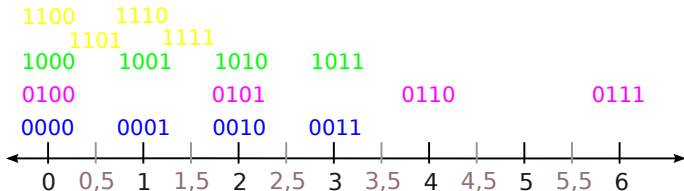
Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	2	$2 * 2^1 = 4$
0111	1	3	$3 * 2^1 = 6$
1000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
1001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
1010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
1011	0	3	$3 * 2^0 = 3$

Completar la tabla: exponente $SM(2)$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $BSS(2)$
-------------------	------------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
0011	0	3	$3 * 2^0 = 3$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	2	$2 * 2^1 = 4$
0111	1	3	$3 * 2^1 = 6$
1000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
1001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
1010	0	2	$2 * 2^0 = 2$
1011	0	3	$3 * 2^0 = 3$
1100	-1	0	$0 * 2^{-1} = 0$
1101	-1	1	$1 * 2^{-1} = 0,5$
1110	-1	2	$2 * 2^{-1} = 1$
1111	-1	3	$3 * 2^{-1} = 1,5$

Completar la tabla

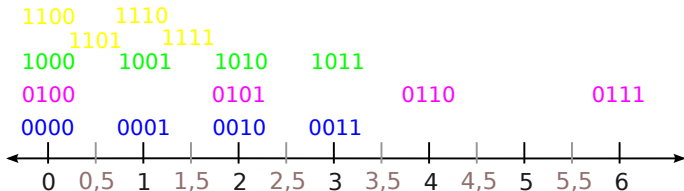


- $\text{exponente} = 0$
- $\text{exponente} = 1$
- $\text{exponente} = 0$
- $\text{exponente} = -1$

¿Cuántos números pueden representarse?:

$$\#\{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3, 4, 6\} = 8$$

Completar la tabla



- exponente = 0
- exponente = 1
- exponente = 0
- exponente = -1

¿Cuántos números pueden representarse?:

$$\#\{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3, 4, 6\} = 8$$

Completar la tabla: Mantisa y exponente $SM(2)$

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $SM(2)$
-------------------	-----------------

Completar la tabla: Mantisa y exponente $SM(2)$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $SM(2)$
-------------------	-----------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0111	1	-1	$-1 * 2^1 = -2$

Completar la tabla: Mantisa y exponente $SM(2)$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $SM(2)$
-------------------	-----------------

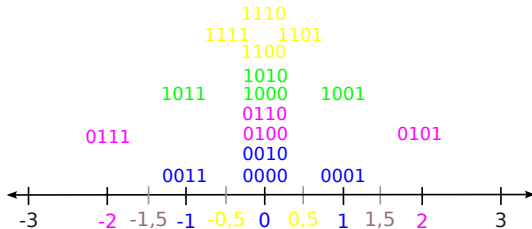
Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0111	1	-1	$-1 * 2^1 = -2$
1000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
1001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
1010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
1011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$

Completar la tabla: Mantisa y exponente $SM(2)$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $SM(2)$
-------------------	-----------------

Cadena	E	M	N
0000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
0010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
0011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$
0100	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0101	1	1	$1 * 2^1 = 2$
0110	1	0	$0 * 2^1 = 0$
0111	1	-1	$-1 * 2^1 = -2$
1000	0	0	$0 * 2^0 = 0$
1001	0	1	$1 * 2^0 = 1$
1010	0	0	$0 * 2^0 = 0$
1011	0	-1	$-1 * 2^0 = -1$
1100	-1	0	$0 * 2^{-1} = 0$
1101	-1	1	$1 * 2^{-1} = 0,5$
1110	-1	0	$0 * 2^{-1} = 0$
1111	-1	-1	$-1 * 2^{-1} = -0,5$

Completar la tabla



- $\text{exponente} = 0$
- $\text{exponente} = 1$
- $\text{exponente} = 0$
- $\text{exponente} = -1$

¿Cuántos números pueden representarse?:

$$\#\{-2, -1, -0,5, 0, 0,5, 1, 2\} = 7$$

Hablemos del rango

- M en $SM(11)$
- E en $CA2(5)$

¿Cuál es el número representable mas grande?

- M en $SM(11)$
- E en $CA2(5)$

¿Cuál es el número representable mas grande?



El número representable más grande será: 1111111111 0 01111

- $M = \mathcal{I}_{bss}(1111111111) = 1023$
- $S = 0 = \text{positivo}$
- $E = \mathcal{I}_{ca2}(01111) = 15$

$$MAX = 1023 * 2^{15} = 33,521,664$$

- M en $SM(11)$
- E en $CA2(5)$

¿Cuál es el número representable mas chico?

- M en $SM(11)$
- E en $CA2(5)$

¿Cuál es el número representable mas chico?



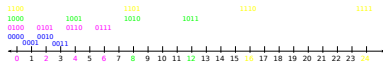
- El número representable más chico será similar pero con signo negativo

$$MIN = \mathcal{I}(1111111111101111) = -1023 * 2^{15} = -33,521,664$$

- El número cero podrá representarse con mantisa 0 y cualquier signo o exponente.

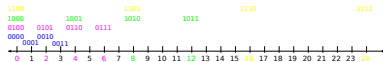
¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



Rango: $[0, 24]$

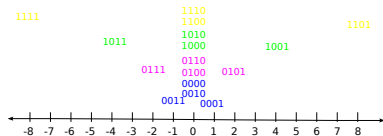
¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



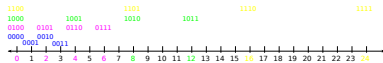
Rango: $[0, 24]$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------



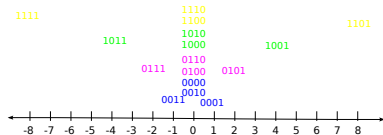
¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



Rango: $[0, 24]$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------



Rango: $[-8, 8]$

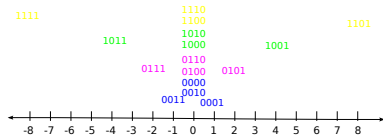
¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



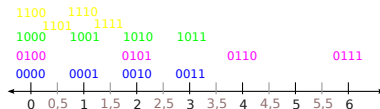
Rango: $[0, 24]$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------



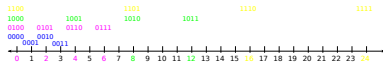
Rango: $[-8, 8]$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $BSS(2)$
-------------------	------------------



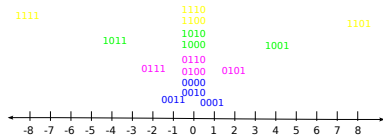
¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



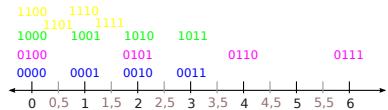
Rango: $[0, 24]$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------



Rango: $[-8, 8]$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $BSS(2)$
-------------------	------------------



Rango: $[0, 6]$

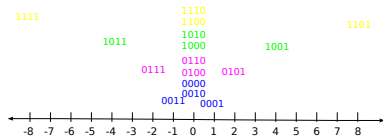
¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



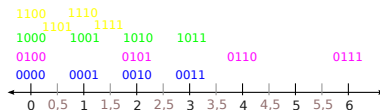
Rango: $[0, 24]$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------



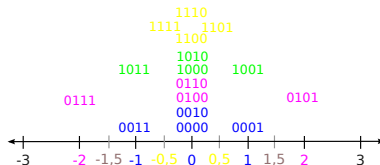
Rango: $[-8, 8]$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $BSS(2)$
-------------------	------------------



Rango: $[0, 6]$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $SM(2)$
-------------------	-----------------



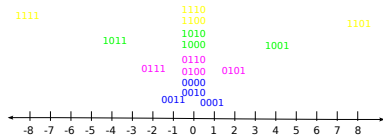
¿Cuál es el máximo? ¿Cuál es el mínimo?

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



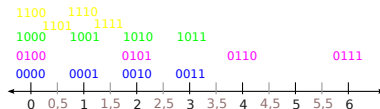
Rango: $[0, 24]$

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $SM(2)$
--------------------	-----------------



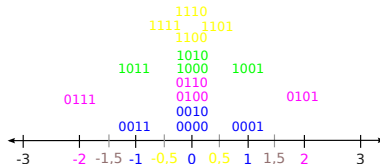
Rango: $[-8, 8]$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $BSS(2)$
-------------------	------------------



Rango: $[0, 6]$

Exponente $SM(2)$	Mantisa $SM(2)$
-------------------	-----------------



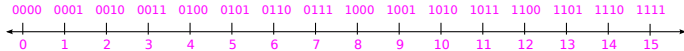
Rango: $[-2, 2]$

Ejercicio: Completar la tabla!

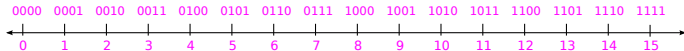
M	$SM(2)$	E	$CA2(2)$
---	---------	---	----------

Hablemos de resolución

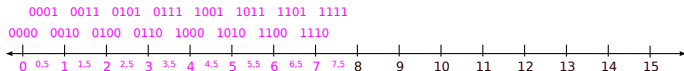
- Los sistemas enteros tienen siempre resolución igual a 1



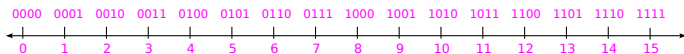
- Los sistemas enteros tienen siempre resolución igual a 1



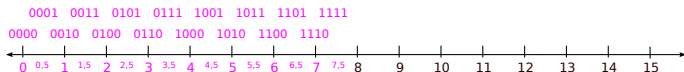
- Los sistemas de punto fijo tienen resolución fija (< 1)



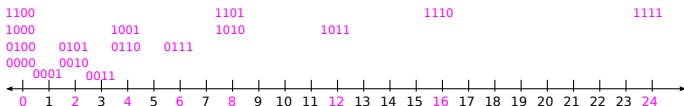
- Los sistemas enteros tienen siempre resolución igual a 1



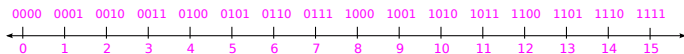
- Los sistemas de punto fijo tienen resolución fija (< 1)



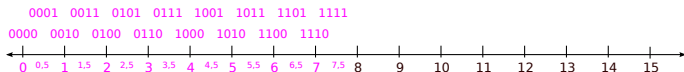
- Los sistemas de punto flotante ...



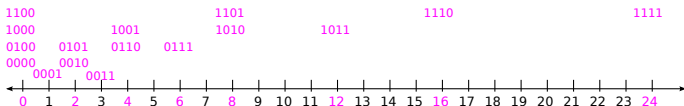
- Los sistemas enteros tienen siempre resolución igual a 1



- Los sistemas de punto fijo tienen resolución fija (< 1)



- Los sistemas de punto flotante ...



¡Resolución variable!



Con punto flotante no se representan mas valores que con punto fijo.
¿Porqué?

- M en $SM(11)$
- E en $CA2(5)$

¿Cuál es la resolución del sistema?

¿Cuál es la resolución del sistema?

- M en $SM(11)$
- E en $CA2(5)$

¿Cómo se calcula la resolución?

¿Cuál es la resolución del sistema?

- M en $SM(11)$
- E en $CA2(5)$

¿Cómo se calcula la resolución?



Tomando una cadena cualquiera...

$$\mathcal{I}(0000110110000100) = +54 * 2^4 = 864$$

y calculando la distancia al inmediato anterior o posterior

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$\mathcal{I}(000011011000100) = +54 * 2^4 = 864$$

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$\mathcal{I}(000011011000100) = +54 * 2^4 = 864$$

Inmediato anterior

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$\mathcal{I}(000011011000100) = +54 * 2^4 = 864$$

Inmediato anterior

Inmediato posterior



M=53, se tiene:

$$\begin{aligned} R &= |53 * 2^4 - 54 * 2^4| = |(53 - 54) * 2^4| \\ &= |-1 * 2^4| = 2^4 \end{aligned}$$

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$\mathcal{I}(000011011000100) = +54 * 2^4 = 864$$

Inmediato anterior



M=53, se tiene:

$$\begin{aligned} R &= |53 * 2^4 - 54 * 2^4| = |(53 - 54) * 2^4| \\ &= |-1 * 2^4| = 2^4 \end{aligned}$$

Inmediato posterior



M=55, se tiene:

$$\begin{aligned} R &= |55 * 2^4 - 54 * 2^4| = \\ &= |1 * 2^4| = 2^4 \end{aligned}$$

∴ resolución=16

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$\mathcal{I}(0000001110011011) = +14 * 2^{-5} = 0,4375$$

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$\mathcal{I}(0000001110011011) = +14 * 2^{-5} = 0,4375$$

Inmediato anterior

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$\mathcal{I}(0000001110011011) = +14 * 2^{-5} = 0,4375$$

Inmediato anterior

Inmediato posterior



M=13, se tiene:

$$\begin{aligned} R &= |13 * 2^{-5} - 14 * 2^{-5}| \\ &= |-1 * 2^{-5}| = 2^{-5} = 0,03125 \end{aligned}$$

¿Cuál es la resolución del sistema? (M:SM(11), E:CA2(5))

$$\mathcal{I}(0000001110011011) = +14 * 2^{-5} = 0,4375$$

Inmediato anterior



M=13, se tiene:

$$\begin{aligned} R &= |13 * 2^{-5} - 14 * 2^{-5}| \\ &= |-1 * 2^{-5}| = 2^{-5} = 0,03125 \end{aligned}$$

Inmediato posterior





M=15, se tiene:

$$\begin{aligned} R &= |15 * 2^{-5} - 14 * 2^{-5}| = \\ &= |1 * 2^{-5}| = 2^{-5} = 0,03125 \end{aligned}$$



\therefore resolución=0,03125

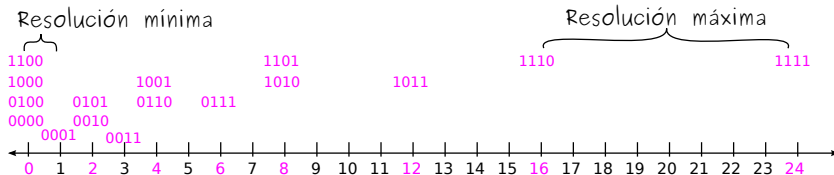
La resolución depende del valor del exponente

La resolución depende del valor del exponente

- Si el exponente es pequeño  los números se acercan a cero y la resolución se achica aumentando la precisión
- Si el exponente es grande  los números acercan a los extremos del rango y la resolución se agranda perdiendo precisión.

La resolución depende del valor del exponente

- Si el exponente es pequeño  los números se acercan a cero y la resolución se achica aumentando la precisión
- Si el exponente es grande  los números se acercan a los extremos del rango y la resolución se agranda perdiendo precisión.



Mantisas enteras ó fraccionarias

Mantisa entera

el punto fraccionario se asume a la derecha del bit menos significativo. Todos los bits son enteros

Mantisas enteras o fraccionarias

Mantisa entera

el punto fraccionario se asume a la derecha del bit menos significativo. Todos los bits son enteros

Mantisa BSS(10)	Exponente
-----------------	-----------

Mantisas enteras o fraccionarias

Mantisa entera

el punto fraccionario se asume a la derecha del bit menos significativo. Todos los bits son enteros

Mantisa BSS(10)	Exponente
-----------------	-----------

Mantisa fraccionaria

el punto fraccionario se asume a la izquierda del bit más significativo. Todos los bits son fraccionarios

Mantisas enteras o fraccionarias

Mantisa entera

el punto fraccionario se asume a la derecha del bit menos significativo. Todos los bits son enteros

Mantisa BSS(10)	Exponente
-----------------	-----------

Mantisa fraccionaria

el punto fraccionario se asume a la izquierda del bit más significativo. Todos los bits son fraccionarios

Mantisa BSS(0,9)	Exponente
------------------	-----------

Ejemplo

- Sistema de Punto Flotante, con 10 bits de mantisa entera, 1 bit de signo y 5 de exponente en Exceso.

El número $0011001100\ 0\ 01010_2$ es $N = 204 * 2^{-6} = 3,1875$

- Considerando ahora mantisa fraccionaria:

El número $0011001100\ 0\ 01010_2$ es $N = (204/2^{10}) * 2^{-6} = 0,00311279296875$

Mantisa $SM(11)$

Exponente $Ex(5, 16)$

Ejercicio: Interpretar las siguientes cadenas de bits

1 0000000100 0 10001

2 0000001000 0 10000

3 0000010000 0 01111

4 1000000000 0 01010

Mantisa $SM(11)$

Exponente $Ex(5, 16)$

Ejercicio: Interpretar las siguientes cadenas de bits

❶ 0000000100 0 10001

$$\text{❶ } \mathcal{I}(0000000100010001) = 4 * 2^1 = 8$$

❷ 0000001000 0 10000

$$\text{❷ } \mathcal{I}(0000001000010000) = 8 * 2^0 = 8$$

❸ 0000010000 0 01111

$$\text{❸ } \mathcal{I}(0000010000001111) = 16 * 2^{-1} = 8$$

❹ 1000000000 0 01010

$$\text{❹ } \mathcal{I}(1000000000001010) = 512 * 2^{-6} = 8$$

Mantisa $SM(11)$

Exponente $Ex(5, 16)$

Ejercicio: Interpretar las siguientes cadenas de bits

❶ 0000000100 0 10001

$$\text{❶ } \mathcal{I}(0000000100010001) = 4 * 2^1 = 8$$

❷ 0000001000 0 10000

$$\text{❷ } \mathcal{I}(0000001000010000) = 8 * 2^0 = 8$$

❸ 0000010000 0 01111

$$\text{❸ } \mathcal{I}(0000010000001111) = 16 * 2^{-1} = 8$$

❹ 1000000000 0 01010

$$\text{❹ } \mathcal{I}(1000000000001010) = 512 * 2^{-6} = 8$$

¡El número 8 se puede escribir de varias maneras!

¡El número 8 se puede escribir de varias maneras!

¡El número 8 se puede escribir de varias maneras!



¡El sistema es ambiguo!

¡Se desperdician cadenas!

Normalización

Cadena normalizada

Una cadena **está normalizada**, si su dígito más significativo (el de más a la izquierda) es diferente a 0. Si un número tiene representación normalizada, ésta será única.

Cadena normalizada

Una cadena **está normalizada**, si su dígito más significativo (el de más a la izquierda) es diferente a 0. Si un número tiene representación normalizada, ésta será única.

- ❶ 0000000100 0 10001
- ❷ 0000001000 0 10000
- ❸ 0000010000 0 01111
- ❹ 1000000000 0 01010 (Cadena normalizada)

Cadena normalizada

Una cadena **está normalizada**, si su dígito más significativo (el de más a la izquierda) es diferente a 0. Si un número tiene representación normalizada, ésta será única.

- ❶ 0000000100 0 10001
- ❷ 0000001000 0 10000
- ❸ 0000010000 0 01111
- ❹ 1000000000 0 01010 (Cadena normalizada)

Sistema Normalizado

Diremos que un sistema es un sistema normalizado, si todas sus cadenas están normalizadas.

¿Cómo represento el cero en un sistema
normalizado?

(M $BSS(2)$, E $BSS(2)$)

¿Cómo represento el cero en un sistema normalizado?

(M $BSS(2)$, E $BSS(2)$)



El número 0 no tiene representación normalizada posible

¿Cómo represento el cero en un sistema normalizado?

(M $BSS(2)$, E $BSS(2)$)

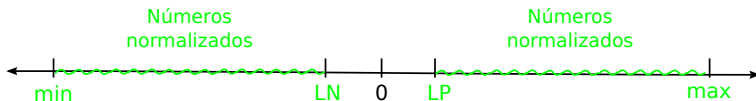


El número 0 no tiene representación normalizada posible



Un sistema normalizado no puede representar el número 0

Un sistema normalizado no puede representar el número 0



Sistema normalizado

Sistema normalizado



Cadenas descartadas: las que comienzan con **0**

Sistema normalizado



Cadenas descartadas: las que comienzan con **0**



¿Solución?

Si todas las cadenas están normalizadas, podemos omitir la escritura del primer bit

Si todas las cadenas están normalizadas, podemos omitir la escritura del primer bit



Se gana un bit!

Sistema **SIN** bit implícito

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------

Sistema **CON** bit implícito

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------

Sistema **SIN** bit implícito

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



$$\mathcal{I}(0011) = (2^1 + 2^0) * 2^0 = 3$$

Sistema **CON** bit implícito

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



Sistema **SIN** bit implícito

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------

$\mathcal{I}(0011)$



$$\mathcal{I}(0011) = (2^1 + 2^0) * 2^0 = 3$$

Sistema **CON** bit implícito

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



$\mathcal{I}(0011)$

Sistema **SIN** bit implícito

Exponente $BSS(2)$	Mantisa $BSS(2)$
--------------------	------------------



$$\mathcal{I}(0011) = (2^1 + 2^0) * 2^0 = 3$$

$$\mathcal{I}(00\mathbf{1}11) = (2^2 + 2^1 + 2^0) * 2^0 = 7$$

Una mantisa con **n** bits normalizada...

Sin bit implícito

Tiene 2^n cadenas
donde la mitad son inválidas
 $\therefore \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ combinaciones

Con bit implícito

Tiene 2^{n+1} cadenas
donde la mitad son inválidas
 $\therefore \frac{2^{n+1}}{2} = 2^n$ combinaciones

Una mantisa con **n** bits normalizada...

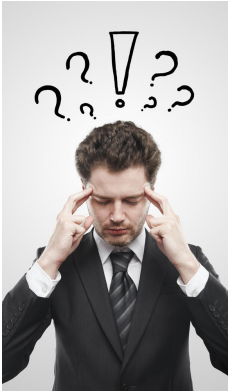
Sin bit implícito

Tiene 2^n cadenas
donde la mitad son inválidas
 $\therefore \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ combinaciones

Con bit implícito

Tiene 2^{n+1} cadenas
donde la mitad son inválidas
 $\therefore \frac{2^{n+1}}{2} = 2^n$ combinaciones ✓

¿Cómo vamos hasta acá?



- Notación científica
- Mantisa y Exponente
- Interpretación
- Resolución **variable**
- Rango
- Mantisas enteras vs fraccionarias
- Representaciones múltiples
- Normalización **de mantisas** y bit implícito

Estándar de Punto Flotante: IEEE 754

Define dos formatos para manejar números reales

- Precisión simple (32 bits)

S	Exp: $E_x(8, 127)$	Mant: $SM(24, 23)$ Norm c/bi
---	--------------------	------------------------------

Define dos formatos para manejar números reales

- Precisión simple (32 bits)

S	Exp: $E_x(8, 127)$	Mant: $SM(24, 23)$ Norm c/bi
---	--------------------	------------------------------

- Precisión doble (64 bits)

S	Exp: $E_x(11, 1023)$	Mant: $SM(53, 52)$ Norm c/bi
---	----------------------	------------------------------

Las cadenas se clasifican

- Ceros

0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0

- Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m

- Normalizados

0	e...e	m...m
1	e...e	m...m

- Infinitos

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0

- Not a Number (Nan)

0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

Las cadenas se clasifican

- Ceros

0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0

- Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m

- Normalizados

0	e...e	m...m
1	e...e	m...m

- Infinitos

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0

- Not a Number (Nan)

0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

Las cadenas se clasifican

- Ceros

0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0

- Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m

- Normalizados

0	e...e	m...m
1	e...e	m...m

- Infinitos

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0

- Not a Number (Nan)

0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

Las cadenas se clasifican

- Ceros

0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0

- Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m

- Normalizados

0	e...e	m...m
1	e...e	m...m

- Infinitos

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0

- Not a Number (Nan)

0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

Las cadenas se clasifican

- Ceros

0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0

- Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m

- Normalizados

0	e...e	m...m
1	e...e	m...m

- Infinitos

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0

- Not a Number (Nan)

0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

Las cadenas se clasifican

- Ceros

0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0

- Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m

- Normalizados

0	e...e	m...m
1	e...e	m...m

- Infinitos

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0

- Not a Number (Nan)

0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

Números normalizados



0	e...e	m...m
1	e...e	m...m

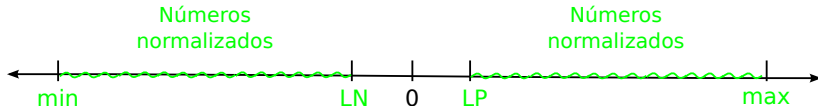
- Las cadenas normalizadas se identifican con exponente entre 0...1 y 1...0. El rango del exponente es: **[-126,127]**
- El bit implícito **de la mantisa** es **1**

Números normalizados



0	e...e	m...m
1	e...e	m...m

- Las cadenas normalizadas se identifican con exponente entre 0...1 y 1...0. El rango del exponente es: **[-126,127]**
- El bit implícito **de la mantisa** es **1**



0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0

Son dos cadenas cuyo objetivo es

- Representar el valor 0
- Representar un número muy cercano a 0 (resultado de una operación)

Números Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m

- Las cadenas no normalizadas se identifican con exponente 0...0 y mantisa no nula
- Tienen bit implícito igual a 0
- Utilizan $\text{exponente} = -126$

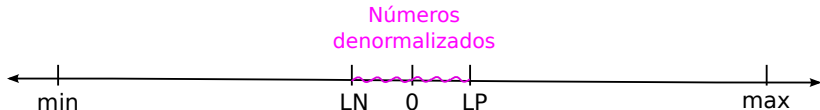
Números Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m

- Las cadenas no normalizadas se identifican con exponente 0...0 y mantisa no nula
- Tienen **bit implícito igual a 0**
- Utilizan **exponente=-126**



Están ubicados entre el límite positivo y el negativo de los normalizados



- Las cadenas se identifican con exponente 1...1 y mantisa 0...0
- Puede usarse como operando!

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0

- Las cadenas se identifican con exponente 1...1 y mantisa 0...0
- Puede usarse como operando!

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0



Respetando las reglas aritméticas

$$inf + x = inf$$

$$x/inf = 0$$

Not a Number (NaN)

0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

- Las operaciones aritméticas pueden dar resultados no válidos
- Los distintos estados de error deben denotarse mediante las cadenas especiales
- Las cadenas se identifican con exponente 1...1 y mantisa distinta a 0...0

¡A interpretar!

- Ceros

0	0 ... 0	0 ... 0
1	0 ... 0	0 ... 0

- Denormalizados

0	0 ... 0	m...m
1	0 ... 0	m...m

- Normalizados

0	e...e	m...m
1	e...e	m...m

- Infinitos

0	1...1	0...0
1	1...1	0...0

- Not a Number (Nan)

0	1...1	m...m
1	1...1	m...m

1 0 00000000
000000000000000000000000

2 0 00000000
100000000000000000000000

3 0 00000000
000000000000000000000001


4 0 00000001
000000000000000000000000



5 0 00000001
100000000000000000000000

6 0 00000001
000000000000000000000001



- 0 00000000 000000000000000000000000



0 00000000 000000000000000000000000

- 0 00000000 000000000000000000000000  0
- 0 00000000 100000000000000000000000

- 0 00000000 000000000000000000000000  0
- 0 00000000 100000000000000000000000  denormalizado!

Interpretar

- 0 00000000 000000000000000000000000  0
- 0 00000000 100000000000000000000000  denormalizado!

- 0 00000000 000000000000000000000000  0
- 0 00000000 100000000000000000000000  denormalizado!





$$E = -126$$


$$M = \mathcal{I}_{sm(1,23)}(010000000000000000000000)$$

$$N = 0,5 * 2^{-126}$$

- [illegible]

- 0 00000000 000000000000000000000001  denormalizado!

- 0 00000000 000000000000000000000001  denormalizado!

- 0 00000000 0000000000000000000000001  denormalizado!




$$E = -126$$

$$M = \mathcal{I}_{sm(1,23)}(0000000000000000000000001)$$

$$N = 2^{-23} * 2^{-126}$$

- 0 00000001 000000000000000000000000


- 0 00000000 000000000000000000000001  denormalizado!




$$E = -126$$

$$M = \mathcal{I}_{sm(1,23)}(000000000000000000000001)$$

$$N = 2^{-23} * 2^{-126}$$

- 0 00000001 000000000000000000000000  normalizado!

- 0 00000000 000000000000000000000001  denormalizado!




$$E = -126$$

$$M = \mathcal{I}_{sm(1,23)}(000000000000000000000001)$$

$$N = 2^{-23} * 2^{-126}$$

- 0 00000001 000000000000000000000000  normalizado!


- 0 00000000 0000000000000000000000001  denormalizado!



$$E = -126$$

$$M = \mathcal{I}_{sm(1,23)}(000000000000000000000001)$$

$$N = 2^{-23} * 2^{-126}$$

- 0 00000001 000000000000000000000000  normalizado!



$$E = 1 - 127 = -126$$

$$M = \mathcal{I}_{sm(1,23)}(100000000000000000000000)$$

$$N = 1 * 2^{-126}$$

- 0 00000001 100000000000000000000000


- [illegible]



$$E = 1 \cdot 2^{127} = -126$$

$$M = \mathcal{I}_{sm(1,23)}(\textcolor{red}{1}100000000000000000000000)$$

$$N = 1,5 * 2^{-126}$$

- 0 00000001 100000000000000000000000  normalizado!



$$E = 1 - 127 = -126$$

$$M = \mathcal{I}_{sm(1,23)}(\textcolor{red}{1}100000000000000000000000)$$

$$\textcolor{red}{N} = \textcolor{red}{1,5} * 2^{-126}$$

- 0 00000001 000000000000000000000000

- [illegible]



$$E = 1 \cdot 2^{127} = -126$$

$$M = \mathcal{I}_{sm(1,23)}(\textcolor{red}{1}100000000000000000000000)$$

$$N = 1,5 * 2^{-126}$$

- 0 00000001 000000000000000000000001 🌟normalizado!



$$E = 1 \cdot 2^{127} = -126$$

$$M = \mathcal{I}_{sm(1,23)}(\textcolor{red}{1}0000000000000000000000000\textcolor{black}{1})$$

$$N = (1 + 2^{-23}) * 2^{-126}$$

