

Matemática I – comisión 2

Parcial – 27/11/2013

Relaciones de equivalencia

1. Tomemos $A = \{1, 2, 3, \dots, 22, 23, 24\}$ y consideremos la relación definida en A
 $x R y$ ssi $x - y = 3 * k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$
definir un conjunto de índices I y dar una definición del bloque B_i para cada $i \in I$.

2. Tomemos A como el conjunto de los alumnos de la TPI. Definimos la siguiente relación de equivalencia: $x R y$ ssi x e y cursaron por primera vez Bases de Datos en el mismo cuatrimestre del mismo año, o bien si ninguno de los dos cursó todavía esa materia. La materia se dictó por primera vez en el 1er cuatrimestre de 2010, tener en cuenta los cuatrimestres hasta el 2do de 2013 inclusive.

Definir por extensión un conjunto I de índices para esta relación de equivalencia, y por comprensión el conjunto B_i para cada $i \in I$.

Ayuda: para definir B_i se necesitan dos consideraciones.

Funciones

1. A partir del gráfico de la función $f(x) = |x|$, graficar las funciones:

$$f_1(x) = |x + 1|, \quad f_2(x) = |x| + 2, \quad f_3(x) = ||x| - 1|, \quad f_4(x) = -|x| + 2$$

¿Alguna de ellas tiene inversa?

Calcular (sin graficar) $f_1 \circ f_2$ y $f_3 \circ f_4$.

2. Una persona tiene una deuda de 1000 pesos, que se vence en un determinado día. Si no paga en el día de vencimiento, empieza a correr una multa por cada día de mora, de acuerdo a esta tabla:

de 1 a 15 días de mora	10 pesos por día
del día 16 al día 30 de mora	15 pesos por día
a partir del día 31 de mora	20 pesos por día

P.ej. si se paga con 20 días de mora hay que pagar 1225 pesos: 1000 de la deuda original, 150 de los primeros 15 días de mora, 75 por los días de mora 16 al 20 inclusive.

Definir la función $f : \mathbb{N}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$ donde $f(n)$ es el importe que corresponde abonar si se paga con n días de mora. Indicar si f es inyectiva o no, y si f es suryectiva o no.

Inducción

1. Dar, para la sucesión definida como sigue

$$a_1 = 16 \qquad a_{h+1} = \frac{a_h}{4} + 6h + 14$$

una fórmula que permita calcular un a_n cualquiera directamente (o sea, sin usar términos anteriores a a_n), y demostrar que la fórmula obtenida es correcta usando inducción.

2. Al comenzar el 2010, un club tiene 300 socios. Cada día pasa una de las siguientes cosas:

- o bien no se inscribe ni se borra nadie,
- o bien se inscribe al menos una persona, y se borra el cuádruple de la cantidad de personas que se inscribieron (p.ej. se inscriben 5 y se borran 20),
- o bien se borra al menos una persona, y se inscribe el séptuple de la cantidad de personas que se borraron (p.ej. se borran 5 y se inscriben 35).

Demostrar que al principio de cada día, contando desde el 1ro de enero de 2010, el club tiene una cantidad de socios que es múltiplo de 3.

Conteo

Un socio de una biblioteca le pide consejo al bibliotecario, quiere leer 4 novelas y 3 libros de historia. En la biblioteca hay 10 novelas distintas (entre las que figura un ejemplar de “Rosaura a las diez” y otro de “No habrá más penas ni olvido”) y 12 libros de historia distintos (entre los que figura un ejemplar de “Soy Roca” y otro de “Historia del pueblo argentino”). Se quiere saber lo siguiente.

- a. Cuántas recomendaciones distintas puede hacer el bibliotecario.
- b. De estas, en cuántas se incluye la novela “Rosaura a las diez” y el libro de historia “Soy Roca”.
- c. De las recomendaciones del ítem a, en cuántas se incluye al menos una de entre las novelas “Rosaura a las diez” y “No habrá más penas ni olvido”.
- d. Si el bibliotecario le quiere indicar al socio en qué orden leer los libros de historia, pero no las novelas (de las novelas interesa solamente cuáles elige, como en los ítems anteriores), cuántas recomendaciones puede hacer.
- e. De las recomendaciones del ítem anterior, en cuántas se recomienda leer “Historia del pueblo argentino” e inmediatamente después “Soy Roca”.
- f. El socio en cuestión es la última persona que entra en el día a la biblioteca. Después de que se lleva sus libros, el bibliotecario cierra y tiene que guardar los 15 libros que quedaron. Para esto tiene tres estantes y en cada uno tiene que poner al menos un libro. Si lo único que interesa es cuántos libros van en cada estante (y no cuáles), ¿cuántas formas de guardar los libros en los estantes tiene el bibliotecario?
- g. Como en el ítem anterior, pero si puede haber estantes vacíos.