

Matemática I – comisión 2

Recuperatorio 2do parcial – 09/12/2013

Relaciones de equivalencia

Considerar el conjunto A de los autos de que dispone un ministerio para que su personal haga viajes dentro del país. De cada auto se sabe la marca y el año de fabricación. De algunos autos, pero no de todos, se sabe también en cuántos viajes se usó.

Para las siguientes relaciones de equivalencia en A , definir un conjunto I de índices, y dar la definición, para cada índice i , del bloque correspondiente B_i .

Llamar M al conjunto de marcas de los autos del conjunto A y llamar F al conjunto de los años de fabricación de los autos del conjunto A .

- a) $x R_1 y$ ssi x e y son dos autos de la misma marca y además tienen el mismo año de fabricación; p.ej. son los dos Ford y además ambos fueron fabricados en 1998.
- b) $x R_2 y$ ssi: o bien ambos se usaron en más de 10 viajes, o bien ambos se usaron entre 6 y 10 viajes, o bien ambos se usaron entre 1 y 5 viajes, o bien ninguno de los dos se usó, o bien si de ninguno de los dos se sabe en cuántos viajes se usó. P.ej. si x se usó en 7 viajes e y en 9, entonces están relacionados. Lo mismo si x se usó en 15 viajes e y en 24, o bien x se usó en 1 viaje e y en 3. Un auto del que no se sabe en cuántos viajes se usó no está relacionado con ninguno de los anteriores, solamente con otro del cual tampoco se sepa en cuántos viajes se usó.

Funciones

1. Graficar la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ x & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ -(x^2) & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

A partir del gráfico de f graficar, sin calcular, las siguientes funciones:

$$f_1(x) = f(x - 1), \quad f_2(x) = f(x) + 1, \quad f_3(x) = |f(x) + 1|, \quad f_4(x) = -f(x) - 1$$

Si id es la identidad en \mathbb{R} , o sea $id(x) = x$, cualquiera sea x real, calcular $id \circ f$ y $f \circ id$.

2. Se prepara un examen de 45 preguntas, cuyo puntaje máximo es 100 puntos. El resultado depende de la cantidad de preguntas respondidas correctamente, de acuerdo a esta función

$$r(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 5 \\ x & \text{si } 5 \leq x \leq 10 \\ 10 + 2(x - 10) & \text{si } 11 \leq x \leq 25 \\ 40 + 3(x - 25) & \text{si } x > 25 \end{cases}$$

P.ej. a 22 preguntas respondidas le corresponden 34 puntos. Se pide

- a) Tomando como dominio de r a los naturales entre 0 y 45, y como codominio a los naturales entre 0 y 100, indicar si r es inyectiva, y si es sobreyectiva.

- b) Se quiere regalar 5 puntos a cada alumno, p.ej. que a 22 preguntas respondidas les correspondan 39 puntos. Se quiere definir la función r' que calcula el resultado a partir de la cantidad de preguntas respondidas, incorporando el regalito. Indicar cuál es la función g que hay que componer con r para obtener r' , y si resulta $r' = r \circ g$, o bien, $r' = g \circ r$. No importa si se pasa de 100 puntos.
- c) Idem si el regalo consiste en llevar al doble la cantidad de preguntas respondidas. P.ej. que a 22 preguntas respondidas le correspondan 97 puntos, que es el valor de r para 44 preguntas respondidas. No importa si se pasa de 100 puntos.

Inducción

1. Demostrar la siguiente afirmación usando inducción

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{vale que} \quad b \sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=0}^n ba_i$$

cualquiera sea la sucesión de reales a_i y cualquiera sea el real b .

(Informalmente, hay que ver que $b(a_1 + \cdots + a_n) = ba_1 + \cdots + ba_n$.)

2. Demostrar la siguiente afirmación usando inducción

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{vale que} \quad 5 \mid 2^{n+1} * 3^n + 3$$

Conteo

Se quiere confeccionar banderas de 3 franjas horizontales y se dispone de telas de color blanco, azul, rojo, verde, amarillo, naranja y negro en la cantidad que se desee.

1. Cuántas banderas distintas pueden armarse si las 3 franjas deben ser de colores distintos?
2. Y de las anteriores, cuántas banderas distintas vería un daltónico que no distingue entre verde y azul, ni entre amarillo, naranja y rojo?
3. Volviendo a la visión normal, cuántas banderas distintas pueden armarse si se quiere que la primera y la tercera franja sean del mismo color?
4. Y si cualquier franja puede ser de cualquier color? (Vale por ejemplo rojo, rojo y verde, lo que daría una franja roja de doble ancho. Y también vale rojo, rojo, rojo, lo cual daría la bandera china)
5. De cuántas maneras se pueden elegir 3 colores distintos para armar una bandera? (Ahora sólo interesa qué colores se eligen y no el orden en que podrían aparecer en las franjas)
6. En el país Vivlapep, que como todos sabemos tiene 15 provincias, se confeccionaron 60 banderas idénticas, de cuántas maneras pueden distribuirse entre las provincias si toda provincia debe recibir al menos una bandera?
7. Como el anterior pero si toda provincia debe recibir al menos 2 banderas.