Espacios Vectoriales
TP5 - 2017

1. Indicar cuál es el elemento neutro en cada uno de los siguientes espacios vectoriales:

   a) $\mathbb{R}^6$ con las operaciones usuales.

   b) El espacio $\mathcal{P}_3$ de los polinomios de grado 3 (i.e todos los polinomios con grado menor o igual a 3) con las operaciones usuales.

   c) El espacio de matrices reales de 3x4.

   d) El espacio de las funciones contínuas de un intervalo cerrado $[a, b]$ a todo $\mathbb{R}$.

2. En cada espacio vectorial, encontrar el opuesto (o inverso respecto de la suma) de los siguientes vectores:

   a) En $\mathbb{R}^3$, $v = (2, -1, 0)$

   b) En $\mathcal{P}_3$, $p(x) = -3x^2 + 2x + 6$

   c) En el espacio de las matrices reales de 2x3, $v = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

3. Demostrar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con las operaciones de suma y producto por escalar usuales correspondientes a cada espacio:

   a) $\mathbb{R}^3$

   b) $\mathbb{R}^n$ con n natural.

   c) Las matrices reales de $2x2$

   d) Las matrices reales de nxn

   e) Los polinomios de grado menor o igual a 3 ($\mathcal{P}_3$)

4. Decidir si los siguientes conjuntos son subespacios (justificar):

   a) $S = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$

   b) $S = \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$

   c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$

   d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$

   e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - y\}$

   f) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + w = 1\}$

   g) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - w = 0, z + 3y = 0\}$

   h) Las matrices reales no invertibles de $2x2$

   i) Las matrices reales invertibles de nxn

   j) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

5. Analizar si las siguiente aplicaciones entre espacios vectoriales son transformaciones lineales.

   a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x, y) = (x, y, x + y)$

   b) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y, z) = (x + z, y + z)$

   c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x, y, z) = (x - 2z, y + 3x, -z)$

   d) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x, y, z) = (x - 2, y + 3x, 1)$

   e) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^{2x2}$ definida por $L \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -x \\ y & -w \end{pmatrix}$

   f) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^{2x2}$ definida por $L \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -x \\ y & 1 \end{pmatrix}$

   g) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^2$ definida por $L \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x + z, y + w)$

   h) $L : \mathcal{P}_3 \to R^4$ definida por $L(p(x)) = (a_3, a_2, a_1, a_0)$
   con $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ y siendo $\mathcal{P}_3$ el espacio de los polinomios de grado 3 (i.e todos los polinomios con grado menor o igual a 3, con las operaciones usuales)

   i) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y, z) = (0, 0)$

   j) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(x, y, z) = (xy, x + y + z)$

   k) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x, y, z) = (z, y, 1)$

   l) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}$ definida por $L \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = x + w$

   m) $L : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}$ definida por $L \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = z.y$