Mathematik I Definitionen

Inhalt

1 Einleitung

1.3 Mathematik als Sprache

Definition 1.3.1 — Aussage und Negation.
Eine **Aussage** ist eine Beschreibung oder Mitteilung eines Sachverhalts, welche eindeutig als wahr oder falsch klassifiziert werden kann. Die **Negation** von Aussage A ist $\overline{A}$. Sie ist wahr, wenn A falsch ist, sie ist falsch, wenn A wahr ist.

Definition 1.3.2 — Implikation.
Eine Aussage der Form $A \Rightarrow B$ heisst **Implikation**. Ist B immer dann wahr, wenn A wahr ist, so ist $A \Rightarrow B$ wahr. Wir sagen dann auch, dass $A \Rightarrow B$ gilt.
Auch wenn A falsch ist, sagt man, dass die Implikation $A \Rightarrow B$ gilt. Nur wenn A wahr und B falsch ist, gilt $A \Rightarrow B$ nicht. Man schreibt dann auch $A \not\Rightarrow B$.

Definition 1.3.3 — Umkehrung und Kontraposition.
Die **Umkehrung** der Implikation $A \Rightarrow B$ ist $B \Rightarrow A$. Die **Kontraposition** der Implikation $A \Rightarrow B$ ist $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Definition 1.3.4 — Notwendige und hinreichende Bedingungen.
Ist die Implikation $A \Rightarrow B$ wahr, so bezeichnet man die Aussage A als **hinreichende Bedingung** für B. Die Aussage B nennt man auch **notwendige Bedingung** für A.

Definition 1.3.5 — Äquivalenz.
Ist sowohl $A \Rightarrow B$ als auch $B \Rightarrow A$ wahr, dann schreibt man auch kurz $A \Leftrightarrow B$. Man nennt $A \Leftrightarrow B$ **Äquivalenz** von A und B.

2 Mengen

2.1 Die Menge und Ihre Elemente

Definition 2.1.1 — Die Menge.
Eine **Menge** A ist eine Zusammenfassung von ausgewählten, unterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen, so dass stets eindeutig feststellbar ist, ob ein Objekt zu der Menge gehört oder nicht. Die Objekte, die zu der Menge gehören, heissen **Elemente** der Menge. Man schreibt $a \in A$ für "a ist (ein Element) aus A" bzw. "A enthält das Element a" und $a \notin A$ für "a ist nicht aus A" bzw. "A enthält das Element a nicht".

Definition 2.1.2 — Gleichheit zweier Mengen.
Zwei Mengen A und B heissen **gleich**, kurz $A = B$, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Es gilt also $A = B$, wenn $a \in A \Leftrightarrow a \in B$. Sind A und B nicht gleich, nennt man sie ungleich, $A \neq B$.

Definition 2.1.3 — Beziehungen zwischen Mengen.
Sind A und B Mengen, so definieren wir:

- Ist jedes Element der Menge A auch ein Element der Menge B ($a \in A \Rightarrow a \in B$), dann ist $A \subseteq B$. Man sagt A ist eine **Teilmenge** von B oder A ist Untermenge von B. Ist dies nicht der Fall, so schreibt man $A \nsubseteq B$. Umgekehrt kann man statt $A \subseteq B$ auch sagen, dass B **Obermenge** von A ist, $B \supseteq A$. Ist B keine Obermenge von A, schreibt man $B \nsupseteq A$.
- Ist A eine Teilmenge der Menge B aber nicht gleich B, so ist A eine **echte Teilmenge** von B und man schreibt $A \subset B$. Umgekehrt ist B **echte Obermenge** von A, $B \supset A$. Die Verneinungen dieser Aussagen schreibt man als $A \not\subset B$ bzw. $B \not\supset A$.

Definition 2.1.4 — Mächtigkeit.
Eine Menge A heisst endlich, wenn sie endlich viele Elemente enthält, andernfalls unendlich. Ist A endlich und enthält A genau n Elemente, so schreibt man $|A| = n$ und nennt n die **Mächtigkeit** der Menge A.

Definition 2.1.5 — Die leere Menge.
Die Menge, die kein Element enthält, heisst **leere Menge** und hat das Symbol $\emptyset$ oder $\{\}$. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge und $|\{\}| = 0$.

Definition 2.1.6 — Mengenoperationen.
Sind A und B Mengen, so definieren wir:

- $A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ oder } a \in B\}$ als die **Vereinigung** von A und B.
- $A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ und } a \in B\}$ als den Durchschnitt, **Schnitt** oder die Schnittmenge von A und B.
- $A \setminus B = \{a \mid a \in A \text{ und } a \notin B\}$ als die **Differenz** von A und B oder kurz A ohne B.

Definition 2.1.7 — Schnitte und Vereinigungen mehrerer Mengen.
Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Mengen, so ist

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{a \mid \text{es gibt ein } i = 1, 2, \ldots, n \text{ mit } a \in A_i\}$$

die **Vereinigung** dieser Mengen und

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{a \mid a \in A_i \text{ für alle } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

der **Schnitt** dieser Mengen.

Definition 2.1.8 — Disjunkte Mengen.
Zwei Mengen A und B heissen **disjunkt** oder elementfremd, wenn $A \cap B = \{\}$.

Definition 2.1.9 — Komplement.
Ist $A \subseteq B$, heisst $B \setminus A$ Komplementärmenge oder **Komplement** von A bezüglich B.

Definition 2.1.10 — Tupel und das kartesische Produkt zweier Mengen.
Seien A und B zwei beliebige Mengen. Dann heisst die Menge

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

kartesisches Produkt (bzw. **Produktmenge**) von A und B. Für $A \times A$ schreiben wir auch A^2. Elemente des kartesischen Produkts $(a, b) \in A \times B$ heissen **Tupel**. Zwei Tupel (a, b) und (c, d) heissen gleich, wenn $a = c$ und $b = d$.

Definition 2.1.11 — n-Tupel und das kartesische Produkt.
Seien $A_1, \ldots, A_n$ gegebene Mengen. Dann ist

$$\bigtimes_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \ldots,\ a_n \in A_n\}.$$

Man nennt $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \bigtimes_{i=1}^{n} A_i$ **(geordnetes) n-Tupel**. Zwei n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ heissen gleich , wenn $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$. Man bezeichnet a_i auch als die i-te Komponente des Tupels. Die Menge $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ (n-mal) nennt man die n-te (kartesische) Potenz der Menge A.

2.2 Zahlenmengen

Definition 2.2.1 — Punkte und Vektoren.
Gilt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, nennt man $\mathbf{x}$ auch **Punkt** oder **Vektor**.

Definition 2.2.2 — Nullpunkt des $\mathbb{R}^n$.
Im $\mathbb{R}^n$ ist der Ursprung ein n-Tupel, bei dem jede Komponente 0 ist. Man nennt den Ursprung des $\mathbb{R}^n$ auch **Nullpunkt** oder Nullvektor des $\mathbb{R}^n$ und schreibt

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Definition 2.2.3 — Gleichheit zweier Vektoren.
Zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, heissen **gleich**, wenn $x_i = y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Definition 2.2.4 — Der n-dimensionale euklidische Raum.
Die Menge $\mathbb{R}^n$ versehen mit der komponentenweisen Addition

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

und der skalaren Multiplikation

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

wird als n-dimensionaler **euklidischer Raum** bezeichnet.

Definition 2.2.5 — Die Norm eines Vektors.
Für einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ heisst

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

die **Norm** oder die Länge von $\mathbf{x}$. Für zwei Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ heisst

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

(euklidische) **Entfernung** oder (euklidischer) Abstand von (oder zwischen) $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$.

Definition 2.2.6 — Die ε-Umgebung eines Punktes.
Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Dann heisst

$$U(\mathbf{x}, \varepsilon) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} < \varepsilon \right\}$$

ε-Umgebung von $\mathbf{x}$.

Definition 2.2.7 — Konvexkombination zweier Punkte.
Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Dann heisst der Vektor

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} = \mathbf{y} + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Konvexkombination von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$. Gilt $0 < \alpha < 1$, spricht man auch von einer **echten Konvexkombination**.

Definition 2.2.8 — Konvexe Menge.
Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **konvex**, wenn für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ auch $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \in A$ gilt.

Definition 2.2.9 — Innere, äussere, und Randpunkte.
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $\overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus A$ das Komplement von A bezüglich $\mathbb{R}^n$. Dann heisst

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ **innerer Punkt** von A, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq A$.
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ **äusserer Punkt** von A, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U(\mathbf{x}, \varepsilon) \subseteq \overline{A}$ bzw. $U(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap A = \{\}$.
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ **Randpunkt** von A, wenn er weder äusserer noch innerer Punkt ist.

Die Menge aller inneren Punkte von A nennt man das Innere von A, die Menge aller Randpunkte nennt man den Rand von A.

Definition 2.2.10 — Offene und abgeschlossene Mengen.
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $\overline{A} = \mathbb{R}^n \setminus A$ das Komplement von A bezüglich $\mathbb{R}^n$. Dann heisst A **offen**, wenn jedes Element aus A ein innerer Punkt von A ist. Die Menge A heisst **abgeschlossen**, wenn jedes Element aus $\overline{A}$ ein innerer Punkt von $\overline{A}$ ist, also $\overline{A}$ offen ist.

Definition 2.2.11 — Vergleich von Vektoren.
Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Man sagt, $\mathbf{x}$ ist **kleiner oder gleich** $\mathbf{y}$, also $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, wenn $x_i \leq y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Man sagt, $\mathbf{x}$ ist **grösser oder gleich** $\mathbf{y}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$, wenn $x_i \geq y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Definition 2.2.12 — Beschränkte und kompakte Mengen.
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann heisst

- A **nach unten beschränkt**, wenn es einen Vektor $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\mathbf{x} \geq \underline{\mathbf{b}}$ für jedes Element $\mathbf{x} \in A$ gilt. Man nennt $\underline{\mathbf{b}}$ dann auch untere Schranke von A;
- A **nach oben beschränkt**, wenn es einen Vektor $\overline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{b}}$ für jedes Element $\mathbf{x} \in A$ gilt. Man nennt $\overline{\mathbf{b}}$ dann auch obere Schranke von A;
- A **beschränkt**, wenn A nach oben und unten beschränkt ist;
- A **kompakt**, wenn A abgeschlossen und beschränkt ist.

Definition 2.2.13 — Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.
Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge. Ist A eine nach oben beschränkte Menge, so heisst die kleinste obere Schranke **Supremum** von A, geschrieben $\sup A$. Ist A eine nach unten beschränkte Menge, so heisst die grösste untere Schranke **Infimum** von A, geschrieben $\inf A$.

Gibt es ein Element $a^{\max} \in A$ mit $a^{\max} \geq a$ für alle $a \in A$, so heisst $a^{\max}$ **Maximum** der Menge A, geschrieben $a^{\max} = \max A$. Gibt es ein Element $a^{\min} \in A$ mit $a^{\min} \leq a$ für alle $a \in A$, so heisst $a^{\min}$ **Minimum** der Menge A, geschrieben $a^{\min} = \min A$.

3 Relationen und Funktionen

3.1 Relationen

Definition 3.1.1 — Die Relation und der Graph einer Relation.
Ein Tupel dreier Mengen (D,Z,R) mit $R \subseteq D \times Z$ heisst (binäre) **Relation** zwischen der **Ursprungsmenge** D und der **Zielmenge** Z. Für Tupel $(x,y) \in R \subseteq D \times Z$ sagt man auch “x steht in Beziehung (Relation) zu y”. Statt $(x,y) \in R$ schreibt man auch xRy.

Die Menge R nennt man auch den **Graphen** der Relation. Ergeben sich die Mengen D und Z direkt aus den Elementen von R, spricht man auch vereinfacht von der Relation R anstatt vom Graphen der Relation.

Definition 3.1.2 — Die Umkehrrelation.
Sei (D,Z,R), $R \subseteq D \times Z$ eine (binäre) Relation zwischen D und Z. Dann ist (Z,D,R^{-1}) mit

$$R^{-1} = \{(x,y) \in Z \times D \mid (y,x) \in R\} \subseteq Z \times D$$

die **Umkehrrelation** oder inverse Relation von (D,Z,R).

Sind D und Z eindeutig durch R^{-1} gegeben, nennt man auch R^{-1} selbst vereinfachend die Umkehrrelation von R.

3.2 Funktionen

Definition 3.2.1 — Die Funktion.
Eine Vorschrift, die jedem Element in der Ursprungsmenge $x \in D$ genau ein Element $y \in Z$ zuweist, heisst **Funktion** oder Abbildung. Man schreibt

$$f : D \to Z$$

oder elementweise

$$x \in D \mapsto y = f(x) \in Z.$$

Die Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ ein $y \in Z$ zuordnet, heisst Zuordnungsvorschrift oder auch **Abbildungsvorschrift** $f(x) = y$. Man nennt die Ursprungsmenge D auch den **Definitionsbereich**, die Definitionsmenge oder die Urbildmenge, Z die Zielmenge. Die Untermenge $f(D) = \{f(x) \in Z \mid x \in D\} \subseteq Z$ der durch die Funktion erreichbaren Elemente der Zielmenge bezeichnet man auch als Wertemenge, Bildmenge, Bildbereich oder **Wertebereich** von D bzgl. f.

Elemente $x \in D$ heissen Urbilder oder **Argumente** und die Elemente $y = f(x) \in f(D)$ Bilder oder **Funktionswerte**. Gilt $y \in f(D)$ sagt man auch, dass f den Wert y annimmt.

Für eine Teilmenge $A \subseteq D$ heisst $f(A) = \{f(x) \in Z \mid x \in A\} \subseteq Z$ das **Bild** von A bzgl. f. Für eine Teilmenge $B \subseteq Z$ heisst $A = \{x \in D \mid f(x) \in B\} \subseteq D$ der **Urbildbereich** von B bzgl. f.

Definition 3.2.2 — Der Graph einer Funktion.
Sei $f : D \to Z$ eine Funktion. Dann heisst die Menge

$$\{(x,y) \in D \times Z \mid y = f(x)\}.$$

der Graph von f.

Definition 3.2.3 — Identität.
Die Funktion $id : D \to D$ heisst **Identität**, wenn $id(x) = x$ für alle $x \in D$.

Definition 3.2.4 — Surjektivität.
Eine Funktion $f : D \to Z$ heisst **surjektive Funktion**, wenn $f(D) = Z$, also wenn der Wertebereich gleich der Zielmenge ist.

Definition 3.2.5 — Injektivität.
Eine Funktion $f : D \to Z$ heisst **injektive** (oder eineindeutige) **Funktion**, wenn verschiedene Elemente von D auf verschiedene Elemente von Z abgebildet werden, also für alle $x, x' \in D$ gilt:

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \quad \text{oder gleichwertig} \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Definition 3.2.6 — Bijektivität.
Eine Funktion heisst **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Definition 3.2.7 — Die Umkehrfunktion.
Ist $f : D \to Z$ eine bijektive Funktion, dann heisst die Abbildung $f^{-1} : Z \to D$, welche jedem Element $y = f(x) \in Z$ das Urbild $x \in D$ zuordnet, **Umkehrfunktion**, Umkehrabbildung oder Inverse von f.

Definition 3.2.8 — Die Komposition.
Seien $g : D_1 \to Z_1$ und $f : D_2 \to Z_2$ zwei Funktionen mit $g(D_1) \subseteq D_2$, so ist die **Komposition** $f \circ g$ eine Funktion

$$f \circ g : D_1 \to Z_2 \text{ mit } x \mapsto f(g(x)).$$

4 Folgen und ihre Grenzwerte

4.1 Definition von Folgen, Reihen und Grenzwerten

Definition 4.1.1 — Die Folge.
Eine (unendliche) Zahlenfolge, kurz **Folge**, ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Element $a_n = f(n)$ aus $\mathbb{R}$ zuordnet. Man schreibt auch $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ für die Folge und bezeichnet $a_n = f(n)$ als n-tes Glied der Folge.

Definition 4.1.2 — Eigenschaften von Folgen.
Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heisst

- **streng monoton steigend** (oder wachsend), wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
- **monoton steigend** (oder wachsend), wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
- **monoton fallend**, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
- **streng monoton fallend**, wenn $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
- **(streng) monoton**, wenn sie (streng) monoton steigend oder fallend ist;
- **beschränkt**, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, d.h. wenn es Schranken $\overline{b}, \underline{b} \in \mathbb{R}$ gibt so dass $\underline{b} \leq a_n \leq \overline{b}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 4.1.3 — Die Reihe.
Ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Zahlenfolge, so heisst die Zahlenfolge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (unendliche) **Reihe**. Man schreibt auch $\{\sum_{i=1}^{n} a_i\}_{n\in\mathbb{N}}$. Die Glieder s_n der Reihe nennt man auch Partialsummen der Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 4.1.4 — Der Grenzwert einer Folge und Konvergenz.
Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen einen (eigentlichen) **Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle a_n mit $n > m$ gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Man schreibt

$$a = \lim_{n\to+\infty} a_n, \quad a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{oder} \quad a_n \to a \text{ für } n \to +\infty.$$

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heisst **konvergent**. Folgen, die nicht konvergent sind, heissen **divergent**.

Definition 4.1.5 — Uneigentliche Grenzwerte.
Eine divergente Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den **uneigentlichen Grenzwert** $+\infty$, wenn für grosse n alle Folgenglieder jeden beliebigen Wert $a \in \mathbb{R}$ übersteigen, also wenn man zu jedem Wert a eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ angeben kann, so dass alle Folgenglieder mit Index $n > m$ grösser als a sind. Kurz: Man schreibt $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, wenn zu jedem $a \in \mathbb{R}$ ein $m \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$a_n > a \text{ für alle } n > m.$$

Analog schreibt man $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, wenn zu jedem $a \in \mathbb{R}$ ein $m \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$a_n < a \text{ für alle } n > m.$$

4.3 Besondere Folgen und Reihen

Definition 4.3.1 — Die arithmetische Folge.
Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heisst **arithmetische Folge**, wenn die Differenz zweier aufeinander folgenden Glieder konstant ist, also $a_{n+1} - a_n = d$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 4.3.2 — Die geometrische Folge.
Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heisst **geometrische Folge**, wenn der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder konstant aber nicht eins ist, also $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, q \neq 1, a_1 \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 4.3.3 — Die (allgemeine) harmonische Folge.
Eine Folge $\{\frac{1}{n^c}\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c > 0$ heisst **(allgemeine) harmonische Folge**.

Definition 4.3.4 — Die Eulersche Zahl e.
Der Grenzwert $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ heisst **Eulersche Zahl** e.

5 Reelle Funktionen

5.1 Grundlagen

Definition 5.1.1 — Die reelle Funktion.
Eine Funktion $f : D \to Z$ mit $D, Z \subseteq \mathbb{R}$ heisst **reelle** oder **reellwertige Funktion**. Innere Punkte, äussere Punkte und Randpunkte des Definitionsbereichs $x \in D$ werden auch als innere Stellen, äussere Stellen und Randstellen bezeichnet.

Definition 5.1.2 — c-Stelle und Nullstelle.
Sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion. Man nennt die Stelle $x \in D$ mit $f(x) = c$ eine **c-Stelle** von f. Für $c = 0$ spricht man von einer **Nullstelle** von f.

Definition 5.1.3 — Der natürliche Definitions- und Wertebereich.
Der **natürliche Definitionsbereich** D_f einer reellen Funktion $y = f(x)$ gibt an, für welche Argumente $x \in \mathbb{R}$ die Abbildungsvorschrift $f(x)$ ausgewertet werden kann. Der **natürliche Wertebereich** ist $W_f = f(D_f)$.

Definition 5.1.4 — Affin-lineare Funktion.
Eine Funktion mit Abbildungsvorschrift

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

und $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ heisst **affin-lineare** Funktion. Man nennt a_0 den y-Achsenabschnitt und a_1 die Steigung der Funktion.

Definition 5.1.5 — Polynome.
Eine Funktion mit Abbildungsvorschrift

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

$n \in \mathbb{N}_0$ und Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, heisst **Polynom** oder ganzrationale Funktion n-ten Grades. Man nennt a_n den führenden Koeffizienten und spricht vom Grad n des Polynoms. Im Fall $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ spricht man von einem Nullpolynom.

Definition 5.1.6 — Rationale Funktion.
Sind p_1 und p_2 zwei Polynome, so heisst eine Funktion mit Abbildungsvorschrift $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ **rationale Funktion**. Der natürliche Definitionsbereich der rationalen Funktion $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ ist $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid p_2(x) \neq 0\}$.

Definition 5.1.7 — Potenzfunktion.
Eine Funktion mit Abbildungsvorschrift

$$f(x) = x^b, \qquad b \in \mathbb{R}$$

heisst **Potenzfunktion**. Ist b nicht ganzzahlig, aber rational, d.h. $b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, so spricht man auch von einer **Wurzelfunktion**.

Definition 5.1.8 — Exponentialfunktion.
Eine Funktion mit Abbildungsvorschrift

$$f(x) = b^x, \qquad b \in \mathbb{R}, b > 0$$

heisst **Exponentialfunktion** mit der Basis b. Ist die Basis b gleich der Zahl e, so wird sie auch natürliche Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ genannt.

Definition 5.1.9 — Logarithmische Funktion.
Eine Funktion mit Abbildungsvorschrift

$$f(x) = \log_b x, \qquad b > 0, b \neq 1$$

heisst **logarithmische Funktion** zur Basis b. Ist die Basis b gleich der Zahl e, so spricht man vom natürlichen Logarithmus und schreibt auch $\ln x$ statt $\log_e x$.

Definition 5.1.10 — Sinus- und Kosinusfunktion.
Die reelle Funktion mit $f(x) = \sin(x)$ heisst **Sinusfunktion**, die reelle Funktion mit $f(x) = \cos(x)$ heisst **Kosinusfunktion**.

Definition 5.1.11 — Die Betragsfunktion.
Eine Funktion mit Abbildungsvorschrift

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{wenn } x < 0 \\ x & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$$

heisst **Betragsfunktion**.

Definition 5.1.12 — Die Auf- und Abrundungsfunktion.
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ mit

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{y \in \mathbb{Z} \,|\, y \leq x\}$$

heisst **Abrundungsfunktion**.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ mit

$$f(x) = \lceil x \rceil = \min\{y \in \mathbb{Z} \,|\, y \geq x\}$$

heisst **Aufrundungsfunktion** .

Definition 5.1.13 — Abschnittsweise definierte reelle Funktion.
Eine reelle Funktion heisst **abschnittsweise definierte reelle Funktion**, wenn für ein $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, die Abbildungsvorschrift als

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{falls } x \in D_1 \\ \vdots & \vdots \\ g_n(x) & \text{falls } x \in D_n \end{cases}$$

mit reellen Funktionen $g_i : D_i \to Z_i$, $D_i \cap D_j = \{\}$ für alle $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$, beschrieben ist.

5.2 Grenzwerte und Stetigkeit

Definition 5.2.1 — Der Grenzwert einer Funktion für $x \to +\infty$.
Eine reelle Funktion $f : D \to Z$ mit nach oben unbeschränktem Definitionsbereich D konvergiert für $x \to +\infty$ gegen einen **Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder beliebig kleinen reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $(m, +\infty) \subseteq D$ und für alle $x > m$ gilt:

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Man schreibt

$$a = \lim_{x \to +\infty} f(x), \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{oder} \quad f(x) \to a \text{ für } x \to +\infty.$$

Konvergiert eine Funktion mit nach oben unbeschränktem Definitionsbereich nicht für $x \to +\infty$, so divergiert sie für $x \to +\infty$.

Definition 5.2.2 — Der Grenzwert einer Funktion für $x \to -\infty$.
Eine reelle Funktion $f : D \to Z$ mit nach unten unbeschränktem Definitionsbereich D konvergiert für $x \to -\infty$ gegen einen **Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder beliebig kleinen reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $(-\infty, m) \subseteq D$ und für alle $x < m$ gilt:

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Man schreibt

$$a = \lim_{x \to -\infty} f(x), \quad f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{oder} \quad f(x) \to a \text{ für } x \to -\infty.$$

Konvergiert eine Funktion mit nach unten unbeschränktem Definitionsbereich nicht für $x \to -\infty$, so divergiert sie für $x \to -\infty$.

Definition 5.2.3 — Rechts- und linksseitiger Grenzwert.
Eine reelle Funktion $f : D \to Z$ hat an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ bzw. "in x_0"

- den **rechtsseitigen Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$,

  $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a,$$

  wenn es zu jeder beliebig kleinen reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass $(x_0, x_0 + \delta) \subseteq D$ und für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ gilt $|f(x) - a| < \varepsilon$.
- den **linksseitigen Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$,

  $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = a,$$

  wenn es zu jeder beliebig kleinen reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass $(x_0 - \delta, x_0) \subseteq D$ und für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ gilt $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Definition 5.2.4 — Grenzwert einer Funktion an der Stelle x_0.
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Eine reelle Funktion $f : D \to Z$ hat für $x \to x_0$ ("in x_0") den **Grenzwert** $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,$$

wenn es zu jeder beliebig kleinen reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass $U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \subseteq D$ und

$$|f(x) - a| < \varepsilon \text{ für alle } x \in U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}.$$

Definition 5.2.5 — Die Asymptote.
Die Funktion g heisst **Asymptote** zu der Funktion f, wenn gilt

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

Eine konstante Asymptote der Form $g(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, heisst auch horizontale Asymptote.

Definition 5.2.6 — Vertikale Asymptote.
Sei f eine reelle Funktion. Wenn

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

sagt man auch, dass die Funktion f eine **vertikale** (oder senkrechte) **Asymptote** an der Stelle x_0 hat. Hat f an der Stelle x_0 eine vertikale Asymptote, so nennt man x_0 auch eine **Polstelle**.

Definition 5.2.7 — Stetigkeit an einer inneren Stelle.
Sei $f: D \to Z$ eine reelle Funktion. Zudem sei $U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D$ für eine reelle Zahl $\delta > 0$, also insbesondere $x_0 \in D$. Die Funktion f heisst **stetig an der Stelle** x_0 oder stetig in x_0, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ist f nicht stetig in x_0, heisst f unstetig in x_0. Man nennt dann x_0 auch eine Unstetigkeitsstelle der Funktion.

Definition 5.2.8 — Rechts- und linksseitige Stetigkeit.
Sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion. Ist $(x_0 - \delta, x_0) \subseteq D$ für eine reelle Zahl $\delta > 0$, dann heisst die Funktion f **linksseitig stetig an der Stelle** x_0 oder in x_0, wenn $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$. Ist $(x_0, x_0 + \delta) \subseteq D$ für eine reelle Zahl $\delta > 0$, dann heisst die Funktion f **rechtsseitig stetig an der Stelle** x_0 oder in x_0, wenn $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Definition 5.2.9 — Stetigkeit auf Intervallen.
Es sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Funktion f heisst **stetig auf** einem

- offenen Intervall $I \subseteq D$ der Form $I = (a,b)$, $I = (-\infty, b)$ oder $I = (a, +\infty)$, wenn f an jeder (inneren) Stelle $x_0 \in I$ stetig ist;
- Intervall $I \subseteq D$ der Form $I = [a,b)$ bzw. $I = [a, +\infty)$, wenn 1) f auf dem offenen Intervall (a,b) bzw. $(a, +\infty)$ stetig ist und 2) f in a rechtsseitig stetig ist;
- Intervall $I \subseteq D$ der Form $I = (a,b]$ bzw. $I = (-\infty, b]$, wenn 1) f auf dem offenen Intervall (a,b) bzw. $(-\infty, b)$ stetig ist und 2) f in b linksseitig stetig ist;
- abgeschlossenen Intervall $I = [a,b], I \subseteq D$, wenn 1) f auf dem offenen Intervall (a,b) stetig ist, 2) f in a rechtsseitig stetig ist und 3) f in b linksseitig stetig ist;

Die Funktion f heisst **stetig**, wenn f auf jedem Intervall $I \subseteq D$ stetig ist.

Definition 5.2.10 — Stückweise stetige Funktion.
Sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion. Hat f endlich viele Unstetigkeitsstellen, so heisst f **stückweise stetig**.

5.3 Differenzierbarkeit

Definition 5.3.1 — Der Differenzenquotient.
Es sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion und $x_0, x_0 + \Delta x \in D$, wobei $\Delta x \neq 0$. Mit $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ heisst der Quotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Differenzenquotient von f an der Stelle x_0.

Definition 5.3.2 — Der Differentialquotient und Differenzierbarkeit.
Die reelle Funktion $f : D \to Z$ heisst **differenzierbar** an der inneren Stelle $x_0 \in D$, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert. Der Grenzwert $f'(x_0)$ heisst **(erste) Ableitung**, **Differentialquotient** oder **Steigung** von f **an der Stelle** x_0 bzw. $x = x_0$. Häufig verwendete Symbole sind neben $f'(x_0)$ auch $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$ oder $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Definition 5.3.3 — Die Tangente.
Ist die reelle Funktion $f : D \to Z$ an der inneren Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, so heisst die Gerade durch $(x_0, f(x_0))^T$ mit Steigung $f'(x_0)$ die **Tangente** an (den Graphen von) f an der Stelle x_0. Sie ist der Graph der Funktion

$$t_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vereinfachend bezeichnet man auch die Abbildungsvorschrift t_{x_0} als die Tangente an f an der Stelle x_0.

Definition 5.3.4 — Rechts- und linksseitige Differenzierbarkeit.
Sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion. Ist $(x_0 - \delta, x_0] \subseteq D$ für eine reelle Zahl $\delta > 0$, dann heisst die Funktion f **linksseitig differenzierbar an der Stelle** x_0 oder in x_0, wenn der linksseitige Grenzwert $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ existiert. Ist $[x_0, x_0 + \delta) \subseteq D$ für eine reelle Zahl $\delta > 0$, dann heisst die Funktion f **rechtsseitig differenzierbar an der Stelle** x_0 oder in x_0, wenn der rechtsseitige Grenzwert $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ existiert.

Definition 5.3.5 — Differenzierbarkeit auf einem Intervall.
Es sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ Die Funktion f heisst **differenzierbar auf** einem

- offenen Intervall $I \subseteq D$ der Form $I = (a,b)$, $I = (-\infty, b)$ oder $I = (a, +\infty)$, wenn f an jeder (inneren) Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar ist;
- Intervall $I \subseteq D$ der Form $I = [a,b)$ bzw. $I = [a, +\infty)$, wenn 1) f auf dem offenen Intervall (a,b) bzw. $(a, +\infty)$ differenzierbar ist und 2) f in a rechtsseitig differenzierbar ist;
- Intervall $I \subseteq D$ der Form $I = (a,b]$ bzw. $I = (-\infty, b]$, wenn 1) f auf dem offenen Intervall (a,b) bzw. $(-\infty, b)$ differenzierbar ist und 2) f in b linksseitig differenzierbar ist;
- abgeschlossenen Intervall $I = [a,b], I \subseteq D$, wenn 1) f auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar ist, 2) f in a rechtsseitig differenzierbar ist und 3) f in b linksseitig differenzierbar ist;

Die Funktion f heisst **differenzierbar**, wenn f auf jedem Intervall $I \subseteq D$ differenzierbar ist.

Definition 5.3.6 — Die Ableitungsfunktion.
Sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion. Der **Differenzierbarkeitsbereich** $D_{f'} \subseteq D$ von f umfasst alle inneren Stellen von D, an welchen die Funktion f differenzierbar ist, sowie Randstellen $x \in D$, wenn die Funktion dort links- oder rechtsseitig differenzierbar ist. Die reelle Funktion f', die jedem $x \in D_{f'}$ den Wert

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

bzw. an Randstellen von $D_{f'}$ den entsprechenden einseitigen Grenzwert zuweist, heisst **Ableitungsfunktion** von f, **erste Ableitung** oder Ableitung erster Ordnung von f (auf $D_{f'}$). Statt $f'(x)$ schreibt man auch $f^{(1)}(x)$ oder $\frac{df(x)}{dx}$.

Definition 5.3.7 — Die n-te Ableitung.
Ist $D_{f''} \subseteq D_{f'}$ der Differenzierbarkeitsbereich von f', dann heisst die Funktion $f'': D_{f''} \to \mathbb{R}$, welche jeder inneren Stelle den Wert

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

und Randstellen von $D_{f'}$ den entsprechenden einseitigen Grenzwert zuweist, die **2. Ableitung** von f (auf $D_{f''}$) oder Ableitung zweiter Ordnung. Man schreibt auch $f^{(2)}(x)$ statt $f''(x)$ und $f^{(1)}(x)$ statt $f'(x)$.

Analog wird für alle x, für die folgender Grenzwert existiert, die ***n*-te Ableitung** $f^{(n)}$ für $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$, als Funktion mit Abbildungsvorschrift

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

definiert, wobei man an Randstellen gegebenenfalls den einseitigen Grenzwert bildet. Die n-te Ableitung bezeichnet man auch als Ableitung n-ter Ordnung.

Definition 5.3.8 — Stetig differenzierbare Funktion.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine reelle Funktion $f: D \to Z$ heisst n-mal differenzierbar in $x \in D$, wenn $f^{(n)}(x)$ existiert. Ist die Funktion $f^{(n)}$ in x zusätzlich stetig, so heisst die Funktion ***n*-mal stetig differenzierbar** in $x \in D$.

Ist f eine reelle Funktion, welche n-mal (stetig) differenzierbar für alle $x \in D$ ist, so heisst f kurz n-mal (stetig) differenzierbar. Ist eine reelle Funktion n-mal stetig differenzierbar für alle $n \in \mathbb{N}$, dann nennt man sie unendlich oft stetig differenzierbar oder glatt.

5.4 Eigenschaften

Definition 5.4.1 — Monotonieverhalten reeller Funktionen.
Gilt für eine reelle Funktion $f: D \to Z$ und für eine Teilmenge $M \subseteq D$, dass für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$

- $f(x_1) \leq f(x_2)$, so heisst f **monoton steigend** (oder monoton wachsend) auf M bzw. in M;
- $f(x_1) < f(x_2)$, so heisst f **streng monoton steigend** (oder streng monoton wachsend) auf M bzw. in M;
- $f(x_1) \geq f(x_2)$, so heisst f **monoton fallend** auf M bzw. in M;
- $f(x_1) > f(x_2)$, so heisst f **streng monoton fallend** auf M bzw. in M.

Ist f (streng) monoton steigend oder (streng) monoton fallend auf M, so sagt man auch, dass f (streng) **monoton** auf M ist. Gilt eine dieser Eigenschaften für $M = D$, wird auf den Zusatz "auf D" oft verzichtet.

Definition 5.4.2 — Konvexe und konkave Funktionen.
Die reelle Funktion $f : D \to Z$ heisst auf dem Intervall $I \subseteq D$

- **konvex**, wenn $\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \geq f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ und $0 < \alpha < 1$;
- **streng konvex**, wenn $\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) > f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ und $0 < \alpha < 1$;
- **konkav**, wenn $\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \leq f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ und $0 < \alpha < 1$ und
- **streng konkav**, wenn $\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) < f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ und $0 < \alpha < 1$.

Man sagt, f ist (streng) konvex, wenn f auf dem Intervall $I = D$ (streng) konvex ist; man sagt, f ist (streng) konkav, wenn f auf dem Intervall $I = D$ (streng) konkav ist.

Definition 5.4.3 — Wendepunkt.
Sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion f hat an der Stelle x_0 einen **Wendepunkt**, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass f auf $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng konkav und auf $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ streng konvex ist. Ebenso hat f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, wenn f auf $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng konvex und auf $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ streng konkav ist.

Ist die Funktion f an der Stelle x_0 zusätzlich differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$, so nennt man x_0 auch **Sattelpunkt** oder Terrassenpunkt.

Definition 5.4.4 — Symmetrieeigenschaften.
Die reelle Funktion $f : D \to Z$, für die für alle $x \in D$ auch $-x \in D$ ist, heisst

- **spiegelsymmetrisch zur y-Achse** (oder achsensymmetrisch zur y-Achse bzw. gerade), wenn
$$f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in D;$$
- **punktsymmetrisch zum Urspung** (oder ungerade), wenn
$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in D.$$

Definition 5.4.5 — Periodische Funktionen.
Eine reelle Funktion $f : D \to Z$, für die für alle $x \in D$ mit $T > 0$ (fest) auch $x + T \in D$ gilt, heisst **periodisch** mit **Periode** T, falls
$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in D.$$

5.5 Taylorpolynome

Definition 5.5.1 — Taylorpolynom.
Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Für eine reelle Funktion f, die n-mal auf einem offenen Intervall I

differenzierbar ist, heisst das Polynom

$$t_{n,x_0}(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

für $x, x_0 \in I$ **Taylorpolynom** n-ten Grades für f an der Stelle x_0. Die Differenz

$$r_{n,x_0}(x) = f(x) - t_{n,x_0}(x)$$

bezeichnet man als **Restglied** und die Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_{n,x_0}(x)$$

als **Taylor-Formel** oder **Taylor-Entwicklung** von f an der Stelle x_0.

5.6 Extremwertbestimmung

Definition 5.6.1 — Globale Extrema.
Sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion. Gibt es ein $x^{\max} \in D$ mit $f(x^{\max}) \geq f(x)$ für alle $x \in D$, so heisst

$$\max f(D) = \max_{x \in D} f(x) = f(x^{\max})$$

globales Maximum von f und $x^{\max}$ **globale Maximalstelle**. Die Menge aller globalen Maximalstellen wird durch $\arg\max_{x \in D} f(x)$ symbolisiert.

Gibt es ein $x^{\min} \in D$ mit $f(x^{\min}) \leq f(x)$ für alle $x \in D$, so heisst

$$\min f(D) = \min_{x \in D} f(x) = f(x^{\min})$$

globales Minimum von f und $x^{\min}$ **globale Minimalstelle**. Die Menge aller globalen Minimalstellen wird durch $\arg\min_{x \in D} f(x)$ symbolisiert.

Ein globales Maximum oder globales Minimum wird auch als globales **Extremum** oder Extremwert bezeichnet, analog ist eine (globale) **Extremalstelle** eine (globale) Minimal- oder (globale) Maximalstelle.

Definition 5.6.2 — Supremum und Infimum.
Sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion. Ist der Wertebereich $f(D)$ nach oben beschränkt, so nennt man die kleinste obere Schranke

$$\sup f(D) = \sup_{x \in D} f(x)$$

das **Supremum** von f. Ist $f(D)$ nicht nach oben beschränkt, schreibt man $\sup_{x \in D} f(x) = +\infty$.

Ist der Wertebereich $f(D)$ nach unten beschränkt, so nennt man die grösste untere Schranke

$$\inf f(D) = \inf_{x \in D} f(x)$$

das **Infimum** von f. Ist $f(D)$ nicht nach unten beschränkt, schreibt man $\inf_{x \in D} f(x) = -\infty$.

Definition 5.6.3 — Lokale Extrema und Extremalstellen.
Es sei $f : D \to Z$ eine reelle Funktion, eine Stelle $x_0 \in D$ und $U(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Die Funktion f hat in x_0 ein **lokales Maximum** $f(x_0)$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in U(x_0, \varepsilon) \cap D.$$

In diesem Fall ist x_0 **lokale Maximalstelle** von f.
Die Funktion f hat in x_0 ein **lokales Minimum** $f(x_0)$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in U(x_0, \varepsilon) \cap D.$$

In diesem Fall ist x_0 **lokale Minimalstelle** von f.
Lokales Extremum ist der Sammelbegriff für ein lokales Maximum oder Minimum, eine **lokale Extremalstelle** ist eine lokale Minimal- oder Maximalstelle.

Definition 5.6.4 — Stationäre Punkte.
Eine reelle Funktion $f : D \to Z$ hat an der inneren Stelle x_0 von D einen **stationären Punkt** $(x_0, f(x_0))^T$ oder kritischen Punkt, falls f in x_0 differenzierbar ist mit $f'(x_0) = 0$. Die Stelle x_0 mit $f'(x_0) = 0$ nennen wir stationäre Stelle.

Definition 5.6.5 — Beschränkte Funktionen.
Ist der Wertebereich $f(D)$ einer reellen Funktion $f : D \to Z$ beschränkt, so heisst f **beschränkt**.

5.7 Integralrechnung

Definition 5.7.1 — Die Stammfunktion.
Sei $f : D \to Z_1$ eine reelle Funktion und D ein Intervall. Jede reelle Funktion $F : D \to Z_2$ mit

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in D$$

heisst **Stammfunktion** von f.

Definition 5.7.2 — Das unbestimmte Integral.
Sei f eine reelle Funktion mit Stammfunktion F. Die Menge aller (unendlich vielen) Stammfunktionen von f bezeichnet man als **unbestimmtes Integral**

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Man bezeichnet x als Integrationsvariable, $f(x)$ als Integranden und c als Integrationskonstante.

Definition 5.7.3 — Riemann-integrierbare Funktionen.
Die reelle Funktion $f: D \to Z$, $[a,b] \subseteq D$, $a,b \in \mathbb{R}$, heisst **(Riemann-)integrierbar** im bzw. auf oder über dem Intervall $[a,b]$, wenn sie beschränkt ist und der Grenzwert der Untersumme dem Grenzwert der Obersumme entspricht, also wenn

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} o_k = \lim_{n\to+\infty} O_n,$$

mit $u_k = \inf_{x\in I_k} f(x)$ und $o_k = \sup_{x\in I_k} f(x)$ und $I_k = \left[a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}\right]$, $k = 1,\ldots,n$. Ist f Riemann-integrierbar über $D = [a,b]$, nennt man f auch kurz Riemann-integrierbar.

Definition 5.7.4 — Das bestimmte Integral.
Sei f eine über dem Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbare Funktion. Den Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} O_n$$

bezeichnet man als das **bestimmte Integral** von f im, über oder auf dem Intervall $[a,b]$. Hierbei bezeichnet man x als Integrationsvariable, $f(x)$ als Integranden, und a und b als Integrationsgrenzen.

Definition 5.7.5 — Punktintegral und Tausch der Integrationsgrenzen.
Es sei f eine über $[a,b]$ Riemann-integrierbare reelle Funktion, $z \in [a,b]$. Dann definieren wir

$$\int_z^z f(x)\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Definition 5.7.6 — Uneigentliche Integrale (über unbeschränkten Intervallen). Ist die reelle Funktion $f : D \to Z$ über jedem endlichen Intervall $[a,b], b > a$ Riemann-integrierbar und $[a,+\infty) \subseteq D$, dann heisst der Grenzwert

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

uneigentliches Integral von *f* über $[a,+\infty)$. Existiert der Grenzwert, spricht man von einem konvergenten uneigentlichen Integral. Existiert der Grenzwert nicht, spricht man von einem divergenten uneigentlichen Integral oder man sagt, dass f über $[a,+\infty)$ nicht uneigentlich integrierbar ist.

Ist die reelle Funktion $f : D \to Z$ über jedem endlichen Intervall $[a,b], b > a$ Riemann-integrierbar und $(-\infty, b] \subseteq D$, dann heisst der Grenzwert

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

uneigentliches Integral von f über $(-\infty, b]$. Existiert der Grenzwert, spricht man von einem konvergenten uneigentlichen Integral. Existiert der Grenzwert nicht, spricht man von einem divergenten uneigentlichen Integral oder man sagt, dass f über $(-\infty, b]$ nicht uneigentlich integrierbar ist.

Ist f auf dem Intervall $(-\infty,+\infty)$ definiert und existiert ein $z \in \mathbb{R}$, für welches die uneigentlichen Integrale $\int_{-\infty}^{z} f(x)\, dx$ und $\int_z^{+\infty} f(x)\, dx$ konvergent sind, dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{z} f(x)\, dx + \int_z^{+\infty} f(x)\, dx$$

das (konvergente) uneigentliche Integral von f über $(-\infty,+\infty)$ bzw. auf $\mathbb{R}$. Existiert ein solches z nicht, so sagt man, dass f auf $\mathbb{R}$ nicht uneigentlich integrierbar ist.

Definition 5.7.7 — Uneigentliche Integrale (unbeschränkter Funktionen).
Sei $[a,b) \subseteq D$ und $f: D \to Z$ eine reelle unbeschränkte Funktion, die über jedem Intervall $[a, b-\varepsilon]$ mit $\varepsilon \in (0, b-a)$ Riemann-integrierbar ist. Dann heisst

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

uneigentliches Integral von f im Intervall $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Existiert der Grenzwert, spricht man von einem konvergenten uneigentlichen Integral. Existiert der Grenzwert nicht, spricht man von einem divergenten uneigentlichen Integral oder man sagt, dass f über $[a,b]$ nicht uneigentlich integrierbar ist.

Sei $(a,b] \subseteq D$ und $f: D \to Z$ eine reelle unbeschränkte Funktion, die über jedem Intervall $[a+\varepsilon, b]$ mit $\varepsilon \in (0, b-a)$ Riemann-integrierbar ist. Dann heisst

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

uneigentliches Integral von f im Intervall $[a,b]$. Existiert der Grenzwert, spricht man von einem konvergenten uneigentlichen Integral. Existiert der Grenzwert nicht, spricht man von einem divergenten uneigentlichen Integral oder man sagt, dass f über $[a,b]$ nicht uneigentlich integrierbar ist.

Ist $(a,b) \subseteq D$ und $f: D \to Z$ eine reelle unbeschränkte Funktion, für die mit $z \in (a,b)$ die uneigentlichen Integrale $\int_a^z f(x)\,dx$ und $\int_z^b f(x)\,dx$ konvergent sind. Dann heisst

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^z f(x)\,dx + \int_z^b f(x)\,dx$$

uneigentliches Integral von f über dem Intervall $[a,b]$. Existieren beide Grenzwerte, spricht man von einem konvergenten uneigentlichen Integral. Existiert einer der Grenzwerte nicht, spricht man von einem divergenten uneigentlichen Integral oder man sagt, dass f über $[a,b]$ nicht uneigentlich integrierbar ist.