ZUSAMMENFASSUNG

6 Linearkombinationen

1.2 Vektoren (Vorwissen)

Geradengleichung

$\boxed{y = mx + b}$ ⟶ Parameterform: $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}}$

P: Verschiebungsvektor
S: Steigungsvektor

m: Steigung
b: y-Achsenabschnitt

Überführung Geradengleichung in Parameterform

Beispiel: $y = 4 - \frac{1}{4}x$

① $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 4 - \frac{1}{4}x \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} x \\ 4 - \frac{1}{4}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung

$\boxed{z = a_0 + a_1 x + a_2 y}$

Überführung Ebenengleichung in Parameterform

Beispiel: $z = 2 + 5x - 3y$

① $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2+5x-3y \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2+5x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1x + 0y \\ 0 + 0x + 1y \\ 2 + 5x - 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \overset{x}{t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \overset{y}{t_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

6.1 Richtungen von Vektoren

Länge / Norm eines Vektors

Definition 2.1.5: Die Länge oder Norm eines Vektors

$$\underbrace{||\mathbf{v}||}_{\text{Länge oder Norm von } \mathbf{v}} = \left|\left| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \right|\right| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + \cdots + (v_m)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (v_i)^2}, \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$$

Beispiele: $\left|\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right|\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\left|\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|\right| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \underline{1}$

Ein Einheitsvektor hat Länge 1

Definition 6.1.2: Nullvektoren, Einheitsvektoren

$$\underbrace{\mathbf{0}}_{\text{Nullvektor}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\mathbf{e}^k}_{\text{k-ter (kanonischer) Einheitsvektor}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Richtung eines Vektors

Definition 6.1.3: Richtung eines Vektors

$$\underbrace{\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}}_{\text{Richtung von } \mathbf{v}}, \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m, \ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$$

Beispiel:

- $\dfrac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left|\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right|\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\underbrace{\sqrt{3^2+4^2}}_{=5}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}}}$
- $\dfrac{\begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\left|\begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}\right|\right|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}}{\underbrace{\sqrt{1.5^2+2^2}}_{=2.5}} = \begin{pmatrix} \frac{1.5}{2.5} \\ \frac{2}{2.5} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}}}$

Die Vektoren (3,4) und (1.5,2) haben die gleiche Richtung

$\vec{x}$ und $\vec{y}$ zeigen in gleiche Richtung wenn.

$$\frac{x}{||x||} = \frac{y}{||y||}$$

Allgemeine Folgerungen

- Der Nullvektor $\mathbf{0}$ ist orthogonal zu jedem Vektor.
- $\mathbf{x}$ und $\alpha\mathbf{x}$ zeigen genau dann in dieselbe Richtung, wenn $\alpha > 0$.
- $\mathbf{x}$ und $\alpha\mathbf{x}$ zeigen genau dann in entgegengesetzte Richtung, wenn $\alpha < 0$.
- Es gilt $||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha|\,||\mathbf{x}||$.

Skalarprodukt

Definition 6.1.4: (Euklidisches) Skalarprodukt

$$\underbrace{(\mathbf{v}^1)^T\mathbf{v}^2 = \langle \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \rangle}_{\text{Skalarprodukt von } \mathbf{v}^1 \text{ und } \mathbf{v}^2} = \sum_{i=1}^{m} v_i^1 v_i^2$$

$$(v_1^1 \ v_2^1 \ v_3^1) \cdot \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \end{pmatrix}$$

- $(v^1)^T v^2 = (v^2)^T v^1$ → Dreht man die Produkte um, erhält man das gleiche Resultat
- Bei Verdoppelung des Vektors verdoppelt sich auch das Skalarprodukt

Definition 6.1.5: Orthogonale Vektoren

Haben zwei Vektoren ein Skalarprodukt von 0, heissen sie **orthogonal**.

- entweder ist einer der beiden Vektoren ein Nullvektor
- oder die beiden Vektoren bilden einen rechten Winkel
- die Vektoren sind senkrecht zueinander
  - ↳ hortogonal ⇒ lin. unabhängigkeit

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = ||\mathbf{x}||^2.$$

Distanz zweier Vektoren

Distanz zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$\boxed{||v - u|| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2}}$ = Entfernung

Definition 2.2.4: Die skalare Multiplikation

$$\overset{\text{Skalar}}{\alpha}\underset{\text{Vektor}}{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \vdots \\ \alpha v_m \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Das Vielfache eines Vektors

$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad 2v = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad -2v = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$

6.2 Die Linearkombination

Definition 6.2.1: Linearkombination

Für $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}, \mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$:

Linearkombination der Vektoren $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}^i = \alpha_1\mathbf{v}^1 + \alpha_2\mathbf{v}^2 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$$

$\vec{0}$ kann immer als Linearkombination dargestellt werden

Beispiel: $v_1 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}-2\\1.5\end{pmatrix}$ $\alpha_1 = 2$ $\alpha_2 = -3$

$2v^1 - 3v^2 = 2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}-2\\1.5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\3.5\end{pmatrix}$

6.3 Lineare Unabhängigkeit

Definition 6.3.1: Lineare Abhängigkeit

$\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m, n \geq 2$, heissen linear abhängig, wenn mindestens einer der Vektoren als Linearkombination der anderen darstellbar ist.

Sätze 6.3.1 – 6.3.2: Lineare Unabhängigkeit zweier Vektoren

$\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \neq \mathbf{0}$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ es existiert $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{v}^1 = \alpha\mathbf{v}^2$

$\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \neq \mathbf{0}$ orthogonal $\Rightarrow \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ linear unabhängig

Satz 6.3.3: Lineare Unabhängigkeit

$\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$

$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ einzige Lösung von $\alpha_1\mathbf{v}^1 + \alpha_2\mathbf{v}^2 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}^n = \mathbf{0}$

- $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix}1.5\\2\end{pmatrix}$ — $v^1 = 2v^2$
- $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ — $v^1 = 0 \cdot v^2$
- $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$ — $2v^1 = v^2$

$\rightarrow$ linear abhängig

- $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
- $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$
- $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix}-2\\1.5\end{pmatrix}$

$\rightarrow$ linear unabhängig

Allgemeine Folgerung: Ist einer der Vektoren $\mathbf{v}^i, 1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}$, der Nullvektor, $\mathbf{0}$, so sind die Vektoren $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$ stets linear abhängig.

$\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \mathbf{v}^4 = \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}, \mathbf{v}^5 = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$

- $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^4$: $\mathbf{v}^4 = 2\mathbf{v}^1 \Rightarrow \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^4$ linear abhängig

$$\alpha_1\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\alpha_2\\2\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_4\\\alpha_1+2\alpha_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_2 = 0,\ \alpha_1 = -2\alpha_4$$

- $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^5$: $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^5$ linear unabhängig $\rightarrow$ alle alphas gleich null

$$\alpha_1\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha_5\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\alpha_2+3\alpha_5\\2\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_5\\\alpha_1+\alpha_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, \alpha_5 = 0$$

Questo metodo è il migliore per vedere se i vettori sono linearmente dipendenti o no. Può anche essere usato con dei parametri (vedi Quiz 1).

Untersuchung dreier Vektoren auf Abhängigkeit

$\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix}4\\6\\1\end{pmatrix}$

- $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$: $\mathbf{v}^3 = \mathbf{v}^1 + 2\mathbf{v}^2 \Rightarrow \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$ linear abhängig

  oder $\mathbf{v}^2 = 0.5\mathbf{v}^3 - 0.5\mathbf{v}^1$

  oder $\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^3 - 2\mathbf{v}^2$

6.4 Lineare Hülle, linearer Raum, Dimensionen

Hülle $\rightarrow$ ist immer ein linearer Raum

$\hookrightarrow$ Menge alle Linearkombinationen

Menge aller Linearkombinationen

Definition 6.4.1: Die lineare Hülle

$$\text{lin}\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n\} = \left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{v}^i \,\middle|\, \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^m, \quad \text{lin}\{\} = \{\mathbf{0}\}$$

Lineare Hülle ist stets ein linearer Raum

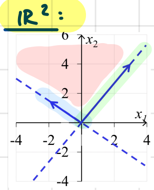
Hülle $\rightarrow$ mind. 1 Vektor ($\neq \{\vec{0}\}$)

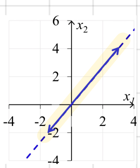
ist $\vec{v} \neq \vec{0}$, ist lin $\{\vec{v}\}$ eine Ursprungsgerade

"posso muoverlo solo avanti e indietro"

$\mathbb{R}^2$:

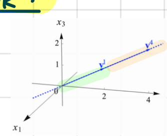
con un vettore è sempre una gerade.

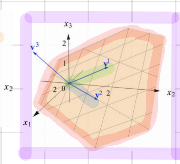




- $\text{lin}\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^2$.
- $\text{lin}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1.5\end{pmatrix}\right\}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^2$.
- $\text{lin}\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1.5\end{pmatrix}\right\}$ ist der $\mathbb{R}^2$. linear unabhängig
- $\text{lin}\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1.5\\-2\end{pmatrix}\right\}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^2$. linear abhängig $\rightarrow$ conta come un solo elemento, poiché i vettori sono multipli, e quindi del linearer Raum non aumenta

$\mathbb{R}^3$:





- $\text{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^3$.
- $\text{lin}\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^3$.
- $\text{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$ ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.
- $\text{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}\right\}$ ist eine Gerade im $\mathbb{R}^3$.
- $\text{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$ ist der $\mathbb{R}^3$.

Definition 6.4.2, Sätze 6.4.1 – 6.4.2: Linearer Raum und lineare Hülle

$V \subseteq \mathbb{R}^m, V \neq \{\}$ heisst **linearer Raum** oder **Vektorraum**, wenn:

- $\mathbf{v} \in V \Rightarrow \alpha\mathbf{v} \in V$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\Rightarrow \mathbf{0} \in V$). z.B lin$\left\{\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}\right\}$ damit auch $\vec{w} = \begin{pmatrix}9\\15\\3\end{pmatrix} \in V$
- $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. z.B lin$\left\{\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}\right\}$ damit auch $\vec{z} = \vec{v} + \vec{w} \in V$ $\hookrightarrow \vec{z} = \begin{pmatrix}12\\20\\4\end{pmatrix}$

$V = \text{lin}\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n\}$ ist ein linearer Raum.

- $V = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ ist ein linearer Raum.

Linearer Raum-Kriterien

In diesem Teil des Videos werden die beiden Kriterien, die für einen Vektorraum gelten müssen (siehe Definition 6.4.2), für das Beispiel $V = \text{lin}\{(0,2,1)^T\}$ überprüft:

1) Es muss gelten, dass für jeden Vektor $\mathbf{v} \in V$ auch jedes Vielfache $\alpha\mathbf{v}$ ein Element von V ist. Sei also $\mathbf{v}$ ein beliebiger Vektor aus V. Weil V gleich der linearen Hülle von $\{(0,2,1)^T\}$ ist, kann man den Vektor $\mathbf{v}$ als $\alpha_1(0,2,1)^T$ mit $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ schreiben. Daraus kann man schliessen, dass ein beliebiges Vielfaches von $\mathbf{v}$, also jedes $\alpha\mathbf{v}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, auch wieder ein Element von V sein muss, weil ja $\alpha\mathbf{v} = \alpha\alpha_1(0,2,1)^T$ auch ein Vielfaches von $(0,2,1)^T$ ist und damit in der linearen Hülle von $\{(0,2,1)^T\}$ liegt.

2) Es muss gelten, dass für beliebige zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ auch die Summe $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ wieder ein Element von V ist. Analog zu oben können wir $\mathbf{v} = \alpha_1(0,2,1)^T$ und $\mathbf{w} = \alpha_2(0,2,1)^T$ schreiben, und damit ist auch die Summe $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha_1 + \alpha_2)(0,2,1)^T$ ein Vielfaches von $(0,2,1)^T$ und damit in der linearen Hülle von $\{(0,2,1)^T\}$ enthalten.

Definition 6.4.3: Erzeugendensystem

Die Menge $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n\}$ heisst **Erzeugendensystem** von V, wenn $V = \text{lin}\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n\}$.

z.B $\vec{V_1} = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}\right\}$ ist ein Erzeug. des $\mathbb{R}^2$ aber $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-17\\-17\end{pmatrix}\right\}$ nicht

l/lin unabhängig — abhängig

Erzeugendensysteme von V sind u.a.

- $\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ • $\left\{\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}\right\}$ — Basis von V
- $\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}\right\}$ — keine Basis

linear $\leftrightarrow$ unabhängig

linear abhängig $\leftrightarrow$

Basis und Dimension

Die Anzahl der linear unabhängige Vektoren eines Basis von den linearen Raum, nennt man Dimension des linearen Raums.

$n = \dim(V)$ **Dimension**

Definition 6.4.4: Basis und Dimension

$B = \{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n\}$ heisst **Basis** von V, wenn $\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n$ linear unabhängig sind und $\text{lin}\{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n\} = V$.

Basis: linear unabhängiges Erzeugendensystem

(meistens besitzt ein Vektorraum mehrere Basen)

Basis kann höchstens m l.u. Vektoren finden im $\mathbb{R}^m$

Beispiele:

linear unabhängig

- $U = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$ ist ein linearer Raum, $\dim(U) = 2$.
- $W = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \text{lin}\{\}$ ist ein linearer Raum, $\dim(W) = 0$.
- $V = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ ist ein linearer Raum, $\dim(V) = 1$.

Spezialfall:

$\{0\}$ keine Basis von $V = \{0\}$

($\{0\}$ ist EZS aber nicht l.u.)

Der Nullvektor selbst alleine ist linear abhängig

$\{\}$ ist Basis von $V = \{0\}$

($\{\}$ ist EZS und l.u.)

Definition 6.4.5: Geraden, Ebenen und Hyperebenen

Der lineare Raum $V \subseteq \mathbb{R}^m$ heisst **Punkt**, wenn $\dim(V) = 0$, **Gerade**, wenn $\dim(V) = 1$, **Ebene**, wenn $\dim(V) = 2$ und **Hyperebene**, wenn $\dim(V) = m - 1$.

↳ im $\mathbb{R}^{127}$, immer noch Dimension 2

↳ z.B im $\mathbb{R}^3$ Dimension = 2, im $\mathbb{R}^{127}$ Dimension = 126

dim (V) = 0 → Punkt

dim (V) = 1 → Gerade

dim (V) = 2 → Ebene

dim (V) = m-1 → Hyperebene

Hyperebene: Ein lin. Raum $V \subseteq \mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$

Beispiele: $\subseteq \mathbb{R}^2$

- $\text{lin}\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$ ist ein linearer Raum mit Dimension 1. $= m-1$ — Gerade und Hyperebene

$\mathbb{R}^2$:

- $\text{lin}\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ ist ein linearer Raum mit Dimension 2. — Ebene
- $\text{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ ist ein linearer Raum mit Dimension 2. — Ebene
- $\text{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ ist ein linearer Raum mit Dimension 2. — Ebene
- $\text{lin}\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ ist ein linearer Raum mit Dimension 2. — Ebene

Rang der Basis:

= Anzahl Basisvektoren

= Dimension

→ dim (V) = rang (Basis)

rang (V) = Anzahl linear unabhängiger Vektoren

Basistausch

→ linearer Raum verändert sich nicht (nur die Basis ändert)

Sätze 6.4.9, 6.4.5: Erzeugendensysteme und Basistausch

- Ist $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}^1 + \cdots + \alpha_i\mathbf{v}^i + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}^n$ mit $\alpha_i \neq 0$
  $\Rightarrow V = \text{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^i, \ldots, \mathbf{v}^n\} = \text{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{v}^n\}$.
- Ist zusätzlich $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^i, \ldots, \mathbf{v}^n\}$ eine Basis von V
  $\Rightarrow \{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{v}^n\}$ eine Basis von V.

Für $\alpha = 0$ gilt $(0,0,0)$ → keine Basis

Beispiele:

Basistausch

$$U = \text{lin}\left\{\overset{\vec{v_1}}{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}}, \overset{\vec{v_2}}{\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}}\right\} = \text{lin}\left\{\overset{\vec{v_1}}{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}}, \overset{\vec{u_1}}{\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}}\right\}$$

Basis von u_1

$$= \text{lin}\left\{\overset{\vec{v_1}}{\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}}, \overset{\vec{v_2}}{\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}}\right\}$$

$$= \text{lin}\left\{\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \neq \text{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Das geht

alpha gleich null!

$= 0 \cdot \vec{u_1} + \frac{1}{2}\vec{v_2}$

geht nicht (posizione 1 e $\alpha_1 = 0$) → nicht mehr linear unabhängig

$$-2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + 2.5\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix} = \vec{u_1}$$

↳ si può scegliere qualsiasi alpha $\neq 0$

Das geht nicht: ist nur noch eine Ebene und linear abhängig

Basis des $\mathbb{R}^m$

Definition 6.4.6: Kanonische Basis

Die Basis $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^m\}$ des $\mathbb{R}^m$ heisst **kanonische Basis** des $\mathbb{R}^m$.

Satz 6.4.7: Basis des euklidischen Raums

$\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig $\Rightarrow \text{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m\} = \mathbb{R}^m$.

Beispiel:

- $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ ist die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$
  $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
- $\text{lin}\left\{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$ linear unabhängig

Satz 6.4.8: Maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren

Für $n > m$ sind $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$ stets linear abhängig.

Beispiel:

- $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ sind linear abhängig $\in \mathbb{R}^3$

$n = 3 > m = 2$ → linear abhängig

6.5 Matrizen

Definition 6.5.1: $m \times n$ Matrix

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und $a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c}\mathbf{a}_1\\ \\ \\ \mathbf{a}_m\end{array} \\ \mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2 \qquad\quad \mathbf{a}^n \end{array} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n} = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n]$$

Matrix vom Typ $m \times n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

m: Zeilen

n: Spalten

$$R = \begin{array}{c|ccc} & n_1 & n_2 & n_3 \\ \hline m_1 & 0.04 & 0.18 & 0.28 \\ m_2 & 0.48 & 0.12 & 0.00 \end{array}$$ → 2×3 Matrix $\in \mathbb{R}^{2\times3}$

$$Z = \begin{array}{c|ccc} & n_1 & n_2 & n_3 \\ \hline m_1 & 0 & 10 & 4 \\ m_2 & 5 & 10 & 14 \\ m_3 & 15 & 0 & 2 \end{array}$$ → 3×3 Matrix $\in \mathbb{R}^{3\times3}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 & 12 \\ 5 & 0 & 6 & 10 \\ 8 & 6 & 0 & 7 \\ 12 & 10 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$ → 4×4 Matrix $\in \mathbb{R}^{4\times4}$

$d_1 = (0, 5, 8, 12)$ $\quad d^3 = \begin{pmatrix}8\\6\\0\\7\end{pmatrix}$

Definition 6.5.3: Die Transponierte

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Transponierte von A

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{array}{c}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_3\end{array} \\ \mathbf{a}^1 \quad \mathbf{a}^2 \quad \mathbf{a}^3 \end{array} \quad\downarrow\quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{array}{c}(\mathbf{a}^1)^T\\ (\mathbf{a}^2)^T\\ (\mathbf{a}^3)^T\end{array} \\ \mathbf{a}_1^T \quad \mathbf{a}_2^T \quad \mathbf{a}_3^T \end{array}$$

Zeilen werden Spalten und Spalten werden Zeilen

$R \in \mathbb{R}^{2\times3}$ $\quad R = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.18 & 0.28 \\ 0.48 & 0.12 & 0.00 \end{pmatrix}$ $\quad R^T = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.48 \\ 0.18 & 0.12 \\ 0.28 & 0.00 \end{pmatrix}$ $\quad R \in \mathbb{R}^{3\times2}$

$Z = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 4 \\ 5 & 10 & 14 \\ 15 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad Z^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 15 \\ 10 & 10 & 0 \\ 4 & 14 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad (A^T)^T = A$

Quadratische Matrizen

Definitionen 6.5.5 – 6.5.7: Quadratische Matrizen

n × n → Anzahl Zeilen = Anzahl Spalten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n}$$

Quadratische Matrix der Ordnung n

Hauptdiagonale

- symmetrisch, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$; → $A^T = A$ (la matrice trasposta è uguale all'originale)
- Diagonalmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$;
- Einheitsmatrix wenn $a_{ii} = 1$ für alle i, $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.

Wenn eine Matrix nicht quadratisch ist, kann sie nicht eine Symmetrische/Diagonalmatrix/Einheitsmatrix sein.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

symmetrisch (und auch quadratisch) $\quad A = A^T$

Falls eine Matrix nicht quadratisch ist, dann hat sie keine Hauptdiagonale !

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

alle Elemente ausserhalb der Hauptdiagonale sind = 0

Diagonalmatrix (spezielle Symmetrische Matrix und ist auch quadratisch)

(jede Diagonalmatrix ist symmetrisch!) + quadratisch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix (spezielle Diagonalmatrix) und symmetrisch

$$I_4 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix der Ordnung 4

Matrizenmultiplikation

Definition 6.5.8: Matrix-Vektor-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}x_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

$A^{3\times 3} \cdot B^{3\times 3} = C^{3\times 3}$

$A^{2\times 3} \cdot B^{3\times 2} = C^{2\times 2}$

$\boxed{A^{m\times n} \cdot B^{p\times q} = C^{m\times q} \quad \text{wenn } n = p}$

! Nur möglich wenn n von A = m von B

n → colonne

m → righe

Definition 6.5.9: Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kp} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{kp} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

C → righe di A e colonne di B

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 0.04 & 0.18 & 0.28 \\ 0.48 & 0.12 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 10 & 4 \\ 5 & 10 & 14 \\ 15 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.1 & 2.2 & 3.2 \\ 0.6 & 6.0 & 3.6 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation einer Matrix A mit einem Vektor v entspricht einer Linearkombination der Spalten(-vektoren) von A mit Gewichten vi)

Multiplikation mit Konstante α

Definition 6.5.10: Produkt einer Konstanten mit einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$R = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.18 & 0.28 \\ 0.48 & 0.12 & 0 \end{pmatrix}, \; 100R = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 28 \\ 48 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln Matrizenmultiplikation

Satz 6.5.2: Regeln der Matrizenmultiplikation

Sei A eine $m \times n$-Matrix, B eine $n \times p$-Matrix, C eine $p \times q$-Matrix, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$; → Reihenfolge der Matrizen kehrt sich um.
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$; assoziativ
- $A \cdot \alpha \cdot B = \alpha \cdot A \cdot B$; produkt zweier Matrizen mal eine Konstante
- Ist I die Einheitsmatrix passender Ordnung, so gilt $A \cdot I_{n\times n} = A$, bzw. $I_{m\times m} \cdot A = A$. falls A quadratisch → $A \cdot I \cdot I \cdot I = A \cdot I = A$

Multiplikation ist aber nicht kommutativ!

$A \cdot B \neq B \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+6 & 0+7 \\ 8+18 & 10+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 26 & 31 \end{pmatrix}$$

$\neq$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+10 & 4+15 \\ 0+14 & 6+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}$$

Nullmatrix

Definition 6.5.4: Nullzeilen,- spalten und die Nullmatrix

Man spricht von einer

- **Nullzeile**, wenn alle Elemente der Zeile Null sind;
- **Nullspalte**, wenn alle Elemente der Spalte Null sind;
- **Nullmatrix**, wenn alle Spalten Nullspalten sind.

Das Produkt zweier Matrizen kann eine Nullmatrix ergeben, selbst wenn beide Matrizen keine Nullmatrizen sind.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1.5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1.5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilenvektoren und Zeilenstufenform

Definition 6.5.12: Zeilenstufenform

Die Matrix liegt in **Zeilenstufenform** vor, wenn

- Nullzeilen unterhalb aller Zeilen stehen, die keine Nullzeilen sind und
- in jedem Paar von zwei Zeilen, die keine Nullzeilen sind, das führende Element der oberen Zeile links von dem führenden Element der unteren Zeile steht.

Erstes Element ungleich 0

→ können auch ≠ 1 sein

$$\begin{pmatrix} f_1 & & & & & \\ 0 & f_2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Satz 6.5.3 Lineare Unabhängigkeit von Zeilenvektoren

Alle Zeilenvektoren einer Matrix in Zeilenstufenform, die keine Nullvektoren sind, sind linear unabhängig.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform ✗ ✗

$\mathbf{a}_1 = (1,2,3,4,0,5)$, $\mathbf{a}_2 = (0,9,8,0,0,0)$, $\mathbf{a}_3 = (0,0,7,8,0,9)$, und $\mathbf{a}_4 = (0,0,0,6,0,7)$ sind linear unabhängig

→ Spaltenvektoren mit führendem Element sind linear unabhängig

→ Alle Nicht-Nullzeilen sind linear unabhängig

→ Nullzeile steht unten alle Zeilen.

(Alle Nullzeilen sind lin. abhängig)

- Die Richtung eines Vektors entspricht dem Vektor geteilt durch seine Norm.
- Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt eine Zahl; die skalare Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl ergibt einen Vektor.
- Eine gewichtete Summe von Vektoren nennt man Linearkombination der Vektoren.
- Eine Menge von Vektoren heisst linear abhängig, wenn sich mindestens einer der Vektoren als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lässt.
- Die Menge aller Linearkombinationen, die sich aus einer Menge von Vektoren bilden lassen, heisst lineare Hülle (dieser Vektoren). Sie stellt einen linearen Raum dar.
- Ein linearer Raum kann als lineare Hülle verschiedener Erzeugendensysteme dargestellt werden.
- Die Dimension eines linearen Raums V entspricht der Anzahl der Vektoren einer Basis von V.
- Die Multiplikation einer Matrix A mit einem Vektor $\mathbf{v}$ entspricht einer Linearkombination der Spalten(-vektoren) von A mit Gewichten v_i.
- Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ.
- Bei einer Matrix in Zeilenstufenform ist die Menge aller Zeilenvektoren, welche ungleich Nullvektoren sind, linear unabhängig.

7 Lineare Gleichungssysteme

7.1 Gleichungssysteme

Definitionen 7.1.1 – 7.1.3: Gleichungssystem und Lösbarkeit

Eine Menge von m Gleichungen mit n Variablen heisst **Gleichungssystem**. Ein Gleichungssystem heisst **lösbar**, wenn $\mathbb{L} \neq \{\}$. Gleichungssysteme mit gleicher Lösungsmenge heissen **äquivalent**.

Lösungsmenge

mindestens eine Lösung

Beispiele:

- $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $0 = 0$ — $m=3$ $n=2$ — $\mathbb{L} = \{5, 6\}$
- $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $0 = 7$ — $m=3$ $n=2$ — $\mathbb{L} = \{\}$ nicht lösbar
- $x_1 + x_3 = 2$, $x_2 + 2x_3 = 6$ — $m=2$ $n=3$ — $\mathbb{L} = \{(\ ), (\ ), (\ ) \dots\}$
- $x_1 - 2x_2 = 1$, $3x_1 + 2x_2 = 11$ — $m=2$ $n=2$ — $\mathbb{L} = \{\binom{3}{1}\}$
- $(x_1)^2 = 4$, $(x_2)^2 = 9$, $x_1x_2 = 6$ — $m=3$ $n=2$ — $\mathbb{L} = \{\binom{2}{3}, \binom{-2}{-3}\}$
- $(x_1)^2 = 4$, $(x_2)^2 = 9$, $x_1x_2 = 0$ — $m=3$ $n=2$ — $\mathbb{L} = \{\}$
- $(x_1)^{x_3} = 1$, $(x_1)^6 - \ln(x_2) + x_3 = 0$, $x_1x_2x_3 = -1$ — $m=3$ $n=3$ — $\mathbb{L} = \{(\ )\}$
- $x_1 + e^{x_1} = 0$ — $m=1$ $n=1$ — $\mathbb{L} \neq \{\}$

Lineares Gleichungssystem

→ können mit Hilfe der erweiterten Koeffizientenmatrix beschrieben werden.

Definition 7.1.4: Lineares Gleichungssystem (LGS)

LGS

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

rechte Seite

$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ bzw.

Koeffizienten-matrix

Ist $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ heisst das LGS **homogen**, sonst **inhomogen**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & A & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathbf{x} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \mathbf{b} \\ b_m \end{pmatrix}$$

Beispiele:

- $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $0 = 0$ — $m=2, n=2$ → numero variabili; numero equazione $m=3, n=2$ — LGS
- $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $0 = 7$ — $m=3, n=2$ — LGS $L = \{\ \}$ nicht lösbar; wird nie wahr
- $x_1 + x_3 = 2$, $x_2 + 2x_3 = 6$ — $m=2, n=3$ — LGS unendlich viele Lösungen
- $x_1 - 2x_2 = 1$, $3x_1 + 2x_2 = 11$ — $m=2, n=2$ — LGS $\mathbb{L} = \{\binom{3}{1}\}$
- $(x_1)^2 = 4$, $(x_2)^2 = 9$, $x_1x_2 = 6$ — $m=3, n=2$ — ~~kein~~ LGS — $\mathbb{L} = \{\binom{2}{3}, \binom{-2}{-3}\}$ lösbar, zwei Lösungen
- $(x_1)^2 = 4$, $(x_2)^2 = 9$, $x_1x_2 = 0$ — kein LGS
- $(x_1)^{x_3} = 1$, $(x_1)^6 - \ln(x_2) + x_3 = 0$, $x_1x_2x_3 = -1$ — $m=3, n=3$ $\mathbb{L} = \{(\ )\}$ — kein LGS
- $x_1 + e^{x_1} = 0$ — kein LGS — $m=1, n=1$ $L \neq \{\ \}$ Lösung ist schwer zu bestimmen

Erweiterte Koeffizientenmatrix

Definition 7.1.5: Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ bzw. } \quad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix → comb

- $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $0 = 0$ — $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ — $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
- $x_1 + x_3 = 2$, $x_2 + 2x_3 = 6$ — $\vec{b} = \binom{2}{6}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ — $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$
- $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $0 = 7$ — $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ — $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$
- $x_1 - 2x_2 = 1$, $3x_1 + 2x_2 = 11$ — $\vec{b} = \binom{1}{11}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ — $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 11 \end{array}\right)$

Explizite Form

x_j führend, wenn **führendes Element** in Spalte j → primo elemento di una riga (non nulla) diverso da 0 es. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Definitionen 7.1.6 – 7.1.7: Matrix in expliziter Form

Eine Matrix in Zeilenstufenform liegt in **expliziter Form** vor, wenn

- jedes führende Element eine 1 ist und
- oberhalb führender Elemente alle Elemente gleich 0 sind.

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist in expliziter Form, wenn A in expliziter Form ist.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Satz 7.1.1 und Definition 7.1.8 Lösbarkeit LGS in expliziter Form

Ist A in expliziter Form mit Nullzeilen in Zeilen $i > r$, dann

- ist das LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar $\Leftrightarrow b_i = 0$ für alle $i > r$;
- kann man die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ einfach bestimmen.
- heisst $\mathbf{x} \in \mathbb{L}$ **Basislösung**, wenn $x_j \neq 0$ für höchstens r Komponenten.

Auflösen nach führenden x_j

r: Anzahl führende Variablen

Falls $\vec{b} = 0$: LGS ist homogen, sonst inhomogen

Basislösung: höchstens r Komponente (Anzahl führende Variablen) sind von 0 verschieden für $x_j \neq 0$

7.2 Eliminationsverfahren

Äquivalente Gleichungssysteme

Satz 7.2.1: Elementare Zeilenumformungen

Sei $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ein LGS mit m Gleichungen und n Variablen, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Multipliziert man eine Zeile von $(A|\mathbf{b})$ mit $\alpha \neq 0$ oder
- addiert man das α-fache einer Zeile von $(A|\mathbf{b})$ zu einer anderen,

dann entsteht ein äquivalentes LGS.

Äquivalent: zwei LGS sind äquivalent, wenn ihre Lösungsmengen gleich sind

Lösen des LGS mit Eliminationsverfahren

		x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$	
Eliminiere x_1 in allen Zeilen $i \neq 1$	①	1	2	3	6	
	②	2	5	2	4	
	③	6	-3	1	2	
Eliminiere x_2 in allen Zeilen $i \neq 2$	④	1	2	3	6	①
	⑤	0	1	-4	-8	②-2·①
	⑥	0	-15	-17	-34	③-6·①
Eliminiere x_3 in allen Zeilen $i \neq 3$	⑦	1	0	11	22	④-2·⑤
	⑧	0	1	-4	-8	⑤
	⑨	0	0	-77	-154	⑥+15·⑤
Erzeuge führende 1	⑩	1	0	0	0	⑦+$\frac{11}{77}$·⑨
	⑪	0	1	0	0	⑧-$\frac{4}{77}$·⑨
	⑫	0	0	-77	-154	⑨
	⑬	1	0	0	0	⑩
	⑭	0	1	0	0	⑪
	⑮	0	0	1	2	$\frac{-1}{77}$·⑫

Zeilenstufe (aber nicht explizit)

- Zeile mit Konstante multiplizieren
- Zeilen addieren, subtrahieren
- Streichen von Nullzeilen
- Tauschen von Zeilen
- Überspringen von Variablen

Simultanes Lösen → mit Zöllen

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}^1$	$\mathbf{b}^2$	
①	0	-4	-1	1	0	$-4x_2 - x_3 = 1$; $-4x_2 - x_3 = 0$
②	1	1	-1	1	1	$x_1 + x_2 - x_3 = 1$; $x_1 + x_2 - x_3 = 1$
③	1	5	0	0	0	$x_1 + 5x_2 = 0$; $x_1 + 5x_2 = 0$
④	1	1	-1	1	1	②
⑤	0	-4	-1	1	0	①
⑥	1	5	0	0	0	③
⑦	1	1	-1	1	1	④
⑧	0	-4	-1	1	0	⑤
⑨	0	4	1	-1	-1	⑥ - ④
⑩	1	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	1	⑦ + $\frac{1}{4}$·⑧
⑪	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$·⑧
⑫	0	0	0	0	-1	⑨ + ⑧

Parametrische Lösung → mit Parametern

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$ → beliebige rechte Seite	
①	0	-4	-1	b_1	$-4x_2 - x_3 = b_1$
②	1	1	-1	b_2	$x_1 + x_2 - x_3 = b_2$
③	1	5	0	b_3	$x_1 + 5x_2 = b_3$
④	1	1	-1	b_2	②
⑤	0	-4	-1	b_1	①
⑥	1	5	0	b_3	③
⑦	1	1	-1	b_2	④
⑧	0	-4	-1	b_1	⑤
⑨	0	4	1	$b_3 - b_2$	⑥ - ④
⑩	1	0	$-\frac{5}{4}$	$b_2 + \frac{1}{4}b_1$	⑦ + $\frac{1}{4}$·⑧
⑪	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}b_1$	$-\frac{1}{4}$·⑧
⑫	0	0	0	$b_3 - b_2 + b_1$	⑨ + ⑧

→ lösbar wenn $b_3 - b_2 + b_1 = 0$ z.B. $(7, -9, 2)^T$

⑦	1	0	2	1	
⑧	0	0	1	−5	⑤ − ⑥
⑨	0	0	−1	5	⑥ − ⑤

nicht möglich! Man kann nicht beide Ersetzungen gleichzeitig durchführen! Una alla volta.

7.3 Geometrie linearer Gleichungen

Affiner Raum → lin Raum + Verschiebungsvektor

$\boxed{\text{Dim Affin. Raum = Dim lin Raum}}$

Definition 7.3.1: Affiner Raum

$$A = \left\{ \mathbf{v}^0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}^i \,\middle|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n \text{ mit } \mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m \in \mathbb{R}^n$$

$\dim(A) = \dim(\text{ lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m\})$

$\dim(A) = 0$: Punkt, 1: Gerade, 2: Ebene, n-1: Hyperebene

Satz 7.3.2: Gleichheit affiner Räume

$$\overbrace{\left\{ \mathbf{v}^0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{v}^i \,\middle|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \right\}}^{A} = \overbrace{\left\{ \mathbf{w}^0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{w}^i \,\middle|\, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R} \right\}}^{B}$$

$\Leftrightarrow \text{lin}\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^m\} = \text{lin}\{\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^k\}$ und $\mathbf{w}^0 \in A$.

① $\vec{w}_0 \in A$

② $\text{lin}\{v^1, v^2, \ldots\} = \text{lin}\{\bar{w}^1, \bar{w}^2, \ldots\}$

! Jeder linearer Raum ist stets ein affiner Raum

Beispiele

- $x_1 - 2x_2 = 0$ — linearer Raum mit Dimension 1
  Sowohl affin als auch linearer Raum. $\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$
- $x_1 - 2x_2 = 1$ — affiner Raum mit Dimension 1
  $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$
  ↳ zählt nicht für die Dimension des Raums.
- $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$ — linearer Raum mit Dimension 2
  $\mathbb{L} = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$
- $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$ — affiner Raum mit Dimension 2
  $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Rechte Seite $= 0$ → Lösungsmenge ist linearer Raum.
Rechte Seite $\neq 0$ → Lösungsmenge ist kein linearer Raum.

Beispiel:

$x_1 - 2x_2 = 1$ mit $\mathbb{L} = A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$

- $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$: Gilt $A = B$? Ja

  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad t = -1/2$ ✓

- $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$: Gilt $A = C$? Nein

  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad t = 0$, $t = -1/2$ ✗

7.4 Der Rang

Satz 7.4.1: Lösbarkeit eines LGS

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ lösbar} \Leftrightarrow \mathbf{b} \in \text{lin}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\}$$

Definition 7.4.1: Der Rang

rang(A)

Maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A.

rang(A) = rang(A^T)

Definition 7.4.2 und Sätze 7.4.2 – 7.4.3: Eigenschaften des Rangs

Sei A eine $m \times n$-Matrix.

- rang(A) = rang$(A|b)$ ↳ bringt nichts neues dazu $(b = 0)$
- rang(A) = rang(A^T)
- Wenn A quadratisch: rang$(A) = m = n$ hat vollen Rang

- rang(A) = maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren
- rang(A) = maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren
- rang(A) = rang$(A^T) \leq \min\{m,n\}$ — A hat «**vollen Rang**», wenn rang(A)=min$\{m,n\}$
- rang$(A) = n \Leftrightarrow$ alle Spaltenvektoren linear unabhängig ↳ größer Rang nicht möglich.
  → injektiv
- rang$(A) = m \Leftrightarrow$ alle Zeilenvektoren linear unabhängig
  → surjektiv

- Rang$(A) = m = n$ → bijektiv
- rang$(A) = n$ → regulär (sonst singulär)
- Invertierbar wenn quadratisch und vollen Rang

Sätze 7.4.4 – 7.4.6: Berechnung des Rangs und Lösbarkeit

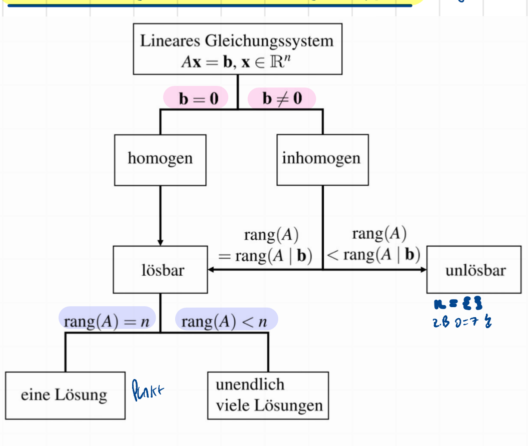
Ist $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ äquivalent zu $\tilde{A}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ und liegt $\tilde{A}$ in Zeilenstufenform vor mit genau r Zeilen, die keine Nullzeilen sind, dann gilt:

- $\boxed{\text{rang}(A) = r;}$
- $\tilde{b}_i = 0$ für alle $i > r \Rightarrow$ LGS lösbar mit $n - r$ freien Variablen;
- $\tilde{b}_i \neq 0$ für ein $i > r \Rightarrow$ LGS unlösbar.

r: Zeilen, die keine Nullzeilen sind = rang (A)

rang(A) = rang$(A|b)$ wenn $\vec{b} = 0$ (homogenes LGS) !

Übersicht Lösbarkeit eines LGS → Lösung immer affiner Raum (wenn homogen, dann auch linearer Raum)



Sätze 7.4.1, 7.4.6: Lösbarkeit eines LGS

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ lösbar} \Leftrightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A|\mathbf{b}) \quad \Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ immer lösbar}$$

↳ Wenn b eine Linkomb. der Spalten von A ist.

Beispiele:

- $x_1 - 2x_2 = 1$, $3x_1 + 2x_2 = 11$, $x_1 + x_2 = 5$

  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$

  rang$(A) = 2$ $\quad$ rang$(A|\mathbf{b}) = 3$ → alle Vektoren lin unabhängig.

- $x_1 - 2x_2 = 0$, $3x_1 + 2x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ → homogenes LGS: $\vec{b} = 0$

  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad (A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

  rang$(A) = 2$ $\quad$ rang$(A|\mathbf{b}) = 2$

Beispiele:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ $\quad$ rang(A) = 2 ↗ voller Rang $\quad$ rang(A^T) = 2 $\quad$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

  Alle Vektoren unabhängig → Matrix hat vollen Rang

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ rang(A) = 2 ↓ kein voller Rang

  $4\vec{v}_3 + 5\vec{v}_1 = \vec{v}_2$

  rang$(A) < n = 3$
  rang$(A) < m = 3$

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}^1$	$\mathbf{b}^2$	
①	0	-4	-1	1	0	(vgl. Folie 16)
②	1	1	-1	1	1	
③	1	5	0	0	0	
④	1	1	-1	1	1	②
⑤	0	-4	-1	1	0	①
⑥	1	5	0	0	0	③
⑦	1	1	-1	1	1	④
⑧	0	-4	-1	1	0	⑤
⑨	0	4	1	-1	-1	⑥ - ④
⑩	1	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	1	⑦ + $\frac{1}{4}$·⑧
⑪	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$·⑧
⑫	0	0	0	0	-1	⑨ + ⑧

$n = 3 \mid r = 2$

Dimension der Lösungsmenge:

$\boxed{\dim(\mathbb{L}) = n - \text{rang}(A)}$

lin unabhängige Vektoren

#freie Variablen $(= \dim \mathbb{L}) = \overset{\text{Anzahl Spalten}}{n}$ - #führende Variablen

$\dim(\mathbb{L}) = n - \text{rang}(A)$ ⇒ #linear unabhängige Vektoren

Rang max wenn Rang(A) = Dim $(\mathbb{L})$

Homogen: rechte Seite $(\vec{b})$ des LGS Null

ein homogenes LGS ist immer lösbar.

8 Lineare Abbildungen

8.1 Definitionen und Eigenschaften

Definition 8.1.1: Die lineare Abbildung

Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die jedem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ein $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ zuordnet, heisst **linear**, wenn eine $m \times n$-Matrix A existiert mit

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Beschreibt f vollständig

Funktion $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

wir nennen f lineare Abbildung falls:

$f(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Beispiele:

- $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$

  $f_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

  $f_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

- $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

  $f_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

  $f_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

- $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 7x_1 + 9x_2 + 8x_3$

  $f_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 7$ $f_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 8$

  $f_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 9$ $f_3\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = 14+36+32 = 82$

- $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $f_4(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (x_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$

Satz 8.1.3: Verknüpfung linearer Abbildungen

Gegeben sind $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $g(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ und $h: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ mit $h(\mathbf{x}) = C\mathbf{x}$, dann gilt:

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
$A - B = (a_{ij} - b_{ij})$

- $f = g \Leftrightarrow A = B$, → 2 lineare Abbildungen sind gleich, wenn sie die gleiche Koeffizientenmatrix haben.
- → nur möglich wenn Def(f) = Dim Zielmenge(g)
  $f + g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist linear mit $(f+g)(\mathbf{x}) = (A+B)\mathbf{x}$,
- $f - g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist linear mit $(f-g)(\mathbf{x}) = (A-B)\mathbf{x}$, und
- $h \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ ist linear mit $(h \circ g)(\mathbf{x}) = h(B\mathbf{x}) = CB\mathbf{x}$.

Beispiel:

$$\underbrace{f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}}_{A} \quad \underbrace{f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}}_{B}$$

- $f_1 \neq f_2$
- $(f_1 + f_2)(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B\mathbf{x} = (A+B)\mathbf{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A+B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- $(f_1 - f_2)(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - B\mathbf{x} = (A-B)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- $(f_1 \circ f_2)(\mathbf{x}) = f_1(f_2(\mathbf{x})) = f_1(\overbrace{B \cdot \mathbf{x}}^{B(f2)}) = A \cdot B \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

A × 1. Spalte von B

A × 2. Spalte von B

$f(\alpha_1 \vec{x}^1 + \alpha_2 \vec{x}^2) = \alpha_1 f(\vec{x}^1) + \alpha_2 f(\vec{x}^2)$

Das Bild

$f(\mathbb{R}^n)$: Bild von f

Definition 8.1.2: Das Bild einer linearen Abbildung

Das **Bild** von $M \subseteq \mathbb{R}^n$ unter $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist

$$f(M) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \text{ es existiert ein } \mathbf{x} \in M \text{ mit } f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}.$$

Das Bild bestimmen wir als $y = Ax$

- Die Spalten der Matrix sind die Bilder der Einheitsvektoren

$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{a}_1$ $A \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \vec{a}_2$ $A \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{a}_3$ $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = [Ae^1, Ae^2, Ae^3]$

Satz 8.1.4: Charakterisierung des Bildes von f

Für $A = [\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n]$ mit $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n \in \mathbb{R}^m$ und $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ gilt:

- $f(\mathbb{R}^n) = \text{lin}\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\}$; → Bild von $y = Ax$ ist die lineare Hülle der Spaltenvektoren von A.
- $\dim(\underbrace{f(\mathbb{R}^n)}_{\text{Bild}}) = \text{rang}(A)$.

Das Bild von $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ ist die lineare Hülle der Spalten von A, die Dimension des Bildes entspricht dem Rang von A.

Die Umkehrabbildung einer linearen Abbildung $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ist (im Falle ihrer Existenz) $f^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$, wobei A^{-1} die Inverse von A ist.

Existenz der Umkehrabbildung

Sätze 8.1.5, 8.2.2, Def. 8.2.1, 8.2.2: Umkehrabbildung und Inverse

Für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ gilt:

- f surjektiv $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = m$;
- f injektiv $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = n$;
- f bijektiv $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = m = n$.

  Dann existiert eine Matrix A^{-1} mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

  Die Umkehrabbildung ist $f^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$.

A regulär – S mit vollen Rang, wenn nicht vollen Rang heisst sie singulär.

Inverse von A quadratisch!

Beispiele:

- $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ → bijektiv (Funktion ist umkehrbar)

  $\text{rang}(A) = 2$ $= m$ → surjektiv, $= n$ → injektiv
- $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Grund: Spalten von A sind linear abhängig

  $\text{rang}(A) = 1$ $\neq m$ nicht surjektiv, $\neq n$ nicht injektiv — keine Umkehrfunktion
- $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ keine Umkehrfunktion

  $\text{rang}(A) = 1$ $= m$ → surjektiv, $\neq n$ nicht injektiv
- $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $f_4(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (x_1)$ keine Umkehrfunktion

  $\text{rang}(A) = 1$ $\neq m$ nicht surjektiv, $= n$ → injektiv

surjektiv: jedes Element der Zielmenge kann erreicht werden

injektiv: zwei verschiedene x-Werte werden auch auf zwei verschiedene y-Werte abgebildet

Oder: zu einem y aus der Zielmenge gibt es höchstens ein x aus der Definitionsmenge

bijektiv: surjektiv + injektiv

→ Funktion ist umkehrbar

→ quadratische Matrix (braucht vollen Rang) ↳ regulär

8.2 Umkehrabbildung und Inverse

Berechnung der Inversen

Nur invertierbar falls Matrix quadratisch! und vollen Rang (regulär)

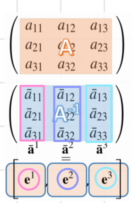
Variante 1: $AA^{-1} = I$

Beispiel:

- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{e}^1$	$\mathbf{e}^2$	$\mathbf{e}^3$	
①	8	0	6	1	0	0	
②	0	10	0	0	1	0	
③	-6	0	8	0	0	1	
④	1	0	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$①
⑤	0	10	0	0	1	0	②
⑥	0	0	$\frac{100}{8}$	$\frac{6}{8}$	0	1	③$+\frac{6}{8}$①
⑦	1	0	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	④
⑧	0	1	0	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$⑤
⑨	0	0	$\frac{100}{8}$	$\frac{6}{8}$	0	1	⑥
⑩	1	0	0	$\frac{8}{100}$	0	$-\frac{6}{100}$	⑦$-\frac{6}{100}$⑨
⑪	0	1	0	0	$\frac{1}{10}$	0	⑧
⑫	0	0	1	$\frac{6}{100}$	0	$\frac{8}{100}$	$\frac{8}{100}$⑨

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{100} & 0 & -\frac{6}{100} \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{6}{100} & 0 & \frac{8}{100} \end{pmatrix}$$



$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Variante 2: $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$

- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

	x_1	x_2	x_3	$\mathbf{b}$	
①	8	0	6	b_1	
②	0	10	0	b_2	
③	-6	0	8	b_3	
④	1	0	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}b_1$	$\frac{1}{8}$①
⑤	0	10	0	b_2	②
⑥	0	0	$\frac{100}{8}$	$\frac{6}{8}b_1 + b_3$	③$+\frac{6}{8}$①
⑦	1	0	$\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}b_1$	④
⑧	0	1	0	$\frac{1}{10}b_2$	$\frac{1}{10}$⑤
⑨	0	0	$\frac{100}{8}$	$\frac{6}{8}b_1 + b_3$	⑥
⑩	1	0	0	$\frac{8}{100}b_1 - \frac{6}{100}b_3$	⑦$-\frac{6}{100}$⑨
⑪	0	1	0	$\frac{1}{10}b_2$	⑧
⑫	0	0	1	$\frac{6}{100}b_1 + \frac{8}{100}b_3$	$\frac{8}{100}$⑨

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{100} & 0 & -\frac{6}{100} \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{6}{100} & 0 & \frac{8}{100} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{8}{100} \\ 0 \\ \frac{6}{100} \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ 0 \end{pmatrix} b_2 + \begin{pmatrix} -\frac{6}{100} \\ 0 \\ \frac{8}{100} \end{pmatrix} b_3 = \begin{pmatrix} \frac{8}{100} & 0 & -\frac{6}{100} \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{6}{100} & 0 & \frac{8}{100} \end{pmatrix} \mathbf{b}$$

Rechenregeln für inverse Matrizen

Satz 8.2.5: Rechenregeln invertierbarer Matrizen

Sind A und B reguläre Matrizen der Ordnung n, dann gilt:

- $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$;
- Inverse der Inverse: $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$, falls $\alpha \neq 0$;
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

  Inversa della trasposta uguale a trasposta dell'inversa

Orthogonale Matrizen

Definition 8.2.3 und Satz 8.2.3: Orthogonale Matrizen

$A = [\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n]$ mit Zeilenvektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ ist orthogonal

$\Leftrightarrow$ $A^{-1} = A^T$, d.h. $AA^T = I$;

$\Leftrightarrow$ $(\mathbf{a}^i)^T \mathbf{a}^i = 1$ für alle i und $(\mathbf{a}^i)^T \mathbf{a}^j = 0$ für alle $i \neq j$;

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T = 1$ für alle i und $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^T = 0$ für alle $i \neq j$;

$\Leftrightarrow$ A^T ist orthogonal.

8.3 Die Determinante

Determinante 2×2 Matrix

Definition 8.3.1: Determinante einer 2x2-Matrix

Betragsmässig gleich der Fläche des durch $\mathbf{a}^1$ und $\mathbf{a}^2$ aufgespannten Parallelogramms

Die **Determinante** einer 2×2-Matrix A ist

$$\det\, A = \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

⚠ Nicht definiert für nicht quadratische Matrizen

= Flächeninhalt des durch die Spaltenvektoren aufgespannten Parallelogramm

Satz 8.3.1: Eigenschaften der Determinante einer 2x2-Matrix

Für eine 2×2-Matrix A und $\alpha \neq 0$ gilt:

- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) < 2$; dann ist die Matrix singulär
- Vertauscht man zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen, aber nicht der Betrag der Determinante;
- Ver-α-facht man eine Spalte, ver-α-facht sich die Determinante;
- Sind alle Elemente unter der Hauptdiagonalen von A gleich 0, dann gilt $\det(A) = a_{11}a_{22}$.

Satz 8.3.6: Flächenveränderung (Teil 1)

Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Fläche $\operatorname{Vol}(M)$, dann gilt $\operatorname{Vol}(f(M)) = |\det(A)| \cdot \operatorname{Vol}(M)$.

Satz 8.3.7: Weitere Eigenschaften von Determinanten

Sind A und B zwei 2×2-Matrizen, dann gilt:

- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertierbar und $\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)};}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

$\det(A^T) = \det(A)$

Sind alle Elemente unter der Hauptdiagonale von A gleich null, dann gilt $\det(A) = a_{11}a_{22}$

ABER: $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

man muss zuerst A und B addieren und erst dann die Determinante berechnen

Beispiele:

- $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$
- $\det\begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = 14 \cdot 8 - 3 \cdot 4 = 100$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$)
- $\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -4$
- $\det\begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 - 14 \cdot 8 = -100$
- $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 0$
- $\det\begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 3 & 16 \end{pmatrix} = 14 \cdot 16 - 8 \cdot 3 = 200$
- $\det\begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 14 \cdot 8 - 0 \cdot 4 = 112.$

vertauscht man $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ändert sich das Vorzeichen

verdoppelt man $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ verdoppelt sich auch das Resultat

Wenn man zwei Spalten vertauscht, ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha}\det\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \cancel{0} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22}$$

singulär: $\det(A) = 0$ → $\operatorname{rang}(A) < n$ ($n \times n$) → $\operatorname{rang}(A) < 2$ (2×2)

↓ nicht invertierbar

LGS kann keine oder unendlich viele Lösungen besitzen

regulär: $\det(A) \neq 0$

↓ $\operatorname{rang}(A) = n$

invertierbar

LGS hat genau eine Lösung

voller Rang: $\operatorname{rang}(A) = n$

Beispiele:

$f_1(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(A) = -4$ → invertierbar (voller Rang)

$f_2(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ mit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(B) = 0$ → nicht invertierbar

Umkehrfunktion:
- $f_1^{-1}(\mathbf{y}) = A^{-1}\mathbf{y}$ mit $\det(A^{-1}) = \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}$

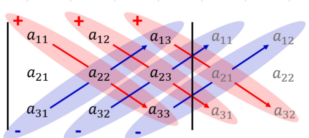
Komposition:
- $f_1(f_2(\mathbf{x})) = AB\mathbf{x}$ mit $\det(AB) = \det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$ $= \det(A) \cdot \det(B) = -4 \cdot 0$

Addition:
- $(f_1 + f_2)(\mathbf{x}) = (A+B)\mathbf{x}$ mit $\det(A+B) = \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -6$ $\neq \det(A) + \det(B)$

Determinante 3×3 Matrix

Satz 8.3.6: Volumenveränderung (Teil 2)

Ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Volumen $\operatorname{Vol}(M)$, dann gilt $\operatorname{Vol}(f(M)) = |\det(A)| \cdot \operatorname{Vol}(M)$.



← Regel von Sarrus

kann man nur auf 3×3 Matrizen anwenden

$\Delta A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

Beispiele:

- $\det\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$
- $\det\begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$ Alle Seitenlängen sind 1 $= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Wenn man zwei Spalten vertauscht, ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

Determinante $n \times n$: Eigenschaften

Sätze 8.3.3, 8.3.7: Eigenschaften der Determinante

Seien A und B quadratische Matrizen der Ordnung n, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) < n$;
- Vertauscht man zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen, aber nicht der Betrag der Determinante;
  αSpalte ⇒ $\alpha\det(A)$ $|\det(\alpha A)| = \alpha^n \cdot \det(A)$
- Ver-α-facht man eine Spalte, ver-α-facht sich die Determinante;
- Sind alle Elemente unter der Hauptdiagonalen von A gleich 0, dann gilt $\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$; Selemente in Hauptdiagonale multiplizieren
- existiert, Spaltenvektoren sind unabhängig. und hat vollen Rang
  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertierbar und $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$;
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

LGS: $A\bar{x} = \bar{b}$, $\det(A) \neq 0$ → vollen Rang, eine Lösung

$A\bar{x} = \bar{b}$, $\det(A) = 0$ → entweder 0 oder unendlich viele Lösungen

wenn $\bar{b} \notin \operatorname{lin}\{a_1, \ldots, a_n\}$ wenn $\bar{b} \in \operatorname{lin}\{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$

Determinante $n \times n$

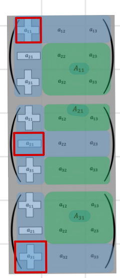
Definition 8.3.2: Determinante

$\det\, A = \det(A) = |A|$

Die **Determinante** einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})$ der Ordnung n ist induktiv wie folgt definiert:

- Für $n = 1$: $\det(A) = a_{11}$.
- Für $n = 2$: $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Für $n > 2$: Sei A_{ij} die Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A entsteht:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1}\det(A_{i1})$$



Beispiel:

$$\det\begin{pmatrix} 6 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 36 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{6\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{a_{11}} - \underbrace{0\det\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{a_{21}} + 36\det\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 0\det\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 6\left(0\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) - 0$$

$$+ 36\left((-5)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 0\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) - 0$$

$$= 6(0 - 2 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) + 0) + 36((-5)(1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - 0 + 0)$$

$$= 6(-2 \cdot (-1)) + 36((-5)(-1))$$

$$= 12 + 180 = 192$$

Sätze 8.3.3, 8.3.7: Eigenschaften der Determinante

Seien A und B quadratische Matrizen der Ordnung n, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) < n$;

Satz 8.3.4 — Folgerung aus Satz 8.3.3.
Für jede quadratische Matrix A der Ordnung n und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

Trick: Finde Spalte/Zeile mit vielen Nullen

Satz 8.3.2: Entwicklungssatz für Determinanten

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}), \quad \boxed{j} \in \{1, \ldots, n\};$$ beliebige Spalte

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}), \quad \boxed{i} \in \{1, \ldots, n\}.$$ beliebige Zeile

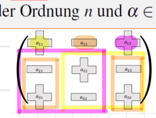
Laplace:

Beispiel:

- $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $j=2$, a_{12} $= 1(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$= -8(-1)^{\overset{i}{2}+\overset{j}{3}}\det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} = 8\det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= 8(6 \cdot 5 - 3 \cdot 9) = 8 \cdot 3 = 24$$



$$a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

8.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 8.4.1: Eigenwert und Eigenvektor

Sei A eine $n \times n$-Matrix, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ mit Nullvektor ist nie ein Eigenvektor!

↳ Matrix ↳ Vielfaches

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

⇒ Matrix · Vektor ergibt Vielfaches vom Vektor.

λ: (reeller) **Eigenwert** von A

$\mathbf{v}$: (reeller) **Eigenvektor** von A

Satz 8.4.1: Eigenschaften von Eigenvektoren

Für jeden Eigenvektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ zum Eigenwert λ von A ist auch $\alpha\mathbf{v}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A. und liegt auf der Ursprungsgerade

Bestimmung von Eigenvektoren

Satz 8.4.2: Bestimmung von Eigenwerten

Für Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ und Eigenvektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ gilt

$\alpha\vec{v}$ ist auch Eigenvektor (wenn $\vec{v}$ Eigvek. ist)

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \text{bzw.} \quad (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Gegeben λ ist $\mathbf{v}$ Lösung eines homogenen LGS.

Beispiel:

- $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ bzw. $\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Dieses LGS hat Lösungen $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{matrix} 2v_2 = \lambda v_1 \\ 2v_1 = \lambda v_2 \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} -\lambda v_1 + 2v_2 = 0 \\ 2v_1 - \lambda v_2 = 0 \end{matrix}$$

1. $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4$

2. $\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$ zu diesen 2 Eigenwerten gibt es Eigenvektoren

3. • $\lambda_1 = 2$:
   $\begin{matrix} -2v_1 + 2v_2 = 0 \\ 2v_1 - 2v_2 = 0 \end{matrix}$ mit $\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ $\Rightarrow$ z.B. $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   • $\lambda_2 = -2$:
   $\begin{matrix} 2v_1 + 2v_2 = 0 \\ 2v_1 + 2v_2 = 0 \end{matrix}$ mit $\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ $\Rightarrow$ z.B. $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektorbestimmung

1. Berechne $\det(A - \lambda I)$
2. Finde alle $\lambda \in \mathbb{R}$: $\det(A - \lambda I) = 0$
3. Zu jedem λ: Löse $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. $\Rightarrow \mathbf{v} \in \mathbb{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ

Alle Vektoren der Form $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$

Es muss $\alpha_1 \neq 0$ gelten, da ein Eigenvektor ein vom Nullvektor verschiedener Vektor ist

Satz 8.4.3: Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen

Eine (reelle) symmetrische $n \times n$-Matrix A hat n reelle, linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

z.B. eine 3x3 Matrix hat 3 reelle Eigenwerte

Definition 8.4.3: ℓ-facher Eigenwert

Sei A eine $n \times n$-Matrix mit n linear unabhängigen Eigenvektoren. Einen Eigenwert λ von A, zu dem es $\ell \leq n$ linear unabhängige Eigenvektoren gibt, nennt man **ℓ-fachen Eigenwert** von A.

$\lambda_1 = 2$ → einfacher Eigenwert

$\left.\begin{matrix} \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -1 \end{matrix}\right\}$ → doppelter Eigenwert

Sonstiges:

- Sei $\det(A) = 0$. Dann ist $\lambda_i = 0$ ein Eigenwert von A.
- $A(\mathbf{v}^i + 3\mathbf{v}^j) = \lambda_i \mathbf{v}^i + 3\lambda_j \mathbf{v}^j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
- Sei $A\mathbf{v}^i = \mathbf{0}$ für ein $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann gilt: $\lambda_i = 0$.
- $\text{rang}(A) < n \iff \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = 0$.

Beispiel:

- $\mathbf{y} = f_1(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
  - für $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\mathbf{y} = A\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist kein Vielfaches von $\mathbf{x}^1$
  - für $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\mathbf{y} = A\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist kein Vielfaches von $\mathbf{x}^2$
  - für $\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\mathbf{y} = A\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Vielfaches von $\mathbf{x}^3$ $\boxed{A\mathbf{x}^3 = 2\mathbf{x}^3}$ → Eigenwert → Eigenvektor
  - für $\mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$: $\mathbf{y} = A\mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist kein Vielfaches von $\mathbf{x}^4$

Eigenvektoren zu einem Eigenwert sind nicht eindeutig bestimmt. Sie können durch $(A - \lambda I)v^\wedge = 0$ bestimmt werden

Beispiel 1:

- $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. $\det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (6-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda)$
2. $\Rightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 3$
3. • $\lambda_1 = 6$:
   $(B - 6I)\mathbf{v}^1 = \mathbf{0}$ mit $\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ $\Rightarrow$ z.B. $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   • $\lambda_2 = 4$:
   $(B - 4I)\mathbf{v}^2 = \mathbf{0}$ mit $\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ $\Rightarrow$ z.B. $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   • $\lambda_3 = 3$:
   $(B - 3I)\mathbf{v}^3 = \mathbf{0}$ mit $\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ $\Rightarrow$ z.B. $\mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Beispiel 2:

- $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$
2. Kein reeller Eigenwert.

Beispiel 3:

- $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$
2. $\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$
3. • $\lambda_1 = 2$:
   $(D - 2I)\mathbf{v}^1 = \mathbf{0}$ mit $\mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ $\Rightarrow$ z.B. $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   • $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$:
   $(D + I)\mathbf{v}^2 = \mathbf{0}$ mit $\mathbb{L} = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$
   $\Rightarrow$ z.B. $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vielfaches des Vektors $\vec{v}$

Wenn v ein Eigenvektor zum Eigenwert lambda ist, ist av auch ein Eigenvektor zum Eigenvektor lamba für alle a € R \ {0}

Schema: Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren

1. Berechne die Determinante $\det(A - \lambda I)$ als Polynom n-ten Grades.
2. Bestimme alle Nullstellen des Polynoms, also alle Lösungen von $\det(A - \lambda I) = 0$. Die Nullstellen entsprechen den Eigenwerten.
3. Zu jedem Eigenwert λ bestimme die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Jeder Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

9 Reelle Funktionen in mehreren Variablen

- Affin-lineare Funktion: $f(\bar{x}) = \bar{b}^T\bar{x} + c = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n + c$
- Quadratische Funktion: $f(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x} + \bar{b}^T\bar{x} + c = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \dots$
- Cobb-Douglas Funktion: $f(\bar{x}) = \prod x_i^{b_i} = x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \dots \cdot x_n^{b_n}$, $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 1$, $b_i \geq 0$
- Leontief Funktion: $f(\bar{x}) = b_0 \min\{b_ix_i\} = b_0 \min\{b_1x_1, b_2x_2, \dots b_nx_n\}$

9.1 Grundlagen

Definition 9.1.1: Reelle Funktion in n Variablen

Reelle Funktion in n Variablen

$$f: D \to Z \text{ mit } \mathbf{x} \mapsto y = f(\mathbf{x}), \quad D \subseteq \mathbb{R}^n, Z \subseteq \mathbb{R}$$

Definition 9.1.2: Besondere Funktionen

- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$
  für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$

  Affin-lineare Funktion in n Variablen

  z.B. $(x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_2^2$

- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$
  ↳ ergibt quadratische Elemente (x^2)
  für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A \neq$ Nullmatrix → Wenn A eine Nullmatrix wäre, dann hätten wir wieder eine affin lineare Funktion

  Quadratische Funktion in n Variablen

Beispiele:

• $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$	$f(x) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$	quadratische Funktion
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$	$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$	quadratische Funktion
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$	$f(x) = 8x_1 + 3x_2 + 10$	affin lineare Funktion
	$f(x) = 6 - 3x_1 - 2x_2$	affin lineare Funktion
	$f(x) = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} = x_1^{0.5}x_2^{0.5}$	Cobb-Douglas Funktion
	$f(x) = \min\{\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}\}$	Leontief Funktion
	$f(x) = \frac{1}{x_2 - 1}$	→ nicht definiert

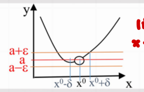
9.2 Grenzwerte und Stetigkeit

Grenzwert

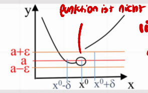
Definition 9.2.1: Grenzwert

Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $U(\mathbf{x}^0, \tilde{\delta}) \cap D \neq \{\} \forall \tilde{\delta} \leq \delta$, so dass für alle $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}^0, \delta) \cap D, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$: $|f(\mathbf{x}) - a| < \varepsilon$, dann $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = a$.

Erinnerung für den Fall einer Variablen:



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$



Funktion ist nicht definiert

$\lim f(x)$ existiert nicht

Stetigkeit

Hat die Funktion f an der Stelle x^0 einen Grenzwert, dann ist sie an dieser Stelle stetig

Definition 9.2.2: Stetigkeit

Gilt $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)$, heisst $f: D \to Z$ an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ **stetig**.
Ist f an jeder Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ stetig, so heisst f **stetig**.

Sätze 9.2.1 – 9.2.2: Verknüpfungen stetiger Funktionen

Alle Funktionen aus Definition 9.1.2 sind stetig. Sind $f, g: D \to Z_1$, $h: g(D) \to Z_2$ stetig, dann sind $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ und $h \circ g$ stetig. Zudem ist f/g stetig auf $\{\mathbf{x} \in D \mid g(\mathbf{x}) \neq 0\}$. → quotient ist nur stetig wenn $g(x) \neq 0$

- quadratische Funktionen
- natürlicher Logarithmus $h(x) = \ln(x)$
- Cobb Douglas Funktionen

→ sind stetig (auch ihre Verknüpfungen)

- Affin-lineare Funktion
- Leontief Funktion

Das Produkt zweier stetiger Funktionen in mehreren Variablen mit identischem Definitionsbereich D ist stetig auf D.	☒ wahr	☐ falsch
Der Quotient zweier stetiger Funktionen in mehreren Variablen mit identischem Definitionsbereich D ist stetig auf D.	☐ wahr	☒ falsch
Jede reelle Funktion in n Variablen ist stetig.	☐ wahr	☒ falsch
Hat die Funktion f an der Stelle x^0 einen Grenzwert mit Wert $f(x^0)$, dann ist die Funktion an der Stelle x^0 stetig.	☒ wahr	☐ falsch

9.3 Differenzierbarkeit

Partielle Ableitung

Definition 9.3.1: Partielle Ableitung (Teil 1)

Partielle Ableitung $\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_i}$ bzw. $f_{x_i}(\mathbf{x}^0)$

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f: D \to Z$ heisst an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ **partiell nach** x_i, $i = 1, \dots, n$, **differenzierbar**, wenn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + \Delta x \cdot \mathbf{e}^i) - f(\mathbf{x}^0)}{\Delta x}$ existiert.
f heisst **partiell differenzierbar nach** x_i, wenn f an jeder Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell nach x_i differenzierbar ist. Ist f nach allen Variablen partiell differenzierbar, heisst f **partiell differenzierbar**.

Grenzproduktivität der Arbeit: kann durch die partielle Ableitung der Produktionsfunktion $F(K,L)$ nach Arbeit L berechnet werden.

Notwendige Bedingung für Maximum: erste Ableitung nimmt den Wert 0 an

Hinreichende Bedingung für Maximum: zweite Ableitung muss an der stationären Stelle negativ sein

Stetigkeit

Definitionen 9.3.4, 9.3.8: Stetig partielle Differenzierbarkeit

Ist f partiell differenzierbar und f_{x_i} stetig für alle i, heisst f **stetig partiell differenzierbar** und $\nabla f(\mathbf{x}^0)^T \Delta\mathbf{x}$ **totales Differential** von f in $\mathbf{x}^0$.

Beispiel:

Schätzung der Veränderung des Funktionswertes

Satz 9.3.1: Stetigkeit stetig partiell differenzierbarer Funktionen

Ist f stetig partiell differenzierbar, dann ist f stetig.

! Nicht jede partiell differenzierbare Funktion ist stetig (gilt umgekehrt auch)

Partiell differenzierbare reelle Funktion in n Variablen muss nicht stetig sein. Sind die partiellen Ableitungen jedoch stetig, dann ist auch die reelle Funktion stetig

Gradient → Vektor der Partielle Ableitungen (ist die Richtung des steilsten Anstiegs)

Definition 9.3.2: Der Gradient

$$\text{grad} f(\mathbf{x}^0) = \nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Gradient von f an der Stelle $\mathbf{x}^0$

Ist f an der Stelle 0 nach allen Variablen differenzierbar, fasst man diese partiellen Ableitungen in einem Vektor zusammen

→ Gradient = grad f(x) = $\nabla f(x)$

Beispiele:

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 + 3$

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2x_1^0 \\ 8(x_2^0 - 1) \end{pmatrix}, \quad \nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

- $u: (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8}x_2^{0.2}$ → Cobb-Douglas Nutzenfunktion

$u_{x_1}(x_1,x_2) = 0.8x_1^{-0.2}x_2^{0.2} = 0.8\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0.2}$
$u_{x_2}(x_1,x_2) = 0.2x_1^{0.8}x_2^{-0.8} = 0.2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{0.8}$

$$\nabla u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 0.8\left(\frac{x_2^0}{x_1^0}\right)^{0.2} \\ 0.2\left(\frac{x_1^0}{x_2^0}\right)^{0.8} \end{pmatrix}, \nabla u(1,1) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \nabla u(1,32) = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{1}{80} \end{pmatrix}$$

Tangential(hyper)ebene

Definition 9.3.3: Tangential(hyper)ebenen

Ist $f: D \to Z$ an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ partiell differenzierbar:

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)$$

Tangente, Tangentialebene, Tangentialhyperebene

Beispiele:

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$, $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$:

  $f(\mathbf{x}^0) = 8, \nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ Gradient → $\begin{pmatrix}2\cdot x_1 - 1\\ 8(x_2-1)\end{pmatrix}$ → $\frac{df}{dx_1}$ → $\frac{df}{dx_2}$

  $t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = 8 + (2,8)\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-2\end{pmatrix} = 8 + 2(x_1-1) + 8(x_2-2)$

- $u: (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8}x_2^{0.2}$, $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$:

  $u(\mathbf{x}^0) = 1, \nabla u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}0.8\\0.2\end{pmatrix}$

  $t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x}) = 1 + (0.8, 0.2)\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-1\end{pmatrix} = 1 + 0.8(x_1-1) + 0.2(x_2-1)$

Hesse Matrix

Partielle Ableitung 2. Ordnung

Definition 9.3.5 und Satz 9.3.2: Die Hesse-Matrix

Ist $f_{x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ partiell differenzierbar, ist $\frac{\partial f_{x_i}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i} = f_{x_i x_j}(\mathbf{x})$.

Ist $f_{x_i}(\mathbf{x})$ partiell differenzierbar für alle i, schreibt man

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}^0) = H_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_1x_2}(\mathbf{x}^0) & \dots & f_{x_1x_n}(\mathbf{x}^0) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_2x_2}(\mathbf{x}^0) & \dots & f_{x_2x_n}(\mathbf{x}^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{x}^0) & f_{x_nx_2}(\mathbf{x}^0) & \dots & f_{x_nx_n}(\mathbf{x}^0) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von f an der Stelle $\mathbf{x}^0$

rtiell

Ist $f_{x_ix_j}(\mathbf{x})$ stetig für alle $i, j = 1\dots,n$, ist $H_f(\mathbf{x}^0)$ symmetrisch.

f zweimal stetig partiell differenzierbar

Beispiele:

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$

  2. Ableitung:

  $f_{x_1}(\mathbf{x}) = 2x_1$: $\quad f_{x_1x_1}(\mathbf{x}) = 2, \quad f_{x_1x_2}(\mathbf{x}) = 0$

  $f_{x_2}(\mathbf{x}) = 8(x_2-1)$: $\quad f_{x_2x_1}(\mathbf{x}) = 0, \quad f_{x_2x_2}(\mathbf{x}) = 8$

  1. Ordnung $\quad \nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}2x_1^0\\8(x_2^0-1)\end{pmatrix}$, → Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}$ 2. Ordnung

  $$\begin{array}{ccc} & f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ & \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{pmatrix} & \\ & f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2}\end{array}$$

- $u: (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8}x_2^{0.2}$

  $$\nabla u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}0.8(\frac{x_2^0}{x_1^0})^{0.2}\\ 0.2(\frac{x_1^0}{x_2^0})^{0.8}\end{pmatrix}, \; H_u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{-0.16(x_2^0)^{0.2}}{(x_1^0)^{1.2}} & \frac{0.16}{(x_1^0)^{0.2}(x_2^0)^{0.8}} \\ \frac{0.16}{(x_1^0)^{0.2}(x_2^0)^{0.8}} & \frac{-0.16(x_1^0)^{0.8}}{(x_2^0)^{1.8}} \end{pmatrix}$$

Symmetrie der Hesse-Matrix: Die Hesse-Matrix einer zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktion ist an allen Stellen x_0 des Definitionsbereiches symmetrisch. Besitzt eine Funktion keine stetigen zweiten partiellen Ableitungen muss die Hesse-Matrix nicht symmetrisch sein.

- ist f eine quadratische Funktion, so ist die Hesse Matrix unabhängig von der betrachteten Stelle x.

Höhenlinien und Vertikalschnitte

Definition 9.1.3: Höhenlinien

$N_y = \{\mathbf{x} \in D \mid f(\mathbf{x}) = y\}$ heisst **Höhenlinie** (von $f: D \to Z$) zum Niveau y.

Funktion gleich Wert und dann lösen

Definition 9.1.4: Vertikalschnitte

$f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}: \{t \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x}^0 + t\mathbf{r} \in D\} \to \mathbb{R}$ mit $f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{r})$ heisst **Vertikalschnitt** (von $f: D \to Z$) durch $\mathbf{x}^0 \in D$ in Richtung $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$.

t: Schrittweite, r: Richtung

Beispiele:

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$

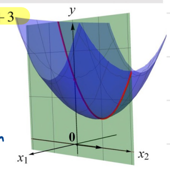
  Vertikalschnitt durch $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ in Richtung $\mathbf{r} = \mathbf{e}^2$:

  $f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ $\quad x_1 = 0 + t \cdot 0$, $x_2 = 0 + t \cdot 1$

  x_1 x_2 in Funktion einsetzen

  $= f(0,t) = 4(t-1)^2 + 3$

  Vertikalschnitt ist eine Funktion

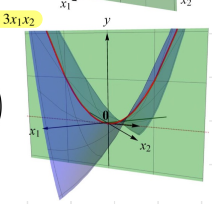


- $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $p(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

  Vertikalschnitt durch $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ in Richtung $\mathbf{r} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$:

  $p_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t) = p\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right)$

  $= p(\underbrace{-\tfrac{t}{\sqrt{2}}}_{x_1}, \underbrace{\tfrac{t}{\sqrt{2}}}_{x_2}) = \frac{5}{2}t^2$



Richtungsableitungen

Partielle Ableitung nach t

Definition 9.3.8 und Satz 9.3.5: Die erste Richtungsableitung

Ist f stetig partiell differenzierbar, $\mathbf{x}^0 \in D$ und $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung, dann

$$f'_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = \overset{\text{Vertikalschnitt abgeleitet}}{\frac{d f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt}}(0) = \nabla f(\mathbf{x}^0)^T\mathbf{r}.$$

1. Richtungsableitung von f an der Stelle $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\mathbf{r}$

$f'(x) = (\text{Gradient})^T \cdot \begin{pmatrix}\text{Richtungs}\\\text{Vektor}\end{pmatrix}$

$f'_{e^1}(x) = (2,1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2$

Definition 9.3.9 und Satz 9.3.7: Die zweite Richtungsableitung

Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar, $\mathbf{x}^0 \in D$ und $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung, dann

$$f''_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = \overset{\text{Vertikalschnitt 2mal abgeleitet}}{\frac{d^2 f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}}{dt^2}}(0) = \mathbf{r}^T H_f(\mathbf{x}^0)\mathbf{r}.$$

2. Richtungsableitung von f an der Stelle $\mathbf{x}^0$ in Richtung $\mathbf{r}$

$f''(x) = (\text{Richtungsvektor})^T \cdot \begin{pmatrix}\text{Hesse}\\\text{Matrix}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Richtungs}\\\text{vektor}\end{pmatrix}$

$f''_{e^1}(x) = (1,0)\begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2$

Satz 9.3.6: Richtung des steilsten Anstiegs

Ist f stetig partiell differenzierbar, zeigt der Gradient in die Richtung des steilsten Anstiegs.

Die Richtung mit der grössten ersten Richtungsableitung durch x^0 entspricht der Richtung des Gradienten ($\nabla f(x^0)$)

9.3 Aufgabe 6 (Hesse-Matrix - Verständnis)

Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion in 3 Variablen. Beurteilen Sie folgende Aussagen:

(1) Ist f zweimal stetig nach allen Variablen differenzierbar, dann ist die dabei entstehende 3×3 Hesse-Matrix symmetrisch. ☒ wahr ☐ falsch

(2) Ist f eine quadratische Funktion, so ist die Hesse-Matrix von f eine Diagonalmatrix. ☐ wahr ☒ falsch

(3) Ist f eine quadratische Funktion, so ist die Hesse-Matrix unabhängig von der betrachteten Stelle $\mathbf{x}^0$. ☒ wahr ☐ falsch

(4) Ist f eine affin-lineare Funktion, so ist die Hesse-Matrix von f die Einheitsmatrix I. ☐ wahr ☒ falsch

Totales Differential $= \nabla f(x^0)^T \cdot \Delta \vec{x}$

9.4 Eigenschaften

Monotonie

Definition 9.4.1 : Monotonie

$f: D \to Z$ heisst **(streng) monoton steigend** bzw. **fallend** in Richtung $\mathbf{r}$, wenn $f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}(t)$ für alle $\mathbf{x}^0 \in D$ (streng) monoton steigend bzw. fallend ist.

↳ Vertikalschnitt

Konvexität

Definition 9.4.2: Konvexität

f (streng) konvex $\Leftrightarrow$ $f_{\mathbf{x}^0,\mathbf{r}}$ für alle $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{r}$ (streng) konvex

Sei D konvex. $f: D \to Z$ heisst **konvex bzw. streng konvex**, falls

$$f(\alpha\mathbf{x}^1 + (1-\alpha)\mathbf{x}^2) \le \alpha f(\mathbf{x}^1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}^2) \text{ bzw.} \quad \text{konvex}$$

$$f(\alpha\mathbf{x}^1 + (1-\alpha)\mathbf{x}^2) < \alpha f(\mathbf{x}^1) + (1-\alpha) f(\mathbf{x}^2)\ \forall \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in D, \alpha \in (0,1).$$

streng konvex

f heisst **(streng) konkav** in D, falls $-f$ (streng) konvex in D ist.

Sätze 9.4.3 – 9.4.4: Konvexitätskriterien

D offen und konvex, $f: D \to Z$ zweimal stetig partiell differenzierbar:

- $\mathbf{r}^T H_f(\mathbf{x}^0)\mathbf{r} > 0 \quad \forall \mathbf{x}^0 \in D, \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \Rightarrow f$ streng konvex.
- $\mathbf{r}^T H_f(\mathbf{x}^0)\mathbf{r} \ge 0 \quad \forall \mathbf{x}^0 \in D, \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow f$ konvex.
- $\mathbf{r}^T H_f(\mathbf{x}^0)\mathbf{r} < 0 \quad \forall \mathbf{x}^0 \in D, \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \Rightarrow f$ streng konkav.
- $\mathbf{r}^T H_f(\mathbf{x}^0)\mathbf{r} \le 0 \quad \forall \mathbf{x}^0 \in D, \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow f$ konkav.

$\vec{r}^T \cdot H_f(x_0) \cdot \vec{r} \quad \ge 0$

Definitheit

Definition 9.4.3: Definitheit von Matrizen

Eine symmetrische $n \times n$-Matrix A heisst

- **positiv definit**, $A \succ 0$, wenn $\mathbf{r}^T A\mathbf{r} > 0$ für alle $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$;
- **positiv semidefinit**, $A \succeq 0$, wenn $\mathbf{r}^T A\mathbf{r} \ge 0$ für alle $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$;
- **negativ definit**, $A \prec 0$, wenn $\mathbf{r}^T A\mathbf{r} < 0$ für alle $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$;
- **negativ semidefinit**, $A \preceq 0$, wenn $\mathbf{r}^T A\mathbf{r} \le 0$ für alle $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$;
- **indefinit**, wenn A weder positiv definit, positiv semidefinit, negativ definit, noch negativ semidefinit ist.

Satz 9.4.5: Eigenwerte und Definitheit

Eine symmetrische $n \times n$-Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ist

- $A \succ 0 \Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$; (alle Eigenwerte)
- $A \succeq 0 \Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ge 0$;
- $A \prec 0 \Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n < 0$;
- $A \preceq 0 \Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \le 0$;
- indefinit $\Leftrightarrow$ mindestens ein Eigenwert positiv und einer negativ.

Definition 9.4.4 und Satz 9.4.6: Hauptunterdeterminanten

Ist A eine symmetrische $n \times n$-Matrix, dann: $\det(U_1) = a_{11}$ und

i-te **Hauptunterdeterminante**

$$\det(U_i) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ii} \end{pmatrix}, \quad i = 2, \ldots, n.$$

$$\begin{array}{c} U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad\quad U_n \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

- $A \succ 0 \Leftrightarrow \det(U_i) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$;
- $A \prec 0 \Leftrightarrow (-1)^i \det(U_i) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$;
- $A \succeq 0 \Rightarrow \det(U_i) \ge 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$;
- $A \preceq 0 \Rightarrow \det(U_i)(-1)^i \ge 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

det $(U_1) = a_{11}$ → erste Hauptunterdeterminante

Satz 9.4.7: Definitheit und Konvexität

Ist $f: D \to Z$ an der Stelle $\mathbf{x}^0 \in D$ zweimal stetig partiell differenzierbar:

- $H_f(\mathbf{x}^0) \succ 0$ für alle $\mathbf{x}^0 \in D \Rightarrow f$ streng konvex;
- $H_f(\mathbf{x}^0) \succeq 0$ für alle $\mathbf{x}^0 \in D \Leftrightarrow f$ konvex;
- $H_f(\mathbf{x}^0) \prec 0$ für alle $\mathbf{x}^0 \in D \Rightarrow f$ streng konkav;
- $H_f(\mathbf{x}^0) \preceq 0$ für alle $\mathbf{x}^0 \in D \Leftrightarrow f$ konkav.

Beispiel : Überprüfung Monotonie in Richtung e^1 für $g(x) = (1+x_2)\,x_1^2$

$$g_{x,e^1}(t) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = g(x_1 + t, x_2) = (1+x_2)(x_1+t)^2$$

$$g'_{x,e^1}(t) = 2(x_2+1)(t+x_1)$$

$$g'_{x,e^1}(0) = 2(x_2+1)\,x_1 \quad \to \text{ für z.B. } (-1,0) < 0 \ : \text{ nicht monoton steigend}$$

Konvexität

positiv definit	→ streng konvex		
positiv semidefinit	→ konvex	indefinit	
negativ definit	→ streng konkav		→ weder konvex noch konkav
negativ semidefinit	→ konkav		

Beispiele:

- $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3 \quad f''_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{r}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}_{H_f(x_0)} \mathbf{r} = 2r_1^2 + 8r_2^2 \ \ge 0$

  f ist streng konvex. f ist nicht konkav.
- $g(\mathbf{x}) = -8x_1 + 3x_2 + 10 \quad g''_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{r}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{H_g(x_0)} \mathbf{r} = 0$

  g ist konvex. g ist konkav.
- $p(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \quad p''_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{r}^T \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{r} = 2r_1^2 + 2r_2^2 - 6r_1r_2 \ \lessgtr 0$

  p ist nicht konvex. p ist nicht konkav.

Beispiele:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(8-\lambda) = 0$ $\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 8 \ > 0$ positiv definit
- $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\ge, \le 0$ $\quad \det(B - \lambda I) = \lambda^2$ $\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \ \ge 0 \ \le 0$ positiv semi definit, negativ semi definit
- $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(C - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$ $\Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$ indefinit
- $D = \begin{pmatrix} -0.16 & 0.16 \\ 0.16 & -0.16 \end{pmatrix}$ $\quad \det(D - \lambda I) = \lambda(\lambda + 0.32)$ $\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.32 \ \le 0$ negativ semidefinit

Beispiele:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(8-\lambda) = 0$ $\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 8 \ > 0$ positiv definit
- $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det(B - \lambda I) = \lambda^2$ $\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \ \ge 0 \ \le 0$ positiv semi definit, negativ semi definit
- $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(C - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$ $\Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$ indefinit
- $D = \begin{pmatrix} -0.16 & 0.16 \\ 0.16 & -0.16 \end{pmatrix}$ $\quad \det(D - \lambda I) = \lambda(\lambda + 0.32)$ $\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.32 \ \le 0$ negativ semidefinit

Beispiele:

→ Hauptunterdeterminante

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad \det(U_1) = 2, \ > 0$; $\det(U_2) = 16 - 0 = 16 \ > 0$ positiv definit
- $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(U_1) = 1, \ > 0$; $\det(U_2) = 0, \ \ge 0$; $\det(U_3) = 0 \ \ge 0$ wir können nicht mit Sicherheit sagen, dass sie positiv semidefinit ist. positiv semidefinit oder indefinit
- $-A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ $\quad \det(U_1) = -2, \ < 0$; $\det(U_2) = 16 - 0 = 16 \ > 0$ negativ definit (die Vorzeichen wechseln sich ab) → wenn die Matrix negativ definit ist

Beispiele:

- $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det(U_1) = 2, \ > 0$; $\det(U_2) = 4 - 9 = -5 \ < 0$ → indefinit
- $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(U_1) = 1, \ > 0$; $\det(U_2) = 0, \ \ge 0$; $\det(U_3) = 0 \ \ge 0$ positiv semidefinit oder indefinit
- $D = \begin{pmatrix} -0.16 & 0.16 \\ 0.16 & -0.16 \end{pmatrix}$ $\quad \det(U_1) = -0.16, \ < 0$; $\det(U_2) = (-0.16)^2 - 0.16^2 = 0 \ \ge 0$ negativ semidefinit oder indefinit

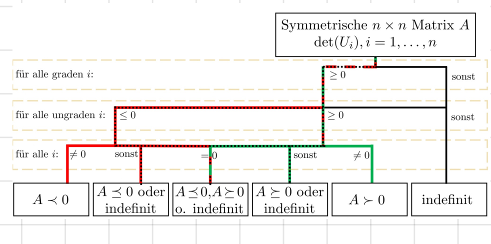
Beispiele:

- $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$ mit $H_f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ für alle $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$

  positiv definit $\Rightarrow f$ streng konvex.
- $p(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$ mit $H_p(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ für alle $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$

  indefinit $\Rightarrow p$ weder konvex noch konkav.
- $u(\mathbf{x}) = x_1^{0.8} x_2^{0.2}$ mit $H_u(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} \frac{-0.16(x_2^0)^{0.2}}{(x_1^0)^{1.2}} & \frac{0.16}{(x_1^0)^{0.2}(x_2^0)^{0.8}} \\ \frac{0.16}{(x_1^0)^{0.2}(x_2^0)^{0.8}} & \frac{-0.16(x_1^0)^{0.8}}{(x_2^0)^{1.8}} \end{pmatrix}$

  negativ semidefinit für alle $\mathbf{x}^0 \in (0, +\infty)^2$ $\Rightarrow u$ konkav.



Satz 9.4.6 — Hauptunterdeterminantenkriterium.
Sei A eine symmetrische $n\times n$-Matrix. Dann gilt:

- A ist positiv semidefinit $\Rightarrow \det(U_i)\geq 0$ für alle $i=1,\dots,n$;
- A ist positiv definit $\Leftrightarrow \det(U_i)>0$ für alle $i=1,\dots,n$;
- A ist negativ semidefinit $\Rightarrow \det(U_i)\geq 0$ für alle geraden $i=2,4,\dots$ und $\det(U_i)\leq 0$ für alle ungeraden $i=1,3,\dots$, also $\det(U_i)(-1)^i\geq 0$;
- A ist negativ definit $\Leftrightarrow \det(U_i)>0$ für alle geraden $i=2,4,\dots$ und $\det(U_i)<0$ für alle ungeraden $i=1,3,\dots$, also $(-1)^i\det(U_i)>0$ für alle $i=1,\dots,n$;

→ gilt keines dieser Kriterien, ist die Matrix indefinit

Folgerung: Sei A eine symmetrische $n\times n$-Matrix.

A ist **nicht** positiv definit	$\Leftarrow$	Es gibt eine $\det(U_i)$, die negativ oder Null ist.
A ist **nicht** positiv semidefinit	$\Leftarrow$	Es gibt eine $\det(U_i)$, die negativ ist.
A ist **nicht** negativ definit	$\Leftarrow$	Es gibt eine $\det(U_i)$, mit i gerade, die negativ oder Null ist; oder es gibt eine $\det(U_i)$, mit i ungerade, die positiv oder Null ist.
A ist **nicht** negativ semidefinit	$\Leftarrow$	Es gibt eine $\det(U_i)$, mit i gerade, die negativ ist, oder eine $\det(U_i)$, mit i ungerade, die positiv ist.

9.5 Taylorpolynome

Definitionen 9.5.1, 9.5.2: Taylorpolynome

Ist f an der Stelle $\mathbf{x}^0\in D$ partiell differenzierbar: **Taylorpolynom 1. Ordnung** von f an $\mathbf{x}^0$

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}^0)+\nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0).$$ (Tangente)

Existieren $f_{x_ix_j}$ an der Stelle $\mathbf{x}^0\in D$ für $i,j=1,\dots,n$:

$$t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}^0)+\nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)+\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^TH_f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0).$$ (quadratische Approximation)

Taylorpolynom 2. Ordnung von f an $\mathbf{x}^0$

Beispiel:

- $f(\mathbf{x})=x_1^2+4(x_2-1)^2+3$

$$\mathbf{x}^0=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}:\ f(\mathbf{x}^0)=8\quad \nabla f(\mathbf{x}^0)=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}\quad H_f(\mathbf{x}^0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}$$

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}^0)+\nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)=8+2(x_1-1)+8(x_2-2)$$

$$t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}^0)+\nabla f(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)+\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^TH_f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)$$

$$=\underbrace{8+(2,8)\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-2\end{pmatrix}}_{t_{1,\vec{x}^0}(\vec{x})}+\frac{1}{2}(x_1-1,x_2-2)\underbrace{\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-2\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}2(x-1)\\8(x-1)\end{pmatrix}}$$

$$=8+2(x_1-1)+8(x_2-2)+(x_1-1)^2+4(x_2-2)^2$$

$$=x_1^2+4(x_2-1)^2+3$$

entspricht wieder genau der Ausgangsfunktion. Dies gilt nur für

- affin lineare Funktionen
- quadratische Funktionen

Beispiel:

- $u(\mathbf{x})=x_1^{0.8}x_2^{0.2}$

$$\mathbf{x}^0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}:\ u(\mathbf{x}^0)=1\quad \nabla u(\mathbf{x}^0)=\begin{pmatrix}0.8\\0.2\end{pmatrix}\quad H_u(\mathbf{x}^0)=\begin{pmatrix}-0.16&0.16\\0.16&-0.16\end{pmatrix}$$

$$t_{1,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x})=u(\mathbf{x}^0)+\nabla u(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)=1+0.8(x_1-1)+0.2(x_2-1)$$

$$t_{2,\mathbf{x}^0}(\mathbf{x})=u(\mathbf{x}^0)+\nabla u(\mathbf{x}^0)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)+\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^TH_u(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)$$

$$=\underbrace{\boxed{1+\begin{pmatrix}0.8\\0.2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-1\end{pmatrix}}}_{t_{1,\vec{x}^0}(\vec{x})}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}-0.16&0.16\\0.16&-0.16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-1\\x_2-1\end{pmatrix}$$

$$=0.8x_1+0.2x_2-0.08x_1^2-0.08x_2^2+0.16x_1x_2$$

$-0.16(x_1-1)^2$ $-0.16(x_2-1)^2$ $+0.32(x_1-1)(x_2-1)$

9.6 Extremwertbestimmung

Globale Extrema

Global ist auch immer lokal

Definition 9.6.1: Supremum, Infimum und globale Extrema

Sei $f:D\to Z$. Ist $f(D)$ beschränkt

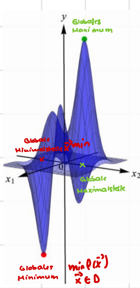
- nach oben, ist $\sup\limits_{\mathbf{x}\in D}f(\mathbf{x})=\sup f(D)$, sonst $\sup\limits_{\mathbf{x}\in D}f(\mathbf{x})=+\infty$
  Supremum — oben beschränkt — nach oben nicht beschränkt
- nach unten, ist $\inf\limits_{\mathbf{x}\in D}f(\mathbf{x})=\inf f(D)$, sonst $\inf\limits_{\mathbf{x}\in D}f(\mathbf{x})=-\infty$.
  Infimum — unten beschränkt — nach unten nicht beschränkt

Gibt es ein **Globale Maximal-/Extremalstelle** — **Globales Maximum/Extremum**

- $\mathbf{x}^{\max}\in D$ mit $f(\mathbf{x}^{\max})\geq f(\mathbf{x})\ \forall\mathbf{x}\in D$, dann ist $\max\limits_{\mathbf{x}\in D}f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}^{\max})$;
- $\mathbf{x}^{\min}\in D$ mit $f(\mathbf{x}^{\min})\leq f(\mathbf{x})\ \forall\mathbf{x}\in D$, dann ist $\min\limits_{\mathbf{x}\in D}f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}^{\min})$.

Globale Minimal-/Extremalstelle — **Globales Minimum/Extremum**

Die Menge aller globalen Maximal- bzw. Minimalstellen ist $\arg\max\limits_{\mathbf{x}\in D}f(\mathbf{x})$ bzw. $\arg\min\limits_{\mathbf{x}\in D}f(\mathbf{x})$.



Satz 9.6.3: Min-Max Dualität

Existiert das globale Maximum bzw. Minimum von f, so gilt

$$\min_{\mathbf{x}\in D}(-f(\mathbf{x}))=-\max_{\mathbf{x}\in D}f(\mathbf{x})\quad\text{bzw.}\quad\max_{\mathbf{x}\in D}(-f(\mathbf{x}))=-\min_{\mathbf{x}\in D}f(\mathbf{x}).$$

Notwendiges Kriterium 1. Ordnung

↑ gilt nur für offene Definitionsbereiche → keine Intervalle $[a,b]$

Satz 9.6.1: Notwendiges Kriterium erster Ordnung (Fermat)

Ist D offen und $f:D\to Z$ stetig partiell differenzierbar, dann gilt:
$\mathbf{x}^0\in D$ lokale Extremalstelle $\Rightarrow\nabla f(\mathbf{x}^0)=\mathbf{0}$.

Definition 9.6.3: Stationäre Stelle

Gilt $\nabla f(\mathbf{x}^0)=\mathbf{0}$, nennt man $\mathbf{x}^0$ eine **stationäre Stelle**.

Ist der Gradient an der lokalen Extremalstelle $=0$ dann ist es eine stationäre Stelle

! ABER: nicht jede stationäre Stelle ist eine lokale Extremalstelle

→ wenn die stationäre Stelle keine Extremalstelle ist, dann ist die stationäre Stelle ein Sattelpunkt

Lokales Extrema

Definition 9.6.2: Lokale Extrema und Extremalstellen

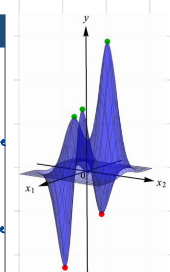
Lokale Maximalstelle

$f:D\to Z$ hat in $\mathbf{x}^0\in D$ ein **lokales Maximum** $f(\mathbf{x}^0)$, falls ein $\varepsilon>0$ existiert mit $f(\mathbf{x}^0)\geq f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x}\in U(\mathbf{x}^0,\varepsilon)\cap D$. → tutti i punti in a e $f(l)$ intorno sono $\leq$ al massimo locale

Lokale Minimalstelle

$f:D\to Z$ hat in $\mathbf{x}^0\in D$ ein **lokales Minimum** $f(\mathbf{x}^0)$, falls ein $\varepsilon>0$ existiert mit $f(\mathbf{x}^0)\leq f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x}\in U(\mathbf{x}^0,\varepsilon)\cap D$. → tutti i punti in a e $f(l)$ intorno sono $\geq$ al minimo locale

Ein **lokales Extremum** ist ein lokales Maximum oder Minimum, eine **lokale Extremalstelle** ist eine lokale Minimal- oder Maximalstelle.



jede globale Extremalstelle ist auch eine lokale Extremalstelle!

Metodo migliore per stabilire concavità/convessità di una funzione:

→ Eigenwerten der Hesse-Matrix

Eine symmetrische $n\times n$-Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ ist

- $H\succ 0\Leftrightarrow\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n>0$; (alle Eigenwerte) → H positiv definit und f streng konvex
- $H\succeq 0\Leftrightarrow\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\geq 0$; → H positiv semidefinit und f konvex
- $H\prec 0\Leftrightarrow\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n<0$; → H negativ definit und f streng konkav
- $H\preceq 0\Leftrightarrow\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\leq 0$; → H negativ semidefinit und f konkav
- indefinit $\Leftrightarrow$ mindestens ein Eigenwert positiv und einer negativ.

⚠ Wenn eine Hauptunterdeterminante $=0$ muss man mit Eigenwerte bestimmen. (es kann nicht gesagt werden ob ≥ 0 oder ≤ 0)

Eigenwerten sind mühsam zu berechnen → Hauptunterdeterminanten!

- $A\succ 0\Leftrightarrow\det(U_i)>0$ für alle $i=1,\dots,n$;
- $A\prec 0\Leftrightarrow(-1)^i\det(U_i)>0$ für alle $i=1,\dots,n$;
- $A\succeq 0\Rightarrow\det(U_i)\geq 0$ für alle $i=1,\dots,n$;
- $A\preceq 0\Rightarrow\det(U_i)(-1)^i\geq 0$ für alle $i=1,\dots,n$.
- indefinit → $\det(U_i)<0$

Beispiele:

- $f(\mathbf{x})=x_1^2+4(x_2-1)^2+3$

$$\nabla f(\mathbf{x}^0)=\begin{pmatrix}2x_1^0\\8(x_2^0-1)\end{pmatrix}\begin{matrix}=0\\=0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x_1=0\\x_2=1\end{matrix}$$

partielle Ableitungen

$$\Rightarrow\text{Stationäre Stelle}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

- $p(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$

$$\nabla p(\mathbf{x}^0)=\begin{pmatrix}2x_1^0-3x_2^0\\2x_2^0-3x_1^0\end{pmatrix}\begin{matrix}=0\\=0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}x_1=3/2\,x_2\\x_1=2/3\,x_2\end{matrix}$$

damit $x_1=x_1$ gilt müssen x_1 und x_2 Null sein

partielle Ableitungen

$$\Rightarrow\text{Stationäre Stelle}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

Hinreichende Kriterien 2. Ordnung

Definition 9.6.4: Sattelpunkt

Ist $\mathbf{x}^0$ eine stationäre Stelle, an der kein lokales Extremum vorliegt, dann spricht man von einem **Sattelpunkt** an der Stelle $\mathbf{x}^0$.

Satz 9.6.2: Hinreichende Kriterien 2. Ordnung

Ist D offen, $f : D \to Z$ zweimal stetig partiell differenzierbar, $\mathbf{x}^0 \in D$ und $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$:

- $H_f(\mathbf{x}^0) \succ 0 \Rightarrow f$ hat in $\mathbf{x}^0$ ein lokales Minimum;
- $H_f(\mathbf{x}^0) \prec 0 \Rightarrow f$ hat in $\mathbf{x}^0$ ein lokales Maximum;
- $H_f(\mathbf{x}^0)$ indefinit $\Rightarrow f$ hat in $\mathbf{x}^0$ einen Sattelpunkt.

Ist H (x) positiv oder negativ semidefinit, ist keine eindeutige Aussage möglich

- Positiv definit → Min
- Positiv semi-definite Matrizen
- Indefinit → Sattelpunkt
- Negativ semi-definite Matrizen
- Negativ definit → Max

Beispiele:

- $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3, \quad \nabla f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \mathbf{0}$

  $H_f(0,1) = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}$ positiv definit $\Rightarrow$ lokales Minimum

  U1>0, U2>0

- $p(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2, \quad \nabla p\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0}$

  $H_p(0,0) = \begin{pmatrix}2 & -3\\-3 & 2\end{pmatrix}$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt

  U1>0, U2<0

Notwendige Kriterien 2. Ordnung

Satz 9.6.5: Notwendige Kriterien 2. Ordnung

Ist D offen, $f : D \to Z$ zweimal stetig partiell differenzierbar, $\mathbf{x}^0 \in D$ und $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$: stationäre Stelle

- $\mathbf{x}^0$ lokale Minimalstelle $\Rightarrow H_f(\mathbf{x}^0) \succeq 0$. positiv semidefinit
- $\mathbf{x}^0$ lokale Maximalstelle $\Rightarrow H_f(\mathbf{x}^0) \preceq 0$. negativ semidefinit

- Positiv definit → Min
- Positiv semi-definit → Min oder Sattelpunkt*
- Indefinit → Sattelpunkt
- Negativ semi-definit → Max oder Sattelpunkt*
- Negativ definit → Max

* Ist $H_f(\mathbf{x}^0)$=Nullmatrix, kann max, min oder Sattelpunkt vorliegen

Beispiele:

- $\tilde{f}(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^3 + 3$

  $\nabla \tilde{f}(\mathbf{x}^0) = \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\begin{pmatrix}2x_1^0\\12(x_2^0-1)^2\end{pmatrix} \Rightarrow$ Stationäre Stelle $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

  $H_{\tilde{f}}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 24(x_2^0-1)\end{pmatrix}, \quad H_{\tilde{f}}(0,1) = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ positiv semidefinit $\Rightarrow$? lokale Minimalstelle

  partielle Abl nach x_1 x_2 / x_1 x_2

  $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$

- $\hat{f}(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^4 + 3$

  $\nabla \hat{f}(\mathbf{x}^0) = \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\begin{pmatrix}2x_1^0\\16(x_2^0-1)^3\end{pmatrix} \Rightarrow$ Stationäre Stelle $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

  $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$

  $H_{\hat{f}}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 48(x_2^0-1)^2\end{pmatrix}, H_{\hat{f}}(0,1) = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ positiv semidefinit $\Rightarrow$? lokale Minimalstelle

Globale Extrema konvexer Funktionen

Satz 9.6.6: Globale Extrema konvexer und konkaver Funktionen

Ist D offen, konvex und $f : D \to Z$ stetig partiell differenzierbar:

- Ist f konvex, gilt: $\mathbf{x}^0 \in D$ globale Minimalstelle $\Leftrightarrow \nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$; stationäre Stelle
- Ist f konkav, gilt: $\mathbf{x}^0 \in D$ globale Maximalstelle $\Leftrightarrow \nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$. stationäre Stelle

Beispiel:

- $\hat{f}(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2-1)^4 + 3$

  Gradient $\nabla \hat{f}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}2x_1^0\\16(x_2^0-1)^3\end{pmatrix}\begin{array}{l}=0\\=0\end{array} \Rightarrow$ Stationäre Stelle $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

  Hesse Matrix $H_{\hat{f}}(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 48(x_2^0-1)^2\end{pmatrix}$

  Für alle $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\det(H_{\hat{f}}(\mathbf{x}^0) - \lambda I) = (2-\lambda)(48(x_2^0-1)^2 - \lambda)$

  $\Rightarrow \lambda_1 = 2 > 0, \lambda_2 = 48(x_2^0-1)^2 \geq 0$

  $\Rightarrow$ Hesse-Matrix positiv semidefinit, $\mathbf{r}^T H_{\hat{f}}(\mathbf{x}^0)\mathbf{r} \geq 0$, für alle $\mathbf{x}^0$

  $\Rightarrow \hat{f}$ konvex   ist f konvex, dann ist die stationär Stelle eine Globale Minimalstelle

  $\Rightarrow$ Stationäre Stelle ist globale Minimalstelle (bei konkave ist die Stat. Stelle eine globale Maximalstelle) und auch lokale

Funktionen mit zwei stationären Stellen

Beispiel:

- $q(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$

  Gradient $\nabla q(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}3(x_1^0)^2 - 3x_2^0\\3(x_2^0)^2 - 3x_1^0\end{pmatrix}\begin{array}{l}=0\\=0\end{array} \Rightarrow$ Stationäre Stellen $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $x_1 = (x_1)^4$

  Hesse Matrix $H_q(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}6x_1^0 & -3\\-3 & 6x_2^0\end{pmatrix}$

  An der Stelle $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$: $H_q(0,0) = \begin{pmatrix}0 & -3\\-3 & 0\end{pmatrix}$

  - Hauptunterdeterminanten: $\det(U_1) = 0$, $\det(U_2) = -9$
  - Eigenwerte: $\det\begin{pmatrix}-\lambda & -3\\-3 & -\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2 - 9 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$

  $H_q(0,0)$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt an der Stelle $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

  An der Stelle $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$: $H_q(1,1) = \begin{pmatrix}6 & -3\\-3 & 6\end{pmatrix}$

  - Hauptunterdeterminanten: $\det(U_1) = 6$, $\det(U_2) = 27$
  - Eigenwerte: $\det\begin{pmatrix}6-\lambda & -3\\-3 & 6-\lambda\end{pmatrix} = (6-\lambda)^2 - 9 \Rightarrow \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 3$

  $H_q(1,1)$ positiv definit $\Rightarrow$ lokales Minimum an der Stelle $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

9.7 Mehrfachintegrale

Definition 9.7.1: Parameterintegrale

Sei $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ stetig,   (x_1-Werte, x_2-Werte)

$$F_1(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{x})dx_1, \qquad F_2(x_1) = \int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{x})dx_2.$$

(Parameter-)Integral von f über x_1 (für festes x_2)

(Parameter-)Integral von f über x_2 (für festes x_1)

Beispiel:

- $f : [0,3] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + e^{x_2}$

  $F_1(x_2) = \int_0^3 (-2x_1^2 + e^{x_2})dx_1$ man integriert nach x_1 x_2 betrachtet man als konstant

  Stammfunktion

  $= \left[\frac{-2}{3}x_1^3 + x_1 e^{x_2}\right]_0^3$

  $= \underbrace{-18 + 3e^{x_2}}_{x_1=3} - \underbrace{0}_{x_1=0} = 3e^{x_2} - 18.$

Definition 9.7.2 und Satz 9.7.1: Doppelintegrale

Sei $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ stetig,

$$\int_{a_2}^{b_2} F_1(x_2)dx_2 = \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{x})dx_1\right)dx_2 =$$

$$\int_{a_1}^{b_1} F_2(x_1)dx_1 = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(\mathbf{x})dx_2\right)dx_1$$

Doppelintegral der Funktion f über $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

Beispiel:

- $f : [0,3] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + e^{x_2}$

  $\left(\int_0^2 \underbrace{\left(\int_0^3 (-2x_1^2 + e^{x_2})dx_1\right)}_{F_1(x_2)}dx_2\right)$ ① zuerst berechnet man das innere Integral (dies haben wir im obenstehenden Beispiel gemacht)

  $= \int_0^2 (3e^{x_2} - 18)dx_2$ ② dann integriert man nach dem äusseren Integral mit der Lösung aus dem inneren Integral

  Stammfunktion $= [3e^{x_2} - 18x_2]_0^2$

  $= \underbrace{3e^2 - 18 \cdot 2}_{x_2=2} - \underbrace{3e^0 + 0}_{x_2=0} = 3e^2 - 39$

Beispiel (fortgesetzt):

- $f : [0,3] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + e^{x_2}$

  $\int_0^3 \underbrace{\int_0^2 (-2x_1^2 + e^{x_2})dx_2}_{F_2(x_1)} dx_1$

  $= \int_0^3 \left[-2x_1^2x_2 + e^{x_2}\right]_0^2 dx_1$

  $= \int_0^3 (-2x_1^2 \cdot 2 + e^2 - 1)dx_1 = \int_0^3 (-4x_1^2 + e^2 - 1)dx_1$

  $= \left[-4\frac{x_1^3}{3} + x_1e^2 - x_1\right]_0^3 = -4\frac{3^3}{3} + 3e^2 - 3 + 4\frac{0^3}{3} - 0e^2 + 0$

  $= 3e^2 - 39$

  $= \int_0^2 \underbrace{\int_0^3 (-2x_1^2 + e^{x_2})dx_1}_{F_1(x_2)} dx_2$

Welches x_2 löst die Gleichung gegeben x_1?

9.8 Implizite Funktionen

Definition 9.8.1: Implizite Funktion (im Fall $n=2$)

Durch $g(\mathbf{x}) = 0$ ist für $\varepsilon, \delta > 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ implizit

$$f : U(x_1^0, \delta) \to U(x_2^0, \varepsilon) \text{ mit } x_2 = f(x_1)$$

definiert, wenn $U(x_1^0, \delta) \times U(x_2^0, \varepsilon) \subseteq D$ und

$$g(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow x_2 = f(x_1) \text{ für alle } \mathbf{x} \in U(x_1^0, \delta) \times U(x_2^0, \varepsilon).$$

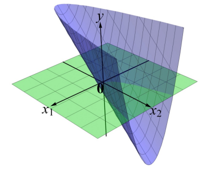
Beispiel: "ermitteln sie Näherungsweise $f(1.1)$"

Mit Hilfe der ersten Ableitung können Funktionswerte durch das Taylorpolynom 1 Grades linear approximiert werden:

$$f(x_1) = f(1) + f'(1)(x_1 - 1)$$
$$= 2 + \tfrac{1}{2}(x_1 - 1)$$
$$= 2 + \tfrac{1}{2}(1.1 - 1) = \underline{2.05}$$

- Die Lösungsmenge von $g(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2 = 0$: explizite Form
  - beschreibt (auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) den Graphen der Funktion $x_2 = f(x_1) = x_1^2$.

    "Durch $g(\mathbf{x}) = 0$ ist in einer Umgebung jedes Punktes $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, (x_1^0)^2)^T$ implizit eine Funktion $x_2 = f(x_1)$ definiert."

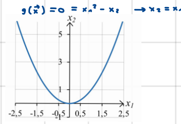


- Für die Ableitung der Funktion f mit $g(x_1, f(x_1)) = 0$ gilt:
  - Es gilt $\nabla g(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = \nabla g(x_1, x_2)\begin{pmatrix}\Delta x_1 \\ \Delta x_2\end{pmatrix} = \overbrace{g_1(x_1,x_2)}^{2x_1}\Delta x_1 + \overbrace{g_2(x_1,x_2)}^{-1}\Delta x_2$
    $= 2x_1\Delta x_1 + (-1)\Delta x_2. \overset{!}{=} 0$

    $\Delta x_2 = 2x_1\Delta x_1$
  - Mit $x_2 = f(x_1)$: $\nabla g(x_1, \overbrace{f(x_1)}^{x_2})\begin{pmatrix}\Delta x_1 \\ \Delta f(x_1)\end{pmatrix} = g_1(x_1,x_2)\Delta x_1 + g_2(x_1, f(x_1))\Delta f(x_1)$
    $= 2x_1\Delta x_1 + (-1)\Delta f(x_1).$
  - Intuitiv muss $\nabla g(x_1, f(x_1))\begin{pmatrix}\Delta x_1 \\ \Delta f(x_1)\end{pmatrix} = 0$ gelten.
  - Es gilt $f'(x_1) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1} = -\frac{g_{x_1}(x_1, f(x_1))}{g_{x_2}(x_1, f(x_1))} = 2x_1$

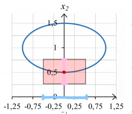
    und z.B. $f'(2) = -\frac{g_{x_1}(2,4)}{g_{x_2}(2,4)} = 4.$

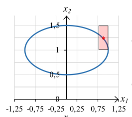
$g(\vec{x}) = 0 = x_1^2 - x_2 \rightarrow x_2 = x_1^2$

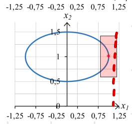


$x_2 \geq 1$: $x_2 = 1/2\sqrt{1 - x_1^2} + 1$

$x_2 \leq 1$: $x_2 = -1/2\sqrt{1 - x_1^2} + 1$ ← wir brauchen diese Gleichung, da Umgebung um x_2 kleiner als 1 ist







Beispiele:

- Die Lösungsmenge von $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 - 1 = 0$:
  - beschreibt (auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) keinen Graphen einer Funktion.
  - beschreibt auf $(-0.5, 0.5) \times (0.25, 0.75) = U(0, 0.5) \times U(0.5, 0.25)$ den Graphen der Funktion

    0.25 Umgebung um 0.5 herum

    0.5 Umgebung um 0 herum

    $$f : (-0.5, 0.5) \to (0.25, 0.75) \text{ mit } f(x_1) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{1 - x_1^2} + 1$$

    "Durch $g(\mathbf{x}) = 0$ ist in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0 = (0, 0.5)^T$ implizit eine Funktion $x_2 = f(x_1)$ definiert."
  - auf $U(\sqrt{\tfrac{3}{4}}, 0.1) \times U(\tfrac{5}{4}, 0.25)$

    "Durch $g(\mathbf{x}) = 0$ ist in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0 = (\sqrt{\tfrac{3}{4}}, \tfrac{5}{4})^T$ implizit eine Funktion $x_2 = f(x_1)$ definiert."
  - auf $U(1, 0.2) \times U(1, 0.4)$

    "Durch $g(\mathbf{x}) = 0$ ist in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^T$ implizit keine Funktion $x_2 = f(x_1)$ definiert."

Satz 9.8.1: Satz von der impliziten Funktion (im Fall $n=2$)

$g : D \to Z$ stetig partiell differenzierbar, D offen, $\mathbf{x}^0 \in D$, $g(\mathbf{x}^0) = 0$ und $g_{x_2}(\mathbf{x}^0) \neq 0$. Dann

- ist durch $g(\mathbf{x}) = 0$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$ implizit $f : U(x_1^0, \delta) \to U(x_2^0, \varepsilon)$ mit $x_2 = f(x_1)$ definiert;
- ist f stetig differenzierbar mit $f'(x_1) = \boxed{-\frac{g_{x_1}(x_1, f(x_1))}{g_{x_2}(x_1, f(x_1))}}$.

Wenn der Satz der impliziten Funktion nicht angewendet werden kann, dann ist die implizite Funktion nicht definiert

Beispiele:

$g_{x_1}(\mathbf{x}) = 2x_1,$
$g_{x_2}(\mathbf{x}) = 8(x_2 - 1)$

- Durch $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4(x_2 - 1)^2 - 1 = 0$ in einer Umgebung von:
  - $\mathbf{x}^0 = (0, 0.5)^T$: $g(\mathbf{x}^0) = 0, g_{x_1}(\mathbf{x}^0) = 0, g_{x_2}(\mathbf{x}^0) = 8(0.5 - 1) = 4 \neq 0$

    $\Rightarrow f'(0) = -\frac{g_{x_1}(0,0.5)}{g_{x_2}(0,0.5)} = 0. \quad = -\frac{0}{4}$
  - $\mathbf{x}^0 = (\sqrt{\tfrac{3}{4}}, \tfrac{5}{4})^T$: $g(\mathbf{x}^0) = 0, g_{x_1}(\mathbf{x}^0) = \sqrt{3}, g_{x_2}(\mathbf{x}^0) = 8(\tfrac{5}{4} - 1) = 2 \neq 0$

    $\Rightarrow f'(\sqrt{\tfrac{3}{4}}) = -\frac{g_{x_1}(\sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{5}{4})}{g_{x_2}(\sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{5}{4})} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{\tfrac{3}{4}}.$
  - $\mathbf{x}^0 = (1, 1)^T$: $g(\mathbf{x}^0) = 0, g_{x_1}(\mathbf{x}^0) = 2, g_{x_2}(\mathbf{x}^0) = 8(1 - 1) = 0$

    $\not\Rightarrow$ Existenz einer implizit definierten Funktion $x_2 = f(x_1)$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}^0$. Satz kann man nicht anwenden

    (heisst aber nicht unbedingt, dass keine implizite Funktion existiert)

10 Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen

10.1 Grundlagen

Definitionen 10.1.1 – 10.1.2: Optimierung unter Nebenbedingungen

Seien $f, g_1, \dots, g_m : D \to Z$ reelle Funktionen in n Variablen und
$B = \{\mathbf{x} \in D \mid g_i(\mathbf{x}) \le 0, i = 1, \dots, k, g_i(\mathbf{x}) \ge 0, i = k+1, \dots, \ell,$
$g_i(\mathbf{x}) = 0, i = \ell+1, \dots, m\} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$. **Zulässiger Bereich**

Maximierungsproblem unter Nebenbedingungen	**Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen**
(P-max) $\max\limits_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$	(P-min) $\min\limits_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$
u.d.N. $g_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, k,$	u.d.N. $g_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1, \dots, k,$
$g_i(\mathbf{x}) \ge 0,\ i = k+1, \dots, \ell,$	$g_i(\mathbf{x}) \ge 0,\ i = k+1, \dots, \ell,$
$g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = \ell+1, \dots, m$	$g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = \ell+1, \dots, m$
kurz: $\max\limits_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$	kurz: $\min\limits_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$

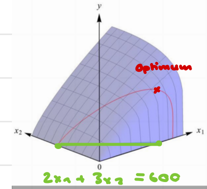
Zulässige Lösung **Zielfunktion**

Existiert $\mathbf{x}^* \in B$ mit $f(\mathbf{x}^*) \ge f(\mathbf{x})$ bzw. $f(\mathbf{x}^*) \le f(\mathbf{x})\ \forall\, \mathbf{x} \in B$, heisst $\mathbf{x}^*$ optimale Lösung von (P-max) bzw. (P-min).

Beispiel: Nutzenmaximierender Konsument

- Konsument hat Budget von 600 CHF für zwei Güter;
- 1 ME von Gut 1 kostet 2 CHF, 1 ME von Gut 2 kostet 3 CHF;
- Nutzenfunktion des Konsumenten ist $x_1^{0.8} x_2^{0.2}$, wobei x_1 Menge von Gut 1 und x_2 Menge von Gut 2 ist.

Welche Mengen x_1 und x_2 maximieren den Nutzen bei gegebenem Budget?

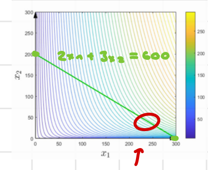


Formulierung als Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\max_{\mathbf{x}\in(0,+\infty)^2} x_1^{0.8} x_2^{0.2} \qquad \text{bzw.} \qquad \max_{\mathbf{x}\in(0,+\infty)^2} \overbrace{x_1^{0.8} x_2^{0.2}}^{f(\mathbf{x})}$$

$$\text{u.d.N. } 2x_1 + 3x_2 = 600 \qquad \text{u.d.N. } \underbrace{2x_1 + 3x_2 - 600}_{g_1(\mathbf{x})} = 0$$

$= 0$

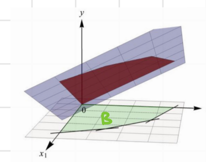


Optimum liegt ungefähr dort

Beispiel: Produktionsplanung

- Deckungsbeitrag von P_1 4 CHF/ME, von P_2 5 CHF/ME;
- 1 ME P_1 benötigt 1 ME F_1, 2 ME F_2, 1 min Presse;
- 1 ME P_2 benötigt 3 ME F_1, 1 ME F_2, 1 min Presse;
- Kapazität: 1500 ME F_1, 1200 ME F_2, 700 min Presse.

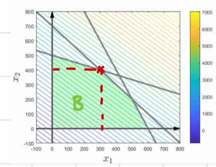
Welche Mengen x_1 und x_2 von P_1 und P_2 maximieren den Gesamtdeckungsbeitrag?



Formulierung als Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen:

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} 4x_1 + 5x_2 \qquad \text{bzw.} \qquad \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \overbrace{4x_1 + 5x_2}^{f(\mathbf{x})}$$

B: u.d.N.
- Bedarf F_1: $x_1 + 3x_2 \le 1500$ — $\overbrace{x_1 + 3x_2 - 1500}^{g_1(\mathbf{x})} \le 0$
- Bedarf F_2: $2x_1 + x_2 \le 1200$ — $g_2(\mathbf{x})\ \{\ 2x_1 + x_2 - 1200 \le 0$
- Bedarf Presse: $x_1 + x_2 \le 700$ — $g_3(\mathbf{x})\ \{\ x_1 + x_2 - 700 \le 0$
- $x_1 \ge 0$ — $g_4(\mathbf{x})\ \{\ x_1 \ge 0$
- $x_2 \ge 0$ — $g_5(\mathbf{x})\ \{\ x_2 \ge 0$



Äquivalente Optimierungsprobleme

Definition 10.1.4: Äquivalente Optimierungsprobleme

Zwei Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen heissen **äquivalent**, wenn jede optimale Lösung des einen auch eine optimale Lösung des anderen ist und umgekehrt.

Satz 10.1.1: Max-Min-Dualität für Optimierungsprobleme

$\min\limits_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ ist äquivalent zu $\max\limits_{\mathbf{x}\in B} -f(\mathbf{x})$.

Beispiele:

- $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$ $\quad f(x_1, x_2)$

  u.d.N. $x_1 \le 2$

  $x_2 \le 2$

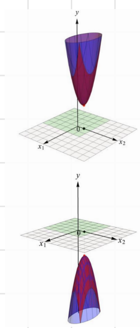
- $\max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} -x_1^2 - 4(x_2-1)^2 - 3$ $\quad -f(x_1, x_2)$

  u.d.N. $x_1 \le 2$

  $x_2 \le 2$

→ Die x-Stellen im Optimum sind in beiden Problemen gleich

→ Betragsmässig wird jedoch ein anderer Zielfunktionswert erreicht



Schranken

Satz 10.1.2: Schranken von Optimierungsproblemen

Hat f ein globales Minimum $f(\mathbf{x}^{\min})$ und $\min\limits_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ eine optimale Lösung $\mathbf{x}^* \in B$, so gilt $f(\mathbf{x}^*) \ge f(\mathbf{x}^{\min})$. Zielfunktionswert ist grösser als das globale Minimum

Hat f ein globales Maximum $f(\mathbf{x}^{\max})$ und $\max\limits_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x})$ eine optimale Lösung $\mathbf{x}^* \in B$, so gilt $f(\mathbf{x}^*) \le f(\mathbf{x}^{\max})$. Globales Maximum ist immer grösser oder gleich dem Zielfunktionswert der optimalen Lösung

Beispiele:

- $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$

  u.d.N. $x_1 \le 2$

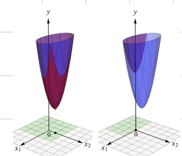
  $x_2 \le 2$ $\quad f(x^*) = f(x^{\min}) = 3$

- $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$

  u.d.N. $x_1 \le 2$

  $x_2 \le 0$

  $f(x^*) = 7 > 3 = f(x^{\min})$



- $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$

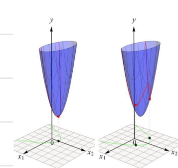
  u.d.N. $x_1^2 + 2(x_2 - 1) = 0$

  $x^* = x^{\min} = 3$

- $\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$

  u.d.N. $x_1^2 + 2(x_2-1) - 2 = 0$

  $f(x^*) > 3$



10.2 Gleichheitsnebenbedingungen

$m = 1$: Eine Nebenbedingung

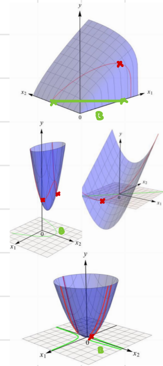
(P-max) $\max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$ u.d.N. $g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1,\dots,m$	oder	(P-min) $\min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$ u.d.N. $g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1,\dots,m$
$m=1$ (P-max) $\max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$ u.d.N. $g_1(\mathbf{x}) = 0$	oder	$m=1$ (P-min) $\min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$ u.d.N. $g_1(\mathbf{x}) = 0$

Das Substitutionsverfahren

Das Verfahren von Lagrange

Beispiele:

- $\max_{\mathbf{x}\in(0,+\infty)^2} x_1^{0.8}x_2^{0.2}$
  u.d.N. $2x_1 + 3x_2 - 600 = 0$
- $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$
  u.d.N. $x_1^2 + 2(x_2-1) - 2 = 0$
- $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2$
  u.d.N. $(x_1 - x_2)^2 = 0$
- $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2^2$
  u.d.N. $x_2 + x_1x_2^2 - e^{x_1x_2} = 0$



Das Substitutionsverfahren

Satz 10.2.1: Substitutionsverfahren im Fall $n = 2$, $m = 1$

Ist $g_1(\mathbf{x}) = 0$ äquivalent zu $x_1 = \tilde{g}_1(x_2)$ mit bekanntem $\tilde{g}_1(x_2)$, dann:
$\mathbf{x}^* = (\tilde{g}_1(x_2^*), x_2^*)^T$ optimale Lösung von (P-max) bzw. (P-min)
$\Leftrightarrow x_2^*$ globale Maximal- bzw. Minimalstelle von $f^{\text{sub}}(x_2) = f(\tilde{g}_1(x_2), x_2)$.

Beispiel:

- $\max_{\mathbf{x}\in(0,+\infty)^2} x_1^{0.8}x_2^{0.2}$ ← Zielfunktion

  u.d.N. $2x_1 + 3x_2 - 600 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 300 - \frac{3}{2}x_2$

  als x_1 in der Zielfunktion einsetzen

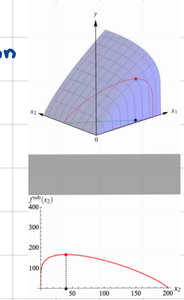
  → $f^{\text{sub}}(x_2) = f\left(300 - \frac{3}{2}x_2, x_2\right) = \left(300 - \frac{3}{2}x_2\right)^{0.8} x_2^{0.2}$ $\quad D^{sub} = (0, 200)$

  $\left(f^{\text{sub}}\right)'(x_2) = \left(300 - \frac{3}{2}x_2\right)^{-0.2} x_2^{-0.8}\left(60 - \frac{3}{2}x_2\right) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 40$

  gleich Null setzen um die stationäre Stelle zu bestimmen

  $\left(f^{\text{sub}}\right)''(x_2) \le 0 \quad \forall x_2 \in D^{\text{sub}} = (0,200) \Rightarrow x_2^{\max} = 40$ globale Maximalstelle von f^{sub}

  $\Rightarrow x_1^* = 300 - \frac{3}{2}40 = 240, x_2^* = 40$ optimale Lösung



Beispiel:

- $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2$

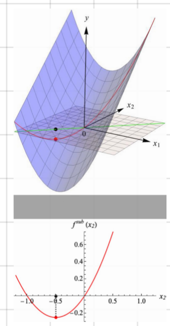
  u.d.N. $(x_1 - x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

  $f^{\text{sub}}(x_2) = x_2^2 + x_2$ $\quad D^{sub} = \mathbb{R}$

  $\left(f^{\text{sub}}\right)'(x_2) = 2x_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$

  $\left(f^{\text{sub}}\right)''(x_2) = 2 > 0 \quad \forall x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow x_2^{\min} = -\frac{1}{2}$ globale Minimalstelle von f^{sub}

  $\Rightarrow x_1^* = -\frac{1}{2}, x_2^* = -\frac{1}{2}$ optimale Lösung



Vorsicht bei der Anwendung:

Die Rollen von x_1 und x_2 können vertauscht werden.

- $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + 4(x_2-1)^2 + 3$

  u.d.N. $x_1^2 + 2(x_2-1) - 2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{2 - x_1^2}{2} + 1$ →

  Gleichung kann nicht eindeutig nach x_1 aufgelöst werden $\left(x_1 = \pm\sqrt{2 - 2(x_2 - 1)}\right)$

  ABER wir können die Rollen von x_1 und x_2 tauschen und die Gleichung eindeutig nach x_2 auflösen

  $f^{\text{sub}}(x_1) = x_1^2 + (2 - x_1^2)^2 + 3$ $\quad D^{sub} = \mathbb{R}$

  $(f^{\text{sub}})'(x_1) = 4x_1^3 - 6x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 \in \left\{-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$

  $(f^{\text{sub}})''(x_1) = 12x_1^2 - 6$

  $(f^{\text{sub}})''(0) = -6 < 0 \quad \Rightarrow$ lokale Maximalstelle

  $(f^{\text{sub}})''\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = (f^{\text{sub}})''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 12 > 0 \quad \Rightarrow$ lokale Minimalstellen

  $\lim_{x_1\to+\infty} f^{\text{sub}}(x_1) = \lim_{x_1\to-\infty} f^{\text{sub}}(x_1) = +\infty \quad \Rightarrow x_1^{\min} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt{\frac{3}{2}}$ globale Minimalstellen von f^{sub}

  $\Rightarrow x_1^* = -\sqrt{\frac{3}{2}}, x_2^* = 1.25$ und $x_1^* = \sqrt{\frac{3}{2}}, x_2^* = 1.25$ optimale Lösungen

Das Verfahren ist nicht immer anwendbar!

- $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2^2$

  u.d.N. $x_2 + x_1x_2^2 - e^{x_1x_2} = 0$

  ↳ Man kann die Gleichung weder nach x_1 noch nach x_2 auflösen

– Kann man die Nebenbedingungen nicht nach einer Variablen auflösen, funktioniert das Verfahren durch Substitution in der Regel nicht.

Das Verfahren von Lagrange

$m=1$	(P-max) $\max_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$ u.d.N. $g_1(\mathbf{x})=0$	oder	$m=1$	(P-min) $\min_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$ u.d.N. $g_1(\mathbf{x})=0$

$\mathbf{x}^*$ optimale Lösung, f, g_1 stetig partiell differenzierbar, D offen, $f(\mathbf{x})-y=0$ definiert implizit $\tilde{f}(x_1)$ und $g_1(\mathbf{x})=0$ definiert implizit $\tilde{g}_1(x_1)$.

$\Rightarrow$
- $\tilde{f}'(x_1^*)=\tilde{g}_1'(x_1^*)$ bzw. $\frac{f_{x_1}(\mathbf{x}^*)}{f_{x_2}(\mathbf{x}^*)}=\frac{(g_1)_{x_1}(\mathbf{x}^*)}{(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^*)}$
- $g_1(\mathbf{x}^*)=0$

Umformulierung obiger Kriterien:

$$(i)\quad \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1} = f_{x_1}(\mathbf{x}^*)-\lambda^*(g_1)_{x_1}(\mathbf{x}^*)=0 \quad \boxed{\tilde{f}'(x_1^*)=\tilde{g}'(x_1^*)}$$

$$(ii)\quad \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2} = f_{x_2}(\mathbf{x}^*)-\lambda^*(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^*)=0 \quad \boxed{\lambda^*=\frac{f_{x_2}(\mathbf{x}^*)}{(g_1)_{x_2}(\mathbf{x}^*)}}$$

$$(iii)\quad \frac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda} = -g_1(\mathbf{x}^*)=0 \quad \boxed{g_1(\mathbf{x}^*)=0}$$

Definition 10.2.3: Lagrange-Funktion (im Fall n=2 und m=1)

Seien $f, g_1 : D \to Z$, $D\subseteq\mathbb{R}^2$. Die Funktion $L : D\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $L(x_1,x_2,\lambda)=\underbrace{f(x_1,x_2)}_{\text{Zielfunktion}}-\lambda\underbrace{g_1(x_1,x_2)}_{\text{Nebenbedingung}}$ heisst **Lagrange-Funktion**.

Satz 10.2.5: Der Satz von Lagrange (im Fall n=2, m=1)

D offen, $f, g_1 : D\to Z$ stetig partiell differenzierbar, $\mathbf{x}^*\in D\subseteq\mathbb{R}^2$,
$\mathbf{x}^*$ optimale Lösung von (P-max) oder (P-min) mit $\nabla g_1(\mathbf{x}^*)\neq\mathbf{0}$
$\Rightarrow$ Es existiert $\lambda^*\in\mathbb{R}$ mit $\nabla L(x_1^*,x_2^*,\lambda^*)=\mathbf{0}$ und $L(x_1^*,x_2^*,\lambda^*)=f(x_1^*,x_2^*)$.

- Nicht beide partiellen Ableitungen von $g(x^*)$ dürfen $=0$ sein (höchstens eine!)

- Es besteht keine Sicherheit, dass die stationären Stellen der optimalen Lösung entsprechen

Beispiel:

Suche Stellen, an welchen die Ableitung der implizit durch die Höhenlinie von f definierten Funktion gleich der Ableitung der implizit durch die Nebenbedingung definierten Funktion ist.

- $\max_{\mathbf{x}\in(0,+\infty)^2} x_1^{0.8}x_2^{0.2}$

u.d.N. $2x_1+3x_2-600=0$

Gleichung nach x_2 auflösen

Höhenlinie zum Niveau y: $x_1^{0.8}x_2^{0.2}=y \Leftrightarrow x_2=\tilde{f}(x_1)=\frac{y^5}{x_1^4}$

Nebenbedingung: $x_2=\tilde{g}_1(x_1)=200-\frac{2}{3}x_1$

nach x_2 auflösen

In $\mathbf{x}^*$ gilt:

- $\tilde{f}'(x_1^*)=\tilde{g}_1'(x_1^*)$: $-\frac{f_{x_1}(x_1^*,x_2^*)}{f_{x_2}(x_1^*,x_2^*)}=-\frac{(g_1)_{x_1}(x_1^*,x_2^*)}{(g_1)_{x_2}(x_1^*,x_2^*)}$

  bzw. $\boxed{-4\frac{x_2^*}{x_1^*}=-\frac{2}{3}}$

- $g_1(\mathbf{x}^*)=0$: $\boxed{2x_1^*+3x_2^*-600=0}$

Anhand dieser beiden Gleichungen können x_1^* und x_2^* bestimmt werden

$\Rightarrow \mathbf{x}^*=(240,40)^T$

Beispiel:

- $\max_{\mathbf{x}\in(0,+\infty)^2} x_1^{0.8}x_2^{0.2}$

u.d.N. $2x_1+3x_2-600=0$

$L(x_1,x_2,\lambda)=x_1^{0.8}x_2^{0.2}-\lambda(2x_1+3x_2-600)$

$$\nabla L(x_1,x_2,\lambda)=\begin{pmatrix}0.8x_1^{-0.2}x_2^{0.2}-2\lambda\\0.2x_1^{0.8}x_2^{-0.8}-3\lambda\\-2x_1-3x_2+600\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\to$ so erhalten wir die stationären Stellen

$\Rightarrow$ Stationäre Stelle von L: $(\underset{x_1^*}{240},\underset{x_2^*}{40},\underset{\lambda^*}{0.4\sqrt[5]{\tfrac{1}{6}}})^T$

- f und g_1 sind stetig partiell differenzierbar
- $\nabla g_1(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ Wenn das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen eine optimale Lösung hat, dann an der Stelle $x_1^*=240, x_2^*=40$.

Beispiele:

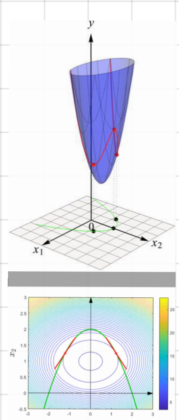
①

- $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2+4(x_2-1)^2+3$ $\to$ offener Definitionsbereich ✓

u.d.N. $x_1^2+2(x_2-1)-2=0$

- f und g_1 sind stetig partiell differenzierbar ✓
- $\nabla g_1(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}2x_1\\2\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$ ✓

$\Rightarrow$ Wenn das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen eine optimale Lösung hat, dann an einer der stationären Stellen von L.



$L(x_1,x_2,\lambda)=x_1^2+4(x_2-1)^2+3-\lambda(x_1^2+2(x_2-1)-2)$

$$(i)\quad L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda)=2x_1-\lambda\cdot 2x_1 \quad =2x_1(1-\lambda)=0$$
$$(ii)\quad L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda)=8(x_2-1)-2\lambda \quad =0$$
$$(iii)\quad L_\lambda(x_1,x_2,\lambda)=-(x_1^2+2(x_2-1)-2) \quad =0$$

$\Rightarrow$ Stationäre Stellen von L:

$(0,2,\cancel{4})^T, (-\sqrt{\tfrac{3}{2}},\tfrac{5}{4},\cancel{1})^T, (\sqrt{\tfrac{3}{2}},\tfrac{5}{4},\cancel{1})^T$

Nicht alle stationären Stellen sind optimale Lösungen!

optimale Lösung liegt bei zwei Punkten dieser drei stationären Stellen

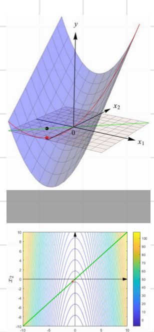
③

- $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2+x_2^2$ $\to$ offener Definitionsbereich ✓

u.d.N. $x_2+x_1x_2^2-e^{x_1x_2}=0$

- f und g_1 sind stetig partiell differenzierbar ✓
- $\nabla g_1(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}x_2^2-x_2e^{x_1x_2}\\1+2x_1x_2-x_1e^{x_1x_2}\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$ ✓

$\Rightarrow$ Wenn das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen eine optimale Lösung hat, dann an einer der stationären Stellen von L.



$L(x_1,x_2,\lambda)=x_1^2+x_2^2-\lambda(x_2+x_1x_2^2-e^{x_1x_2})$

$$(i)\quad L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda)=2x_1-\lambda\left(x_2^2-x_2e^{x_1x_2}\right) \quad =0$$
$$(ii)\quad L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda)=2x_2-\lambda\left(1+2x_1x_2-x_1e^{x_1x_2}\right) \quad =0$$
$$(iii)\quad L_\lambda(x_1,x_2,\lambda)=-\left(x_2+x_1x_2^2-e^{x_1x_2}\right) \quad =0$$

$\Rightarrow$ Stationäre Stellen von L:

Da diese Funktion einen kleineren Wert hat liegt hier das Minimum

$(0,1,2)^T$, $(x_1,x_2,\lambda)^T\approx(1.07654,-1.15904,1.12845)^T$

$f(0,1)=1$ $\quad$ $f(1.08,-1.16)=2.5$

Nicht alle stationären Stellen sind optimale Lösungen!

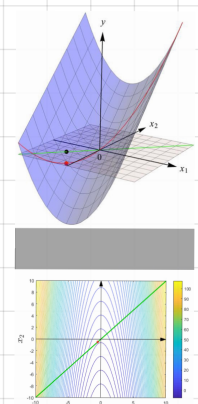
②

- $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} x_1^2+x_2$ offener Definitionsbereich ✓

u.d.N. $(x_1-x_2)^2=0$

- f und g_1 sind stetig partiell differenzierbar ✓
- $\nabla g_1(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}2(x_1-x_2)\\-2(x_1-x_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

! $\Rightarrow$ Wenn das Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen eine optimale Lösung hat, dann an einer stationären Stelle oder einer Stelle mit $\nabla g_1(\mathbf{x})=\mathbf{0}$.



$L(x_1,x_2,\lambda)=x_1^2+x_2-\lambda(x_1-x_2)^2$

$$(i)\quad L_{x_1}(x_1,x_2,\lambda)=2x_1-\lambda\cdot 2(x_1-x_2) \quad =0$$
$$(ii)\quad L_{x_2}(x_1,x_2,\lambda)=1+\lambda\cdot 2(x_1-x_2) \quad =0$$
$$(iii)\quad L_\lambda(x_1,x_2,\lambda)=-(x_1-x_2)^2 \quad =0$$

$\Rightarrow$ L hat keine stationären Stellen

Hier gilt für die optimale Lösung: $\boxed{\nabla g(\mathbf{x}^*)=\mathbf{0}}$

Bei dieser Aufgabe ist das Verfahren von Lagrange nicht anwendbar

$\to$ Das Substitutionsverfahren hingegen schon

wichtig:

- Nicht immer ist die optimale Lösung des Optimierungsproblems eine stationäre Stelle der Lagrange-Funktion und nicht jede stationäre Stelle der Lagrange-Funktion ist eine optimale Lösung.

10.3 Lineare Optimierung

Definition eines linearen Optimierungsproblems

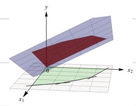
Definition 10.3.1: Standardform eines LPs

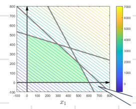
Für $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ heisst

$$\text{(P-max)} \quad \max \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\text{u.d.N. } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

lineares Optimierungsproblem oder lineares Programm (LP) in Standardform.

Lineare Optimierungsprobleme sind Optimierungsprobleme mit affin-linearer Zielfunktion und Nebenbedingungen, welche durch affin-lineare Funktionen beschrieben werden. Lineare Optimierungsprobleme können durch geschicktes Aufzählen von Eckpunkten gelöst werden.





Idee: Finde die Höhenlinie zum grösstmöglichen Niveau, welche mindestens einen Punkt im zulässigen Bereich hat.

Beispiel: $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 700 \\ 1500 \\ 1200 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

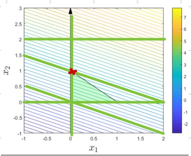
- $\max \ 4x_1 + 5x_2$ $\qquad f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2$

u.d.N.
$x_1 + x_2 \leq 700$ $\qquad g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 700 \leq 0$
$x_1 + 3x_2 \leq 1500$ $\qquad g_2(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 - 1500 \leq 0$
$2x_1 + x_2 \leq 1200$ $\qquad g_3(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 1200 \leq 0$
✓ $x_1 \geq 0$ $\qquad g_4(x_1, x_2) = x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$ $\qquad g_5(x_1, x_2) = x_2 \geq 0$

→ lineares Optimierungsproblem in Standardform

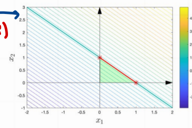
Beispiele:

- optimale Lösungen liegen an einem Eckpunkt
- Es kann aber auch sein das ein lineares Optimierungsproblem keine optimale Lösung hat:
  - Zielfunktion ist auf zulässigem Bereich nach oben unbeschränkt
  - Der zulässige Bereich ist leer

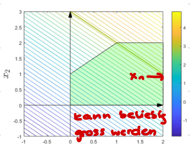


$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

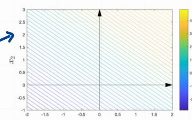
- $\max x_1 + 2x_2$
  u.d.N. $x_2 \leq 2$ $\qquad x_2 - 2 \leq 0$
  $x_1 + x_2 \leq 1$ $\qquad x_1 + x_2 - 1 \leq 1$ $\qquad x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- $\max x_1 + x_2$ $\qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  u.d.N. $x_2 \leq 2$
  $x_1 + x_2 \leq 1$
  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



- $\max x_1 + x_2$
  u.d.N. $x_2 \leq 2$ → keine optimale Lösung, da $x_1 + x_2$ nicht beschränkt ist
  $-x_1 + x_2 \leq 1$
  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
- $\max x_1 + x_2$
  u.d.N. $-x_2 \leq -2$
  $x_1 + x_2 \leq 1$
  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



↪ keine optimale Lösung

Bedeutung von Ecken

Definition 10.3.2: Eckpunkt

$\mathbf{x} \in B$ heisst Eckpunkt von B, wenn es keine $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in B, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \neq \mathbf{x}$ gibt, so dass $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}^1 + (1-\alpha)\mathbf{x}^2$ für ein $\alpha \in [0,1]$.

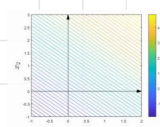
Sätze 10.3.1, 10.3.2, 10.3.4: Eigenschaften des zulässigen Bereich

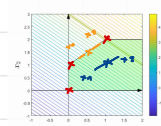
Der zulässige Bereich eines LPs ist konvex (oder leer) und hat höchstens endlich viele Eckpunkte. Ist der zulässige Bereich beschränkt, hat das LP eine Lösung.

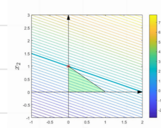
Satz 10.3.3: Hauptsatz der linearen Optimierung

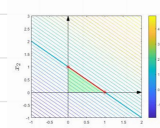
Für ein LP in Standardform mit zulässigem Bereich B gilt:

- Ist $B = \{\}$, hat das LP keine optimale Lösung.
- Ist $B \neq \{\}$, ist entweder mindestens einer der Eckpunkte von B eine optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ des LPs oder das LP hat keine optimale Lösung, da $\sup_{\mathbf{x} \in B} \mathbf{c}^T\mathbf{x} = +\infty$.
- Existieren optimale Lösungen an Eckpunkten $\mathbf{x}^{*1}, \ldots \mathbf{x}^{*s}$, so ist
$$\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \mathbf{x}^{*i}, \alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots, s, \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$$
ebenfalls eine optimale Lösung.









Der Hauptsatz der linearen Optimierung

Lineares Optimierungsproblem in Standardform
- $B = \{\}$
  - keine zulässige Lösung ⇒ keine optimale Lösung
- $B \neq \{\}$
  - $\sup_{\mathbf{x} \in B} \mathbf{c}^T\mathbf{x} = +\infty$ ⇒ keine optimale Lösung
  - zulässige und optimale Lösung an einem Eckpunkt von B
    - eindeutige optimale Lösung an einem Eckpunkt von B
    - mehrere optimale Lösungen an Eckpunkten von B ⇒ unendlich viele optimale Lösungen

Beispiele:

$B \neq \{\}$
B beschränkt } hat eine optimale Lösung

- $\max \ 4x_1 + 5x_2$
  u.d.N. $x_1 + x_2 \leq 700$
  $x_1 + 3x_2 \leq 1500$
  $2x_1 + x_2 \leq 1200$
  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
  $\Rightarrow \mathbf{x}^* = (300, 400)^T$
- $\max \ 4x_1 + 4x_2$
  u.d.N. $x_1 + x_2 \leq 700$
  $x_1 + 3x_2 \leq 1500$
  $2x_1 + x_2 \leq 1200$
  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Eckpunkte	$4x_1+5x_2$	$4x_1+4x_2$
$(0,0)^T$	0	0
$(600,0)^T$	2400	2400
$(0,500)^T$	2500	2000
$(500,200)^T$	3000	2800
$(300,400)^T$	3200	2800

eine optimale Lösung $\qquad$ unendlich viele Lösungen

$\Rightarrow$ Jedes $\mathbf{x}^* = \alpha\begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix} + (1-\alpha)\begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix}, 0 \leq \alpha \leq 1$ ist optimale Lösung
→ alle Punkte auf der Verbindungslinie sind opt. Lösungen

- $\max \ 4x_1 + 5x_2$
  u.d.N. $x_1 + 2x_2 \leq 700$
  $x_1 + 2x_2 \leq 1500$
  $2x_1 + 4x_2 \leq 1200$
  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
  $\Rightarrow \mathbf{x}^* = (600, 0)^T$

Eckpunkte	$4x_1+5x_2$
$(0,0)^T$	0
$(600,0)^T$	2400
$(0,300)^T$	1500

→ optimale Lösung