MAT141 Formelblatt (von Dario Monopoli)

Wichtige Zusammenhänge

Für eine quadratische $[x \times n]$ Matrix A gilt:

$$\det(A) \neq 0$$

$\Leftrightarrow$ A ist invertierbar
$\Leftrightarrow$ A ist regulär
$\Leftrightarrow r(A) = n$
$\Leftrightarrow$ Zeilen- und Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig

Rechenregeln für Determinanten

Für quadratische $[x \times n]$ Matrizen A, A^{-1}, B gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \rightarrow \det\left(A^m\right) = (\det(A))^m$$

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)} \qquad \det\left(A^T\right) = \det(A)$$

A eine $[x \times n]$ Matrix $\rightarrow \det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

Falls A diagonal: A = $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$,
$\rightarrow \det(A) = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$

Determinante einer 2x2 Matrix

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definieren wir

$$\det(A) = a \cdot d - c \cdot b$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 4 = 3 + 4 = 7$$

Transponierte einer 3x3 Matrix

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \mathrm{A}^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

Determinante einer 4x4 Matrix

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$$

wo:

$$A_{14} = \begin{pmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{pmatrix}, A_{24} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ m & n & o \end{pmatrix}$$

$$A_{34} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ m & n & o \end{pmatrix}, A_{44} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

$$det(A) = d \cdot (-1)^{1+4} \cdot det(A_{14}) + h \cdot (-1)^{2+4} \cdot det(A_{24}) + l \cdot (-1)^{3+4} \cdot det(A_{34}) + p \cdot (-1)^{4+4} \cdot det(A_{44})$$

Inverse einer Matrix berechnen

Inverse einer 2×2 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse einer $n_x n$ Matrix:

$$\left(A \mid I_n\right) \text{ umformen zu } \left(I_n \mid A^{-1}\right)$$

Rechenregeln der Matrizenmultiplikation

- A(BC) = (AB)C
- A(B + C) = AB + AC
- $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$
- $(A^p)^q = A^{p \cdot q}$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- $\lambda \cdot (AB) = (\lambda \cdot A)B = A(\lambda \cdot B)$
- $(AB)^T = B^T \cdot A^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A^T)^T = A$
- $A^0 = Id_{n \times n}$

Gauss-Umformungen und Determinante

- Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren:
  $\rightarrow$ Determinante bleibt gleich (analog bei Spalten)
- Vertauschen zweier Zeilen:
  $\rightarrow$ Determinante ändert das Vorzeichen!
- Multiplizieren einer Zeile mit λ :
  $\rightarrow$ Determinante wird $\cdot\lambda$ vergrössert!

Dimension der Lösungsmenge eines LGS

Allgemeines:
Matrixschreibweise: $A \cdot \vec{x} = b$ Falls b = 0, ist das syste, homogen, sonst inhomogen.

- homogen ($A \cdot \vec{x} = 0$):
  - Falls det(A) $\neq 0$: Triviallösung $\vec{x} = 0$
  - Falls det(A) $= 0$: neben Trivial, ∞ viele Lsg.
- inhomogen ($A \cdot \vec{x} \neq 0$):
  - Falls det(A) $\neq 0$: genau eine Lsg: $x = A^{-1} \cdot b$
  - Falls det(A) $= 0$: keine oder ∞ viele Lsg.

Dimension der Lösungsmenge eines LGS

dim $\mathbf{L} = \mathbf{n} - \mathbf{r}$ = #Variablen − #pivots
$\triangleq$ Anzahl frei wählbarer Parameter
$L =$ Lösungsmenge des LGS $Ax = b$
$n =$ Anzahl Variablen = Anzahl Spalten von A
$r = r(A) =$ Rang der Matrix A
= Anzahl Pivots der Zeilenstufenform
(Row Echelon Form)

Beispiel: Anzahl Lösungen eines LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & u & v \end{array}\right)$$

hat genau eine Lösung, falls $u \neq 0, v \in \mathbb{R}$
hat keine Lösung, falls $u = 0$ und $v \neq 0$
hat unendlich viele Lösungen, falls $u = 0$ und $v = 0$

Cramersche Regel (um LGS zu lösen)

Ist A eine reguläre $[n_x n]$ Matrix, so hat das LGS $Ax = b$ eindeutige Lösungen $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ mit

$$\hat{x}_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

A_i : i-te Spalte von A durch b ersetzen

Beispiel Cramersche Regel

Beispiel Cramersche Regel:

$$\mathrm{LGS}(A \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{x}_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{3 \cdot 1 - 0 \cdot 1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \hat{x}_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Diagonalisierbare Matrizen

Eine quadratische Matrix A heisst diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.
Das bedeutet, es existiert eine invertierbare Matrix P, sodass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.
P: Matrix aus den Eigenvektoren von A, die eine Basis bilden.
D: Diagonalmatrix die auf der Hauptdiagonale die EW $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ von A hat.
Die berechnung von Potenzen ist vereinfacht:

$$A^k = PD^kP^{-1}, \text{ wo } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

A hat n linear unabhängige EV oder n verschiedene EW? Dann ist A diagonalisierbar.
Aufpassen: λ_i und v_i in der gleichen Reihenfolge in die P- und D-Matrizen einfügen!

Basis

Vektorraum mit $\dim(V) = n$. Eine Basis besteht aus

- genau n linear unabhängigen Vektoren

d.h. $\det\left(v^{(1)} v^{(2)} \ldots v^{(n)}\right) \neq 0$

Lineare Unabhängigkeit

$v_1, \ldots, v_k$ sind linear unabhängig, falls

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_k \cdot v_k = 0}_{\text{LGS } A\lambda = 0} \stackrel{!}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$$

$(\Rightarrow \mathrm{kern}(A) = 0)$

Linear abh.: falls das LGS unendlich viele Lösungen hat

Lineare Unabhängigkeit überprüfen

- n Vektoren $\in \mathbb{R}^n \Rightarrow \det(v_1 \ldots v_n) \neq 0$
- sonst LGS lösen oder von Auge vergleichen (bei 2 Vektoren)

Basis (des $\mathbb{R}^n$)

Basis (des $\mathbb{R}^n$):
1) n linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ ($\in \mathbb{R}^n$)

orthogonale Basis:
1) n linear unabhängige Vektoren
2) $v_1, \ldots, v_n$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt $= 0$)

orthonormale Basis (ONB):
1) n linear unabhängige Vektoren
2) $v_1, \ldots, v_n$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt $= 0$)
3) alle Vektoren haben Länge 1 (= normiert)

Euklidisches Skalarprodukt

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i \quad \langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \overline{w_i} \quad (v, w \in \mathbb{C})$$

- v und w sind orthogonal $\Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0$
- Länge von $v = \|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ normiert: $\frac{v}{\|v\|}$
- $\cos(\varphi) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|}$

  (Winkel $0 \leq \varphi \leq \pi$ zwischen v und w)

Basiswechsel

Standardbasis $[e]$ (=Einheitsvektoren)

$$\text{im } \mathbb{R}^3 : [e] = \left[(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\right]$$

Neue Basis $[v] = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ gegeben
$\rightarrow$ Koordinaten desselben Vektors für neue Basis $[v]$ berechnen(!) via **Basiswechselmatrix:** $Id_{[\text{von alter Basis}] \rightarrow [\text{ zu neuer Basis}]}$

- $Id_{[v]\rightarrow[e]} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$
  (Matrix bestehend aus neuen Basisvektoren)

$$Id_{[e]\rightarrow[v]} = \left(Id_{[v]\rightarrow[e]}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}^{-1}$$

Falls $[v]$ eine ONB ist: $\left(Id_{[v]\rightarrow[e]}\right)^{-1} = \left(Id_{[v]\rightarrow[e]}\right)^T$

Abbildungsmatrix für andere Basen angeben

Gegeben: Abbildungsmatrix $\left(= T_{[e]\rightarrow[e]}\right)$

$$T_{[v]\rightarrow[w]} = Id_{[e]\rightarrow[w]} \cdot T_{[e]\rightarrow[e]} \cdot Id_{[v]\rightarrow[e]}$$

wobei $Id_{[v]\rightarrow[e]} = \begin{pmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} & \ldots & v^{(n)} \end{pmatrix}$

und $Id_{[e]\rightarrow[v]} = \left(Id_{[v]\rightarrow[e]}\right)^{-1}$ (invertieren)

falls $[w]$ eine ONB ist gilt: $Id_{[e]\rightarrow[w]} = \left(Id_{[w]\rightarrow[e]}\right)^T$

Bild und Kern einer linearen Abbildung

Lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ (mit Abbildungsmatrix A)

$$\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{range}(f) := \{f(x) \mid x \in V\} \subset W$$
$$\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Null}(f) := \{x \in V \mid f(x) = 0\} \subset V$$

Hinweis: beide sind Untervektorräume(!)
mit Dimension vom Bild $= r(A)$
Dimension vom Kern $= n - r$(A)

allg. gilt: $\dim(\mathrm{Bild}) + \dim(\mathrm{Kern}) = n$

Fundamentaler Satz der Algebra

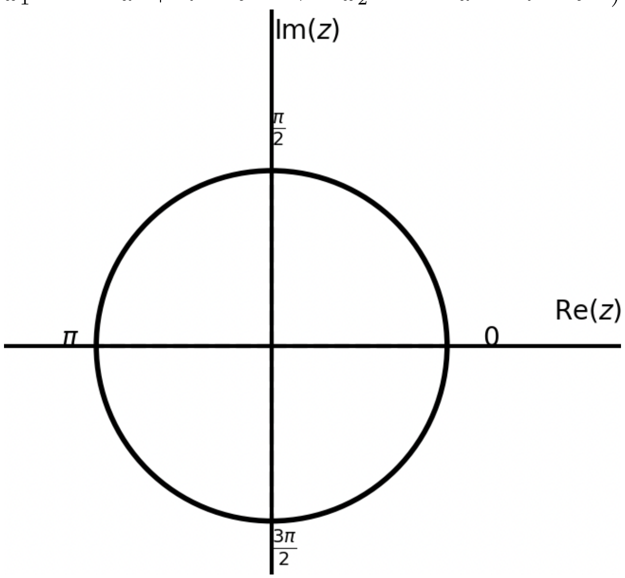
Jedes Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ hat (*bei "Mehrfachzählung") immer n Nullstellen und kann gschrieben werden in der Form:

$p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$.

Komplexe Zahlen

- $i^2 = -1$
- Kartesische Koordinaten: $z = a + ib = \underbrace{a}_{\mathrm{Re}(z)} + i \cdot \underbrace{b}_{\mathrm{Im}(z)}$
- Komplex konjugiertes: $\bar{z} = a - ib$

Hinweis: komplexe Lösungen sind immer paarweise konjugiert! (d.h. quadr. Gleichung mit Lös. $x_1 = a + i \cdot b \rightarrow x_2 = a - i \cdot b$)



Polar-/Kartesiche Koordinaten

Polarkoordinaten: $z = re^{i \cdot \varphi}$
(kart. Koo.: $z = a + i \cdot b$)

$$r = |z| = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{(arctan hat 2 Lösungen!!)}$$

Aufpassen:
falls a < 0: $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$
falls a = 0, b > 0: $\varphi = \frac{\pi}{2}$
falls a = 0, b < 0: $\varphi = -\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$
falls a = 0, b = 0: φ ist undefiniert
Alternativ: φ graphisch bestimmen mit
$a = r \cdot \cos(\varphi)$, $b = r \cdot \sin(\varphi)$

Gleichung lösen in Polarkoordinaten

Gleichungen der Form: $w^n = a + ib$ (kann rechts auch eine reelle Zahl sein $\rightarrow b = 0$) oder

$$w = \sqrt[n]{a + ib} \mathrel{\widehat{=}} w^n = a + ib$$

hat n Lösungen:

$$w_1, \ldots, w_n = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot (k-1)\right)}, \quad k = 1, \ldots, n$$

Beispiel: Gleichung lösen in Polarkoordinaten

$w^3 = 1 + i \quad \widehat{=}\ w = \sqrt[3]{1+i}$ hat 3 Lösungen!
Polarkoordinaten von $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \pi/4}$
Formel: $w_1, \ldots, w_3 = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} e^{i \cdot \left(\frac{\pi/4}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot (k-1)\right)}, k = 1, \ldots, 3$

$$w_1 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 0\right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 1\right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{9\pi}{12}\right)}$$

$$w_3 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 2\right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{17\pi}{12}\right)}$$

Bruch vereinfachen zu Komplexer Zahl

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

Beispiel: $z_1 = 3 + 5i, \quad z_2 = 4 + 2i$

$$= \frac{(3+5i) \cdot (4-2i)}{(4+2i) \cdot (4-2i)} = \frac{(3+5i) \cdot (4-2i)}{4^2 + 2^2} =$$

$$\frac{(3 \cdot 4 + 5 \cdot 2) + i \cdot (5 \cdot 4 - 3 \cdot 2)}{20} = \frac{22 + i \cdot (14)}{20} =$$

$$\frac{22}{20} + i\frac{14}{20} = 1.1 + 0.7i$$

Rechenregeln mit Kartesiche Koordinaten

- Multiplikation:
  $z_1 \cdot z_2 = (a+ib) \cdot (c+id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$
- Addition:
  $z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
- Subtraktion:
  $z - w = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$
- Potenz von Inverse:
  $z^{-n} := \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{|z|^n} e(-n\varphi)$

Multiplikation / Division mit Polarkoordinaten

$$z_1 = r_1 e^{i \cdot \varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i \cdot \varphi_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 e^{i \cdot \varphi_1}\right) \cdot \left(r_2 e^{i \cdot \varphi_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)} \quad z^n = \left(r \cdot e^{i\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{i \cdot (n \cdot \varphi)}$$

Eigenwerte (EW) berechen

Lösungen von $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$
oder $\det(\lambda \cdot I_n - A) = 0$ (gibt dasselbe)
$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n)$ heisst charakteristisches Polynom Eigenwerte = Nullstellen des char. Polynoms:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)^{a_n} = 0$$

a_i ist die algebraische Multiplizität vom Eigenwert λ_i

Kubische Gleichung lösen

- 1 Nullstelle erraten
- Polynomdivision $\Rightarrow$ restl. via Synthetische Division:

Betrachten wir die kubische Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Vorgehen:

1. finde alle positiven und negativen Faktoren von d.
2. Konstruiere ein Horner-Schema für jeden Faktor und prüfe, ob das Ergebnis Null ergibt. Die Faktoren, die eine Null ergeben, sind die Nullstellen der Gleichung.

Beispiel:
Für die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, ist $d = -6$.
Die Faktoren von -6 sind $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

Solbald eine Nullstelle gefunden ist, Prinzip "verstecke Quadr. Gl."anwenden: Z.B:

$$ax^6 + bx^3 + c = 0 \Rightarrow az^2 + bz + c = 0 \text{ mit } z = x^3$$

und danach mit Mitternachtsformel lösen.

Eigenvektoren bestimmen

Erfüllt: $Av = \lambda v \quad (v \neq 0)$
Eigenraum $E_\lambda(A)$ aller Eigenvektoren berechnen: $(A - \lambda \cdot I_n)\, v = 0$ lösen (homogenes LGS)
(Basis)Vektoren vom Eigenraum $E_\lambda(A)$ sind EV.
$\dim(E_{\lambda_i})$ = geometrische Multiplitzität vom EWλ_i und $1 \leq$ geom. Multipl. $\leq$ algebr. Multipl.

Eine Matrix A ist diagonalisierbar, falls:

- A symmetrisch ist oder
- für jeden EW gilt: algebraische Multiplizität = geometrische Multiplizität

Falls A diagonalisierbar ist, gibt es Matrizen S, D und S^{-1} mit

$$A = SDS^{-1}$$

Matrix diagonalisieren falls A symmetrisch:

- S = Orthonormalbasis (ONB) aus Eigenvektoren von $A = (v_1 \dots v_n)$
- da S eine Orthogonalmatrix ist gilt: $S^{-1} = S^T$

$$\Rightarrow A = SDS^T$$

mit D = Eigenwerte in der Diagonalen

Spektrum einer linearen Abbildung

Lineare Abbildung $f_A : V \to W$ (mit Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$)
Spektrum = Menge aller Eigenwerte inkl. algebr. Multiplizität! (d.h. Mehrfachauflistung)

$$\operatorname{spec}(A) = \{\lambda_1 = \dots, \lambda_2 = \dots, \dots\dots, \lambda_n = \dots\}$$

Quadratische Form

(Falls) $Q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j \Leftrightarrow Q_A(x) = \langle Ax, x \rangle$

mit A symmetrisch $(A = A^T)$

Beispiel: $Q(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 8x_2^2$

$\rightarrow Q(x) = \langle Ax, x \rangle$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 8 \end{pmatrix}$

positiv, negativ und indefinit

Eine symmetrische Matrix A ist:

- positiv definit, falls alle EW$\lambda_i > 0$ (d.h. $Q(x) > 0 \ \forall x$)
- positiv semidefinit falls alle $\lambda_i \geq 0$ (d.h. $Q(x) \geq 0 \ \forall x$)
- negativ definit, falls alle EW $\lambda_i < 0$ (d.h. $Q(x) < 0 \ \forall x$)
- negativ semidefinit falls alle $\lambda_i \leq 0$ (d.h. $Q(x) \leq 0 \ \forall x$)
- indefinit, falls A sowohl pos. wie auch neg. λ_i hat

Alternativ: via (Determinanten der) Hauptminoren
A und A^T haben die gleiche EW und EV.

Hauptminoren zur Bestimmung der Definitheit

Eine symmetrische Matrix A ist:
positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Hauptminoren $\det\left(A^{(k)}\right) > 0 \quad 1 \leq k \leq n$
negativ definit $\Leftrightarrow \det\left(A^{(k)}\right) < 0$ für alle k ungerade, $\det\left(A^{(k)}\right) > 0$ für alle k gerade

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad A^{(1)} \qquad A^{(2)} \qquad A^{(3)} = A$$

Eigenschaften des Rangs einer Matrix

$rank(A) = dim(C_A)$
voller Rang: $r(A) = \min(m, n)$
$r(A) = r(A^T)$
$dim(R_A) = rank(A^T)$
$\Rightarrow dim(R_A) = dim(C_A)$
$r(A) + dim(\text{Nul } A) = n$

Untervektorraum (subspace) prüfen

W ist ein Untervektorraum, falls

- $0 \in W \quad (0 \notin W \rightarrow$ Gegenbeispiel dass W kein UVR ist)
- $\lambda \cdot a + b \in W \quad \forall a, b \in W, \lambda \in \mathbb{R}($ oder $\mathbb{C})$
  $\rightarrow$ geschlossen unter addition und skalare multiplikation

Orthogonale (= unitäre) Matrix

Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonal $\Longleftrightarrow A^T = A^{-1}$
prüfe: $A^T A = \mathrm{Id}_n = AA^T \quad \Rightarrow \quad \det(A) \in \{-1, 1\}$
A orthogonale Matrix $\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren bilden eine ONB
$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist unitär $\Longleftrightarrow \bar{A}^T = A^{-1}$, d.h. $\bar{A}^T A = \mathrm{Id} = A\bar{A}^T \Longleftrightarrow$ Vektoren bilden ONB

Orthogonale (= unitäre) Matrix überprüfen

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonal, falls: $A^T A = \mathrm{Id}$ oder Spaltenvektoren eine orthonormale Basis (ONB) bilden:
- orthogonal: $\langle a^{(i)}, a^{(j)} \rangle = 0 \quad 1 \leq i \neq j \leq n$
- Länge 1: $\|a^{(i)}\| = \sqrt{\langle a^{(i)}, a^{(i)} \rangle} = 1 \quad 1 \leq i \leq n$
$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist unitär, falls $\bar{A}^T A = \mathrm{Id}$ oder Vektoren = ONB
Aufpassen im komplexen! $\langle v, w \rangle = v_1 \cdot \overline{w_1} + \ldots + v_n \cdot \overline{w_n}$
$\langle (1+i), (1+i) \rangle = (1+i) \cdot \overline{(1+i)} = (1+i) \cdot (1-i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$

symmetrisch / hermitisch

A ist symmetrisch, falls gilt:

$$A^T = A$$

A ist hermitisch, falls gilt:

$$\bar{A}^T = A$$

Vektorprodukt

Let $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.
Then the cross product of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ is given by:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Inneres Produkt

$\langle u, v \rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\ \varphi$
$\varphi = \arccos(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|})$
$||v|| = 0$ if and only if v = 0
$||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$

Inneres Produkt (Skalarprodukt) prüfen:

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist ein Inneres Produkt, falls $\forall u,v,w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
(IP1) symmetrisch: $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$
(IP2) bilinear:

$$\langle u, v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$$

$$\langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$$

(IP3) positiv definit: $\langle u,u\rangle > 0, \quad \forall u \neq 0$

$$\text{und } \langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Inneres Produkt eines komplexen VR prüfen:

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist ein Inneres Produkt, falls gilt:
$(\text{IP1})_{\mathbb{C}}$ hermitisch: $\langle v,w\rangle = \overline{\langle w,v\rangle}, \quad \forall v,w \in V$
$(\text{IP2})_{\mathbb{C}}$ linear im ersten Argument: $\forall v,w,u \in V, \alpha,\beta \in \mathbb{C}$:

$$\langle \alpha v + \beta w, u\rangle = \alpha\langle v,u\rangle + \beta\langle w,u\rangle$$

$(\text{IP3})_{\mathbb{C}}$ positiv definit: $\langle v,v\rangle > 0, \quad \forall v \neq 0$
Aufpassen bei komplexem Skalarprodukt: zweites Argument / Faktor ist immer komplex konjugiert!

DGL-System $y' = Ay$ lösen:

EW λ_1, λ_2 und zugehörige EV v_1, v_2 von A berechnen
- allgemeine Lösung: $y(t) = a \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot v_1 + b \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot v_2$

- Falls Anfangswertproblem: Anfangswerte einsetzen und Gl.sys. nach a, b auflösen

Falls DGL-System komplexe Eigenwerte hat:

- Nur $\lambda_1 = a + i \cdot b$ benutzen und v_1 zu λ_1 ausrechnen
- betrachte $e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 = e^{at} \cdot e^{i \cdot bt} \cdot v_1$
- Euler's Formel anwenden: $e^{i \cdot bt} = (\cos(bt) + i \cdot \sin(bt))$
- $(\cos(bt) + i \cdot \sin(bt)) \cdot v_1$ ausmultiplizieren
- sortieren zu 2 Vektoren: (Realteil) $+i$. (Imaginärteil)
$\Rightarrow$ Lösung: $y(t) = c_1 \cdot e^{at} \cdot$ (Realteil) $+ c_2 \cdot e^{at}$ (Imaginärteil)

Bsp. DGL-System mit komplexen Eigenwerten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i \cdot 1$$

$\lambda_1 = i = 0 + i \cdot 1 \quad (a = 0, b = 1)$

$$\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$e^{(0+i\cdot 1)t} \cdot v_1 = e^{0\cdot t} \cdot e^{i\cdot t} \cdot v_1 = \underbrace{e^0}_{=1} \cdot e^{i\cdot t} \cdot v_1 = e^{i\cdot t} \cdot v_1$$

$$e^{i\cdot t} \cdot v_1 = (\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \cdot v_1$$

$$(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) + i \cdot \sin(t) \\ \cos(t) + i \cdot \sin(t) - i(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \end{pmatrix}$$

sortiert: $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$$

Lineare DGL mit Anfangswert lösen:

$$\dot{x} = a \cdot x \quad \text{mit Anfangswert } x(t_0) = c$$

hat Lösung: $x(t) = c \cdot e^{a \cdot (t - t_0)}$

- Beispiel: $\dot{x} = 2x$ mit Anfangswert $x(1) = (4+i)$
  $\Rightarrow$ Lösung $x(t) = (4+i) \cdot e^{2(t-1)}$

Spezialfall: Falls A eine Nullzeile hat

- A^2, A^3, etc. berechnen bis $A^n =$ Nullmatrix
- Allg. Lösung von $y' = Ay \quad \rightarrow \quad y(t) = e^{At} y_0$
- benutze $e^{At} =: \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(A \cdot t)^j$

$$\Rightarrow y(t) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(A \cdot t)^j\right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \left(Id + \frac{A^1 \cdot t^1}{1!} + \ldots + \frac{A^n \cdot t^n}{n!}\right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

DGL höherer Ordnung via y′ = Ay:

Homogene DGL: $x'' = ax + bx'$

$$\text{Betrachte } y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow y' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = Ay$$

lösen wie bei DGL-System $y' = Ay$

Lineare Abbildung: Spiegeln an der x-Achse

Abbildungsmatrix für eine Spiegelung an der x-Achse:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Spiegeln an der y-Achse

Abbildungsmatrix für eine Spiegelung an der y-Achse:

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Spiegeln an der y-Achse

Abbildungsmatrix für eine Spiegelung am Ursprung: $U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (= Spiegelung an x - und y-Achse)
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um Winkel φ

Abbildungsmatrix für eine Rotation um den Winkel φ : $R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ (im Uhrzeigersinn!)

Beispiel: Drehe um 90° (im Uhrzeigersinn)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um Winkel φ

Abbildungsmatrix für eine Rotation um den Winkel φ:
$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ (im Gegen-Uhrzeigersinn!)

Beispiel: Drehe um 90° (im Gegen-Uhrzeigersinn)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um x-Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die x-Achse:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ (im Uhrzeigersinn!)

Beispiel: Drehe (um 90° im Uhrzeigersinn) um x-Achse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um x-Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die x-Achse:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ (im Gegen-Uhrzeigersinn)

Beispiel: Drehe (um 90° im GUS) um x-Achse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um y-Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die y-Achse: $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ (im Uhrzeigersinn!)

Beispiel: Drehe (um 90° im Uhrzeigersinn) um y-Achse $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lineare Abbildung: Rotation um z-Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die z-Achse:

$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (im Gegen-Uhrzeigersinn)

Beispiel: Drehe (um 90° im GUS) um z-Achse

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Periodizität und Eigenschaften von Funktionen

sin/cos/tan von -φ = - sin/cos/tan von φ.
(Bsp: $sin(-\frac{\pi}{2}) = -sin(\frac{\pi}{2}) = -1$)
$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$
$\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$
$\tan(x) = \tan(x + \pi)$
$sin^2(x) + cos^2(x) = 1$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$
$\tan(-x) = -\tan x$

$$\text{Bogenmaß} = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \text{Gradmaß}$$

$$\text{Gradmaß} = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \text{Bogenmaß}$$

ARCO (angolo)	sen	cos	tan
0 (0°)	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$ (90°)	1	0	∞
$\frac{2}{3}\pi$ (120°)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3}{4}\pi$ (135°)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{5}{6}\pi$ (150°)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
π (180°)	0	-1	0
$\frac{7}{6}\pi$ (210°)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5}{4}\pi$ (225°)	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1