

MODELLO DI ISING IN 2 DIMENSIONI

Dario Rossi, Margherita Sagina

Indice

1	Introduzione	2
2	Comportamento del sistema intorno al β critico	2
2.1	Plot degli spin	2
2.2	Analisi della densità di magnetizzazione	3
2.3	Cumulante di Binder	6
3	Quantità fisiche analizzate	7
3.1	Magnetizzazione	8
3.1.1	Indice critico β	8
3.2	Suscettività	9
3.2.1	Indice critico γ	10
3.3	Calore specifico	11
3.3.1	Indice critico α	11
4	Effetti di size finito	12
4.1	Finite size scaling	12
4.2	Stima dell'indice critico ν	14
4.3	Stima del β critico	15
5	Autocorrelazione dei dati	16
A	Appendice	I
A.I	Tabelle indici critici	I
A.II	Studio dei parametri del bootstrap	II

1 Introduzione

L'obiettivo di questo studio è analizzare il comportamento del modello di Ising bidimensionale, in particolare attorno alla temperatura della transizione di fase.

Cenni teorici Si considera un reticolo di lato N_{latt} a maglie quadrate. In ogni sito (individuato dalla coppia di indici (i_x, i_y)) si trova una variabile di spin s_i , che può assumere valore 1 o -1 .

L'energia di questo sistema è descritta da un termine di interazione degli spin tra siti primi vicini e da uno con campo magnetico esterno h :

$$E[\sigma] = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i \cdot s_j - h \sum_i s_i \quad (1)$$

dove σ indica la configurazione di spin, data dall'assegnazione dell'insieme di variabili s_i per ogni sito. Il coefficiente J assume valore > 0 nel caso di un sistema ferromagnetico, mentre $J < 0$ per un sistema anti-ferromagnetico. In questo studio si pongono $J = 1$ e $h = 0$.

Inoltre si considera il sistema in equilibrio termico e se ne studia il comportamento al variare della quantità $\beta = \frac{1}{k_B T}$, dove T è la temperatura. Una caratteristica rilevante è la presenza di una transizione di fase, ovvero il passaggio da una configurazione di spin disordinata a una ordinata, che avviene attorno a una temperatura critica $T_C = (\beta_C)^{-1}$ in unità naturali. Quando $\beta \rightarrow \beta_C$ si formano delle regioni sempre più ampie di spin orientati in verso concorde; le dimensioni tipiche di tali cluster si indicano con la lunghezza di correlazione ξ , che per $\beta \sim \beta_C$ diverge. Tuttavia nel caso di reticolo finito $\xi \lesssim N_{latt}$, saturando al valore di N_{latt} quando $\beta \rightarrow \beta_C$.

Implementazione numerica Per la simulazione è stato usato un reticolo finito di lato $N_{latt} \in [10, 70]$ con condizioni periodiche al bordo.

La simulazione parte da una configurazione di spin casuale (partenza a caldo) che viene poi modificata attraverso un algoritmo Metropolis locale. Si prendono 5×10^4 misure ogni $100 \times N_{latt}^2$ passi di update. Le osservabili restituite sono la densità di magnetizzazione $M \equiv \frac{1}{V} \sum_i s_i$ e la densità di energia $\varepsilon \equiv \frac{E}{V}$, dove con V si intende il volume del reticolo $V = N_{latt}^2$.

Algoritmo A ciascun update della configurazione, il Metropolis locale prova ad invertire, uno alla volta, lo spin di un sito del reticolo scelto a caso. Per scegliere se accettare o rigettare il cambiamento di spin, viene estratto un numero casuale tra 0 e 1, che viene poi confrontato con il rapporto tra la probabilità di avere il reticolo in tale configurazione e quella della precedente, secondo la distribuzione canonica:

$$\frac{P[\sigma_{nuovo}]}{P[\sigma_{vecchio}]} = e^{-\beta(E[\sigma_{nuovo}] - E[\sigma_{vecchio}])} = e^{-2\beta s_0 f_0} \quad (2)$$

dove s_0 è lo spin nel punto in esame e f_0 la somma degli spin ad esso primi vicini.

Le incertezze sulle quantità analizzate sono calcolate tramite un binned bootstrap con 100 resampling e un binning di 1000 (per approfondimenti sulla dimensione del binning e il numero di resampling vedere l'Appendice A.II).

2 Comportamento del sistema intorno al β critico

Il valore della temperatura critica del modello di Ising bidimensionale è noto e vale $\beta_C = 0.4406868...$. Si possono osservare comportamenti ben distinti del sistema nei due regimi di temperatura separati da β_C : fase disordinata ($\beta \ll \beta_C$) e ordinata ($\beta \gg \beta_C$).

2.1 Plot degli spin

Si riporta di seguito la distribuzione degli spin al variare della temperatura.

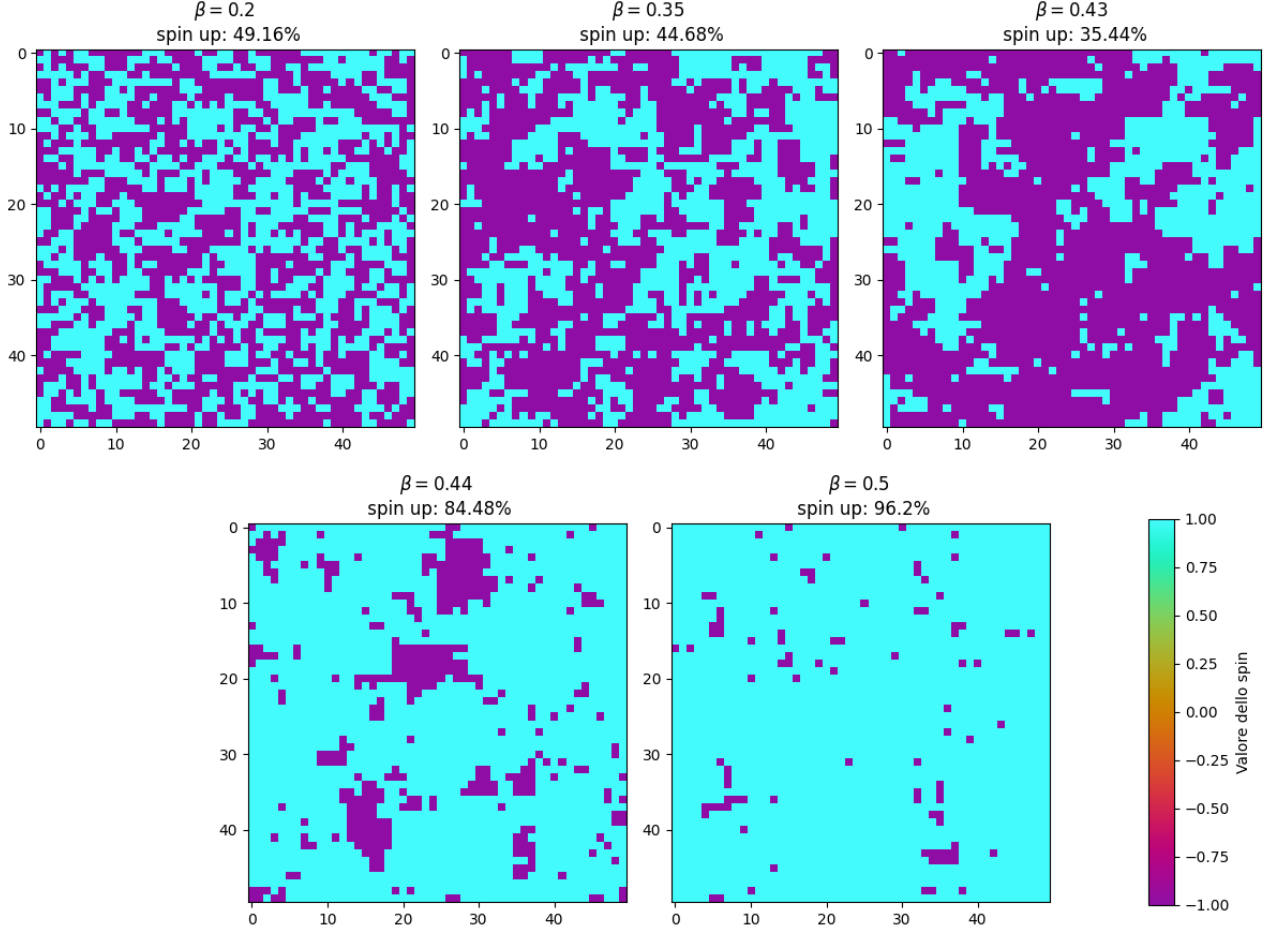


Figura 1: Rappresentazione del valore degli spin al variare della temperatura (decrescente da sinistra verso destra) per un reticolo di lato $N_{latt} = 50$. Gli spin up sono rappresentati dal celeste chiaro mentre i down dal viola. Per ogni β è anche riportata la percentuale di spin up (quella di spin down è la complementare).

Si nota come la distribuzione sia completamente casuale nel caso di alta temperatura (vedi $\beta = 0.2$, dove la percentuale di spin up è $\sim 50\%$ e i cluster di spin orientati nello stesso verso hanno dimensione $\ll N_{latt}$); tendono poi ad aumentare le dimensioni dei blocchi di spin orientati tutti allo stesso modo, al crescere del β , fino ad arrivare ad una configurazione quasi totalmente ordinata a $\beta = 0.5$.

2.2 Analisi della densità di magnetizzazione

La densità di magnetizzazione è il parametro d'ordine del sistema: $\langle M \rangle = 0$ nel caso di configurazione disordinata, mentre $\langle M \rangle \neq 0$ nel caso di sistema ordinato, con avvenuta rottura spontanea della simmetria \mathbb{Z}_2 .

In Figura 2 si riporta il grafico della storia Monte-Carlo e la distribuzione di M per $\beta < \beta_C$, per $\beta \sim \beta_C$ e per $\beta > \beta_C$.

Storia Monte-Carlo e distribuzione Magnetizzazione

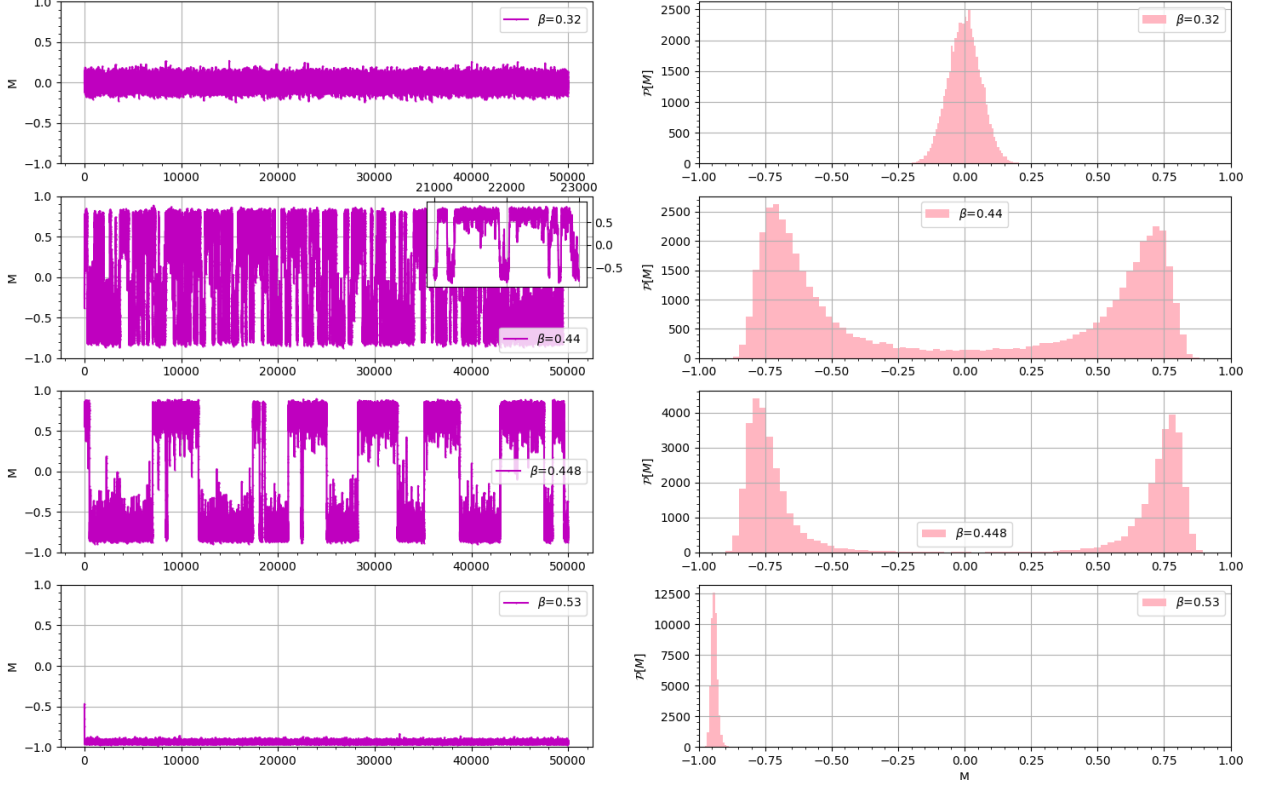


Figura 2: I grafici sulla sinistra rappresentano la storia Monte-Carlo della densità di magnetizzazione media per ogni misura effettuata al variare della temperatura, decrescente dal basso verso l'alto. In corrispondenza di essi, sulla destra, è rappresentata la distribuzione della magnetizzazione media. È riportato uno zoom tra il passo 21000 e il 23000 della storia Monte-Carlo per il $\beta = 0.44$, ovvero intorno alla transizione di fase.

Si osserva come verso la transizione di fase (grafici centrali in Figura 2) la densità di magnetizzazione oscilla tra valori positivi e negativi, dando origine ad una distribuzione bimodale, con picchi che si spostano verso ± 1 , al diminuire della temperatura. Continuando ad aumentare β , il sistema si stabilizza su una configurazione di spin e non riesce più a passare alla simmetrica cambiando uno spin alla volta, facendo perdere di fatto ergodicità all'algoritmo, come è evidente dai grafici nell'ultima riga in Figura 2. Nella fase disordinata (grafici nella prima riga in Figura 2), invece, la distribuzione di M è centrata in zero, coerentemente con quanto atteso, essendo gli spin orientati casualmente.

In Figura 3 si vede poi che, all'aumentare della dimensione del reticolo, per $\beta = 0.32$, il picco è sempre centrato in zero e tende sempre più ad una distribuzione di Dirac, ovvero quella attesa nel limite $N_{latt} \rightarrow \infty$.

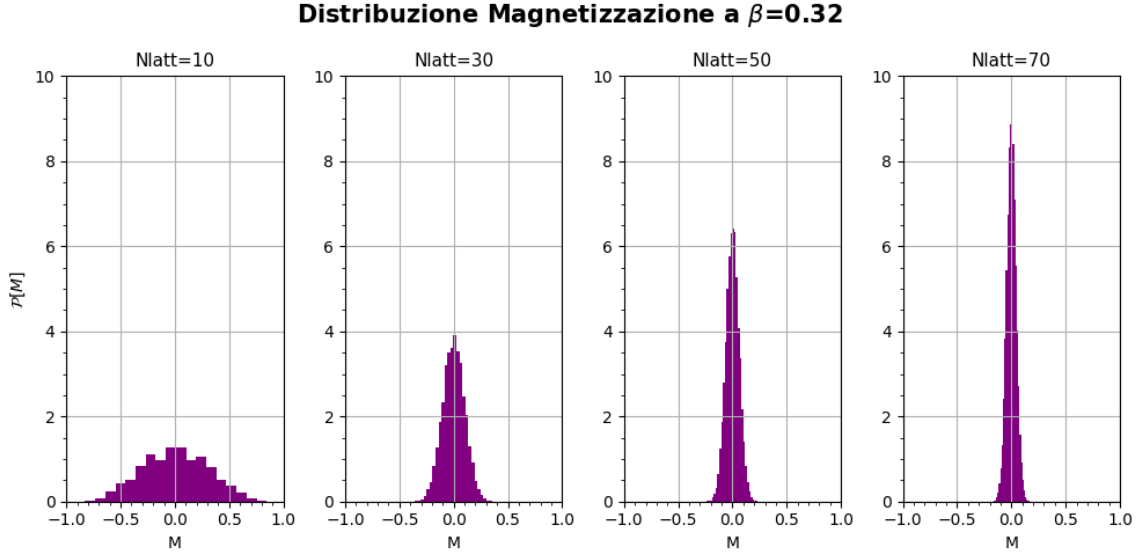


Figura 3: Distribuzione di M a $\beta = 0.32$ fisso (temperatura alta, quindi sistema in fase disordinata) al variare della dimensione del reticolo.

La larghezza della distribuzione ha un andamento $\sim 1/N_{latt}$, come verificato in Figura 4. In particolare, si esegue un fit con funzione modello $ax^b + c$ del modulo di M in funzione di N_{latt} , a $\beta = 0.32$, il cui grafico è riportato di seguito.

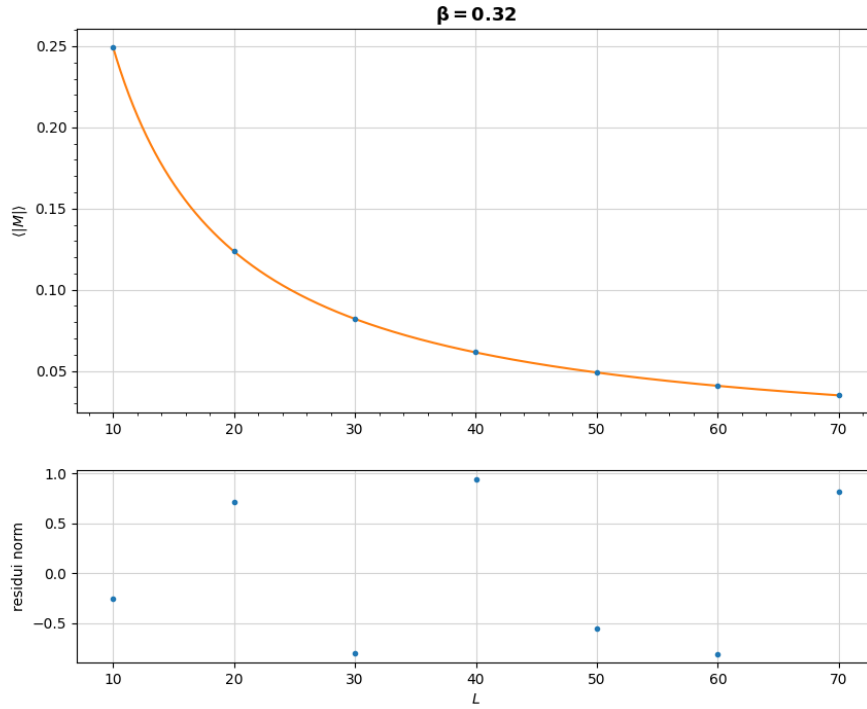


Figura 4: Modulo della magnetizzazione media in funzione di N_{latt} (dati in blu) e funzione di best fit (in arancione).

I parametri ottimali ottenuti con la procedura di fit sono

$$a(\sigma_a) = 2.58(4) \quad b(\sigma_b) = -1.01(1) \quad c(\sigma_c) = 4.203(1) \times 10^{-4} \quad \chi^2/ndof = 4/4 \quad (3)$$

l'incertezza tra parentesi è da intendersi riferita all'ultima cifra significativa del valore centrale. Il valore dell'esponente di tale funzione risulta compatibile con -1 .

2.3 Cumulante di Binder

Il cumulante di Binder è definito, per la densità di magnetizzazione, dalla relazione

$$\mathcal{B} = \frac{\langle M^4 \rangle}{\langle M^2 \rangle^2}. \quad (4)$$

Per il modello considerato, quando $N_{latt} \rightarrow \infty$, nella fase disordinata $\mathcal{B} \rightarrow 3$, mentre per $\beta \gg \beta_C$ si ha che $\mathcal{B} \rightarrow 1$, con passaggio tra i due valori a $\beta = \beta_C$. Nel caso di reticolo finito, la transizione è rappresentata da una funzione analitica per ogni β e non più da una "step function"; si vede dalla Figura 5 che all'aumentare di N_{latt} la funzione intorno al β_C è sempre più ripida.

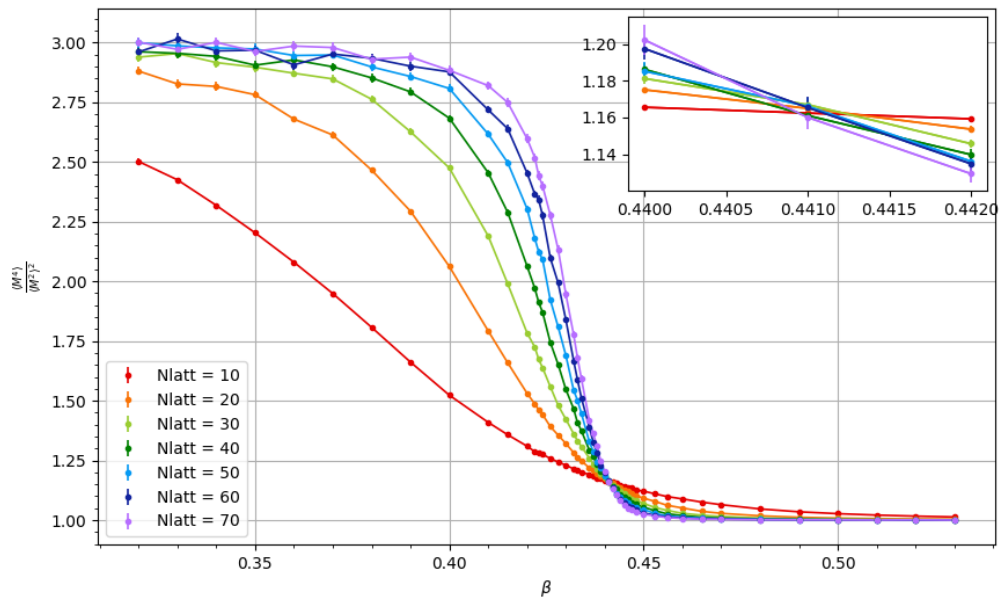


Figura 5: Cumulante di Binder in funzione della temperatura, al variare della dimensione del reticolo. *In alto a destra* uno zoom sul punto di intersezione tra i valori del cumulante per diversi N_{latt} .

Si osserva che i plot di tutti gli N_{latt} si intersecano, entro le incertezze, nel punto di ascissa $\beta = 0.441 \pm 0.001$, dove l'incertezza è la distanza in ascissa tra due dati consecutivi.

3 Quantità fisiche analizzate

Si analizzano le seguenti quantità:

- la densità di magnetizzazione

$$\langle M \rangle = \frac{1}{V} \sum_i s_i \quad (5)$$

- la suscettività magnetica $\chi \equiv \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial h}$, che si può ricavare dalla simulazione prendendo la quantità

$$\chi \propto V(\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2) \quad (6)$$

- il calore specifico $\mathcal{C} \equiv \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial T}$ è un'altra delle quantità misurate ed è stato ricavato come

$$\mathcal{C} \propto V(\langle \varepsilon^2 \rangle - \langle \varepsilon \rangle^2). \quad (7)$$

Di seguito si riportano i grafici di $\chi, \langle M \rangle, \mathcal{C}$ al variare di β nell'intervallo tra 0.32 e 0.53, per diverse dimensioni del reticolo.

Indici critici Il comportamento delle quantità precedenti intorno a β_C è descritto dagli "esponenti critici". In funzione della temperatura ridotta $t \equiv \frac{|T - T_C|}{T_C} \propto (\beta - \beta_C)$ si ha

$$\langle M \rangle \sim |t|^\beta, \text{ per } T < T_C \quad (8)$$

$$\chi \sim |t|^{-\gamma} \quad (9)$$

$$\mathcal{C} \sim |t|^{-\alpha} \quad (10)$$

dove gli esponenti critici, nel caso del modello di Ising bidimensionale, hanno valori

$$\beta = \frac{1}{8} \quad \gamma = \frac{7}{4} \quad \alpha = 0. \quad (11)$$

Per stimare i valori degli indici critici delle (8 - 10), per ciascun valore di N_{latt} compreso tra 10 e 70, si realizza un fit della quantità di interesse in funzione della differenza di temperatura $|\beta - \beta_C|$, con funzione modello $ax^c + b$. Il comportamento vicino al picco è in parte consistente con l'andamento previsto, ma scompare avvicinandosi molto a β_C , pertanto sono stati selezionati i dati da un certo valore di $\beta > \beta_C$ in poi.

La lunghezza di correlazione in funzione della temperatura ridotta ha andamento

$$\xi \propto |t|^{-\nu} \quad (12)$$

dove ν è un altro indice critico, il cui valore per il modello di Ising bidimensionale è 1. Usando quindi la 12 si può esprimere il comportamento critico delle quantità analizzate anche in funzione della lunghezza di correlazione:

$$\langle |M| \rangle \sim \xi^{-\frac{\beta}{\nu}} \quad (13)$$

$$\chi \sim \xi^{\frac{\gamma}{\nu}} \quad (14)$$

$$\mathcal{C} \sim \xi^{\frac{\alpha}{\nu}} \quad (15)$$

3.1 Magnetizzazione

Per $N_{latt} \rightarrow \infty$, $\langle |M| \rangle$ vale 0 fino al β_C , quindi, dopo una transizione del secondo ordine, aumenta gradualmente verso il valore 1 (fase ordinata). Come si osserva dalla Figura 6, questo non avviene nel caso di reticolo finito, in cui si ha un andamento con una funzione analitica, che tende a quello atteso all'aumentare di N_{latt} .

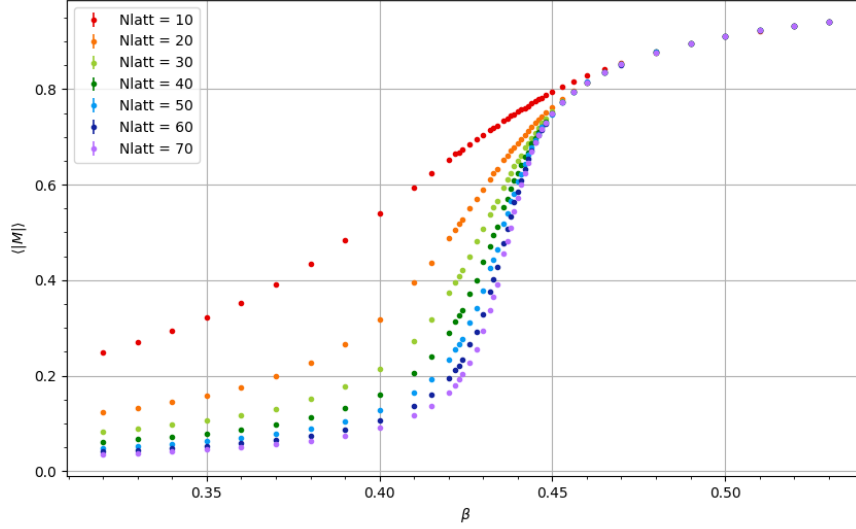


Figura 6: Media del valore assoluto della magnetizzazione in funzione di β , al variare della dimensione del reticolo.

Si nota anche come le curve siano coincidenti per $\beta > \beta_C$, quindi in fase ordinata, mentre mostrano andamenti diversi a seconda della dimensione del reticolo nel regime di temperatura opposto.

3.1.1 Indice critico β

In Figura 7 è riportato a titolo di esempio il grafico del fit per la stima dell'indice critico β per il caso $N_{latt} = 40$; per le altre dimensioni del reticolo si possono trovare i valori di best fit in Tabella A2, nell'Appendice A.I.

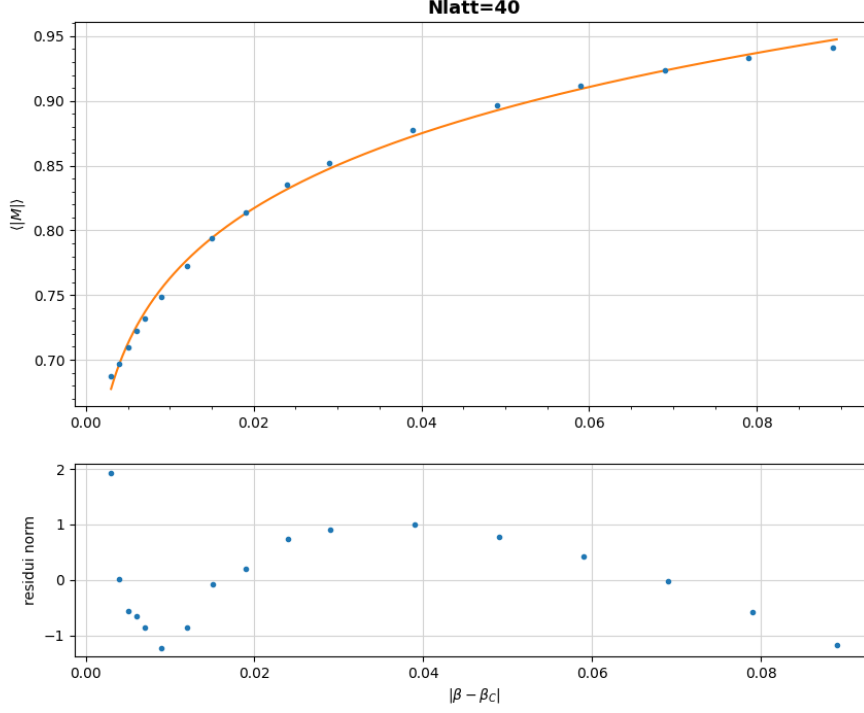


Figura 7: Dati (in blu) della media del valore assoluto della densità di magnetizzazione in funzione della quantità $|\beta - \beta_C|$, proporzionale alla temperatura ridotta $|t|$, e funzione di fit (in arancione).

Nel caso specifico i valori ottenuti con la procedura di best fit sono

$$a(\sigma_a) = 1.2(2) \quad \beta(\sigma_\beta) = 0.10(3) \quad b(\sigma_b) = 0.0(2) \quad \chi^2/ndof = 12/14 \quad (16)$$

Il valore dell'esponente critico β è compatibile, entro l'incertezza, con quello atteso, per ogni N_{latt} (vedi Tabella A2).

3.2 Suscettività

Per $N_{latt} \rightarrow \infty$ la suscettività dovrebbe presentare una divergenza in prossimità del β_C , dato che la lunghezza di correlazione diverge a sua volta. Nel caso in esame, però, $\xi < \infty$ essendo il suo valore massimo definito dalla dimensione del reticolo, quindi non si potranno osservare divergenze. Tuttavia si nota che all'aumentare di N_{latt} l'andamento tende sempre più a quello atteso (con valore del massimo proporzionale a $N_{latt}^{\frac{\gamma}{\nu}}$) e l'ascissa dei picchi si sposta verso β_C , come verrà mostrato quantitativamente in Sezione 4.3.

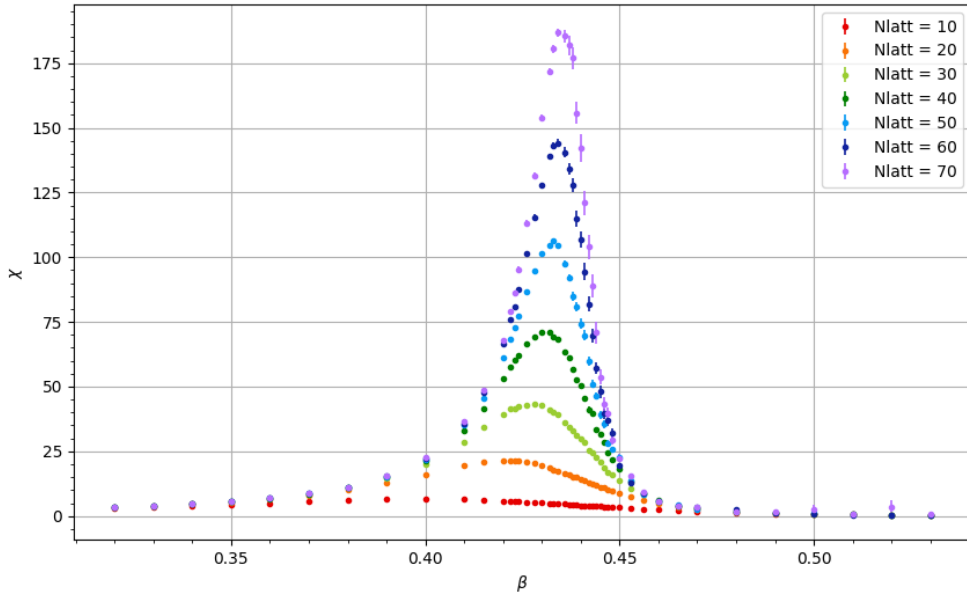


Figura 8: Suscettività al variare della temperatura per varie dimensioni del reticolo.

3.2.1 Indice critico γ

In Figura 9 è mostrato il grafico del fit per la stima dell'indice critico γ per $N_{latt} = 40$; per gli altri N_{latt} i valori di best fit si trovano in Tabella A2, nell'Appendice A.I.

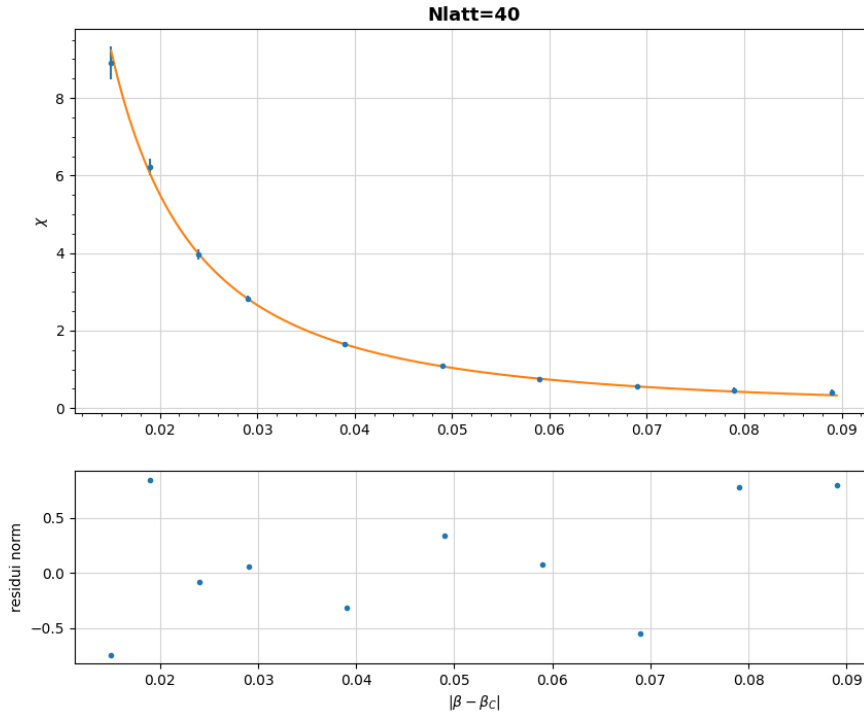


Figura 9: Dati (in blu) del valore della suscettività magnetica in funzione della quantità $|\beta - \beta_C|$, proporzionale alla temperatura ridotta $|t|$, e funzione di fit (in arancione).

Nel caso specifico i parametri ottimali di best fit sono

$$a(\sigma_a) = 0.0055(8) \quad \gamma(\sigma_\gamma) = -1.77(4) \quad b(\sigma_b) = -0.06(3) \quad \chi^2/ndof = 3/7 \quad (17)$$

Il valore dell'esponente critico γ è compatibile, entro una σ_γ , con quello atteso, per $N_{latt} \geq 40$, mentre per $N_{latt} = 20, 30$ entro due σ_{gamma} e per $N_{latt} = 10$ non è compatibile; per i dettagli vedere la Tabella A2.

3.3 Calore specifico

Anche in questo caso, come per la suscettività, è presente un picco che, all'aumentare della dimensione del reticolo, ha ascissa tendente al β_C e ordinata crescente.

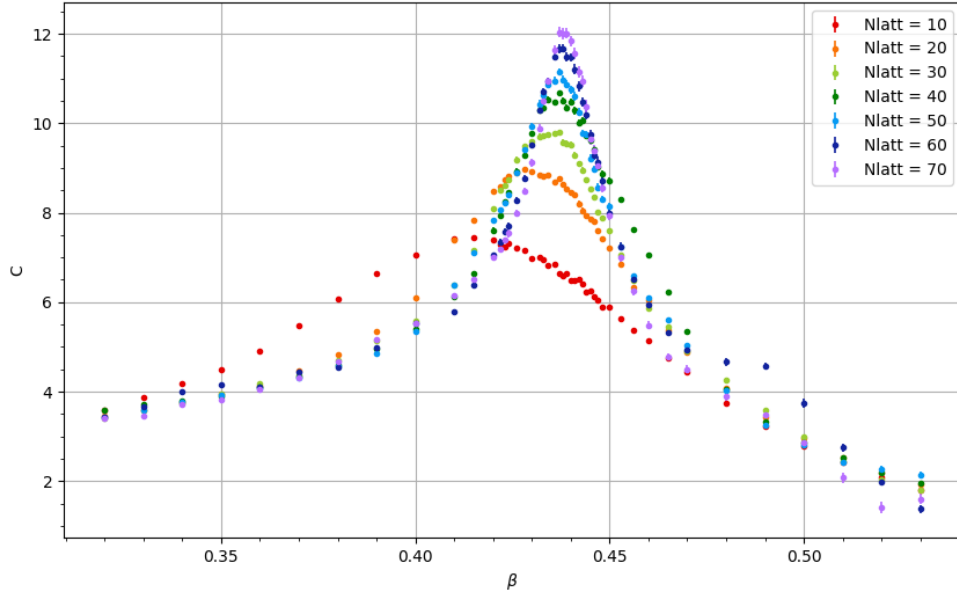


Figura 10: Calore specifico al variare della temperatura per varie dimensioni del reticolo.

3.3.1 Indice critico α

Come nei casi precedenti, è stata realizzata una procedura di fit seguendo l'andamento della 10. Tuttavia per ognuno degli N_{latt} il fit non restituisce il valore di α atteso, a causa della presenza di correzioni che non sono state incluse nella funzione di fit, come è evidente dai risultati di best fit riportati in Tabella A1.

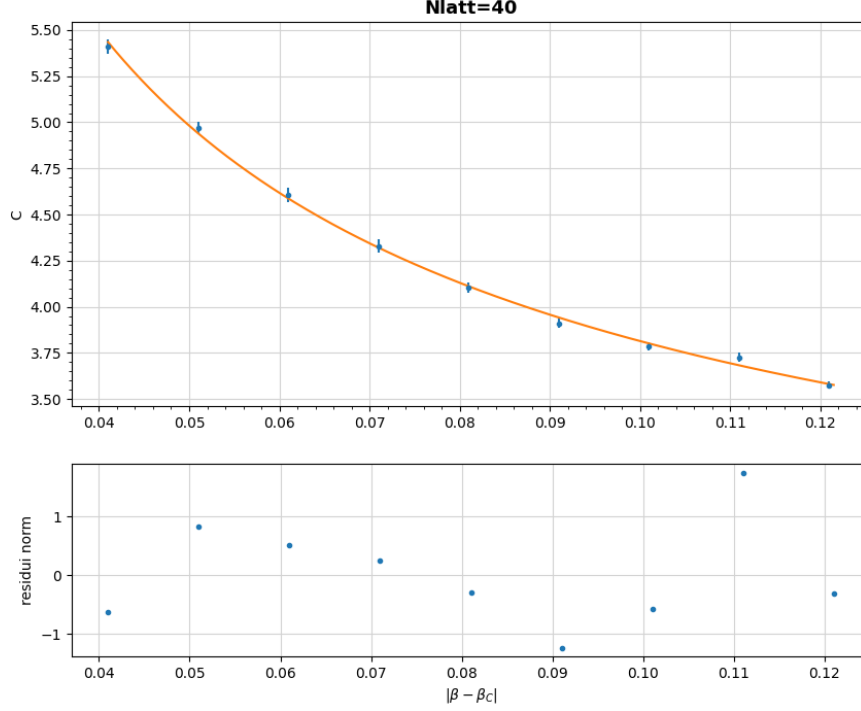


Figura 11: Dati (in blu) del valore del calore specifico in funzione della quantità $|\beta - \beta_C|$, proporzionale alla temperatura ridotta $|t|$, e funzione di fit (in arancione).

4 Effetti di size finito

Come visto in precedenza, l'implementazione numerica del modello non permette di avere reticoli di dimensione infinita. Ciò non costituisce un problema finché $\xi \ll N_{latt}$, condizione verificata per $|\beta - \beta_C| \neq 0$. Per $\beta \rightarrow \beta_C$, invece, si notano vari effetti, imputati al size finito: come visto nelle Sezioni 3.1, 3.2 e 3.3.

Per brevità nel seguito N_{latt} sarà indicato con L .

4.1 Finite size scaling

Vicino alla transizione si può assumere che il sistema perda memoria delle interazioni microscopiche (ipotesi detta "ansatz di *finite size scaling*"): si può quindi passare a un'unica variabile indipendente $\frac{L}{\xi}$ che descrive il sistema. Usando la 12, $\frac{L}{\xi}$ può essere riscritta come $(\beta - \beta_C)L^{\frac{1}{\nu}}$, detta variabile di scaling. Le quantità sopra analizzate, quindi, potranno essere espresse come

$$\mathcal{O}(\beta, L) = L^{\frac{\mathcal{K}}{\nu}} \hat{\phi}(L/\xi) = L^{\frac{\mathcal{K}}{\nu}} \phi((\beta - \beta_C)L^{\frac{1}{\nu}}) \quad (18)$$

con \mathcal{K} l'indice critico associato a \mathcal{O} e ϕ una funzione ignota della variabile di scaling che esprime l'andamento della quantità in esame \mathcal{O} intorno alla transizione.

Facendo un grafico di $\mathcal{O}/L^{\mathcal{K}/\nu}$ in funzione della variabile di scaling, per tutti i valori di L analizzati, si può verificare la correttezza dell'ansatz di *finite size scaling*.

Nelle Figure 12 e 13 si rappresentano la suscettività e la magnetizzazione media divise rispettivamente per $L^{\frac{\gamma}{\nu}}$ e $L^{-\frac{\beta}{\nu}}$ in funzione della variabile di scaling.

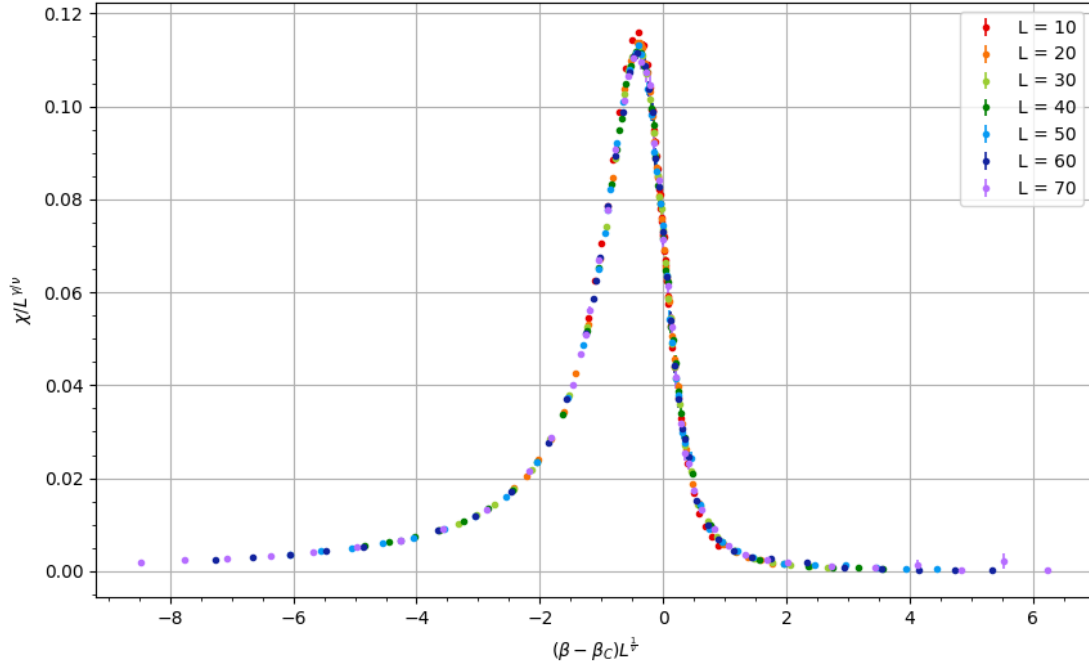


Figura 12: Suscettività riscalata sotto l'ipotesi di *finite size scaling* al variare di L .

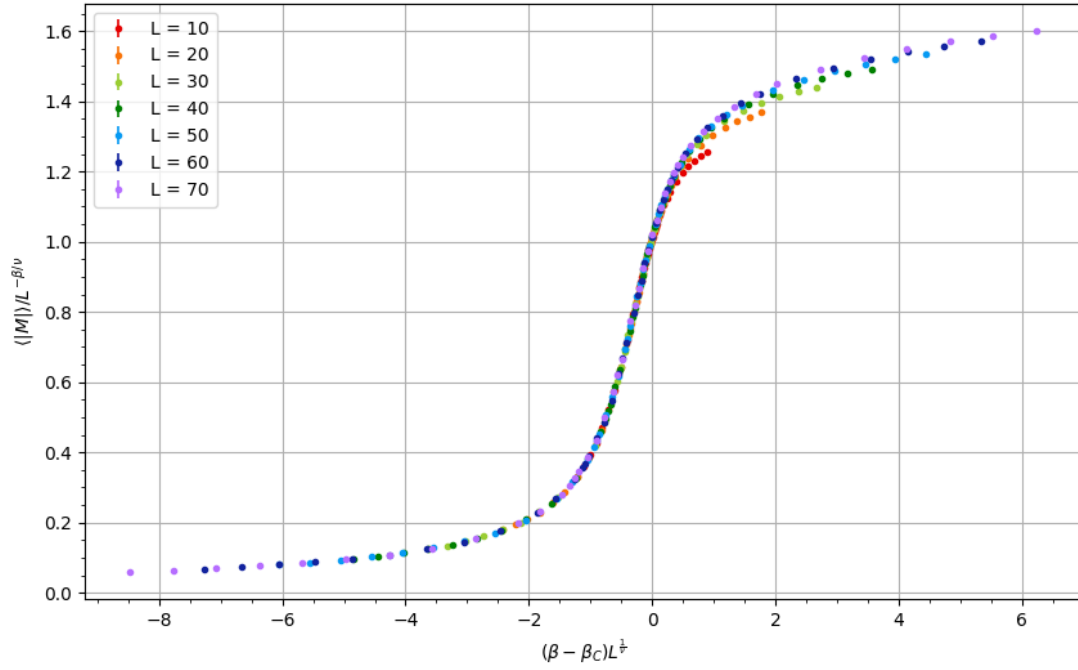


Figura 13: Magnetizzazione riscalata sotto l'ipotesi di *finite size scaling* al variare di L .

Il fatto che in entrambi i casi i dati siano tutti completamente sovrapposti indica che l'ansatz di *finite size scaling* è appropriato, così come i valori degli indici critici.

4.2 Stima dell'indice critico ν

Con i dati della suscettività χ è possibile stimare il valore dell'indice critico ν , sfruttando la relazione 14. In particolare, a causa degli effetti di size finito, si ha che $\xi \lesssim L$, per cui al β_C vale:

$$\chi_{max} \propto L^{\frac{\gamma}{\nu}} \quad (19)$$

Per ricavare χ_{max} è stato eseguito un fit della suscettività intorno al picco al variare di β , con funzione modello $\chi_{max} + c(x - \beta_{pc})^2$. A titolo di esempio è riportato in Figura 14 il grafico per $N_{latt} = 40$; i valori dei parametri di best fit per tutti i reticoli analizzati sono riportati nella Tabella A4 in Appendice A.I.

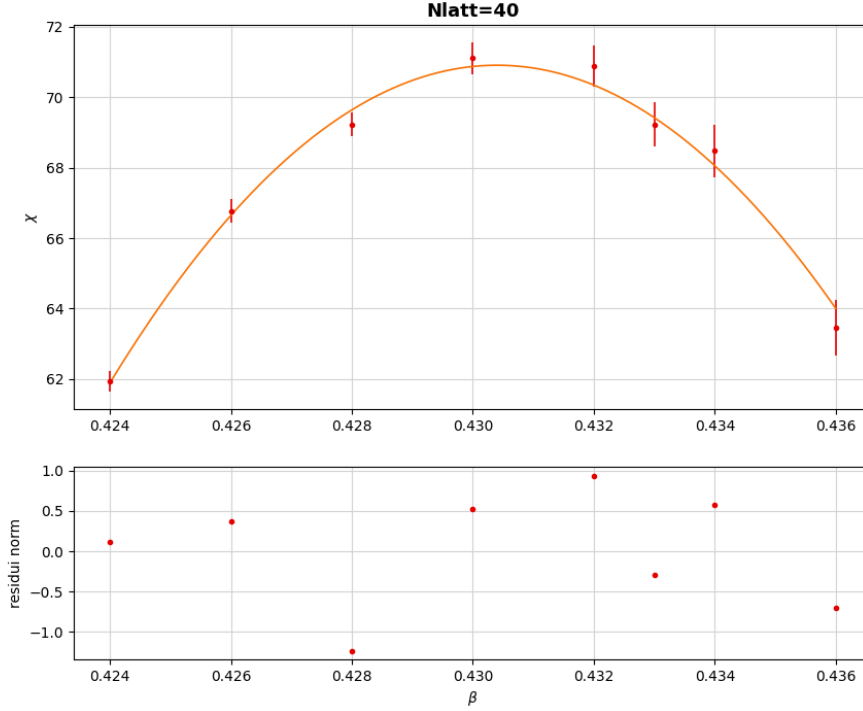


Figura 14: Dati (in rosso) e funzione di best fit (in arancione) della suscettività intorno al picco in funzione di β per il reticolo $L = 40$.

Valori dei parametri di best fit, per il caso $N_{latt} = 40$:

$$\chi_{max} = 70.9(2) \quad \beta_{pc}(\sigma_{\beta_{pc}}) = 0.4304(1) \quad c(\sigma_c) = 2.2(1) \times 10^5 \quad \chi^2/ndof = 4/5 \quad (20)$$

Ottenuti così i valori di χ_{max} per ogni reticolo, si realizza un grafico di essi in funzione di L , per poi fare un fit con funzione modello $aL^{\frac{\gamma}{\nu}} + b$: si ricava quindi l'indice critico ν , sostituendo a γ il valore noto. In Figura 15 si riporta il grafico con dati e funzione di fit.

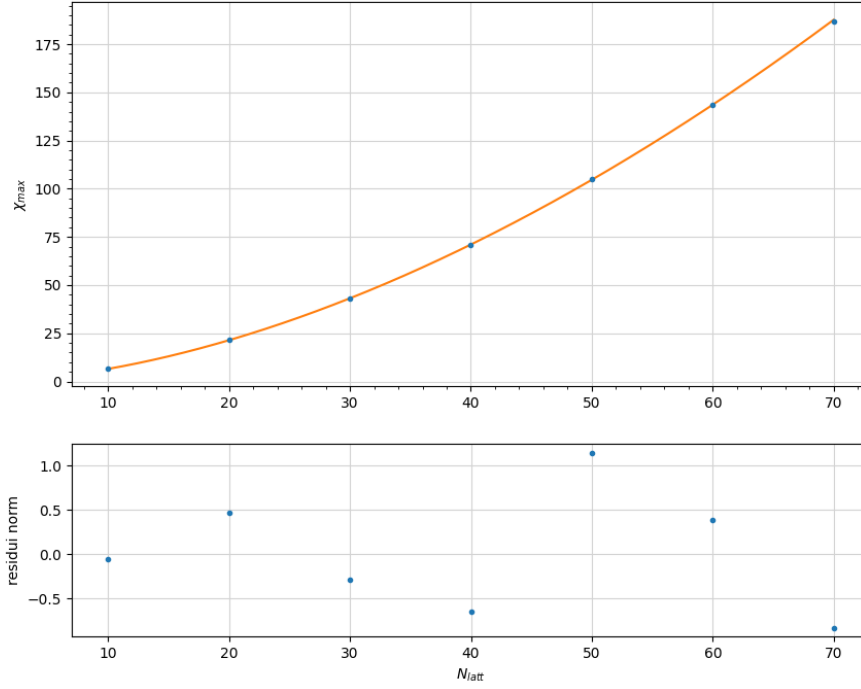


Figura 15: Dati di χ_{max} (in blu), ricavati dal fit del picco della suscettività, e funzione di best fit (in arancione).

I valori dei parametri di best fit ottenuti sono:

$$a(\sigma_a) = 0.116(2) \quad \nu(\sigma_\nu) = 1.001(2) \quad b(\sigma_b) = 0.14(5) \quad \chi^2/ndof = 3/4 \quad (21)$$

Il valore ottenuto per ν è compatibile entro una σ_ν con quello atteso.

4.3 Stima del β critico

Dall'analisi della suscettività, nonostante non sia possibile trovare il valore esatto del β_C (che sarebbe in corrispondenza della divergenza della χ), si può comunque trovare un valore della temperatura pseudo-critica β_{pc} come l'ascissa corrispondente a χ_{max} . Per $L \rightarrow \infty$ si avrà che $\beta_{pc}(L) \rightarrow \beta_C$.

Poiché il picco si trova sempre in corrispondenza del massimo della $\phi((\beta - \beta_C)L^{\frac{1}{\nu}})$ definita in Equazione 18, detta \bar{x} l'ascissa corrispondente a ϕ_{max} , si ha che:

$$\beta_{pc}(L) = \beta_C + \bar{x}L^{-\frac{1}{\nu}} \quad (22)$$

Quindi con un fit di β_{pc} al variare di L (riportato in Figura 16), con funzione modello l'equazione precedente, si può stimare il valore del β_C . I β_{pc} sono stati ottenuti dai parametri di best fit del picco della suscettività in funzione di β ottenuti precedentemente e riportati in Tabella A4 in Appendice A.I.

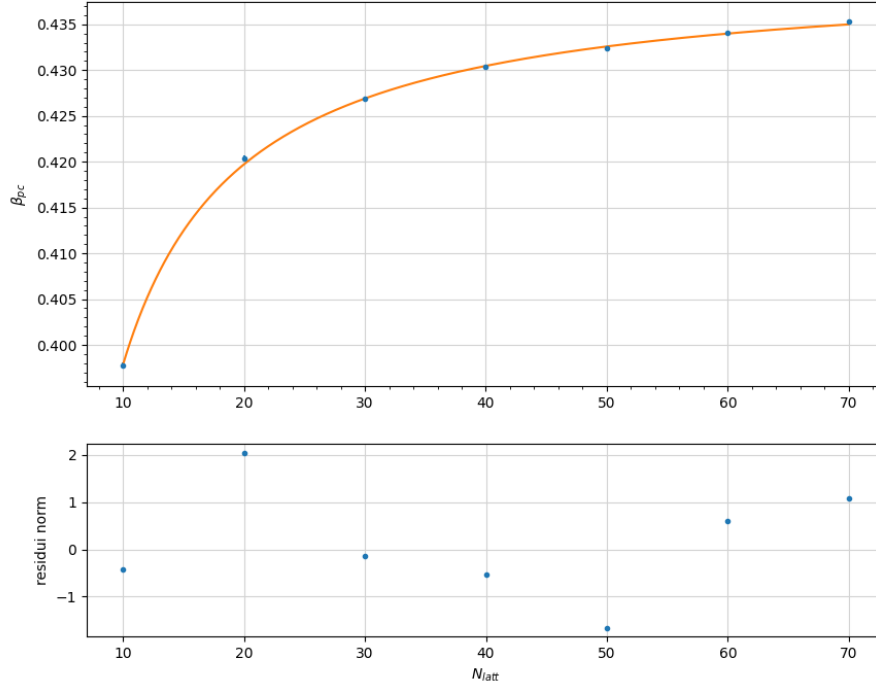


Figura 16: Valori di β_{pc} (in blu) al variare di L e funzione di best fit (in arancione).

I valori dei parametri di best fit ottenuti sono:

$$\bar{x}(\sigma_{\bar{x}}) = -0.46(3) \quad \nu(\sigma_{\nu}) = 0.98(3) \quad \beta_C(\sigma_{\beta_C}) = 0.4408(5) \quad \chi^2/ndof = 9/4 \quad (23)$$

Il valore trovato per β_C è compatibile entro l'incertezza con il valore atteso per il modello, pari a $\beta_{critico} = 0.4406868...$. L'indice critico ν è compatibile entro una σ_{ν} con quello atteso.

5 Autocorrelazione dei dati

In prossimità della transizione di fase, il tempo di autocorrelazione aumenta, in quanto il sistema riesce meno facilmente a perdere memoria dei cluster di spin di estensione sempre maggiore che si sono formati.

Per osservare tale effetto si esegue una simulazione numerica con gli stessi parametri iniziali dei casi precedenti, ma distanza di N_{latt}^2 passi di update tra una misura e l'altra. Dunque, si calcola la quantità $C(k)$, detta funzione di autocorrelazione a due punti, che tiene conto della correlazione tra due misure dell'osservabile \mathcal{O} , calcolate a una distanza di $k \cdot N_{latt}^2$ passi di update dell'algoritmo. $C(k)$ è stato calcolato come:

$$C(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (\mathcal{O}_i - \bar{\mathcal{O}})(\mathcal{O}_{i+k} - \bar{\mathcal{O}}) \quad (24)$$

dove N è il numero di misure e $\bar{\mathcal{O}}$ è la media dell'osservabile. L'andamento atteso per la funzione $C(k)$ al variare di k è $\sim e^{-k/\tau}$, dove τ è detto tempo di autocorrelazione e cresce all'aumentare della dimensione tipica dei domini, quindi al crescere della lunghezza di autocorrelazione ξ . Più precisamente

$$\tau \sim \xi^z \quad (25)$$

dove z è un indice critico dipendente dal tipo di algoritmo e noto come coefficiente di "critical slowing down".

In Figura 17 si riporta a titolo di esempio la funzione $C(k)$ calcolata per la densità di energia al variare di k per il reticolo di lato 50, a vari valori di β vicino alla transizione.

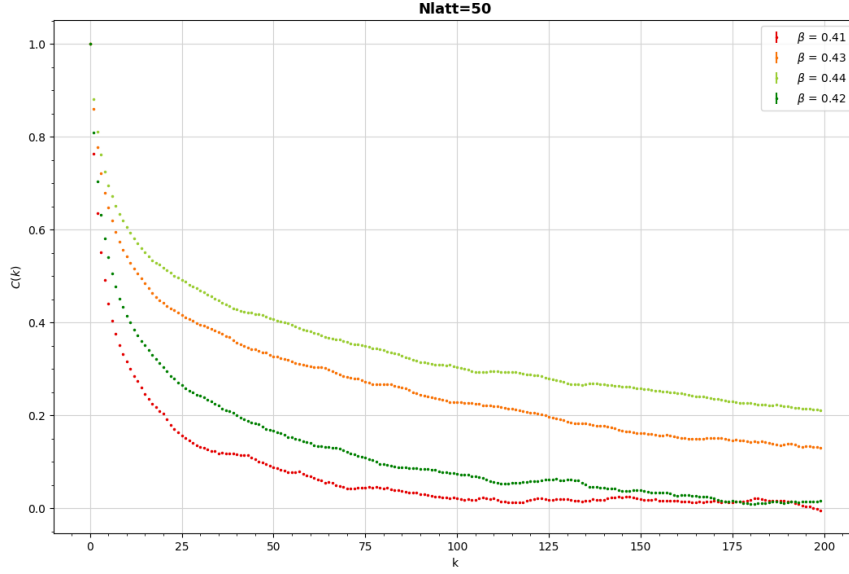


Figura 17: Funzione di autocorrelazione a 2 punti della densità di energia per il reticolo di lato $N_{latt} = 50$ per diversi β . Per $\beta \rightarrow \beta_c$ le curve sono sempre meno ripide, il che significa che τ aumenta, coerentemente con l'aumento di ξ .

Al β_C si ha che $\xi \sim N_{latt}$, quindi, secondo l'Equazione 25, $\tau \sim N_{latt}^z$, di conseguenza τ aumenta con la dimensione del reticolo, come evidente dalla Figura 18.

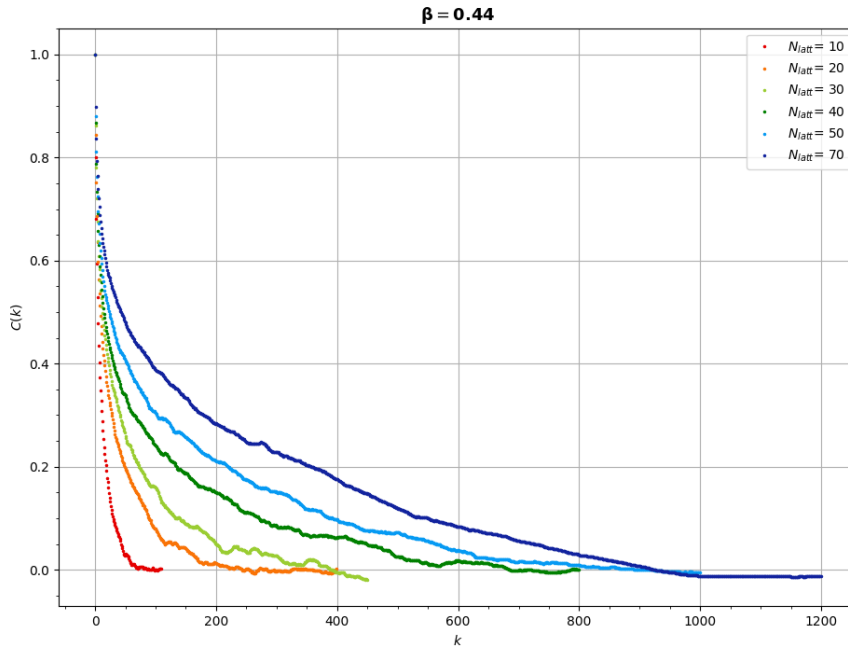


Figura 18: Funzioni di autocorrelazione a 2 punti della densità di energia, per reticoli di lato N_{latt} vari, a $\beta = \beta_C$.

Stima dell'indice critico z Si vuole studiare $\tau|_{\beta_C} = \tau_C$ al variare di N_{latt} , in modo da ottenere una stima di z . Per calcolare τ_C è stata considerata la funzione di k data da $\sum_{h=1}^k C(h)$, rappresentata al

variare di N_{latt} in Figura 19. Come si può osservare, la funzione presenta un plateau per $k \rightarrow \infty$, il cui valore è stato considerato come τ_C

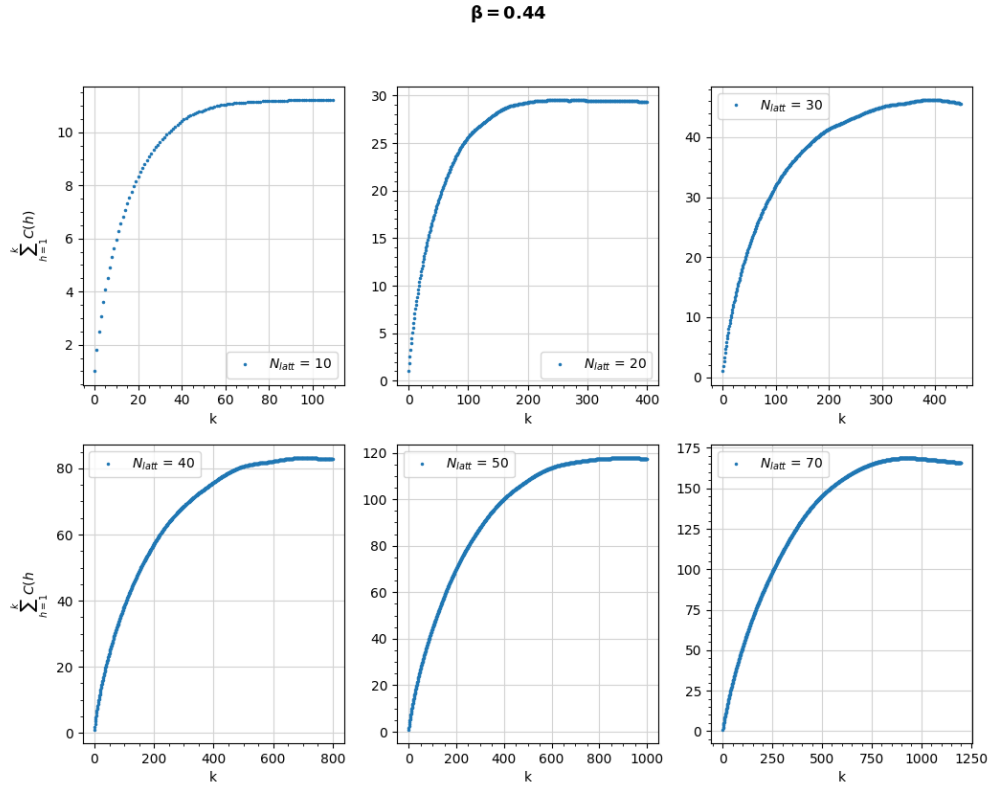


Figura 19: Somma parziale della funzione di autocorrelazione di ε al variare del k , per diversi N_{latt} , a $\beta = \beta_C$.

In Figura 20 è rappresentato quindi il valore di τ_C stimato al variare di N_{latt} , in un grafico in scala bilogarithmica. La pendenza dei punti in tale grafico è una stima dell'indice critico z ed è dell'ordine di 1.5.

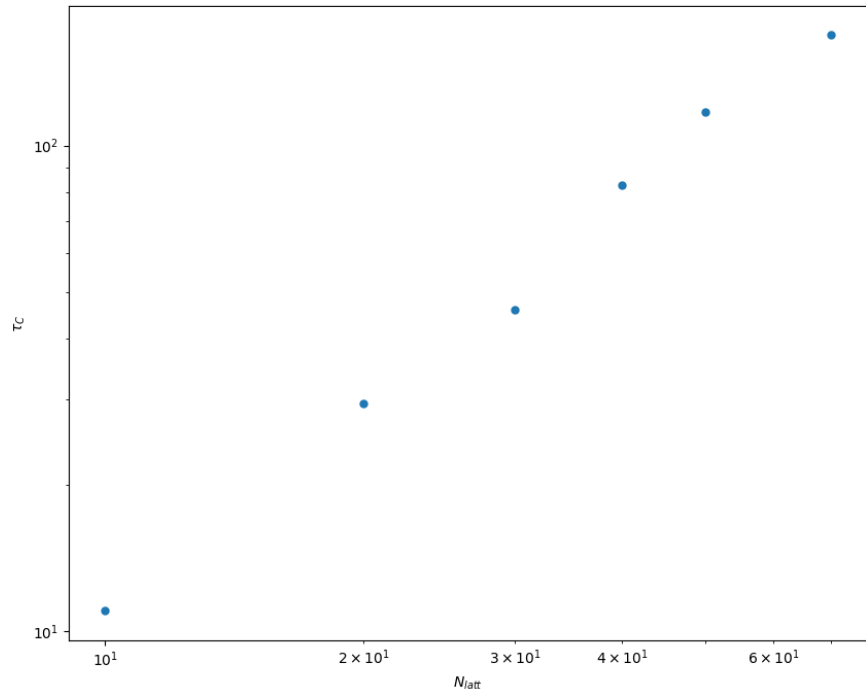


Figura 20: Tempo di autocorrelazione τ_C al β_C asintotico in funzione di N_{latt} .

A Appendice

A.I Tabelle indici critici

TABELLA PER INDICE CRITICO α DELLA CAPACITÀ TERMICA: funzione di fit $a \cdot x^\alpha + b$

N_{latt}	$a(\sigma_a)$	$\alpha(\sigma_\alpha)$	$b(\sigma_b)$	$\chi^2/ndof$
10	14(15)	-0.17(14)	-16(16)	11/5
20	0.19(3)	-0.95(4)	2.0(1)	4/7
30	4(2)	-0.3(1)	-3(3)	8/6
40	0.4(2)	-0.7(1)	1.9(4)	6/6
50	0.3(2)	-0.7(1)	1.9(5)	29/7
60	0.9(4)	-0.48(9)	1.0(8)	125/14
70	7(2)	-0.18(0.04)	-7(3)	28/14

Tabella A1: Valori dei parametri ottenuti con la procedura di best fit

TABELLA PER INDICE CRITICO γ DELLA SUSCETTIVITÀ: funzione di fit $a \cdot x^\gamma + b$

N_{latt}	$a(\sigma_a)$	$\gamma(\sigma_\gamma)$	$b(\sigma_b)$	$\chi^2/ndof$
10	0.12(1)	-0.85(3)	-0.66(4)	0.4/4
20	0.009(3)	-1.63(9)	-0.14(6)	4/4
30	0.008(2)	-1.67(6)	-0.12(5)	19/7
40	0.0055(8)	-1.77(4)	-0.06(3)	3/7
50	0.008(3)	-1.7(1)	-0.05(3)	3/4
60	0.010(4)	-1.7(1)	-0.2(1)	20/8
70	0.004(2)	-1.8(1)	0.1(1)	6/7

Tabella A2: Valori dei parametri ottenuti con la procedura di best fit

TABELLA PER INDICE CRITICO β DELLA MAGNETIZZAZIONE: funzione di fit $a \cdot x^\beta + b$

N_{latt}	$a(\sigma_a)$	$\beta(\sigma_\beta)$	$b(\sigma_b)$	$\chi^2/ndof$
10	0.7(1)	0.17(6)	0.4(1)	1/7
20	0.9(1)	0.14(4)	0.3(2)	5/11
30	0.95(9)	0.14(3)	0.3(1)	11/14
40	1.2(2)	0.10(3)	0.01(24)	12/14
50	1.1(2)	0.11(3)	0.1(2)	17/15
60	0.97(6)	0.15(3)	0.28(9)	16/16
70	1.06(9)	0.13(2)	0.2(1)	13/16

Tabella A3: Valori dei parametri ottenuti con la procedura di best fit

TABELLA PER INDICE CRITICO ν E PER CALCOLO DEL β_c : funzione di fit $\chi_{max} + c(x - \beta_{pc})^2$

N_{latt}	$\chi_{max}(\sigma_{\chi_{max}})$	$\beta_{pc}(\sigma_{\beta_{pc}})$	$c(\sigma_c)$	$\chi^2/ndof$
10	6.51(2)	0.3977(3)	$-1.26(6) \times 10^3$	5/4
20	21.43(8)	0.4203(3)	$-1.8(2) \times 10^4$	10/5
30	43.1(1)	0.4269(1)	$-7.8(4) \times 10^4$	5/7
40	70.9(2)	0.4304(1)	$-2.2(1) \times 10^5$	4/5
50	105.3(5)	0.4324(1)	$-5.7(5) \times 10^5$	5/4
60	143.7(4)	0.43403(6)	$-1.0(4) \times 10^5$	1/4
70	187(1)	0.4353(3)	$-1.2(1) \times 10^6$	5/4

Tabella A4: Valori dei parametri ottenuti con la procedura di best fit

A.II Studio dei parametri del bootstrap

L'algoritmo del *bootstrap* prevede la creazione di M campioni falsi, detti *resamplings*, ottenuti a partire dal set di dati iniziale. Per ognuno di questi viene calcolata la media μ_i , con $i = 1, \dots, M$, utilizzata per calcolare l'incertezza sul valore centrale della quantità analizzata come la deviazione standard delle μ_i . Nel caso specifico, è stato realizzato un *binned bootstrap*: si estrae casualmente l'indice del dato da inserire nel resampling, quindi vengono selezionati $n_{bin} - 1$ dati successivi a quello estratto e copiati nel nuovo array del resampling, mantenendo l'ordine di partenza. La procedura è stata reiterata fino al riempimento dell'array del resampling (con lunghezza pari al numero di misure) e per un totale di M volte, pari al numero di resamplings scelto.

Per valutare quale fosse l'estensione adeguata del binning, è stato ripetuto il procedimento per vari n_{bin} ed è stata osservata la variazione dell'incertezza ottenuta per le quantità analizzate. La stessa cosa è stata fatta variando il numero di resamplings M .

Binning In Figura A.1 è riportata la variazione dell'incertezza associata al cumulante di Binder per alcuni valori di β , in funzione di n_{bin} .

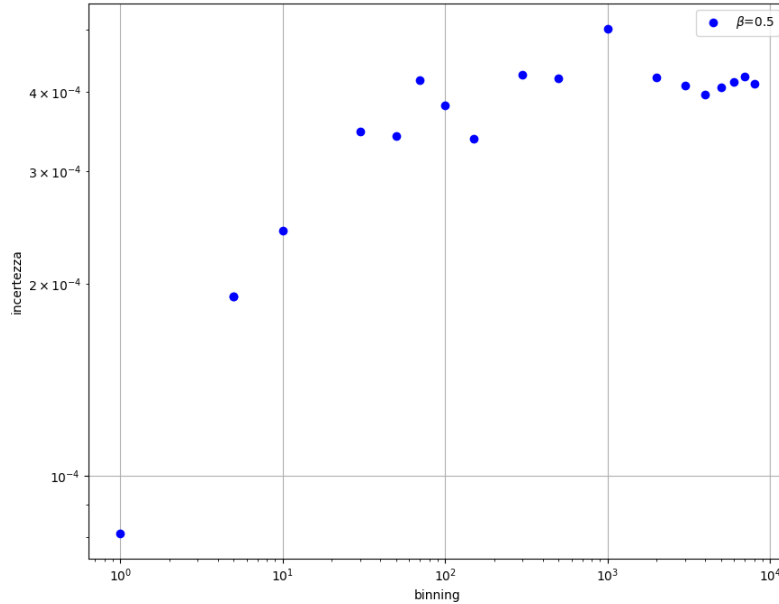


Figura A.1: Incertezza del cumulante di Binder al variare della dimensione del binning del bootstrap

Come si nota dalla figura precedente, l'incertezza si stabilizza per $n_{bin} \gtrsim 1000$, di conseguenza è stato scelto $n_{bin} = 1000$ per l'analisi.

Numero di resamplings In Figura A.2 è riportata la variazione dell'incertezza associata alla densità di magnetizzazione M per alcuni valori di β , in funzione di M , numero di resamplings.

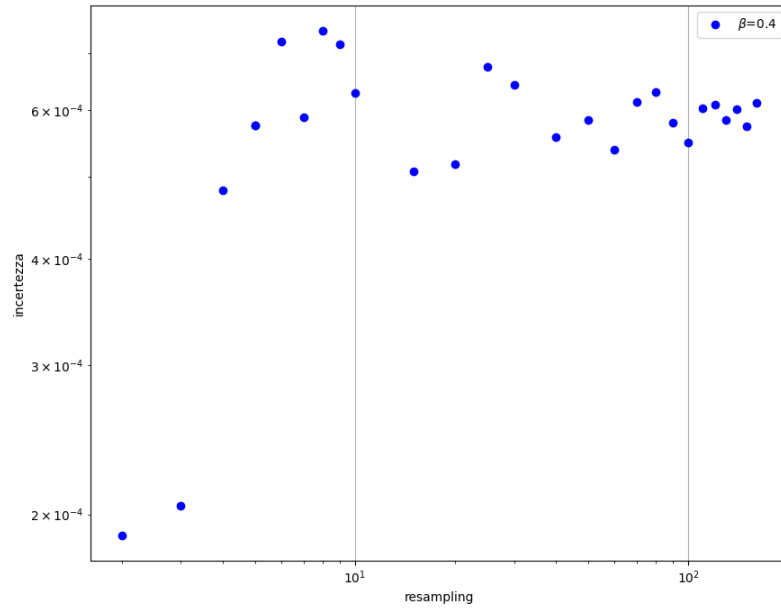


Figura A.2: Incertezza della densità di magnetizzazione al variare del numero di resampling del bootstrap