



Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

Grado en Matemáticas

**Aplicaciones de las matemáticas
en la Teoría de la Música**

Alumno: Dario Sánchez Gómez

Tutor: José Ignacio Farrán Martín

Año: 2026

Aplicaciones de las matemáticas a la Teoría de la Música

Dario Sánchez Gómez

*“Pot ser que ho donguis tot
i no ho aconseguixis
que et quedis sense forces
i que no se’t compleixi
pot ser que t’arrosseguis
que vagis fent el cuc
pot ser que ploquin pedres
que et facin marxar lluny.”*

OQUES GRASSES

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que se han cruzado en mi camino y que han hecho posible la realización de este trabajo que pone fin a mi formación universitaria.

A José Ignacio, mi tutor, por su paciencia y por su cercanía tanto en la supervisión de este proyecto, como en sus consejos, para irme a Lyon, a Barcelona, y a otros muchos lugares donde he podido aprender y crecer como persona y como matemático.

A mi tía Maru y a todos y todas las que han acompañado y han ayudado a que hoy escriba estas líneas, ellos y ellas saben quienes son, no hace falta nombrarlas.

A Maria, gràcies per ser-hi sempre. T'estimo.

Segovia, 8 de febrero de 2025

Resumen

Ya en el siglo VI a.C. Pitágoras fue capaz de relacionar las matemáticas y la música a través de proporciones simples y la manipulación de un monocordio. Para él, la música se correspondía con una manifestación matemática del orden universal, ayudándole a entender el mundo como un todo ordenado y armónico.

A lo largo de este trabajo se esbozarán algunas de las principales ideas que reafirman la estrecha relación entre estas dos disciplinas científico-artísticas, poniendo de relieve los conceptos matemáticos que subyacen de la teoría musical. Asimismo, se mostrarán diversas aplicaciones concretas de las matemáticas en la música –teoría de intervalos y escalas, ritmos euclidianos, sistema atemperado, consonancia y disonancia...– con el fin de ofrecer una visión integradora de cómo ambas áreas se enriquecen mutuamente.

Palabras claves: teoría de escalas, ritmos euclidianos, sistema temperado, teoría de grupos, consonancia, semigrupos.

Abstract

Already in the 6th century B.C., Pythagoras was able to relate mathematics and music through simple proportions and the manipulation of a monochord. For him, music corresponded to a mathematical manifestation of the universal order, thus helping him to understand the world as an ordered and harmonious whole.

Throughout this work, some of the main ideas that reaffirm the close relationship between these two scientific-artistic disciplines will be outlined, highlighting the mathematical concepts underlying music theory. Likewise, several concrete applications of mathematics to music will be presented –theory of intervals and scales, Euclidean rhythms, equal temperament system, consonance...– in order to offer an integrative vision of how both fields enrich each other.

Keywords: scale theory, Euclidean rhythms, equal temperament, group theory, consonance, semigroups.

Índice general

Resumen

Introducción	1
Historia	1
Motivación	3
Objetivos	3
1. Elementos de la teoría musical	6
1.1. Ondas y sonido	6
1.1.1. Ecuación de onda	6
1.1.2. Características del sonido	7
1.1.3. Serie armónica	7
1.2. Sistema temperado y armonía	10
1.2.1. Intervalos	11
1.2.2. Acordes	12
1.2.3. Armonía	12
1.3. Escalas	13
1.4. Ritmo	16
2. Elementos de la teoría matemática	18
2.1. Fracciones continuas	18
2.2. Sucesiones de Farey	23
2.3. Teoría de conjuntos y aritmética modular	24
2.3.1. Aritmética modular y el círculo unitario	24
2.4. Teoría de grupos	25
3. De la Naturaleza al Temperamento	31
3.1. Escala pitagórica	31
3.2. Entonación justa	35
3.3. Temperamentos mesotónicos	37
3.4. Temperamentos irregulares	40
3.5. El temperamento igual	42
3.6. Microtonalismo	44
4. Escalas bien formadas	46
4.1. Modelización de una escala	46
4.2. Escalas generadas. Teorema de los 3 pasos	48
4.3. Escalas bien formadas	52
5. Geometría del ritmo	56
5.1. El ritmo como objeto matemático	56
5.2. Ritmo euclidiano	58

6. Geometría del sonido	62
6.1. Acordes matemáticos	62
6.1.1. Otras sonoridades triádicas	64
6.1.2. Cuatriadas y acordes de séptima	64
6.2. Transformaciones musicales	65
6.2.1. Transposición e Inversión	65
6.2.2. Transformaciones \mathcal{P} , \mathcal{L} y \mathcal{R}	68
6.2.3. Representación vectorial de las tríadas	70
6.2.4. Otras transformaciones	73
6.3. Visualización geométrica: El Tonnetz	74
6.3.1. Las transformaciones como movimientos en el plano	75
7. El semigrupo armónico	76
7.1. Continuo y discreto	76
7.2. Monoides compatibles con el producto	78
7.3. Monoides fractales	80
7.4. La convergencia en el sistema de 12 tonos	82
8. Consonancia y disonancia	85
8.1. Fundamentos físico-matemáticos de la disonancia	85
8.2. Modelo de Plomp y Levelt	87
8.2.1. Disonancia en tonos puros	87
8.2.2. Disonancia en tonos complejos	88
8.3. Curvas de disonancia	89
8.3.1. Propiedades fundamentales de las curvas	90
Bibliografía	97

Introducción

Las matemáticas y la música han mantenido, desde el origen de la civilización, una relación profunda que trasciende más allá del arte y de la ciencia. Ambas disciplinas comparten una esencia común: la búsqueda de estructuras, patrones y proporciones que permiten comprender mejor la realidad y dotarla de sentido. Si las matemáticas se han concebido tradicionalmente como el lenguaje del rigor y la abstracción para establecer una base común a todos los sucesos científicos, la música, por su parte, ha sido entendida como una manifestación artística ligada a la sensibilidad y la emoción. Sin embargo, el contacto entre ambas ha demostrado que son capaces de confluir en un terreno fértil, donde las proporciones numéricas se convierten en armonías y donde las estructuras formales encuentran una expresión sonora. Tanto es así que en ocasiones resulta complejo discernir entre aquello que determina cuando algo es arte y cuando es ciencia.

El trabajo se ha dividido en 8 capítulos. Los dos primeros, 1 y 2, sirven como toma de contacto con los términos propios de cada una de las disciplinas que se tratarán, manteniendo una visión científica y crítica sobre los conceptos preliminares. Durante el tercer capítulo, 3, se hace un recorrido histórico por los sistemas de afinación que han regido la música, desde los orígenes pitagóricos hasta el sistema igualmente temperado actual. En el cuarto capítulo, 4, se formaliza el concepto de *escala*, prestando especial interés a las *escalas bien formadas* y al Teorema de los Tres Pasos, los cuales revelan las propiedades estructurales únicas de la escala diatónica. Los capítulos 5 y 6 recogen una perspectiva geométrica para explicar fenómenos tanto temporales como armónicos: el primero trata el ritmo como una distribución modular en el círculo unitario —incidiendo especialmente en los ritmos euclidianos—, mientras que el segundo aplica la teoría de grupos para visualizar las progresiones de acordes en espacios como el *Tonnetz*. Durante el capítulo 7 se introduce el concepto de monoides y se justifica la idoneidad del sistema de 12 notas en el temperamento igual a partir de teoría de semigrupos. Por último, el capítulo 8 cierra el estudio analizando las bases físico-matemáticas de la consonancia mediante el modelo de Plomp y Levelt, conectando así la teoría abstracta con la percepción psicoacústica real.

Los gráficos y ejemplos computacionales que se presentan a lo largo del trabajo han sido implementados en **Python** utilizando librerías como **NumPy** y **Matplotlib**. Las representaciones poligonales de escalas se han codificado con **LaTeX** y el paquete **tikz**. Por su parte, las imágenes correspondientes a pentagramas y partituras para la representación musical han sido generadas con el software **MuseScore**.

El código fuente completo está disponible en un repositorio privado de **GitHub**. Se puede solicitar acceso contactándome en la dirección de correo: dariosango44@gmail.com

Historia

La relación entre matemáticas y música hunde sus raíces en la Antigüedad Clásica. La propia etimología de los términos refleja su proximidad conceptual. Matemáticas proviene del griego *máthēma* (“conocimiento” o “aprendizaje”), mientras que música procede de *mousikê*, expresión que aludía al “arte de las Musas”, un conjunto de prácticas que incluían la poesía, el canto y la danza, concebidas como vehículos de transmisión cultural y de formación intelectual.

En la Grecia Clásica, el conocimiento se entendía como un todo integrado, en el que disciplinas hoy diferenciadas se concebían como manifestaciones de un mismo orden racional. La música ocupaba un lugar central, pues no solo se valoraba su dimensión estética, sino también su capacidad de expresar relaciones armónicas que se interpretaban como reflejo del Cosmos. En este contexto

se inscribe la Escuela Pitagórica, movimiento filosófico-religioso surgido a principios del siglo VI a.C., que trataba de dotar a los elementos del mundo de un transfondo numérico. Este grupo de pensadores, liderados por Pitágoras de Samos, logró establecer relaciones matemáticas entre las consonancias fundamentales, que podían describirse mediante proporciones numéricas simples: $2/1$ para la octava, $3/2$ para la quinta, $4/3$ para la cuarta... Este hallazgo, acompañado de la manipulación de instrumentos musicales rudimentarios como el monocordio, dio lugar a la idea de la *Armonía de las Esferas*, según la cual el universo entero podía comprenderse como una gran composición musical regida por proporciones matemáticas.



Figura 1: Gaffurio, *Theorica musice*, 1492

En el Medievo temprano, autores como Boecio sistematizaron el saber heredado en tratados como el *De institutione musica*, que influyeron decisivamente en la enseñanza medieval.

En este periodo, el conocimiento de los hombres libres se congregaba en las siete artes liberales, en contraposición con las artes serviles propias de los esclavos. Las siete artes liberales se dividían entre el *Trivium* (retórica, gramática y dialéctica) y el *Quadrivium*, que incorporaba las disciplinas “matemáticas” (aritmética, geometría, astronomía y música.) De esta manera se acabó de concebir la música como una ciencia matemática. Los teóricos musicales medievales escribieron tratados que exploraban las bases matemáticas de la música, continuando la tradición pitagórica y aristotélica y enfatizando la importancia de las proporciones para construir escalas y comprender la armonía.

Con la llegada de la polifonía durante el Barroco, compositores como J.S. Bach produjeron repertorio que reveló el diseño *quasi* algorítmico y simétrico de las composiciones musicales. Fue el contrapunto, el arte de combinar varias líneas melódicas independientes pero armónicamente relacionadas, el que demostró la intrínseca lógica musical. En la *fuga barroca*, por ejemplo, un tema musical se presenta y luego es imitado por otras voces en diferentes tonalidades y momentos, siguiendo reglas estrictas de entrada, superposición y desarrollo temático que recuerdan a permutaciones y transformaciones matemáticas.

Más tarde, el Clasicismo, con figuras como Mozart y Haydn, elevó la forma *sonata* a su máxima expresión. Esta estructura musical tripartita (exposición, desarrollo y recapitulación) presenta un equilibrio y una proporción clásicos, donde los temas y las tonalidades se presentan, exploran y resuelven de manera sistemática y predecible, aunque siempre con un genio creativo que trasciende

la mera fórmula. La búsqueda de claridad, orden y balance en estas formas resonaba directamente con los ideales de la Ilustración, donde la razón y la lógica matemática eran pilares fundamentales del conocimiento.

A partir del siglo XX, la relación entre música y matemáticas se hizo aún más explícita y consciente, dando lugar a nuevas corrientes compositivas y herramientas de análisis. El desarrollo del dodecafonismo por Arnold Schoenberg fue un intento deliberado de aplicar principios matemáticos rigurosos a la composición. En este sistema, las doce notas de la escala cromática se organizan en una “serie” específica, que luego se manipula mediante transformaciones como la inversión y la retrogradación. Cada nota de la serie debe sonar antes de que cualquiera pueda repetirse, asegurando una distribución igualitaria de todas ellas y evitando la tonalidad tradicional. Este enfoque, eminentemente matemático, buscaba una nueva lógica estructural para la música atonal.

Además, la proliferación de la tecnología y los ordenadores en la segunda mitad del siglo XX abrió las puertas a la música algorítmica y la composición asistida por ordenador. Compositores como Iannis Xenakis utilizaron la teoría de probabilidades, los procesos estocásticos y la síntesis granular para crear obras donde la estructura musical emergía de complejos modelos matemáticos. La música se generaba a partir de reglas predefinidas, explorando la relación entre el orden y el caos, y demostrando cómo las matemáticas pueden ser una herramienta no solo para analizar, sino también para crear nuevas sonoridades y estructuras musicales.

Hoy en día y como se observa en numerosos proyectos, [17], la interconexión entre ambas disciplinas sigue evolucionando. La física acústica, la psicoacústica y la informática musical utilizan modelos matemáticos avanzados para comprender cómo se produce, propaga y percibe el sonido. Desde la síntesis de sonido y el procesamiento de señales digitales hasta el análisis de grandes conjuntos de datos musicales, las matemáticas son indispensables. En esencia, la música, en su expresión más abstracta y universal, revela patrones, simetrías y relaciones que son profundamente matemáticas, y que continúan siendo una fuente inagotable de inspiración tanto para músicos como para matemáticos.

Motivación

El origen de este trabajo nace de una inquietud personal que me ha acompañado durante años: la necesidad de unir dos mundos. Por un lado, la formación científica y universitaria en matemáticas e informática, que busca entender el mundo a través de la lógica y la estructura; por otro, mi experiencia como músico, trompista y melómano en general que me caracteriza.

Cualquiera que toque un instrumento de viento, y especialmente la trompa, se enfrenta a diario a la física del sonido casi sin darse cuenta: buscamos la afinación correcta, corregimos armónicos con la mano o con el labio y sentimos cómo el sonido “encaja” cuando la frecuencia es la correcta. Sin embargo, en el conservatorio muchas veces se nos enseña el cómo, pero rara vez el porqué.

La motivación de este proyecto es, precisamente, utilizar las herramientas que me han dado las matemáticas para responder a esos porqués. No se trata, además, de solo de estudiar teoría, sino de aprovechar las herramientas informáticas para visualizar y modelar lo que ocurre en el aire cuando tocamos. Es el intento de demostrar que el rigor científico permite admirar con mucha más claridad la increíble arquitectura que sostiene todo lo que escuchamos.

Objetivos del trabajo

Este trabajo pretende desarrollar un estudio generalizado de la relación “simbiótica” que mantienen las matemáticas y la música. De entre las innumerables aplicaciones matemáticas que presenta la música, como se puede observar en la gran cantidad de bibliografía existente, [3, 34, 39, 41, 40], se ha elegido centrar el foco en aquellas que permiten una comprensión más profunda de los fenómenos musicales. Para lograrlo, se ha hecho un recorrido por los principales elementos que definen la música, abordándolos desde una visión matemática y tratando de formalizarlos a través de conceptos propios de las ciencias exactas.

Particularmente, se ha llevado a cabo una revisión del origen histórico de la relación entre ambas disciplinas que ha permitido conocer y aplicar herramientas algebraicas a la descripción

de estructuras musicales, así como implementar y desarrollar ejemplos tanto computacionales y gráficos capaces de comparar sistemas de afinación, escalas musicales, progresiones de acordes...

En resumen, este trabajo trata de evidenciar que la belleza musical no es un accidente estético, sino la manifestación perceptible de un orden lógico subyacente. El objetivo último es proporcionar un marco teórico unificado que, trascendiendo la barrera tradicional entre ciencias y humanidades, permita comprender que estudiar la geometría de un ritmo, la estructura algebraica de una progresión o la física de un intervalo es, en esencia, otra forma de escuchar, analizar y apreciar la música.

Capítulo 1

Elementos de la teoría musical

La música, en esencia, es el arte de organizar sonidos en el tiempo. No existe una definición única que englobe todos los aspectos de la música. Físicamente se puede describir como el movimiento de una masa sonora a través de un medio. Este movimiento se manifiesta en forma de ondas que viajan por el aire y son percibidas por el oído humano. La música se caracteriza por varios elementos fundamentales, entre los que destacan el tono, el ritmo, la armonía (3 que centran el desarrollo de este trabajo), la melodía y el contrapunto. Cada uno de estos elementos contribuye a la estructura y expresión de una pieza musical, y su estudio desde una perspectiva matemática permite comprender mejor cómo se generan y perciben los sonidos musicales.

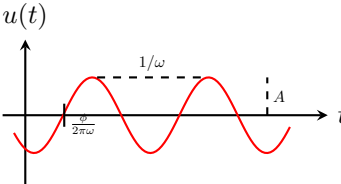
En este capítulo se introducen ideas básicas de la teoría musical, su terminología desde una visión amplia y genérica y la relación que guardan con conceptos físicos y matemáticos fundamentales. Estas nociones previas sientan las bases para comprender los algoritmos, aplicaciones y métodos que se explican en capítulos posteriores.

1.1. Ondas y sonido

1.1.1. Ecuación de onda

El **sonido** es una impresión producida en el oído causada por las vibraciones elásticas de un cuerpo que se propagan por el aire (u otros medios materiales) en forma de ondas. Muy a menudo, sin embargo, también nos referimos a él como la forma de energía que produce esta sensación. Mientras que la primera concepción, más sensorial, se relaciona con una perspectiva más artística, la segunda, más física, es la que se toma cuando se desea hacer un análisis más objetivo de este fenómeno.

Para describir ondas y vibraciones, en matemáticas, se utilizan funciones trigonométricas. Los sonidos que se transmiten en forma de onda simple se denominan *tonos puros* y se representan como:

$$u(t) = A \sin(2\pi\omega t - \phi) \quad (1.1)$$


Un tono es la percepción que se tiene de la frecuencia de un sonido. En la Música actual se eligen algunos tonos fijos para realizar y escribir las composiciones, como es el caso de los que conforman la escala cromática equitemperada que se verá posteriormente. En el apartado de características del sonido se denominará como *altura*.

En la expresión de función de onda $u(t)$ aparecen los siguientes parámetros:

- t : representa el tiempo.

- **Amplitud de la onda**, (A): magnitud máxima de desplazamiento de las partículas del medio desde su posición de equilibrio cuando una onda sonora pasa a través de ellas. Está directamente relacionada con la energía de la onda y, por lo tanto, con la intensidad acústica y la sonoridad percibida del sonido. Una mayor amplitud se traduce en un sonido más intenso.
- **Fase**, (ϕ): describe la posición de una onda en un instante específico de tiempo. Indica el punto de su ciclo en el que comienza la onda. Aunque no afecta directamente a la altura o la sonoridad de un sonido individual, es crucial cuando se combinan múltiples ondas, ya que puede influir en la forma de la onda resultante y en fenómenos como la interferencia.
- **Frecuencia**, (ω): número de ciclos completos que una onda realiza en una unidad de tiempo. Se mide en *Herzios* (Hz), donde 1 Hz equivale a un ciclo por segundo. Una mayor frecuencia corresponde a un sonido más agudo, mientras que una menor frecuencia se asocia con un sonido más grave.

1.1.2. Características del sonido

A partir de estos conceptos se pueden introducir algunas de las principales características del sonido desde un punto de vista más sensorial para el ser humano:

- **Altura**: también conocido como *tono* en castellano, es la cualidad del sonido que nos permite distinguir uno de otro y ordenarlos en una escala que va desde los más graves hasta los más agudos. No todos los sonidos tienen una altura definida. Sin embargo, en el caso de sonidos simples, la altura se corresponde directamente con su *frecuencia*. Para las notas musicales producidas por un instrumento, la altura se asocia con la frecuencia más baja de todas las que componen el sonido (como se verá más adelante).
- **Intensidad acústica**: magnitud física (objetiva) que mide la potencia del sonido por unidad de área, expresada en *watios* por metro cuadrado (W/m^2). Depende directamente de la *amplitud de onda*: a mayor amplitud, mayor energía transporta la onda y, por lo tanto, mayor intensidad. Además, es la medida física que subyace a la percepción de la sonoridad. También se define como la cantidad de energía acústica que contiene un sonido. El nivel de intensidad, β , se mide en decibelios ($d\beta$) y se define como:

$$\beta = \log \frac{I}{I_0}$$

$I \equiv$ intensidad del sonido

$I_0 \equiv$ intensidad umbral de audición
($10^{-12} W/m^2$)

- **Sonoridad**: grado de sensación sonora (subjetiva) producida por un sonido de una determinada intensidad acústica. Para tonos puros, la sonoridad está directamente relacionada con la *amplitud de onda*. De una manera menos precisa, a menudo se le denomina volumen.
- **Timbre**: cualidad del sonido que nos permite distinguir dos sonidos que tienen la misma altura y sonoridad. Depende directamente del *espectro* del sonido (cantidad e intensidad de armónicos que lo componen). El timbre es lo que nos permite diferenciar, por ejemplo, una flauta de un violín tocando la misma nota a la misma intensidad.
- **Duración**: tiempo durante el cual se percibe un sonido. Es una característica fundamental en la música, que influye en el ritmo y la estructura temporal de una composición musical. A partir de la duración de los sonidos se pueden definir conceptos como el *tempo* (velocidad a la que se suceden los sonidos) y el *ritmo* (patrón temporal de los sonidos y silencios en una pieza musical) que se verá más adelante.

1.1.3. Serie armónica

Si bien se ha indicado que los tonos puros se transmiten como una onda sinusoidal simple descrita por (1.1), en el mundo real, los sonidos que se perciben y que forman la base de la música

son sonidos complejos. Los sonidos complejos se corresponden, matemáticamente, con combinaciones lineales de tonos puros. En otras palabras, cualquier sonido periódico puede ser visto como la superposición de múltiples ondas sinusoidales de diferentes amplitudes, frecuencias y fases.

La razón por la que en el análisis de un sonido musical solo aparecen múltiplos enteros de una frecuencia base no es una mera abstracción matemática, sino un reflejo directo de la física de los instrumentos. Se considera el ejemplo más intuitivo: una cuerda de guitarra.

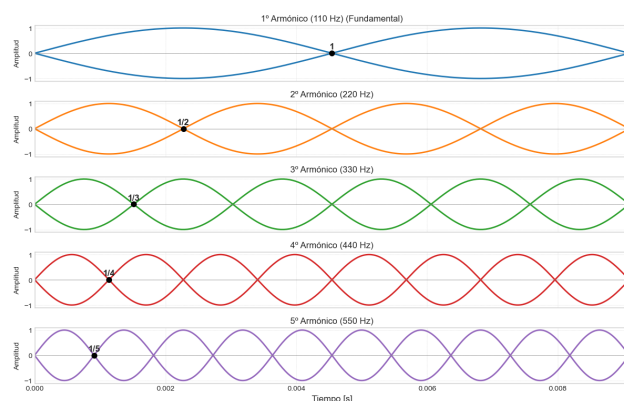


Figura 1.1: Serie armónica de $1a_2$.

Cuando se pulsa, la cuerda vibra en toda su longitud, produciendo su frecuencia más grave, la *frecuencia fundamental* (f_1). Esta es la nota que se percibe como el tono principal. Sin embargo, la cuerda no vibra únicamente de esta forma. Simultáneamente, y con menor amplitud, vibra en secciones más pequeñas, creando nodos (puntos que no se mueven) a lo largo de su longitud:

- Vibra dividida en **dos mitades**, produciendo una frecuencia $f_2 = 2 \cdot f_1$. Este es el segundo armónico, que suena una octava por encima de la fundamental.
- Vibra dividida en **tres tercios**, produciendo una frecuencia $f_3 = 3 \cdot f_1$. Este es el tercer armónico, que suena una octava y una quinta por encima.
- En general, para cualquier entero $n \geq 1$, la cuerda puede vibrar en n segmentos, produciendo el n -ésimo armónico con una frecuencia de $f_n = n \cdot f_1$.

El conjunto de todas estas frecuencias $\{f_1, 2f_1, 3f_1, \dots\}$ se conoce como la *serie armónica* del sonido. La *amplitud* de cada uno de estos armónicos es lo que define el *timbre* de un instrumento, característica que, como ya se ha indicado, permite distinguir entre un violín y una flauta aunque ambos toquen la misma nota (es decir, aunque compartan la misma frecuencia fundamental).

La capacidad de analizar y descomponer un sonido complejo en sus distintas componentes de frecuencia (una suma de tonos puros) es la piedra angular del Análisis de Fourier. Esta poderosa herramienta matemática es fundamental para la acústica y la teoría musical, ya que permite transformar una señal del dominio del tiempo (cómo varía la amplitud instantánea a instantánea) a una representación en el dominio de la frecuencia (qué frecuencias están presentes y con qué intensidad). Esto es posible gracias al siguiente resultado clave:

Teorema 1.1.1 (De Fourier para señales periódicas). *Cualquier función periódica $f(t)$ de periodo T (cuya frecuencia fundamental es $f_0 = 1/T$), se puede expresar como la suma numerable de funciones sinusoidales con frecuencias múltiplos enteros de la fundamental:*

$$f(t) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2n\pi f_0 t) + b_n \sin(2n\pi f_0 t))$$

donde los coeficientes de Fourier se calculan como:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2n\pi f_0 t) dt, \quad \text{para } n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2n\pi f_0 t) dt, \quad \text{para } n \geq 1$$

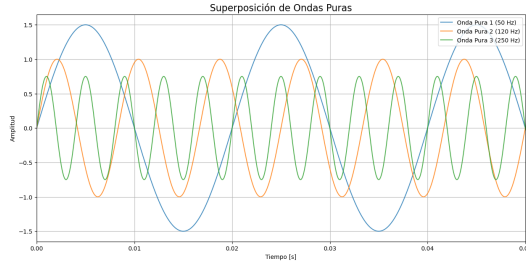


Figura 1.2: Ondas puras.

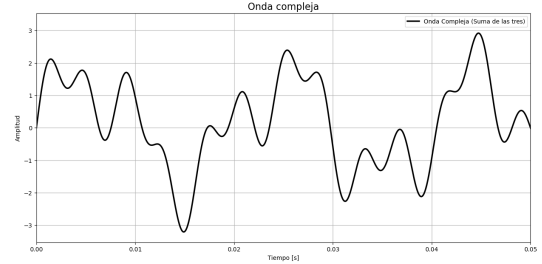


Figura 1.3: Onda compleja.

Figura 1.4: La superposición de ondas puras da como resultado una onda compleja.

A partir de este teorema (cuya demostración excede los objetivos de este proyecto), se deduce que un sonido musical cotidiano –una onda periódica en el tiempo, al menos en intervalos cortos– no es una entidad indivisible, sino un entramado de ondas sinusoidales más simples. En concreto:

- i) La frecuencia $f_0 = 1/T$ es la **frecuencia fundamental** del sonido, que se percibe como la altura de la nota.
- ii) Las frecuencias $f_0, 2f_0, \dots, nf_0$ corresponden a los sucesivos *armónicos*.
- iii) Los coeficientes a_n y b_n determinan la amplitud relativa de cada armónico. La combinación específica de estas amplitudes confiere a cada instrumento su timbre único, permitiéndonos distinguir una flauta de un violín incluso si ambos ejecutan la misma nota con la misma intensidad.

Este resultado posee una gran importancia, pues proporciona el marco matemático necesario para comprender la composición física de los sonidos musicales y, por extensión, sienta las bases para la síntesis de sonido, el análisis espectral de instrumentos y la teoría de la armonía.

Ejemplo 1.1.1. Se concluye con el ejemplo de cálculo de la *serie de Fourier* asociada a la onda

$$h(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \theta \in \{0, 2\pi\} \\ \frac{\pi - \theta}{2}, & \text{si } \theta \notin \{0, 2\pi\} \end{cases}$$

Cálculo de los coeficientes de Fourier:

$$a_n$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right) d\theta = - \int_0^{2\pi} \frac{\theta \cos(n\theta)}{2\pi} d\theta = \left[-\frac{\sin(2\pi n)}{n} - \frac{\cos(n\pi)}{2\pi n} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$b_n$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right) d\theta = -\frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi \cos(2\pi n)}{n} + \frac{\sin(n\theta)}{n^2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\cos(2\pi n)}{n} = \frac{1}{n}$$

En consecuencia, se obtiene la serie

$$h(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$$

1.2. Sistema temperado y armonía

El espectro sonoro que el ser humano es capaz de percibir es continuo. En comparación con otras especies, los humanos tenemos un rango audible más limitado que no nos permite captar ultrasonidos (frecuencias superiores a 20.000 Hz), a diferencia de animales como los perros o los murciélagos. Lo mismo ocurre con los infrasonidos (frecuencias inferiores a 20 Hz), que el oído no percibe pero sí pueden sentirse como vibraciones en el cuerpo.

Para poder estudiar y organizar este espectro continuo, la evolución ha llevado a que la música occidental lo discretice en segmentos llamados *notas*. La división empleada establece una repetición cíclica cada 12 notas (\mathbb{Z}_{12}) de modo que al alcanzar la duodécima se retorna a la nota de partida pero en una nueva octava (es decir, con el doble o la mitad de frecuencia). En este sistema la distancia entre dos notas consecutivas cualesquiera es de un *semitono* ($\frac{1}{2}$ tono), la unidad mínima de intervalo en el sistema temperado occidental.

Cabe aclarar que en esta sección se presenta únicamente una descripción general del sistema de división del espectro audible. Los aspectos más detallados sobre el *sistema temperado*, su origen histórico a partir de la afinación pitagórica y sus implicaciones en la afinación moderna serán desarrollados en el capítulo 4.

Las 12 notas del sistema temperado occidental, que conforman la conocida como *escala cromática*, son las siguientes:

do	do \sharp	re	mi \flat	mi	fa	fa \sharp	sol	sol \sharp	la	si \flat	si
C	C \sharp	D	E \flat	E	F	F \sharp	G	G \sharp	A	B \flat	B
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Las dos primeras filas muestran la correspondencia entre la notación latina y el cifrado americano y los símbolos \sharp y \flat representan, respectivamente, el *sostenido* y el *bemol*, que indican una alteración de la nota base a la que acompañan, incrementando o reduciendo su altura en un semitono. Por tanto, se deduce que notas como el **do \sharp** y el **re \flat** presentan el mismo sonido (en el sistema occidental de afinación), fenómeno que recibe el nombre de *enarmonía*.



Figura 1.5: Escala cromática del temperamento igual.

Para observar fácilmente los conceptos anteriores visualicemos el siguiente teclado de un piano:



Figura 1.6: Teclado de un piano.

La imagen 1.6 permite comprender de forma intuitiva la distribución de tonos y semitonos. Si observamos dos teclas blancas consecutivas, notaremos que no siempre están separadas por la misma distancia sonora: entre **mi-fa** y entre **si-do** no existe tecla negra intermedia, lo que indica que esos pares de notas están separados únicamente por un *semitono*. En los demás casos (por ejemplo, **do-re** o **fa-sol**), la presencia de una tecla negra entre ambas señala que la distancia es de un *tono* completo, es decir, dos semitonos. Esta alternancia de tonos y semitonos es la base sobre la cual se construyen las escalas del sistema occidental.

Además, haciendo sonar sucesivamente todas las teclas presentes –blancas y negras– entre el primer **do** y el inmediatamente superior tendríamos una representación de la anteriormente mencionada *escala cromática* de 12 sonidos y si únicamente hiciéramos sonar las teclas blancas del mismo rango tendríamos una representación de la *escala diatónica*, en este caso de **Do Mayor**. Se verá con mayor detalle en la sección 1.3.

1.2.1. Intervalos

La distancia entre notas musicales diferentes se puede medir de varias formas, cada una ofreciendo una perspectiva complementaria sobre la estructura musical. Desde un punto de vista cromático, basándose en las doce notas del sistema temperado occidental, la distancia se cuantifica en *semitonos*. Por ejemplo, la distancia entre **do** y **mi** es de 4 *semitonos*. Visualizando diatónicamente, es decir, extendiendo la escala cromática, los intervalos se pueden identificar con el ordinal que expresa el número de notas que hay entre las que se calcula el intervalo, con estas incluidas, *i.e.*, entre **do** y **mi** se tienen **do**, **re**, **mi**, por tanto se corresponde con una *tercera mayor*. En lo referente al adjetivo que acompaña al ordinal, viene determinado por otras cualidades sonoras del intervalo y puede ser *disminuido*, *menor*, *justo*, *mayor* y *aumentado*.



Figura 1.7: Ejemplo de intervalos en **Re Mayor**.

Además de estas medidas, un intervalo también puede cuantificarse con rigor matemático como la razón entre las frecuencias de los dos sonidos que lo componen. Por ejemplo, si consideramos las frecuencias aproximadas de **do** y **mi** en la octava central del piano (afinación por temperamento igual), se tiene:

$$\text{Int}(\text{do}, \text{mi}) = \frac{f(\text{mi})}{f(\text{do})} \approx \frac{329.6275 \text{ Hz}}{261.6265 \text{ Hz}} \approx 1.25999$$

El valor obtenido es la razón de frecuencias de una tercera mayor, que matemáticamente se define como $2^{4/12} = 2^{1/3}$. Sin embargo, históricamente, los intervalos de consonancia perfecta se han definido por razones de enteros simples, que provienen de la serie armónica natural establecida por Pitágoras tras estudiar las propiedades de los sonidos producidos por el *monocordio*, *el yunque...* Por tanto se puede establecer que, en general, dadas dos notas de frecuencias fundamentales f_1 y f_2 con $f_1 > f_2$, el intervalo que forman lo podemos expresar como la razón $r = f_1/f_2$. Además, dado que esta escala es multiplicativa, para “sumar” dos intervalos multiplicaremos las razones y para “restarlos” las dividiremos.

Ejemplo 1.2.1. Dadas las razones interválicas justas de **do-mi**, $5/4$; y **do-sol**, $3/2$, se calcula el intervalo **mi-sol**.

Con abuso de notación:

$$\frac{\text{sol}}{\text{do}} = \frac{\text{sol}}{\text{mi}} \times \frac{\text{mi}}{\text{do}}$$

Sustituyendo valores conocidos:

$$\frac{3}{2} = r \times \frac{5}{4}$$

Despejando:

$$r = \frac{3/2}{5/4} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

La razón $6/5$ representa el intervalo que va de **mi** a **sol** en ese contexto de entonación pitagórica.

Nota. En el capítulo 4 se tratará en profundidad la evolución del sistema temperado y las afinaciones, que permiten entender mejor este ejemplo.

De esta manera podemos ver que es posible establecer una relación entre los intervalos expresados en forma ordinal y la razón ideal entre frecuencias, como se muestra en la tabla siguiente, que presenta las fracciones para los intervallos pitagóricos principales:

do	re	mi	fa	sol	la	si	do'
-	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a	7 ^a	8 ^a
1	9/8	5/4	81/64	3/2	27/16	243/128	2/1

Tabla 1.1: Relación interválica pitagórica.

Estas proporciones reflejan la relación matemática entre las notas dentro de una escala diatónica en afinación pitagórica. Cabe destacar que en el sistema temperado igual, estas razones se aproximan ligeramente para permitir la modulación libre entre tonalidades, a costa de una leve desviación respecto a las proporciones puras.

1.2.2. Acordes

Una vez se conoce el funcionamiento de los intervallos, el siguiente paso lógico se corresponde con el concepto de **acorde**. Cuando suenan simultáneamente tres o más notas diferentes se produce una combinación de sonidos denominada acorde. Los acordes se clasifican en función de los intervallos que presentan las notas que los separan.

En la práctica musical, los acordes constituyen la base sobre la que se construye la armonía. Un acorde sencillo, llamado *tríada*, se compone de tres notas: la *fundamental*, la *tercera* y la *quinta*. La forma en que se organizan estas notas determina el tipo de acorde y su carácter sonoro.

Cada tipo de acorde tiene una sonoridad característica: el *mayor* suele percibirse como estable o brillante, el *menor* como más oscuro o melancólico, los *aumentados* y *disminuidos* generan tensión y se utilizan con frecuencia para crear movimiento o cambio armónico. . .

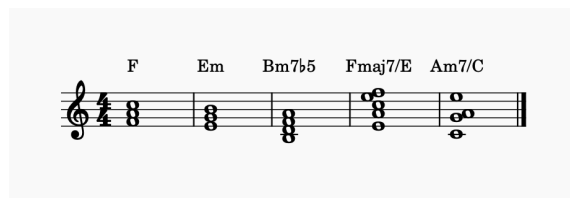


Figura 1.8: Acordes en notación americana.

A partir de las tríadas se pueden formar acordes más complejos añadiendo nuevas notas, como la *séptima*, la *novena* o la *oncena*. Estos *acordes extendidos* enriquecen la textura armónica y amplían las posibilidades expresivas de la música tonal.

En conjunto, los acordes constituyen la base tonal de la música occidental: son el marco en el que se desarrollan las melodías, las progresiones y, en definitiva, la sensación de tensión y resolución que caracteriza al lenguaje armónico.

1.2.3. Armonía

Para concluir la sección es necesario introducir el concepto que subyace a todo lo anteriormente expuesto y que ya ha aparecido en diferentes ocasiones a lo largo de la redacción: la armonía.

Desde una perspectiva general y filosófica, la armonía se concibe como un concepto metafísico y se define como el equilibrio y la adecuada proporción entre las distintas partes de un todo, generando una sensación de cohesión y belleza.

Musicalmente, la armonía puede definirse como el estudio de la relación entre sonidos que suenan simultáneamente (acordes) y cómo estos progresan a lo largo del tiempo. No se trata únicamente del “equilibrio de proporciones”, sino también de cómo esas proporciones –los intervallos– crean sensaciones de tensión, reposo, consonancia y disonancia.

En esencia, la armonía actúa como la “columna vertebral” del lenguaje tonal: los acordes definen el marco estructural, los intervalos establecen la calidad sonora, y las progresiones armónicas organizan la movilidad y el desarrollo en el tiempo. Esta comprensión de la armonía permitirá adentrarse en los siguientes capítulos, donde se abordarán con mayor profundidad todos estos aspectos.

1.3. Escalas

Una escala es un conjunto finito de notas ordenadas según su frecuencia fundamental. En el contexto de la música occidental, el inicio y el final de una escala cualquiera viene dado por las notas de frecuencias f y $2f$, es decir, la nota fundamental y su correspondiente *octava*. Si establecemos $\mathbb{R}^+ := (0, +\infty)$ como el conjunto de las frecuencias de las notas, matemáticamente, una escala se puede concebir de la siguiente manera:

Definición 1.3.1 (Escala). Es un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^+$ tal que cumple las siguientes propiedades:

1. Existe una biyección $f : \mathbb{Z} \rightarrow E$ que conserva el orden, *i.e.*, si $i < j$, $f(i) < f(j) \forall i, j \in \mathbb{Z}$.
2. Si $u \in E$, entonces $2u$ y $u/2$ también pertenecen a E .

De la propiedad (1) se deduce que una escala es ilimitada tanto superior como inferiormente y de la (2) se induce que si una escala contiene una nota, también contendrá la 8ª superior y la inferior.

Nota. Esta definición de escala se aclarará más adelante.

Ejemplo 1.3.1 (Escala mayor). Una escala mayor consta de 7 notas cuyos intervalos sucesivos son todos *segundas mayores* salvo entre la 2ª y la 3ª y la 7ª y la 1ª, que hay una distancia de semitono. Se representa por la sucesión de tonos: $\{1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}\}$.



Figura 1.9: Escala de Fa Mayor.

Ejemplo 1.3.2 (Escala de blues). La escala de blues expuesta presenta seis notas derivada de la escala pentatónica menor, pero con una nota adicional llamada “blue note”. Dicha nota añadida se corresponde con la *quinta disminuida*, que le transfiere el característico sonido sucio y expresivo que caracteriza al género. En semitonos: $\{3, 2, 1, 1, 3, 2\}$.



Figura 1.10: Escala de hexatónica de blues.

Ejemplo 1.3.3 (Escala árabe o modo armónico.). El modo armónico de la escala de Mi menor, también conocido como la escala árabe, se corresponde con la escala menor de **mi**, relativo de Sol Mayor, que consta de 7 notas y con la última alterada un semitono hacia arriba. En semitonos: $\{2, 1, 2, 2, 1, 3, 1\}$.



Figura 1.11: Escala árabe de **mi**.

Ejemplo 1.3.4 (Escala pentatónica). La escala pentatónica es una escala musical que consta de cinco notas por octava, a diferencia de las escalas diatónicas que tienen siete notas. Esta escala es ampliamente utilizada en diversas culturas musicales alrededor del mundo debido a su simplicidad y versatilidad. En semitonos: $\{2, 2, 3, 2, 3\}$.



Figura 1.12: Escala pentatónica de **do**.

Ejemplo 1.3.5 (Escala octatónica). La escala octatónica, también conocida como escala disminuida, es una escala musical que consta de ocho notas por octava. Esta escala se caracteriza por su patrón alternante de tonos y semitonos, lo que le confiere un sonido distintivo y a menudo se asocia con la música del siglo XX y el jazz. En semitonos: $\{1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2\}$.



Figura 1.13: Escala octatónica de **do**.

A continuación, tomando como premisa el sistema pitagórico de afinación se expondrá una herramienta que permite comprender de forma esquemática las relaciones entre las tonalidades más comunes de la música occidental.

Tras la razón de enteros $2/1$ referente a la *octava*, la razón de enteros más importante para los Pitagóricos era el $3/2$, que se corresponde con el intervalo de *quinta justa*, (1.1). Los discípulos de Pitágoras se percataron de que, recorriendo en intervalos sucesivos de quintas ascendentes a partir del **do**, eran capaces de obtener una espiral de quintas de la siguiente forma:

$$\text{do} \rightarrow \text{sol} \rightarrow \text{Re} \rightarrow \text{la} \rightarrow \text{mi} \rightarrow \text{si} \rightarrow \text{fa}\sharp \rightarrow \text{do}\sharp \rightarrow \text{sol}\sharp \rightarrow \text{re}\sharp \rightarrow \text{la}\sharp \rightarrow \text{mi}\sharp \rightarrow \text{si}\sharp$$

En el sistema igualmente temperado existe una *enarmonía* entre **do** y **si** \sharp y entre **fa** y **mi** \sharp . En consecuencia, iterando ascendentemente intervalos de quintas podemos recorrer las 12 notas de la escala cromática. Igualmente, realizando intervalos sucesivos de quintas descendentes se obtiene que:

$$\text{do} \rightarrow \text{fa} \rightarrow \text{si}\flat \rightarrow \text{mi}\flat \rightarrow \text{la}\flat \rightarrow \text{re}\flat \rightarrow \text{sol}\flat \rightarrow \text{do}\flat \rightarrow \text{fa}\flat \rightarrow \text{si}\flat\flat \rightarrow \text{mi}\flat\flat \rightarrow \text{la}\flat\flat \rightarrow \text{re}\flat\flat$$

Estas sucesiones de intervalos se transforman en cíclicas en ambas direcciones en el sentido en que, tras pasar por todas las notas de la escala cromática, vuelven al **do** original suponiendo la *enarmonía*. Es importante recalcar que esto ocurre, como ya he dicho, en el sistema igualmente temperado, dado que el intervalo de quinta justa abarca exactamente 7 semitonos, no así en sistemas diferentes de este.

Pensando en teoría de números, lo que se está haciendo al desplazarse una quinta justa ascendente o descendente se corresponde con la operación de sumar 7 (mód 12). El denominado *círculo de quintas* se genera al aplicar iterativamente:

$$C_n = (C_{n-1} + 7) \pmod{12}, \quad n \in \mathbb{Z}_{12}$$

El hecho de que 7 sea coprimo con 12, *i.e.* $\text{mcd}(12, 7) = 1$, implica que 7 es un generador del grupo \mathbb{Z}_{12} y que tras aplicar la operación “+” doce veces, se recorren todas las clases del tono –notas– antes de regresar al punto de partida.

$$7 \times 1 = 7 \pmod{12} \quad (\text{sol})$$

$$7 \times 2 = 14 \equiv 2 \pmod{12} \quad (\text{re})$$

...

$$7 \times 12 = 84 \equiv 0 \pmod{12} \quad (\text{do})$$

Por ello, se puede construir el *círculo de quintas*, que es la herramienta que se mencionaba anteriormente y que se expone en la figura 1.14. En este diagrama, cada nota se representa como un punto en el círculo, y las conexiones entre ellas reflejan las relaciones de quinta justa. La disposición circular enfatiza la naturaleza cíclica de las relaciones tonales y permite visualizar de manera clara cómo las tonalidades se relacionan entre sí a través de intervalos de quinta. Según la interpretación

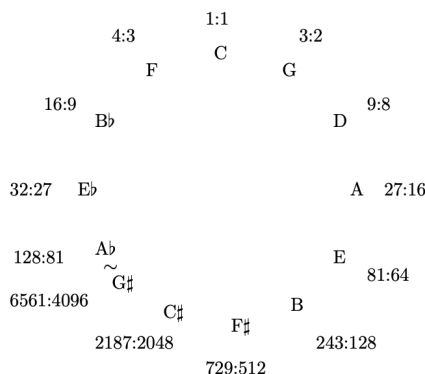


Figura 1.14: Espiral de quintas en cifrado americano que pone de relieve las diferencias entre notas propias de sistemas no igualmente temperados.

que se le dé, permite acceder a diferente información íntimamente relacionada con las escalas y las tonalidades, y facilita el transporte de piezas musicales para poder ser interpretadas y leídas por diferentes instrumentos.

Para concluir y tras haber definido el concepto de escala, resulta natural introducir el concepto de *tonalidad* (en inglés, *key*) que constituye el marco en el que funciona gran parte de la música occidental. La *tonalidad* se entiende como un sistema de organización musical en el cual una determinada nota, llamada *tónica*, adquiere la máxima estabilidad, mientras que las demás notas y acordes se definen en relación con esta, que actúa como sistema de referencia. Siguiendo esta perspectiva, podemos decir que una obra o fragmento es tonal cuando:

- Existe una nota (la tónica) que actúa como “hogar” sonoro, hacia la cual las melodías y progresiones armónicas tienden a regresar.
- La escala utilizada (o las notas predominantes) pertenecen a un conjunto coherente (por ejemplo la escala mayor o menor) que refuerza esa tónica.

La figura 1.15 puede interpretarse como una representación gráfica y modular de estas relaciones tonales. Cada posición en el círculo corresponde a una tonalidad mayor (y su relativa menor), y los desplazamientos entre posiciones adyacentes reflejan una cercanía tonal determinada por el número de notas comunes entre escalas. Dos tonalidades vecinas en el círculo —por ejemplo, Do Mayor y Sol Mayor— difieren únicamente en una alteración (un sostenido o un bemol), lo que las hace armónicamente compatibles y facilita las modulaciones suaves entre ellas.

A medida que se avanza en el círculo hacia tonalidades más alejadas, el número de alteraciones aumenta y la relación interválica con la tónica inicial se debilita. En consecuencia, tonalidades opuestas en el círculo —como Do Mayor y Fa# Mayor— presentan máxima lejanía tonal, compartiendo pocas notas y generando un contraste más intenso en el discurso musical.

Además, el círculo de quintas permite visualizar de forma directa las relaciones entre tonalidades relativas (una mayor y su menor comparten la misma armadura de clave) y las relaciones de dominante y subdominante (quintas ascendentes y descendentes respecto a la tónica).

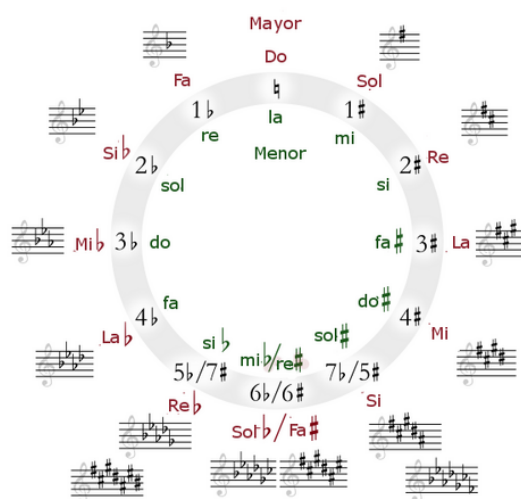


Figura 1.15: Círculo de quintas con tonalidades. Fuente: <https://wikipedia.org>

En definitiva, el círculo de quintas constituye una herramienta que integra en un solo esquema la teoría de intervalos, la estructura de las escalas y la organización de las tonalidades. Permite comprender cómo la afinación basada en razones simples (como $3/2$ o $2/1$) da lugar a un sistema cerrado de doce sonidos interrelacionados, dentro del cual emergen las nociones de cercanía tonal, modulación y jerarquía funcional. Su interpretación, tanto desde el punto de vista matemático como musical, revela la profunda conexión entre proporción, simetría y percepción sonora que caracteriza la música occidental.

1.4. Ritmo

A diferencia de la altura musical, que se organiza en el dominio de las frecuencias, el ritmo opera sobre el dominio lineal del tiempo, el cual es dividido y agrupado. La formalización matemática de este dominio se basa en estructuras discretas, aritmética de fracciones y teoría de conjuntos para modelar las duraciones relativas y la periodicidad.

A continuación, se expondrán los elementos esenciales para la comprensión del tiempo musical, haciendo especial énfasis en cómo el ritmo y la métrica imponen una estructura jerárquica y proporcional sobre el eje temporal.

Para transcribir y analizar la música es necesario cuantificar la duración de los eventos sonoros (notas) y no sonoros (silencios). Esta cuantificación se realiza mediante la división sistemática del tiempo a través de elementos como:

- **Pulso:** es el elemento fundamental para la medición del ritmo, también conocido como *beat*. Matemáticamente, el pulso se establece como una unidad de tiempo constante y fija $t \in \mathbb{R}^+$. Se corresponde con el “latido” de los fragmentos musicales y se mide de igual manera, en *pulsos por minuto*. En las partituras musicales, que son el medio material más común sobre el que se escribe la música, se acostumbra a escribir algo como:

$$\text{♩} = 76$$

que indica los pulsos por minuto que debe marcar un metrónomo.

- **Duración:** se define como una medida relativa al pulso, siendo siempre un múltiplo racional de t , es decir:

$$d = r \cdot t, \quad r \in \mathbb{Q}^+$$

Además, como las duraciones posibles se encuentran en el conjunto \mathbb{Q}^+ y son generalmente binarias o ternarias, se puede modelar un conjunto adaptado de duraciones \mathcal{D} de la siguiente forma:

$$\mathcal{D} = \{t \cdot \frac{m}{2^a 3^b} : m, a, b \in \mathbb{N}\}$$

- **Compás:** usualmente se expresa como una fracción al principio de las partituras, $\frac{N}{U}$, donde el numerador (N) expresa la longitud del ciclo en pulsos t que caben en un compás y el denominador (U) define la figura rítmica que toma el valor de la unidad de pulso.

Ejemplo 1.4.1. En el fragmento la obra de Mozart (1.16), el compás empleado es el 6/8. El denominador $U = 8$ indica que la corchea es la unidad de cuenta. El numerador $N = 6$ indica seis de estas unidades por ciclo. Sin embargo, este compás es una métrica compuesta, agrupándose en solo dos pulsos principales con subdivisión ternaria. Así, la unidad de pulso efectivo t es la negra con punto ($3/8$ de una redonda). El 6/8 se comporta como un ciclo binario (\mathbb{Z}_2) en su nivel superior de acento, pero como un subciclo ternario (\mathbb{Z}_3) en su nivel de subdivisión.



Figura 1.16: Extracto de obra de compás de subdivisión ternaria.

El sistema occidental de notación rítmica se basa históricamente en la división binaria (o ternaria), un principio de partición recursiva donde cada duración se divide generalmente en dos tiempos iguales (o tres). Este principio genera las figuras rítmicas principales (redonda, blanca, negra, corchea, semicorchea, etc.) a través de una progresión geométrica de razón $1/2$ (o $1/3$) sobre la duración de referencia t , que suele ser la *negra* (o ♩).

Figura	Tiempos
Redonda (♠)	4
Blanca (♩)	2
Negra (♩)	1
Corchea (♩)	$1/2$
Semicorchea (♩)	$1/4$

Tabla 1.2: Tiempos y figuras tomando a la *negra* como referencia.

En conclusión, se puede percibir el compás como un ciclo temporal de orden n y modelar el conjunto de pulsos dentro de un compás mediante el grupo cíclico

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

bajo la adición módulo n y donde la posición de un pulso p en el ciclo se identifica con su resto (mód n).

Capítulo 2

Elementos de la teoría matemática

Al igual que se hizo en capítulo primero de este trabajo, ahora se pretende dar un contexto puramente matemático de algunos conceptos aritméticos esenciales para la comprensión de las ideas que más tarde se presentarán:

2.1. Fracciones continuas

Definición 2.1.1 (Fracción continua generalizada). Una *fracción continua generalizada* es una expresión de la forma:

$$c_1 + \frac{b_1}{c_2 + \frac{b_2}{c_3 + \frac{b_3}{\ddots + \frac{b_{n-2}}{c_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{c_n}}}}}$$

donde $c_i, b_i \in \mathbb{C}$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

Definición 2.1.2 (Fracción continua simple). Una *fracción continua simple* es una expresión que permite aproximar un número real por una sucesión de fracciones racionales. Tiene la siguiente forma:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}}$$

donde $a_0 \in \mathbb{Z}$ y $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^+$. Se deduce que una *fracción continua simple* no es más que una *fracción continua generalizada* donde para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $b_n = 1$ y $c_n \in \mathbb{N}$. Los elementos a_0, a_1, \dots, a_n reciben el nombre de cocientes parciales de la fracción continua.

Observación 2.1.1. Es claro ver que se cumple:

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right] \quad (2.1)$$

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots, a_n]} = [a_0; [a_1, a_2, \dots, a_n]] \quad (2.2)$$

Definición 2.1.3 (Fracción continua infinita). Una *fracción continua infinita* es una expresión de la forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

donde los $a_i \in \mathbb{Z}^+$ para $i = 1, 2, 3, \dots$, y $a_0 \in \mathbb{Z}$.

Se observa que a_0, a_1, a_2, \dots de la Definición 2.1.3 da lugar a una sucesión de enteros positivos, excepto a_0 que puede ser negativo. Por tanto, $x_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ es, para cada n , una fracción

continua que representa a un $x_n \in \mathbb{Q}$. Si se prueba que x_n tiende a un límite x cuando $n \rightarrow \infty$, entonces es natural decir que la fracción continua $[a_0; a_1, \dots]$ converge al valor x , *i.e.*, $x = [a_0; a_1, \dots]$.

Definición 2.1.4 (Convergente de una fracción continua). Se denomina *convergente k -ésimo* a la fracción finita obtenida al truncar el desarrollo de la fracción continua en el término a_k :

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_k}}}}$$

Cada convergente es la mejor aproximación racional posible a θ . Es decir, si el convergente k -ésimo es $\frac{p_k}{q_k}$, se cumple que:

$$\left| \theta - \frac{p_k}{q_k} \right| < \left| \theta - \frac{a}{b} \right|$$

para toda fracción $\frac{a}{b}$ distinta de $\frac{p_k}{q_k}$ con un denominador $b \leq q_k$. Además, se dice que una *fracción continua infinita* del tipo $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ es *convergente* si existe y es finito el límite

$$\lim_k [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$$

Definición 2.1.5 (Semiconvergente de una fracción continua). Dados dos convergentes consecutivos $c_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ y $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ de una fracción continua simple, se denominan *semiconvergentes* (o fracciones intermedias) a las fracciones que interpolan entre c_{n-1} y el siguiente convergente c_{n+1} .

Dados los convergentes $c_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ y $c_n = \frac{p_n}{q_n}$, los semiconvergentes que se forman utilizando el término a_{n+1} de la fracción continua son de la forma:

$$\frac{p_{n,k}}{q_{n,k}} = \frac{kp_n + p_{n-1}}{kq_n + q_{n-1}}$$

donde k es un entero que toma los valores $k = 1, 2, \dots, a_{n+1} - 1$.

Observación 2.1.2. Si $a_{n+1} = 1$, no existen semiconvergentes entre c_n y c_{n+1} .

Ejemplo 2.1.1. Para expresar $\frac{19}{11}$ como una fracción continua simple:

$$\frac{19}{11} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

por lo que $\frac{19}{11} = [1; 1, 2, 1, 2]$.

Ejemplo 2.1.2. Comprobar que $[1; 1, 1, 1, \dots] = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ la sucesión de Fibonacci, entonces:

$$\begin{aligned} [1; 1] &= 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = \frac{f_3}{f_2} \\ [1; 1, 1] &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{f_3}{f_2} \end{aligned}$$

Suponemos cierto, por inducción,

$$\underbrace{[1, 1, 1, \dots, 1]}_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

Por su parte, para $n+1$

$$\underbrace{[1, 1, 1, \dots, 1]}_{n+1} = 1 + \frac{1}{\underbrace{[1, 1, 1, \dots, 1]}_n} = 1 + \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_n + f_{n+1}}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$$

Consecuentemente,

$$[1; 1, 1, 1, \dots] = \lim_n \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ejemplo 2.1.3. $N = 6$ es el denominador de un semiconvergente de la parte fraccionaria de π .

$$\theta = \{\pi\} = \pi - [\pi] = 0.1415926535\dots$$

Desarrollando en fracción continua, $\theta = [0; a_1, a_2, \dots]$,

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\{\pi\}} \approx 7.0625$$

Por tanto, $a_1=7$ y $\theta = [0; 7, \dots]$. Esta lista se obtiene únicamente con a_1 , ya que los siguientes términos de la fracción continua (a_2, \dots) generan aproximaciones con denominadores $q_n > q_1 = 7$. Al ser $N = 6 < 7$, su condición de semiconvergente queda determinada exclusivamente por el primer coeficiente. Los convergentes $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ son las mejores aproximaciones racionales principales. Los dos primeros son:

$$c_0 = \frac{0}{1} \quad \text{y} \quad c_1 = \frac{1}{7}$$

Entre dos convergentes existen los *semiconvergentes* (o fracciones intermedias). Para el primer nivel de la fracción continua (dado que $a_1 = 7$), los semiconvergentes son las fracciones de la forma $\frac{1}{k}$ donde $1 \leq k < a_1$. Esto genera la secuencia:

$$\left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \right\}$$

Como se puede observar, la fracción $\frac{1}{6}$ es el último semiconvergente antes de llegar al convergente principal $\frac{1}{7}$. Por consiguiente, $N = 6$ es un denominador válido de un semiconvergente de θ .

Teorema 2.1.1. Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces x se puede representar como una fracción continua finita.

Demostración. Sea $x = \frac{p}{q}$ con $q > 0$, por el algoritmo de Euclides, existen a_1, r_1 tales que $\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q}$ con $0 < r_1 < q$. Además, $\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}$ y nuevamente existen a_2, r_2 tales que $\frac{q}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}$ con $0 < r_2 < r_1$. Repitiendo el proceso iterativamente se obtiene una sucesión de residuos r_i tales que $r_{i+1} < r_i$, y como son positivos, por el principio de buena ordenación, el proceso es finito. Se concluye que $\frac{p}{q} = [a_1; a_2, \dots, a_n]$ cuando $r_{n-1} = 1$. \square

Teorema 2.1.2. Sean las sucesiones $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}, (q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definidas como

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & q_0 &= 1, \\ p_1 &= a_1 a_0 + 1, & q_1 &= a_1, \\ p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, & q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad (2 \leq n \leq N) \end{aligned}$$

Entonces, se cumple que

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

y es la n -ésima convergente de la fracción continua $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_N]$

Demostración. La prueba se realiza por inducción.

Para $n = 0$, se tiene que $p_0 = a_0, q_0 = 1$ y $[a_0] = \frac{a_0}{1} = a_0 = \frac{p_0}{q_0}$.

Para $n = 1$, se tiene que $p_1 = a_1 a_0 + 1, q_1 = a_1$ y $[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$.

Se supone cierto para n ,

$$[a_0; a_1, \dots, a_n, a_{n+1}] = \left[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right]$$

Vease qué ocurre para $n + 1$. En primer lugar, se observa que el n -ésimo convergente de la fracción continua de la izquierda es igual al n -ésimo convergente de la fracción de la derecha. Entonces:

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{a_n a_{n+1} p_{n-1} + p_{n-1} + a_{n+1} p_{n-2}}{a_n a_{n+1} q_{n-1} + q_{n-1} + a_{n+1} q_{n-2}}$$

Ahora, por la hipótesis de inducción se deduce que

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_n + q_{n-2}) + q_{n-1}}$$

como se quería probar. □

Lema 2.1.1. *Las sucesiones p_n y q_n satisfacen*

$$p_n q_n - p_{n-1} q_{n-1} = (-1)^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

Demostración. Por el teorema 2.1.2 se tiene que

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

También

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) \end{aligned}$$

Repitiendo el argumento para $n-1, n-2, \dots, 2$ se obtiene que

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = \dots = (-1)^{n-1} (p_1 q_0 - p_0 q_1) \\ &= (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

□

Lema 2.1.2. *Las funciones p_n y q_n satisfacen igualmente*

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n \quad (n \geq 2)$$

Demostración. Es claro que

$$\begin{aligned} p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = (-1)^n a_n \end{aligned}$$

□

Lema 2.1.3. *Las convergentes pares x_{2n} aumentan estrictamente con n y las convergentes impares x_{2n+1} decrecen estrictamente con n .*

Demostración. Se observa que cada q_n es positivo y por el Lema 2.1.2 se tiene que

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_{n-2} q_n}.$$

También $a_i > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, N\}$ (excepto a_0 que puede ser negativo). Por tanto, $x_n - x_{n-2}$ tiene el signo de $(-1)^n$. □

Lema 2.1.4. *Toda convergente impar es mayor que cualquier convergente par.*

Demostración. Por el Lema 2.1.1 se tiene que

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}.$$

Entonces, $x_n - x_{n-1}$ tiene el signo de $(-1)^{n-1}$. Por tanto, $x_{2m+1} > x_{2m}$.

Ahora bien, si el resultado fuese falso, se tendría que $x_{2m+1} \leq x_{2\mu}$ para ciertos m, μ .

- Si $\mu < m$, entonces, por el Lema 2.1.3, se tiene que $x_{2m+1} < x_{2m}$.

- Si $\mu > m$, entonces $x_{2\mu+1} < x_{2\mu}$.

En conclusión, cualquiera de las dos desigualdades contradice que $x_{2m+1} > x_{2m}$. \square

Teorema 2.1.3. *Todo número irracional $x \in \mathbb{I}$ puede escribirse de manera única como desarrollo en fracción continua simple infinita.*

Demostración. Para cada $x \in \mathbb{I}$, se puede construir una fracción continua que sea simple e infinita tal que $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Para ello, se sigue el siguiente algoritmo:

- Se establece $x_0 = x$, y $a_0 = \lfloor x_0 \rfloor = \lfloor x \rfloor$ para ser el primer dígito en la representación de fracción continua de x .
- Se establece $x_{i+1} = \frac{1}{x_i - a_i}$, y $a_{i+1} = \lfloor x_{i+1} \rfloor$. (Si en algún punto $x_i = a_i$ entonces el algoritmo termina y $x \in \mathbb{Q}$.)

Por otro lado, si existiese otra representación de fracción continua simple infinita para x , entonces por el Lema 2.1.3 y el Lema 2.1.4, se tendría que los convergentes pares de una representación serían menores que los convergentes pares de la otra representación, lo que es imposible. En consecuencia, la representación es única. \square

Ejemplo 2.1.4 (Algoritmo para calcular la fracción continua asociada a $\log_2 3$).

$$\begin{aligned} x_0 &= \log_2 3 \approx 1.58 \dots & a_0 &= \lfloor x_0 \rfloor = 1 \\ x_1 &= \frac{1}{x_0 - a_0} = \frac{1}{\log_2 3 - 1} \approx 1.70 \dots & a_1 &= \lfloor x_1 \rfloor = 1 \\ x_2 &= \frac{1}{x_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{1}{\log_2 3 - 1} - 1} \approx 1.40 \dots & a_2 &= \lfloor x_2 \rfloor = 1 \end{aligned}$$

Iterando sobre esta idea se obtienen los sucesivos coeficientes de las representación fraccionaria:

$$\log_2 3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} = [1; 1, 1, 2, \dots]$$

Para realizar el cálculo para un $x \in \mathbb{R}$:

1. Establezca $x_0 = x$, y establezca $a_0 = \lfloor x_0 \rfloor = \lfloor x \rfloor$ para ser el primer dígito en la representación de fracción continua de x .
2. Establezca $x_{i+1} = \frac{1}{x_i - a_i}$, y establezca $a_{i+1} = \lfloor x_{i+1} \rfloor$. (Si en algún punto $x_i = a_i$ entonces el algoritmo termina y $x \in \mathbb{Q}$.)

Lema 2.1.5. *El número $\log_2(3)$ es irracional.*

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y se supone que $\log_2(3) = \frac{m}{n}$. Entonces:

$$\log_2(3) = \frac{m}{n} \implies 2^{\frac{m}{n}} = 3 \implies 2^m = 3^n$$

Entonces, como $m, n > 0$, 3^n es siempre impar mientras que 2^m es siempre par. En consecuencia, nunca son iguales y el número es irracional. \square

Teorema 2.1.4. *Sean $p, q \in \mathbb{N}$, si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ y no es potencia de 2, entonces $\log_2(\frac{p}{q})$ es irracional.*

Demostración. Como se hacía en el lema anterior, se supone que existe $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\log_2\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{m}{n}$. Por lo tanto, se tiene que

$$\log_2\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{m}{n} \implies 2^{\frac{m}{n}} = \frac{p}{q} \implies 2^m = \left(\frac{p}{q}\right)^n \implies 2^m q^n = p^m$$

Escribiendo $p = 2^l \cdot p'$ y $q = 2^k \cdot q'$, como $\text{mcd}(2, p') = 1$ y $\text{mcd}(2, q') = 1$ se tiene entonces que $(2^l \cdot p')^n = 2^m \cdot (2^k \cdot q')^n$, es decir,

$$2^{nl} \cdot (p')^n = 2^m \cdot 2^{kn} \cdot (q')^n = 2^{m+kn} \cdot (q')^n$$

Por el *teorema fundamental de la aritmética*, debe ser $l \cdot n = m + k \cdot n$, de donde $(l - k) \cdot n = m$. En consecuencia

$$\frac{p}{q} = 2^{\frac{m}{n}} = 2^{l-k}$$

que es potencia de 2 y se llega a una contradicción. \square

2.2. Sucesiones de Farey

Definición 2.2.1 (Sucesión de Farey). Una *sucesión de Farey* \mathcal{F}_n es un conjunto de números racionales $\frac{p}{q}$ donde p y q son coprimos, $\text{mcd}(p, q) = 1$, y $0 < p < q < n$. Además, el conjunto está ascendentemente ordenado.

Ejemplo 2.2.1 (Sucesión de Farey de orden 6).

$$\mathcal{F}_6 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, 1 \right\}$$

Proposición 2.2.1. Sean dos fracciones $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$ irreducibles y consecutivas en una sucesión de Farey \mathcal{F}_n , entonces,

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = -1$$

Demostración. Razonando por inducción, si $\mathcal{F}_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$ es claro que se cumple

$$0(1) - 1(1) = -1$$

Se supone ahora que la propiedad es cierta para dos fracciones consecutivas $\frac{p_1}{q_1}$ y $\frac{p_2}{q_2}$ en una etapa dada, es decir, $p_1 q_2 - p_2 q_1 = -1$. Cualquier término nuevo que aparezca entre ellos en una sucesión posterior será su “mediante”: $\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$. Comprobando el determinante entre la fracción izquierda original $\frac{p_1}{q_1}$ y esta nueva fracción:

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_1+p_2 \\ q_1 & q_1+q_2 \end{vmatrix} = p_1(q_1+q_2) - q_1(p_1+p_2) = p_1 q_2 - q_1 p_2$$

Este resultado es exactamente el valor que se obtiene por hipótesis, que es -1 . El mismo cálculo aplica para el vecino de la derecha. Como la propiedad se mantiene al añadir nuevos términos, es cierta para cualquier sucesión de Farey. \square

Proposición 2.2.2. Si las fracciones $\frac{p_i}{q_i}, i \in \{1, 2, 3\}$ son consecutivas en \mathcal{F}_n , entonces

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 + p_3}{q_1 + q_3}$$

Demostración. Aplicando la proposición anterior, como son fracciones consecutivas en la sucesión se tiene que

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = -1$$

$$p_2 q_3 - p_3 q_2 = -1$$

Igualando ambas expresiones:

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = p_2 q_3 - p_3 q_2$$

$$p_1 q_2 + p_3 q_2 = p_2 q_3 + p_2 q_1$$

$$q_2(p_1 + p_3) = p_2(q_3 + q_1)$$

Finalmente, se despeja para obtener la igualdad buscada:

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 + p_3}{q_1 + q_3}$$

□

Proposición 2.2.3. Si $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$, entonces $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2} < \frac{p_2}{q_2}$.

Demostración. Para la desigualdad de la izquierda

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2} \implies p_1(q_1+q_2) < q_1(p_1+p_2) \implies p_1q_2 < p_2q_1$$

que es cierto por hipótesis. Se razona de igual manera para la otra desigualdad. En conclusión, la fracción central está estrictamente comprendida entre las otras dos. □

2.3. Teoría de conjuntos y aritmética modular

El lenguaje de la teoría de conjuntos permite formalizar la agrupación de notas musicales. En particular, la noción de equivalencia de octava, fundamental en la música occidental, se modela matemáticamente mediante relaciones de equivalencia y conjuntos cociente.

Asumiendo familiaridad con las nociones de relación y clase de equivalencia, se definen directamente los espacios que serán útiles en el desarrollo de la teoría musical.

Definición 2.3.1 (Conjunto cociente). Sea A un conjunto y \sim una relación de equivalencia sobre A . Se define el *conjunto cociente* como la colección de todas las clases de equivalencia posibles:

$$A/\sim = \{[a]_\sim : a \in A\}$$

Ejemplo 2.3.1 (La paridad de los enteros). Sean el conjunto de los números enteros $A = \mathbb{Z}$ y la relación de equivalencia dada por la paridad (congruencia módulo 2):

$$a \sim b \iff a - b \text{ es un número par (es múltiplo de 2)}$$

Esta relación agrupa todos los números enteros infinitos en solo dos grandes clases disjuntas:

- La clase de los pares, representada por el 0:

$$[0]_\sim = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

- La clase de los impares, representada por el 1:

$$[1]_\sim = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$$

Por tanto, el conjunto cociente resultante tiene exactamente dos elementos:

$$\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1]\} = \mathbb{Z}_2$$

Este ejemplo ilustra cómo el conjunto cociente “colapsa” un conjunto infinito en uno finito simplificando su estructura, igual que ocurre al reducir todas las octavas del piano a 12 clases de altura.

2.3.1. Aritmética modular y el círculo unitario

Para el estudio de las escalas musicales, dos conjuntos cocientes son de especial relevancia: los enteros módulo n (para escalas discretas como la cromática) y los reales módulo 1 (para el espacio continuo de alturas).

Definición 2.3.2 (Congruencia módulo n). Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Se define la relación de congruencia sobre los enteros \mathbb{Z} como:

$$a \equiv b \pmod{n} \iff a - b = k \cdot n, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}$$

El conjunto cociente resultante se denota como \mathbb{Z}_n (o $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) y sus elementos son las clases de restos $\{[0], [1], \dots, [n-1]\}$.

Ejemplo 2.3.2. Como ya se ha mencionado, el sistema musical de 12 semitonos se modela mediante \mathbb{Z}_{12} . La nota **do** (0) es equivalente a su octava **do'** (12) porque $12 - 0 = 1 \cdot 12$, por tanto $12 \equiv 0 \pmod{12}$.

Esta misma idea se extiende a los números reales para modelar el continuo sonoro, lo que nos permitirá identificar las notas con puntos en una circunferencia.

Definición 2.3.3 (El toro unidimensional \mathbb{R}/\mathbb{Z}). Sea la relación de equivalencia sobre el conjunto de los números reales \mathbb{R} tal que $x \sim y$ si su diferencia es un número entero:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

El conjunto cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} identifica todos los puntos que difieren en un número entero. Geométricamente, esto equivale a tomar el intervalo $[0, 1)$ y “pegar” sus extremos.

Proposición 2.3.1 (Identificación con el círculo \mathbb{S}^1). *Existe una biyección natural entre el conjunto cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} y el círculo unitario en el plano complejo, denotado como $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. La aplicación viene dada por la exponencial compleja:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ [t] &\longmapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

Observación 2.3.1. Esta identificación es la base para la representación geométrica de las escalas y acordes como polígonos inscritos en una circunferencia. Como se verá posteriormente, un punto en el círculo representa una clase de altura, y el ángulo corresponde a la posición de la nota dentro de la octava.

2.4. Teoría de grupos

En esta sección, se establecen las nociones fundamentales de teoría de grupos que se emplearán a lo largo de este trabajo. Se asume que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de la teoría de conjuntos, como las funciones y el producto cartesiano.

El objeto algebraico central que se utiliza es el de grupo. Un grupo es una estructura que formaliza la idea de simetría y operación reversible, lo que lo convierte en una herramienta idónea para el análisis de estructuras musicales.

Definición 2.4.1 (Grupo). Un *grupo* G es un par $(G, *)$ donde G es un conjunto no vacío, “ $*$ ” una ley de composición

$$\begin{aligned} * : G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto x * y \end{aligned}$$

tal que

(i) **Asociatividad:** $\forall x, y, z \in G$ se tiene

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

(ii) **Elemento neutro:** $\exists e \in G$ tal que $\forall x \in G$,

$$e * x = x * e = x.$$

(iii) **Inverso:** $\forall x \in G$ existe un elemento $x' \in G$ tal que

$$x * x' = x' * x = e.$$

Observación 2.4.1. Se dice que un grupo $(G, *)$ es *abeliano* o *conmutativo* si $\forall x, y \in G, x*y = y*x$.

Ejemplo 2.4.1. En la teoría de las matemáticas aplicadas a la música resulta útil considerar la escala cromática igualmente temperada, 1.5, como el grupo \mathbb{Z}_{12} con las relaciones

C \mapsto 0	F \sharp \mapsto 6
C \sharp \mapsto 1	G \mapsto 7
D \mapsto 2	G \sharp \mapsto 8
D \sharp \mapsto 3	A \mapsto 9
E \mapsto 4	A \sharp \mapsto 10
F \mapsto 5	B \mapsto 11

sin tomar en cuenta la octava en que se ubica cada nota y mostrando haciendo hincapié únicamente en la altura del tono. Esta interpretación facilita operaciones como el transporte de melodías mediante morfismos.

Definición 2.4.2 (Orden). El *orden* de un grupo G , denotado por $|G|$, es el número de elementos que tiene. Si G tiene un número finito de elementos, decimos que G es un *grupo finito*; en caso contrario, decimos que G es un *grupo infinito*.

Ejemplo 2.4.2. Considerando las 12 alturas de la escala temperada, se definen las operaciones \odot_t, \otimes_i transposición e inversión dadas por

$$\odot_t := T_n(x) = x + n \text{ (mód 12)}$$

$$\otimes_i := I(x) = -x \text{ (mód 12)}$$

Entonces el conjunto de todas las operaciones formadas por composición de transposiciones e inversiones:

$$G = \{T_0, T_1, \dots, T_{11}, T_0I, T_1I, \dots, T_{11}I\}$$

forma un grupo de orden 24 isomorfo al grupo diedral D_{24} que tiene como elementos notables:

- (i) neutro: T_0 (transposición por 0 semitonos).
- (ii) inverso de T_n : $T_{-n} = T_{12-n}$ para $n \neq 0$.
- (iii) inverso de T_nI : T_nI , pues $(T_nI)^2 = T_0$.

Así pues, se pueden caracterizar algunas de las operaciones dentro del grupo como:

$$\begin{aligned} T_m \circ T_n &= T_{m+n \text{ mód } 12} \\ I \circ T_n &= T_{-n} \circ I \\ I^2 &= T_0 \text{ (elemento identidad)} \\ (T_nI)^2 &= T_0 \\ (T_mI) \circ (T_nI) &= T_{m-n} \end{aligned}$$

Observación 2.4.2. De ahora en adelante, cuando se habla de un grupo y se escribe únicamente como un conjunto G se estará haciendo referencia al grupo $(G, *)$.

Definición 2.4.3 (Subgrupo). Se denomina subgrupo H de un grupo G a un subconjunto $H \subset G$ que es un grupo bajo la misma operación que G .

Definición 2.4.4 (Grupo cíclico). Sea G un grupo, $a \in G$, entonces el *subgrupo cíclico de G generado por a* es

$$\langle a \rangle := \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Observación 2.4.3 (Generador). Dado G un grupo cíclico. Un elemento $a \in G$ se llama *generador* de G si:

$$G = \langle a \rangle$$

Es decir, si todo elemento de G puede escribirse como una potencia de a . Además, un elemento $a^k \in G$ es un generador de G si y sólo si $\text{mcd}(k, n) = 1$.

Ejemplo 2.4.3. El grupo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ es cíclico y tiene por generadores a $\{1, 5, 7, 11\}$.

Ejemplo 2.4.4. Tomando el subgrupo cíclico de $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ generado por $\langle 7 \rangle$ se obtiene el círculo de quintas (1.14).

$1 \cdot 7 \equiv 7$	(mód 12) (C \rightarrow G)
$2 \cdot 7 = 14 \equiv 2$	(mód 12) (G \rightarrow D)
$3 \cdot 7 = 21 \equiv 9$	(mód 12) (D \rightarrow A)
$4 \cdot 7 = 28 \equiv 4$	(mód 12) (A \rightarrow E)
$5 \cdot 7 = 35 \equiv 11$	(mód 12) (E \rightarrow B)
$6 \cdot 7 = 42 \equiv 6$	(mód 12) (B \rightarrow F \sharp)
$7 \cdot 7 = 49 \equiv 1$	(mód 12) (F \sharp \rightarrow C \sharp)
$8 \cdot 7 = 56 \equiv 8$	(mód 12) (C \sharp \rightarrow G \sharp)
$9 \cdot 7 = 63 \equiv 3$	(mód 12) (G \sharp \rightarrow D \sharp)
$10 \cdot 7 = 70 \equiv 10$	(mód 12) (D \sharp \rightarrow A \sharp)
$11 \cdot 7 = 77 \equiv 5$	(mód 12) (A \sharp \rightarrow F)
$12 \cdot 7 = 84 \equiv 0$	(mód 12) (F \rightarrow C)

Como el subgrupo $\langle 7 \rangle$ contiene los 12 elementos de \mathbb{Z}_{12} , se concluye que $\langle 7 \rangle = \mathbb{Z}_{12}$. Esto significa que 7 es un *generador* de \mathbb{Z}_{12} , afirmación que ya se conocía por el ejemplo 2.4.3. El círculo de quintas es, en esencia, una visualización de la estructura cíclica de \mathbb{Z}_{12} con el generador 7.

Definición 2.4.5 (Homomorfismo). Dados dos grupos (G, \star) , (H, \blacktriangle) , un *homomorfismo* de grupos es una función que preserva la estructura de grupo es decir, $f : G \rightarrow H$ tal que $f(u \star v) = f(u) \blacktriangle f(v) \quad \forall u, v \in G$. Si un homomorfismo es además biyectivo, se llama *isomorfismo*, y se dice que los grupos G y H son *isomorfos* ($G \cong H$).

Definición 2.4.6 (Clase lateral). Sea G un grupo y H un subgrupo de G . Para cualquier $g \in G$, la *clase lateral izquierda* de H en G que contiene a g es el conjunto:

$$gH := \{gh \mid h \in H\}$$

De manera análoga se definen las clases laterales derechas Hg . El conjunto de todas las clases laterales de H en G forma una partición de G .

Ejemplo 2.4.5 (Acordes y clases laterales). En \mathbb{Z}_{12} , el acorde de Do aumentado está formado por las notas $\{\text{do}, \text{mi}, \text{sol}\sharp\}$, que corresponden con $\{0, 4, 8\}$ del grupo \mathbb{Z}_{12} . Este conjunto es precisamente el subgrupo cíclico generado por 4:

$$H = \langle 4 \rangle = \{0, 4, 8\}$$

Se pueden calcular las clases laterales de H en \mathbb{Z}_{12} :

$$0 + H = \{0 + 0, 0 + 4, 0 + 8\} = \{0, 4, 8\} \text{ (Acorde de Do aumentado)}$$

$$1 + H = \{1 + 0, 1 + 4, 1 + 8\} = \{1, 5, 9\} \text{ (Acorde de Do}\sharp \text{ aumentado)}$$

$$2 + H = \{2 + 0, 2 + 4, 2 + 8\} = \{2, 6, 10\} \text{ (Acorde de Re aumentado)}$$

$$3 + H = \{3 + 0, 3 + 4, 3 + 8\} = \{3, 7, 11\} \text{ (Acorde de Re\# aumentado)}$$

Si se intenta calcular $4 + H$, se obtiene $4 + H = \{0, 4, 8\} = 0 + H$.

Las clases laterales de H parten el universo de las 12 notas en 4 conjuntos disjuntos, donde cada conjunto es un acorde aumentado. En este contexto, un músico que “transporta” un acorde aumentado está, en términos algebraicos, moviéndose de una clase lateral a otra. El conjunto de estas cuatro clases laterales forma un nuevo grupo, el *grupo cociente* \mathbb{Z}_{12}/H , de orden 4.

Definición 2.4.7 (Acción de grupos). Sean Σ un conjunto y (A, \star) un grupo. Una *acción* de Σ en A es una función

$$\phi : \Sigma \times A \rightarrow A$$

que cumple que

$$\forall x \in \Sigma, \phi(e, x) = x \text{ con } e \text{ neutro de } A.$$

$$\forall x \in \Sigma : a, b \in A, \phi(a \star b, x) = \phi(a, \phi(b, x)).$$

Definición 2.4.8 (Órbita y Estabilizador). Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto Σ . Para un elemento $x \in \Sigma$:

- a) La *órbita* de x bajo la acción de G es el conjunto de todos los elementos a los que x puede ser transformado por G :

$$\text{Orb}_G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subseteq X$$

- b) El *estabilizador* de x en G es el conjunto de todos los elementos de G que dejan a x fijo:

$$\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subseteq G$$

Observación 2.4.4. El estabilizador $\text{Stab}_G(x)$ es siempre un subgrupo de G .

Ejemplo 2.4.6 (Órbita de un acorde mayor y estabilizador de un acorde disminuido). Usando la expresiones anteriormente expuestas se pueden calcular

- (i) **Órbita:** La órbita de un acorde de Do mayor, $\{0, 4, 7\}$, bajo la acción del grupo de transposiciones $T = \{T_n\}_{n=0}^{11}$ es el conjunto de los 12 acordes mayores. Si la acción es del grupo diédrico completo D_{24} , la órbita también incluye los 12 acordes menores, ya que la inversión transforma un acorde mayor en uno menor. La órbita agrupa a todos los objetos musicalmente “del mismo tipo” bajo ciertas transformaciones.
- (ii) **Estabilizador:** Se considera un acorde con más simetría, como el acorde de Do disminuido 7 , $\mathcal{C}_{dim7} = \{0, 3, 6, 9\}$. ¿Qué transposiciones lo dejan igual?

$$T_0 \cdot \mathcal{C}_{dim7} = \{0, 3, 6, 9\}$$

$$T_3 \cdot \mathcal{C}_{dim7} = \{3, 6, 9, 12 \equiv 0\} = \{0, 3, 6, 9\}$$

$$T_6 \cdot \mathcal{C}_{dim7} = \{6, 9, 12 \equiv 0, 15 \equiv 3\} = \{0, 3, 6, 9\}$$

$$T_9 \cdot \mathcal{C}_{dim7} = \{9, 12 \equiv 0, 15 \equiv 3, 18 \equiv 6\} = \{0, 3, 6, 9\}$$

El estabilizador del acorde disminuido bajo el grupo de transposiciones es el subgrupo $\text{Stab}_T(\mathcal{C}_{dim7}) = \{T_0, T_3, T_6, T_9\}$. Esto captura algebraicamente la simetría inherente a este acorde: es invariante bajo transposiciones de 3 semitonos.

Teorema 2.4.1 (Fórmula de Burnside). Sea G un grupo finito que actúa sobre un conjunto X . Para cualquier $x \in X$, el tamaño de la órbita de x multiplicado por el tamaño del estabilizador de x es igual al tamaño del grupo:

$$|G| = |\text{Orb}_G(x)| \cdot |\text{Stab}_G(x)|$$

Observación 2.4.5. Se puede usar el teorema para predecir cuántos acordes de un tipo existen. Para el acorde disminuido \mathbb{C}_{dim7} y el grupo de transposiciones T ($|T| = 12$):

$$|\text{Orb}_T(\mathbb{C}_{dim7})| = \frac{|T|}{|\text{Stab}_T(\mathbb{C}_{dim7})|} = \frac{12}{4} = 3$$

El teorema predice que solo existen 3 acordes disminuidos distintos, lo cual es un hecho conocido por los músicos:

$\{0, 3, 6, 9\}$ (**do** dim7, **mi♭** dim7, **fa♯** dim7, **la** dim7)

$\{1, 4, 7, 10\}$ (**do♯** dim7, **mi** dim7, **sol** dim7, **si♭** dim7)

$\{2, 5, 8, 11\}$ (**re** dim7, **fa** dim7, **sol♯** dim7, **si** dim7)

Definición 2.4.9 (Semigrupo). Un semigrupo es un sistema algebraico de la forma (A, \bullet) , donde A es un conjunto no vacío y \bullet una operación interna definida sobre A de la forma

$$\begin{aligned} \bullet : A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto c = a \bullet b \end{aligned}$$

y que cumple las propiedades

- i) $\forall x, y \in A, x \bullet y \in A$
- ii) $\forall x, y, z \in A, x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$

Ejemplo 2.4.7. $(\mathbb{N}, +)$ es un semigrupo, que además se dice *abeliano*, porque $\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b = b + a$.

Definición 2.4.10 (Monoide en \mathbb{R}). Un monoide M es un subconjunto de los números reales no negativos $\mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumple las siguientes propiedades:

- 1. Contiene el elemento neutro de la suma: $0 \in M$.
- 2. Es cerrado bajo la suma: $\forall a, b \in M \implies a + b \in M$.
- 3. Sus elementos se pueden ordenar en una sucesión creciente $0 = \mu_1 < \mu_2 < \dots$

Observación 2.4.6. En el contexto de este trabajo, se denomina *monoide temperado* a aquel monoide en que la distancia entre elementos consecutivos tiende a cero ($\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) = 0$).

Observación 2.4.7 (Submonoide). Igualmente, un monoide se puede conceptualizar como el par (M, \star) , siendo este un semigrupo que posee elemento neutro. Un subconjunto H de M será un submonoide si es cerrado para la operación \star y además el elemento neutro de M está en H .

Ejemplo 2.4.8. L es el monoide generado por los logaritmos de los números naturales, que representa los intervalos musicales puros:

$$L = \{\log_2(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Definición 2.4.11 (Semigrupo Numérico). Un *semigrupo numérico* S es un subconjunto de los números naturales \mathbb{N}_0 que satisface:

- 1. $0 \in S$.
- 2. Es cerrado bajo la suma.
- 3. Su complemento $\mathbb{N}_0 \setminus S$ es finito.

El máximo común divisor de todos los elementos de S debe ser 1. El elemento no nulo más pequeño de S se denomina *multiplicidad* del semigrupo.

Definición 2.4.12 (Discretización). Dado un monoide real M y un factor de escala $m \in \mathbb{N}$ (que en música representa el número de divisiones de la octava), se define la *discretización por redondeo* como el conjunto de enteros:

$$[m \cdot M] = \{[m \cdot x] \mid x \in M\}$$

donde $[\cdot]$ representa el redondeo al entero más cercano.

Observación 2.4.8. Si el conjunto resultante es un semigrupo numérico, se dice que m es una *multiplicidad válida* de discretización.

Definición 2.4.13 (Razón Áurea). El número áureo, ϕ , es el número irracional solución positiva de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$. Su valor es:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803\dots$$

Observación 2.4.9. En el contexto de la teoría de monoides temperados, este número genera estructuras con propiedades de autosimilitud (fractales) únicas.

Capítulo 3

De la Naturaleza al Temperamento

Un piano y un violín son dos universos sonoros en esencia opuesta. Para producir sonido en un piano, se acciona una de sus teclas —blancas o negras—, lo que activa un martillo que golpea una cuerda en su interior. La nota resultante depende exclusivamente de la tensión, la densidad y la longitud de esa cuerda. Dado que estas magnitudes son inalterables durante la interpretación, cada tecla produce un sonido único e inmutable. Esto confina al piano a un paleta de sólo 88 sonidos discretos, y toda la música creada con él será, necesariamente, una combinación de estos tonos predefinidos.

El violín, en cambio, opera bajo un principio de libertad continua. El sonido se genera al frotar una de sus cuatro cuerdas con el arco. Para cambiar de nota, la intérprete acorta la longitud vibrante de la cuerda presionándola contra el diapasón con sus dedos. Este acto permite deslizarse sin restricciones entre sonidos, generando no sólo notas discretas, sino múltiples matices y frecuencias intermedias.

Es aquí donde surge el dilema fundamental que recorre este capítulo: si una violinista puede ajustar infinitesimalmente la altura de cada nota para que suene “perfecta” en un contexto melódico o armónico concreto, ¿cómo debe un constructor de pianos —o de cualquier instrumento de afinación fija— decidir y fijar las frecuencias de sus 88 teclas para que el instrumento suene armónicamente bien en todas las tonalidades posibles?

La respuesta a esta pregunta no es única y a lo largo de la historia la Música ha propuesto diferentes soluciones. En las siguientes páginas se recorre la evolución de estas ideas. Comenzando con el sistema pitagórico, basado en la pureza matemática de las quintas, se exploran luego las afinaciones de justa entonación, que buscan la consonancia en los armónicos de una nota fundamental. Trataré de analizar el compromiso de los temperamentos mesotónicos, que perfeccionaron algunas terceras a costa de sacrificar otros intervalos y se revisa el origen de temperamentos irregulares que facilitaron la flexibilidad de entonación entre instrumentos durante la Edad Moderna. De ahora en adelante, cuando se hable de *compromiso* me estaré refiriendo a sistemas de afinación que renuncian a la pureza matemática perfecta de ciertos intervalos (como la tercera mayor o la quinta justa) para ganar beneficios prácticos en otras áreas.

Finalmente, al llegar al sistema temperado igual, explicaré la solución moderna que distribuye por igual el error entre todas las notas y permite al piano la libertad de modular a cualquier tonalidad, allanando el camino para la música actual.

3.1. Escala pitagórica

Como se introdujo al inicio de este trabajo, en el siglo VI a.C. Pitágoras y su escuela establecieron la base matemática de la música al relacionar los intervalos consonantes con razones de números enteros simples. A partir del análisis del monocordio, identificaron que los intervalos fundamentales eran la octava (con una razón de frecuencias 2:1) y la quinta perfecta (con una razón 3:2). La construcción de su escala se basa exclusivamente en la repetición (multiplicación y división) de estos dos intervalos.

Construcción de la escala diatónica pitagórica

Partiendo del **do**₄ de la primera línea adicional del pentagrama, se construirá la escala de Do Mayor pitagórica y diatónica mediante intervalos de quinta y octava, siguiendo la idea expuesta en el ejemplo 1.2.1. Es fundamental que las relaciones obtenidas se mantengan dentro del rango (1, 2) para conservar las notas en la octava deseada. En primer lugar, a partir de la relación de **do**₄ (1:1), se genera el **sol**₄ ascendiendo una quinta:

$$\mathbf{sol}_4 \equiv 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \in (1, 2)$$

Seguidamente, ascendiendo dos quintas (3:2):

$$\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2.25 > 2$$

se obtiene la relación del **do**₅, que está desfasada una octava. Simplemente dividiendo entre 2 se adapta al rango de la escala:

$$\mathbf{re}_4 \equiv \frac{9}{4} \div 2 = \frac{9}{8} \in (1, 2)$$

A continuación, se obtiene la relación del **la**. Se procede de la misma manera en relaciones sucesivas:

$$\mathbf{la}_4 \equiv \frac{9}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{16} \in (1, 2)$$

$$\mathbf{mi}_5 \equiv \frac{27}{16} \times \frac{3}{2} = \frac{81}{32} \notin (1, 2)$$

Se reescala para adaptarlo al rango deseado:

$$\mathbf{mi}_4 \equiv \frac{81}{32} \times \frac{1}{2} = \frac{81}{64} \in (1, 2)$$

$$\mathbf{si}_4 \equiv \frac{81}{64} \times \frac{3}{2} = \frac{243}{128} \in (1, 2)$$

Ahora, si se aplica una quinta ascendente se generaría la frecuencia propia del **fa**_♯, la cual no está presente en la escala de *Do Mayor*. Por tanto, se genera el resto de notas de la escala (**do**) por medio de quintas descendentes, *i.e.*, dividiendo por la razón 3/2, que es lo mismo que multiplicar por 2/3:

$$\mathbf{fa}_3 \equiv 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \notin (1, 2)$$

Se ajusta la octava para incluirla en el rango deseado:

$$\mathbf{fa}_4 \equiv \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$$

La escala resultante tiene las relaciones que se exponen en la tabla 3.1.

Razón (a_n/a_1)	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1
Intervalo (a_n/a_{n-1})	—	9:8	9:8	256:243	9:8	9:8	9:8	256:243
Nota	do	re	mi	fa	sol	la	si	do'

Tabla 3.1: Escala pitagórica construida a partir de **do**₄.

El problema fundamental que presenta este proceso de construcción de escalas es que podría continuarse indefinidamente, generando infinitas notas dentro de una misma octava sin finalizar nunca. Para demostrar por qué es imposible cerrar este ciclo perfectamente, se plantea el siguiente teorema:

Teorema 3.1.1. *No existen $n, k \in \mathbb{Z}^+$ tales que una secuencia de n quintas perfectas equivalga exactamente a k octavas.*

Demostración. Se supone que se quiere volver a una nota que sea equivalente a la fundamental después de aplicar n quintas y ajustar con k octavas. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k$$

Reordenando los términos para eliminar el denominador, se obtiene:

$$3^n = 2^n \cdot 2^k \implies 3^n = 2^{n+k}$$

Esta igualdad no se cumple nunca para $n, k \in \mathbb{Z}^+$, ya que el lado izquierdo (3^n) es siempre impar, mientras que el lado derecho (2^{n+k}) es siempre par. Esta contradicción demuestra que es imposible cerrar el ciclo de quintas perfectamente. \square

La escala que se ha construido revela la estructura interválica fundamental del sistema pitagórico. Al analizar los intervalos entre las notas de la escala diatónica se pueden extraer algunas incongruencias que confirman los problemas asociados a esta forma de generarla.

En primer lugar, ocurre que la suma de dos semitonos no equivalen a un tono completo. Calculando la distancia entre, por ejemplo, **mi** y **fa**:

$$\frac{\mathbf{fa}}{\mathbf{do}} = \frac{\mathbf{fa}}{\mathbf{mi}} \times \frac{\mathbf{mi}}{\mathbf{do}}$$

Sustituyendo las proporciones pitagóricas:

$$\frac{4}{3} = r \times \frac{81}{64}$$

Despejando:

$$r = \frac{4/3}{81/64} = \frac{4}{3} \times \frac{64}{81} = \frac{2^8}{3^5} = \frac{256}{243}$$

Este valor, conocido como *limma* o semitono diatónico pitagórico, representa el intervalo entre **mi** y **fa**.

Ahora, se puede verificar lo señalado anteriormente. Dado que los intervalos se combinan por multiplicación, dos semitonos se corresponden con:

$$\left(\frac{2^8}{3^5}\right)^2 = \frac{2^{16}}{3^{10}} \approx 1,1098575$$

y un tono pitagórico es:

$$\frac{9}{8} = 1.125$$

La diferencia entre ambos intervalos se calcula como:

$$\frac{9/8}{2^{16}/3^{10}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.01364$$

y se denomina *coma pitagórica*. De esta manera se corrobora que un tono no se corresponde con la suma de dos semitonos. Además, en el sistema pitagórico existe igualmente un semitono diferente del *limma*, que ya se ha visto que aparece entre **mi-fa** y **si-do**. Este recibe el nombre de *apotomé* y se corresponde con el semitono cromático propio de los intervalos entre **do-do#**, **re-re#**, etc. Para obtener su relación matemática no hay más que calcular la diferencia entre un tono pitagórico completo y el *limma*, es decir, la *coma pitagórica*. Se puede ver sencillamente:

$$\text{Apotomé} + \text{Limma} \implies \text{Apotomé} \times \text{Limma} = \text{Tono}$$

$$\text{Apotomé} - \text{Limma} \implies \frac{\text{Apotomé}}{\text{Limma}} = \text{Coma pitagórica}$$

En resumen:

Nombre	Razón	Valor aproximado	Tipo
<i>Limma</i>	$\frac{256}{243}$	1.05350	st. diatónico (mi-fa, si-do)
<i>Apotomé</i>	$\frac{2187}{2048}$	1.06787	st. cromático (do-do♯...)
Diferencia (<i>Coma</i>)	$\frac{531441}{524288}$	1.01364	<i>Coma pitagórica</i>

Tabla 3.2: Comparación de los semitonos en el sistema pitagórico.

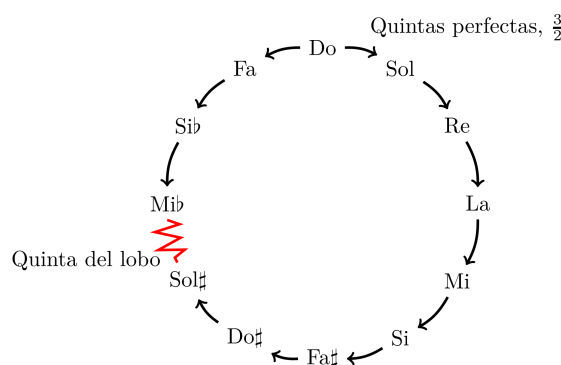


Figura 3.1: Círculo de quintas pitagórico con quinta del lobo. La quinta entre **sol♯** y **mi♭** (o entre **la♭** y **mi**, dependiendo de la notación) resulta ser significativamente más pequeña que una quinta justa, produciendo un sonido característico que recuerda al aullido de un lobo.

De las relaciones anteriores se deduce que doce quintas perfectas “equivalen” a casi siete octavas. La pequeña discrepancia restante es la ya conocida *coma pitagórica* e impide que el ciclo de quintas se cierre. En la práctica, esto obliga a los músicos a dejar una quinta “impura” o “desafinada” para poder cerrar el círculo cromático de 12 notas, conocida como la *quinta del lobo* y cuyo sonido es tan disonante que se evita a toda costa en la composición con el sistema pitagórico.

Esta elegante construcción matemática, aunque imperfecta, estableció los cimientos de la teoría musical occidental y demostró por primera vez la profunda conexión entre las proporciones numéricas y la armonía musical. El sistema pitagórico representó un hito fundamental en la comprensión científica de la música, haciendo que melodías interpretadas en un único tono sin alteraciones ni modulación sonaran consonantes y agradables al oído humano.

Sin embargo, sus limitaciones prácticas son innegables. La imposibilidad de cerrar el círculo de quintas, la existencia de la quinta del lobo, y la desigualdad entre los diferentes tipos de semitonos (el *limma* de 256:243 y el *apotomé* de 2187:2048) hacen que la modulación entre tonalidades sea extremadamente difícil y desagradable al oído humano. La distinción *limma-apotomé* es crucial, porque muestra que el sistema pitagórico no puede tener una escala cromática uniforme. Cada semitono puede ser de dos tamaños diferentes dependiendo del contexto musical, lo que limita enormemente las posibilidades compositivas. Además, bajo este sistema la tercera mayor pitagórica (81:64) resulta considerablemente más disonante que la tercera pura (5:4) que más tarde se identificaría como más consonante para el oído humano. Mientras la música se basó en la melodía (monofonía), esto era tolerable pero con el auge de la polifonía y la armonía, donde los acordes y las relaciones verticales entre notas cobran protagonismo, la dureza de las terceras pitagóricas se convirtió en un obstáculo insalvable.

Estas inconsistencias —particularmente la acumulación de la *coma pitagórica*— motivarían el desarrollo de los sistemas de afinación que se explorarán a continuación, en busca de una solución que permitiera mayor flexibilidad armónica sin sacrificar completamente la pureza de los intervalos y facilitando la modulación entre las tonalidades.

3.2. Entonación justa

El sistema pitagórico, a pesar de su elegancia matemática, mantuvo su vigencia hasta bien entrado el siglo XV, cuando las crecientes demandas de la polifonía renacentista revelaron sus limitaciones prácticas. La imperiosa necesidad de acordes más puros y consonantes —especialmente de terceras— impulsó la búsqueda de alternativas que dieron lugar al sistema de *justa entonación*.

La base física y matemática de este nuevo sistema reside en la *serie armónica*, una sucesión de sonidos cuyas frecuencias son múltiplos enteros positivos de una frecuencia fundamental. Como ya se explicó en la introducción de este proyecto, cuando se perturba un cuerpo vibrante —como una cuerda tensa o una columna de aire—, este no produce únicamente su frecuencia fundamental, sino toda una familia de frecuencias superiores llamadas *armónicos*. Matemáticamente, si la frecuencia fundamental es f , su serie armónica viene dada por $f, 2f, 3f, 4f, 5f, \dots$

A diferencia del sistema pitagórico, que construye toda la escala a partir de las razones 2:1 (octava) y 3:2 (quinta), la justa entonación incorpora la razón 5:4 para las terceras mayores, logrando así una pureza armónica superior en los acordes triada. El origen de esta proporción para la *tercera* reside en la relación entre el cuarto y el quinto armónico de una nota fundamental. Se supone que dicha nota es el **do**₄. Entonces, las frecuencias de estos armónicos son, respectivamente, $4 \times f_{\text{do}}$ y $5 \times f_{\text{do}}$. El cuarto armónico se corresponde con un **do** dos octavas por encima, y el quinto armónico con el **mi** de esa misma octava superior. Para encontrar la razón de la tercera mayor, simplemente se calcula el intervalo que forman sus notas:

$$\frac{\text{mi}}{\text{do}} = \frac{5 \times f_{\text{do}}}{4 \times f_{\text{do}}} = \frac{5}{4}$$

Este sistema representa, por tanto, un *cambio de paradigma*: de priorizar la pureza melódica de las quintas (pitagórico) a buscar la pureza armónica de las terceras (justa entonación).

Sin embargo, como todos los sistemas de afinación presentados en este trabajo, la justa entonación no está exenta de compromisos. Su búsqueda de la pureza en los intervalos individuales conlleva limitaciones prácticas que se exploran a continuación.

Construcción de escalas

Como se ha señalado anteriormente, la construcción de las escalas justamente entonadas surge de la introducción de nuevas relaciones asociadas a la *serie armónica*. En concreto, se pretendió generarlas a partir del acorde de triada. Matemáticamente, la construcción toma como referencia un intervalo de quinta justa, cuya relación pitagórica (3 : 2) se mantiene. Lo que se hace dividir la *quinta* en dos intervalos de *tercera* dando lugar al triplete (4:5:6). Las terceras son una menor (6 : 5) y una mayor (5 : 4). Además, el intervalo de quinta se mantiene, por reducción de fracciones, $2 : 3 = 4 : 6$.

De esta manera, la escala diatónica se construye tomando tres acordes perfectos encadenados generando las siguientes tríadas mayores:

- **Tríada de FA:** fa-la-do \rightarrow 4:5:6
- **Tríada de DO:** do-mi-sol \rightarrow 4:5:6
- **Tríada de SOL:** sol-si-re \rightarrow 4:5:6

El proceso de construcción mediante encadenamiento de intervalos se representa, nuevamente, como productos de números racionales

$$1 \text{ (do)} \xrightarrow{\times \frac{5}{4}} \frac{5}{4} \text{ (mi)} \xrightarrow{\times \frac{6}{5}} \frac{30}{20} = \frac{3}{2} \text{ (sol)} \xrightarrow{\times \frac{5}{4}} \frac{15}{8} \text{ (si)} \xrightarrow{\times \frac{6}{5}} \frac{90}{40} = \frac{9}{4} \rightarrow \frac{9}{8} \text{ (re)}$$

para los intervalos ascendentes y como

$$1 \text{ (do)} \xrightarrow{\times \frac{2}{3}} \frac{2}{3} \rightarrow \frac{4}{3} \text{ (fa)} \xrightarrow{\times \frac{5}{4}} \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \text{ (la)} \xrightarrow{\times \frac{6}{5}} \frac{30}{15} = 2 \text{ (do')}$$

para los intervalos descendentes. En resumen, se obtiene una escala diatónica que se caracteriza por las razones que se observan en la tabla 3.3. En dicha tabla se puede observar que la escala

Razón (a_n/a_1)	1:1	9:8	5:4	4:3	3:2	5:3	15:8	2:1
Intervalo (a_n/a_{n-1})	–	9:8	10:9	16:15	9:8	10:9	9:8	16:15
Nota	do	re	mi	fa	sol	la	si	do'

Tabla 3.3: Escala de justa entonación construida a partir de do_4 también conocida como *escala de Zarlino* en honor al teórico musical del siglo XVI Gioseffo Zarlino, prioriza las terceras justas (5:4 y 6:5).

formada presenta una estructura irregular y se puede modelizar como la secuencia

$$\{1^+, 1^-, \frac{1}{2}, 1^+, 1^-, 1^+, \frac{1}{2}\}$$

donde 1^+ hace referencia al tono de razón $\frac{9}{8}$, 1^- hace referencia al de razón $\frac{10}{9}$ y $\frac{1}{2}$ se corresponde con el semitono de razón $\frac{16}{15}$.

La escala revela que coexisten dos tipos de tono que difieren en lo que se denomina *coma zarliniana* o *sintónica* y tiene un valor de

$$\frac{9/8}{10/9} = \frac{81}{80} = 1.0125$$

Además, al igual que ocurría en la afinación pitagórica, en donde el encadenamiento de *quintas* no cerraba el círculo, en la entonación justa el encadenamiento de *terceras* tampoco lo hace. Esta afirmación se enuncia nuevamente como el teorema **3.2.1**.

Teorema 3.2.1. *No existen $n, k \in \mathbb{Z}^+$ tales que una secuencia de n terceras perfectas equivalga exactamente a k octavas.*

Demostración. De igual manera que hacíamos en el teorema 3.1.1, para volver a un do_4 después de aplicar n terceras y ajustar con k octavas

$$\left(\frac{5}{4}\right)^n = 2^k \implies 5^n = 2^{k+2n}$$

cuya última igualdad no se corrobora nunca por incongruencia de paridades. \square

Beneficios

Volviendo a la *coma sintónica*, hay que tener en consideración que esta pequeña pero audible diferencia es la fuente de las principales virtudes y defectos del sistema.

El principal logro de la justa entonación reside en su consonancia perfecta dentro de la tonalidad para la que fue diseñada. Esta cualidad emerge de su fundamentación en razones de números enteros pequeños, particularmente en la tríada perfecta.

Cuando se generan las triadas como el ejemplo anteriormente explicado, (do-mi-sol), y se presenta la relación $1:\frac{5}{4}:\frac{3}{2}$ hace que al eliminar las fracciones multiplicando por 4, se obtenga la proporción 4:5:6. Esta simplicidad numérica se traduce acústicamente en una ausencia total de batimiento, generando una sensación de reposo y estabilidad perfectos que los pitagóricos nunca pudieron alcanzar.

La clave de esta superioridad armónica radica en que la justa entonación constituye un sistema de *límite-5*, incorporando el número primo 5 junto con los primos 2 y 3 del sistema pitagórico. Esta expansión permite consonancias de terceras mayores y menores puras que resultan en una resonancia excepcional: los armónicos secundarios de las diferentes notas coinciden, reforzándose mutuamente y creando un efecto de pureza sonora donde la simplicidad de la relación numérica se correlaciona directamente con la calidad acústica.

Rigidez estructural

Sin embargo, esta perfección local tiene un costo global prohibitivo. Las mismas características que garantizan la pureza armónica en una tonalidad generan obstáculos insuperables para la modulación y la flexibilidad musical. El primer problema significativo aparece en la ya conocida *quinta del lobo*. Aunque el sistema se fundamenta en quintas puras, la combinación de intervalos genera inevitablemente una quinta defectuosa. El intervalo entre **re** (9/8) y **la** (5/3) no es una quinta justa:

$$\frac{\mathbf{la}}{\mathbf{re}} = \frac{5/3}{9/8} = \frac{40}{27} \approx 1.4815 \quad \text{vs} \quad \frac{3}{2} = 1.5$$

Esta quinta, más pequeña que la pura es exactamente la *coma sintónica* ($\frac{81}{80}$), hace que acordes como **Re** menor resulten notablemente disonantes en este sistema.

El problema más devastador, sin embargo, emerge al intentar construir una escala cromática completa. La existencia de dos tonos diferentes (9:8 y 10:9) y la coma sintónica que los separa implica que las notas *enarmónicas* no son equivalentes. Por ejemplo, **sol**♯ y **la**♭ no representan la misma altura:

$$\begin{aligned} \mathbf{sol}^\sharp &= \mathbf{mi} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{16} \\ \mathbf{la}^\flat &= \mathbf{fa} \times \frac{6}{5} = \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

La diferencia entre ellas se conoce como *diesis enarmónica* y se evalúa en

$$\frac{8/5}{25/16} = \frac{128}{125} \approx 1.024$$

que representa casi un cuarto de tono. Esta discrepancia hace imposible la enarmonía en instrumentos de afinación fija: un teclado afinado con un **sol**♯ no podría tocar una pieza que requiriera un **la**♭, obligando a elegir qué alteraciones se incluyen o a construir instrumentos con un número inviable de teclas por octava. Comparando las tablas 3.1 y 3.4 se pueden observar las diferencias de proporciones existentes entre los ciclos de quintas del sistema pitagórico y del de entonación justa.

Conclusión

La entonación justa logra una pureza acústica máxima a nivel local, fundamentada en proporciones enteras simples de la serie armónica. Sin embargo, esta perfección se obtiene a costa de una rigidez estructural global. Al estar ligada a una única tonalidad de referencia, cada modulación requiere un reajuste microtonal de todo el sistema. Esto la hacía viable para la monodia o la polifonía vocal renacentista, donde los intérpretes podían entonar de forma flexible, pero la volvía inviable para instrumentos de afinación fija (como los teclados) y para el desarrollo de la música tonal, cuyo principio fundamental es la modulación libre entre tonalidades y la equivalencia enarmónica de las notas.

Además, las limitaciones matemáticas inherentes —la *coma sintónica* y la *diesis enarmónica*— actuaron como catalizadores para el siguiente gran desarrollo en la historia de la afinación: los *temperamentos*. Estos sistemas buscarían distribuir el error de manera sistemática, “templando” la pureza de algunos intervalos para ganar la capacidad de modular libremente, allanando así el camino hacia el temperamento igual moderno.

3.3. Temperamentos mesotónicos

Las escalas construidas sobre relaciones de números enteros pequeños —ya sea la pureza melódica de las quintas pitagóricas o la pureza armónica de las terceras en la entonación justa— aseguran una consonancia máxima para el oído humano dentro de la tonalidad para la que fueron diseñadas. No obstante, esta perfección local tiene un costo global prohibitivo: al modular o transponer a otras tonalidades, las desviaciones acumuladas (como la *coma pitagórica* y *sintónica*) generan disonancias insalvables, como la archiconocida *quinta del lobo*.

Recordando la diferenciación entre instrumentos expuesta al inicio de este capítulo, esta limitación puede sortearse en instrumentos de entonación libre, como el violín, que ajustan infinitesimalmente cada intervalo. Sin embargo, representa una barrera infranqueable para los instrumentos de afinación fija como el piano. La creciente demanda de flexibilidad tonal durante el Renacimiento impulsó la búsqueda de un compromiso. La solución no fue buscar intervalos puros, sino *temperarlos*: alterar ligeramente su pureza acústica para distribuir los errores de manera sistemática y ganar así libertad musical. De entre estas soluciones de compromiso, los *temperamentos mesotónicos*, que se desarrollarán a lo largo de esta sección— se erigieron como los dominantes entre los siglos XVI y XVIII.

Templar es, por tanto, arreglar las consonancias en la escala, buscando un equilibrio entre ellas y haciendo practicables los distintos intervalos.

El objetivo principal de los temperamentos mesotónicos es resolver el problema de la coma sintónica para obtener terceras mayores puras. Para ello, se alteran sistemáticamente las quintas. Sin embargo, esta alteración tiene una consecuencia directa sobre la *coma pitagórica*: el círculo de 12 quintas en lugar de “casi” cerrarse se hace aún mayor y la fractura se vuelve más problemática, manifestándose en una quinta del lobo muy pronunciada. La forma en que los distintos temperamentos gestionan este doble desafío es lo que los define.

Como resultado de esta elección, de los temperamentos mesotónicos aplicados a instrumentos de teclado surgen *tonos iguales y semitonos desiguales*, mientras que del temperamento igual, aplicado de forma ideal a instrumentos con trastes, resultan *tonos y semitonos iguales*.

Sistema mesotónico

El sistema mesotónico (del inglés *meantone system*) surge como solución a las limitaciones prácticas de los sistemas de afinación precedentes. Mientras que en la entonación justa coexisten dos tonos diferentes (9:8 y 10:9) separados por la *coma sintónica* (81/80), el temperamento mesotónico busca unificar estos intervalos mediante el reparto sistemático de dicho error.

El principio fundamental consiste en distribuir la coma sintónica entre las cuatro quintas que componen una tercera mayor pitagórica. Partiendo del encadenamiento de cuatro quintas justas desde el **do**₄:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} \implies \mathbf{do}_4 \rightarrow \mathbf{sol}_4 \rightarrow \mathbf{re}_5 \rightarrow \mathbf{la}_5 \rightarrow \mathbf{mi}_6$$

y ajustando mediante dos octavas descendentes:

$$\frac{81}{16} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{81}{64} \implies \mathbf{mi}_4$$

se obtiene una razón que difiere de la tercera justa de la serie armónica (5:4) precisamente en la *coma sintónica*:

$$\frac{81/64}{5/4} = \frac{324}{320} = \frac{81}{80}$$

El temperamento mesotónico de 1/4 de coma resuelve esta discrepancia alterando cada una de las cuatro quintas. La *coma sintónica* (81/80) se reparte equitativamente, de modo que cada quinta se reduce en su raíz cuarta. Así, la quinta temperada (\mathcal{Q}_m) se define como:

$$\mathcal{Q}_m = \frac{3/2}{\sqrt[4]{81/80}} = \frac{3/2}{3/\sqrt[4]{80}} = \frac{1/2}{1/\sqrt[4]{16 \times 5}} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5}$$

$$\mathcal{Q}_m = \sqrt[4]{5}$$

De este modo, cuatro de estas quintas temperadas equivalen exactamente a una tercera mayor justa tras el ajuste de octavas:

$$(\mathcal{Q}_m)^4 = 5 \text{ (tercera mayor justa)}$$

Este principio garantiza terceras mayores armónicamente puras en toda la escala, resolviendo así la principal limitación del sistema pitagórico. No obstante, este avance conlleva un costo: el círculo de quintas no se cierra completamente, dando lugar a una *quinta del lobo* incluso más disonante que en los sistemas anteriores.

Construcción de la escala mesotónica

Como ya se ha hecho en secciones precedentes del presente capítulo, ahora se pretende construir la escala mesotónica *clásica*, también llamada *quarter-comma meantone scale*. Para hacerlo, se aplican sucesivas quintas temperadas, $(5^{1/4})$ y ajuste de octavas cuando sea necesario. Se genera la escala mayor de **do**₄:

$$\mathbf{do}_4 \equiv 1 : 1$$

$$\mathbf{sol}_4 \equiv 1 \times 5^{1/4} = 5^{1/4}$$

$$\mathbf{re}_5 \equiv 5^{1/4} \times 5^{1/4} = (5^{1/4})^2 = 5^{1/2} \implies \mathbf{re}_4 \equiv \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\mathbf{la}_4 \equiv \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt[4]{5} = \frac{\sqrt[4]{5^3}}{2}$$

$$\mathbf{mi}_5 \equiv \frac{5^{3/4}}{2} \times 5^{1/4} = \frac{5}{2} \implies \mathbf{mi}_4 \equiv \frac{5}{4}$$

$$\mathbf{si}_4 \equiv \frac{5}{4} \times 5^{1/4} = \frac{5^{5/4}}{4}$$

y una quinta descendente:

$$\mathbf{fa}_3 \equiv 1 \times \frac{1}{5^{1/4}} = \frac{1}{5^{1/4}} \implies \mathbf{fa}_4 \equiv \frac{2}{5^{1/4}}$$

Además, si se calculan los intervalos entre notas sucesivas, a partir de las proporciones de la tabla 3.4, como se hacía en el ejemplo 1.2.1, se obtiene uno de los resultados más interesantes del sistema mesotónico.

Razón (a_n/a_1)	1:1	$\sqrt{5}:2$	5:4	$2:5^{1/4}$	$5^{1/4}:1$	$5^{3/4}:2$	$5^{5/4}:4$	2:1
Nota	do	re	mi	fa	sol	la	si	do'

Tabla 3.4: Escala clásica mesotónica de **do**₄. Los intervalos sucesivos revelan una estructura regular de tonos iguales ($\sqrt{5}/2$) y semitonos iguales ($8/5^{5/4}$).

Esta regularidad produce una escala con una estructura consistente que sigue la secuencia

$$\{1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}\}$$

y donde 1 se refiere al tono de razón $\frac{\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1}{2}$ al semitono de razón $\frac{8}{5^{5/4}}$. En conclusión, en el temperamento mesotónico clásico los tonos y los semitonos diatónicos son únicos en el sentido en que no varían según las notas a las que separan.

Sin embargo, es crucial distinguir entre **semitonos diatónicos** y **cromáticos**. En el temperamento mesotónico los semitonos cromáticos son significativamente menores que los diatónicos.

$$\mathbf{sd} = \frac{\mathbf{fa}}{\mathbf{mi}} = \frac{2/5^{1/4}}{5/4} = \frac{8}{5^{5/4}}$$

$$\mathbf{sc} = \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{sd}} = \frac{\sqrt{5}/2}{8/5^{5/4}} = \frac{5^{7/4}}{16}$$

Esta diferencia hace que las notas enarmónicas (como **do**[♯] y **re**[♭]) no sean equivalentes, limitando nuevamente la modulación a tonalidades lejanas y explicando la razón de instrumentos con teclas divididas durante periodo barroco.

Espectro de Soluciones

En resumen, el sistema de 1/4 de coma, atribuido a Pietro Aron, es el más conocido por su pureza en las terceras mayores. Sin embargo, representa solo un punto en un espectro de posibles temperamentos mesotónicos, cada uno definido por la fracción de la *coma sintónica* que se utiliza para temperar las quintas. En términos generales se puede establecer la fórmula 3.1.

$$\mathcal{Q}_{m(\alpha)} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{80}{81} \right)^\alpha \quad (3.1)$$

Otros ejemplos de sistemas mesotónicos utilizados a lo largo del desarrollo musical durante el barroco son:

- $\alpha = 1/3$ (**Francisco Salinas**): En este sistema, cada quinta se reduce en 1/3 de la *coma sintónica*. El resultado es que las *terceras menores* son perfectamente puras (razón 6:5), a costa de unas terceras mayores ligeramente agudas. Sus quintas son menos chatas que en el sistema mesotónico clásico, lo que suaviza la quinta del lobo.
- $\alpha = 1/6$ (**Silbermann**): Este es un temperamento de compromiso. Al reducir cada quinta en solo 1/6 de coma, ni las terceras mayores ni las menores son puras, pero ambas están muy cerca de serlo. Las quintas son mucho más aceptables y la quinta del lobo es más tolerable. Este sistema se acerca a los *temperamentos buenos* (well-temperaments), que ya no buscan la pureza en un solo tipo de intervalo, sino la usabilidad de todas las tonalidades, aunque cada una con un “color” o carácter distinto.
- $\alpha = 2/7$ (**Zarlino**): Este sistema, de gran sofisticación teórica, atempera cada quinta en 2/7 de la *coma sintónica*. Su objetivo no es la pureza de un intervalo concreto, sino lograr una *simetría matemática*: el tono mesotónico resultante es exactamente la raíz cuadrada de la tercera mayor. Esta elegancia estructural se paga con quintas muy chatas y terceras mayores ligeramente estrechas, lo que le confiere una sonoridad suave y velada. Aunque no se popularizó en la práctica, es un testimonio de la búsqueda de un ideal matemático en la construcción de la escala. Además, en este sistema el semitono diatónico es algo mayor que el cromático, al contrario que en el sistema Pitagórico, lo que va en contra de la intuición musical.

La existencia de este conjunto de temperamentos demuestra que no había una única solución, sino una búsqueda constante del equilibrio entre la pureza armónica y la flexibilidad para la modulación, un problema que finalmente sería resuelto por los temperamentos posteriores.

3.4. Temperamentos irregulares

Hasta el momento se ha visto que las distintas afinaciones que se han sucedido a lo largo de la historia no son completas. Algo así como el “teorema de la manta corta” donde si te tapas los pies pasas frío en la cabeza, la afinación pitagórica favorece a la quinta y pierde calidad en las terceras, la mesotónica favorece a las terceras y al escuchar a las quintas te muerden como un lobo...

Para intentar solucionar este embrollo aparecieron los *temperamentos irregulares*. A diferencia de los sistemas anteriores, su naturaleza fue eminentemente práctica: surgieron de los talleres de organeros y los afinadores de clavicémbalos. En lugar de buscar la pureza matemática en un intervalo, su objetivo era pragmático: eliminar la *coma pitagórica* repartiéndola de manera desigual entre las quintas para forzar el cierre del círculo. La forma en que se hacía –cuántas quintas alteran y en qué cantidad– tiene una consecuencia directa en la calidad de las terceras, y ahí es donde entra en juego la *coma sintónica*, sacrificando la uniformidad a cambio de la flexibilidad tonal.

Históricamente, los temperamentos irregulares coexistieron con el temperamento mesotónico durante el siglo XVII, y estuvieron en uso durante al menos dos siglos antes de que se impusiera el temperamento igual.

Al tratarse de un método de prueba y error y los intervalos tener gran variabilidad, cada tonalidad adquiriría un “color” diferente. Por ese motivo, numerosos teóricos de la época publicaron estudios sobre los sentimientos que sugiere cada tonalidad.

A lo largo de la presente sección se explicarán algunos de los ejemplos más representativos de temperamentos irregulares que se han desarrollado en el tiempo.

Temperamento de Werckmeister III

Andreas Werckmeister (1645-1706), organista y teórico alemán, propuso en su tratado *Musicalische Temperatur* (1691) varios esquemas de temperamento. El más influyente, conocido como Werckmeister III, representa el paradigma de temperamento irregular bien temperado.

Para construir la escala en este temperamento se lleva a cabo una distribución de la *coma pitagórica* de forma desigual entre cuatro quintas específicas —**do-sol**, **sol-re**, **re-la** y **si-fa**— haciendo que el círculo de quintas se cierre completamente y dejando al resto en formato puro. La quinta temperada para estas cuatro quintas toma el valor:

$$Q_{W3} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3^{12}}{2^{19}} \right)^{-1/4}$$

Este reparto produce una jerarquía tonal muy característica, donde tonalidades cercanas —con pocas alteraciones como **do**, **sol**, **re**— presentan una sonoridad brillante y unas terceras de muy buena calidad, mientras que tonalidades lejanas —como **fa**♯, **do**♯— suenan más tensas. A pesar de estas diferencias, la *quinta del lobo* es inexistente, permitiendo el uso de todas las tonalidades. Werckmeister justificaba este sistema argumentando que «*todas las tonalidades pueden ser usadas, cada una con su propio carácter*».

Temperamento de Vallotti-Tartini

Desarrollado independientemente por Francesco Antonio Vallotti (1697-1780) y Giuseppe Tartini (1692-1770), este temperamento representa una solución más moderada y ampliamente adoptada en el siglo XVIII. Su método consiste en repartir la *coma pitagórica* en seis partes iguales, distribuyéndola sobre las seis quintas consecutivas del círculo que corresponden a las notas naturales (de **fa** a **si**). El resto de quintas se mantienen puras. Las quintas modificadas se computan como:

$$Q_{VT} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3^{12}}{2^{19}} \right)^{-1/6}$$

Vallotti-Tartini produce un gradiente tonal muy suave. Las tonalidades con bemoles adquieren un carácter consonante y agradable y sus terceras son casi puras, mientras que las tonalidades con sostenidos se vuelven progresivamente más brillantes y tensas, pero ninguna llega a ser verdaderamente disonante. Esto explica por qué compositores italianos como Vivaldi (contemporáneo de Vallotti) preferían tonalidades con bemoles para pasajes líricos y melodiosos, mientras reservaban los sostenidos para momentos de mayor dramatismo y tensión. En consecuencia a lo visto anteriormente, el temperamento de Vallotti-Tartini fue particularmente apreciado y usado extensivamente en la práctica musical italiana del siglo XVIII.

Temperamento de Kirnberger III

Johann Philipp Kirnberger (1721-1783), alumno de J.S. Bach, propuso un sistema híbrido que combina la pureza de la entonación justa con la necesidad de cerrar el círculo de quintas.

El principio de Kirnberger III es mantener el máximo número de quintas puras. Para conseguirlo se afina la tercera **do-mi** como una tercera perfectamente justa según la serie armónica (razón 5:4). Esto implica que la cadena de cuatro quintas **do-sol-re-la-mi** acumula la *coma sintónica* (81/80). En lugar de repartirla, Kirnberger la concentra entera en una sola quinta, típicamente **re-la**, que queda muy reducida.

El resultado es un sistema con diez quintas puras, una tercera pura (**do-mi**), una quinta muy chata (**re-la**) y una última quinta (**la-mi**) ligeramente ancha para cerrar el círculo. Este temperamento tiene un carácter muy fuerte y desigual, con tonalidades muy puras junto a otras de gran tensión, reflejando quizás una práctica musical donde el “color” de las tonalidades era un recurso expresivo fundamental.

Sistema	Quinta Temperada (Q)	Afectación	3ª Mayor (do-mi)
Werckmeister III	$\frac{3}{2} \left(\frac{3^{12}}{2^{19}} \right)^{-1/4}$	4 quintas batientes (do-sol, sol-re, re-la y si-fa \sharp)	Intermedia
Vallotti-Tartini	$\frac{3}{2} \left(\frac{3^{12}}{2^{19}} \right)^{-1/6}$	6 quintas batientes (fa-si)	Buena (suave)
Kirnberger III	$\frac{3}{2} \left(\frac{81}{80} \right)^{-1}$	1 quinta muy estrecha (re-la)	Pura (Justa)

Tabla 3.5: Comparativa de parámetros constructivos de los temperamentos irregulares.

Observación 3.4.1. Los afinadores antiguos no usaban calculadoras ni logaritmos. Afinaban “de oído”, contando batidos. El concepto de batido/batimiento hace referencia a la percepción auditiva de la interferencia entre dos ondas sonoras cercanas en frecuencia y oscilaciones de la intensidad. (Se explica en profundidad en 8.1.2.) Por ejemplo: “Para que la quinta esté bien temperada, según Vallotti, debe batir (hacer uah-uah) aproximadamente una vez por segundo”. Si batía muy rápido, se habían pasado; si no batía, era pura.

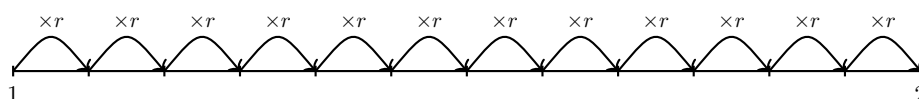
3.5. El temperamento igual

El sistema de afinación igualmente temperado se impuso definitivamente a partir del siglo XIX. Las bases teóricas de este temperamento fueron planteadas por numerosos teóricos. Ya en el siglo XVI el teólogo español Francisco Salinas, [14], describió la división de la octava en doce partes iguales. Asimismo, J.S. Bach, en su obra “*Clave Bien Temperado*” demuestra la idoneidad para todas las tonalidades de este sistema. Sin embargo, durante siglos, multitud de músicos y corrientes compositivas mostraron una considerable reticencia hacia su adopción. Esta oposición se fundamentaba en el sacrificio acústico que implicaba: el temperamento igual no posee ningún intervalo puro, lo que se consideraba una traición a los principios naturales de la armonía. Compositores de la talla de Camille Saint-Saëns lo consideraban, incluso a principios del siglo XX, un temperamento «tirano, devastador y una herejía», ya que homogeniza el carácter único de cada tonalidad, eliminando la paleta expresiva de “colores” tonales que caracterizaba a los temperamentos irregulares y que los compositores explotaban de forma consciente.

No obstante, su capacidad para distribuir los errores de afinación de manera uniforme entre los doce sonidos de la escala cromática, junto con la libertad de modulación absoluta que ofrece en instrumentos de afinación fija, fueron las razones decisivas para que se convirtiera en el sistema de afinación por antonomasia. El temperamento igual logra, por fin, cerrar la espiral de quintas y convertirla en un círculo perfecto. Este logro, sin embargo, tiene un precio: la pérdida simultánea de todas las consonancias justas. Cada quinta se encuentra ligeramente temperada —más estrecha que la quinta pura— y cada tercera mayor es notablemente más aguda que su equivalente en la serie armónica, lo que significa que, en cierto modo, todas las notas de la escala están ligeramente desafinadas desde una perspectiva acústica pura.

Construcción

El principio matemático del temperamento igual es una evolución de temperamentos anteriores. Para forzar el cierre del círculo de quintas, se toma la *coma pitagórica* ($3^{12}/2^{19}$) y se reparte equitativamente entre las doce quintas del círculo. Cada quinta se reduce, por tanto, en $1/12$ de *coma pitagórica*. Esta operación produce un resultado matemáticamente perfecto: la octava (razón 2:1) queda dividida en 12 semitonos idénticos, donde la razón de cada semitono es exactamente la raíz doceava de 2.



$$r \times r \times r \times \cdots \times r = r^{12} = 2 \implies r = \sqrt[12]{2}$$

Esta uniformidad tiene una consecuencia fundamental: la distinción entre semitonos diatónicos y cromáticos desaparece en cuanto a su tamaño. Ambos intervalos tienen exactamente la misma razón r . Por ejemplo, el semitono diatónico **mi-fa** y el semitono cromático **do-do[♯]** son idénticos:

$$\frac{\mathbf{fa}}{\mathbf{mi}} = \frac{2^{5/12}}{2^{4/12}} = 2^{1/12} \quad \text{y} \quad \frac{\mathbf{do}^\sharp}{\mathbf{do}} = \frac{2^{1/12}}{2^{0/12}} = 2^{1/12}$$

Esto garantiza la equivalencia enarmónica (**do[♯]** \equiv **re^b**), piedra angular de la música tonal moderna.

Para construir la escala como se ha hecho en otros temperamentos anteriores, se puede razonar que, dado que la escala es igualmente temperada, entonces la suma de dos semitonos sí se corresponderá con un tono completo. Por tanto, si un semitono presenta un radio de $\sqrt[12]{2}$, entonces un tono se corresponderá con $(\sqrt[12]{2})^2 = \sqrt[6]{2}$. Ahora, iterando esta relación a partir del **do₄** por intervalos de 2ª:

$$\begin{aligned} \mathbf{do}_4 &\equiv 1 : 1 \\ \mathbf{re}_4 &\equiv 1 \times \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2} \\ \mathbf{mi}_4 &\equiv \sqrt[6]{2} \times \sqrt[6]{2} = \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Como entre **mi-fa** hay un semitono, la razón a utilizar es $2^{1/12}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{fa}_4 &\equiv \sqrt[3]{2} \times \sqrt[12]{2} = 2^{5/12} \\ \mathbf{sol}_4 &\equiv 2^{5/12} \times 2^{1/6} = 2^{7/12} \\ \mathbf{la}_4 &\equiv 2^{7/12} \times 2^{1/6} = 2^{9/12} \\ \mathbf{si}_4 &\equiv 2^{9/12} \times 2^{1/6} = 2^{11/12} \end{aligned}$$

Nuevamente, se aplica la razón de un único semitono:

$$\mathbf{do}_5 \equiv 2^{11/12} \times 2^{1/12} = 2$$

En la tabla 3.6 se pueden observar las relaciones de la escala de Do Mayor temperada.

Razón (a_n/a_1)	1:1	$\sqrt[6]{2}$:1	$\sqrt[3]{2}$:1	$2^{\frac{5}{12}}$:1	$2^{\frac{7}{12}}$:1	$2^{\frac{9}{12}}$:1	$2^{\frac{11}{12}}$:1	2:1
Nota	do	re	mi	fa	sol	la	si	do'

Tabla 3.6: Escala temperada de **do₄**. Los intervalos sucesivos muestran una estructura regular donde todos los semitonos miden igual.

En el sistema igualmente temperado, como ya se ha señalado, la uniformidad se logra a costa de la pérdida de pureza de los intervalos consonantes. Este hecho se puede comprobar cuantificando la diferencia entre los intervalos temperados y sus contrapartidas puras.

La quinta temperada ($2^{7/12} \approx 1.4983$) es ligeramente más estrecha que la quinta pura ($3/2 = 1.5$). La diferencia es una desviación apenas perceptible para la mayoría de los oídos. Igualmente en las terceras: la tercera mayor temperada ($2^{4/12} = 2^{1/3} \approx 1.2599$) es notablemente más ancha que la tercera mayor pura de la serie armónica ($5/4 = 1.25$). Estas son algunas de las concesiones que se hacen al adaptar este sistema: se acepta una sonoridad ligeramente más “brillante” y tensa en todos los acordes a cambio de la libertad total.

Hasta este punto, la justificación del uso del 12 se ha basado en argumentos aritméticos clásicos (el cierre del círculo de quintas) y en la tradición histórica. Sin embargo, investigaciones recientes, como el trabajo de Bras-Amorós [5], aportan una perspectiva novedosa que trasciende la acústica clásica: la división en 12 partes es la solución óptima a un problema algebraico de aproximación. Se verá con detenimiento en el capítulo 7.

En definitiva, como se ha venido comentando a lo largo del capítulo, la imposición del temperamento igual representa el triunfo del pragmatismo sobre la pureza acústica. Sus numerosas ventajas prácticas —la estandarización de la escritura musical, la libre modulación a cualquier tonalidad y

la simplificación en la producción de instrumentos de afinación fija como el piano— constituyeron los pilares de su adopción generalizada.

Sin embargo, las reticencias históricas que enfrentó por parte de numerosos compositores no fueron infundadas. Sus opositores defendían, con sólidos argumentos acústicos, que no se podía renunciar a la consonancia perfecta ni al carácter único de cada tonalidad. El temperamento igual, al homogeneizar todos los intervalos, sacrificaba la riqueza expresiva de los “colores” tonales que definían la estética barroca y clásica, donde la elección entre **Do** mayor o **Fa \sharp** mayor conllevaba implicaciones emocionales profundas.

En definitiva, el temperamento igual no es un sistema “mejor” o “peor” en términos absolutos, sino una solución de compromiso necesaria. Su adopción masiva fue la respuesta a la evolución de la música occidental hacia un lenguaje armónico más flexible. Cierra una búsqueda de dominio de las imperfecciones de la naturaleza acústica pero, al hacerlo, sacrifica una dimensión de expresión musical que los temperamentos anteriores cultivaban con esmero. Su hegemonía es la prueba definitiva de que en la historia de la afinación la solución perfecta no existe: solo existen los equilibrios entre ideales en conflicto.

3.6. Microtonalismo

Para concluir el capítulo referente a los sistemas temperados se introduce el concepto de microtonalismo. El temperamento igual, al dividir la octava en 12 partes iguales, ha sido el estándar predominante en la música occidental durante los últimos siglos. Sin embargo, esta división no es la única posible ni la más adecuada para todas las culturas musicales.

El microtonalismo resulta de explorar divisiones más finas del espectro sonoro, utilizando intervalos más pequeños que el semitono estándar. Según Charles Ives, [25], el microtonalismo es la música que «surge de las notas que hay entre las teclas del piano». Esta concepción resalta la idea de que existen sonidos intermedios entre las notas convencionales, que pueden ser explotados para crear nuevas texturas y expresiones musicales.

Cuartos de tono, los 24-TET

La extensión más inmediata y lógica del sistema estándar es el sistema de cuartos de tono, conocido técnicamente como 24-TET (*24-Tone Equal Temperament*). Este sistema divide la octava en 24 partes exactamente iguales.

Desde el punto de vista matemático, la relación de frecuencia entre notas adyacentes viene dada por el factor $\sqrt[24]{2} \approx 1.029$. Esto implica que cada semitono del sistema tradicional se divide en dos partes idénticas, permitiendo el acceso a intervalos “neutrales” (a medio camino entre mayores y menores) que son característicos de ciertas tradiciones musicales no occidentales y de la música contemporánea de vanguardia. En este sistema, la enarmonía se mantiene igual que en el de 12 notas, pero la resolución melódica se duplica.

La división en 53-TET y el sistema de Hölder

Una alternativa de gran interés teórico es la división de la octava en 53 partes iguales (53-TET), sistema defendido históricamente por teóricos como Nicolaus Mercator y William Hölder en el siglo XVII. La importancia de este sistema radica en su capacidad para aproximar con enorme precisión los intervalos de la afinación justa (quintas y terceras puras) que el sistema de 12 notas deforma ligeramente.

En este contexto, la unidad mínima (1/53 de octava) recibe el nombre de *coma de Hölder*. Este sistema recupera la distinción entre intervalos que el temperamento igual de 12 notas había unificado:

- **El Tono:** Se compone de 9 comas.
- **El Semitono Cromático:** Se define como la distancia entre una nota y su alteración (ej. **do** - **do \sharp**), y equivale a 5 comas.
- **El Semitono Diatónico:** Se define como la distancia entre una nota alterada y la siguiente nota natural (ej. **do \sharp** - **re**), y equivale a 4 comas.

De esta manera, se cumple matemáticamente que la suma de un semitono cromático (5 comas) y uno diatónico (4 comas) resulta en un tono completo (9 comas). A diferencia del piano moderno, donde **do \sharp** y **re \flat** son la misma tecla, en el sistema de 53-TET estas notas son sonidos distintos separados por una coma (la diferencia entre el semitono cromático y el diatónico), resolviendo así ambigüedades acústicas históricas.

Como conclusión a este capítulo, cabe destacar que, independientemente de si la octava se divide en 12, 24 o 53 partes, el principio matemático subyacente permanece inalterable: se trata de una progresión geométrica basada en $\sqrt[n]{2}$. La elección de n determina simplemente la “resolución” de la escala y las propiedades de consonancia de los intervalos resultantes.

Capítulo 4

Escalas bien formadas

Durante el capítulo anterior se ha recorrido la historia de la afinación como una serie de soluciones ingeniosas a problemas prácticos. Desde la pureza melódica de las quintas pitagóricas hasta el compromiso funcional del temperamento igual, cada sistema buscaba optimizar la consonancia y la flexibilidad dentro de las limitaciones de su época. Sin embargo, este recorrido histórico deja una pregunta más profunda y fundamental: más allá de las soluciones específicas, ¿existen propiedades matemáticas subyacentes que hagan que ciertas estructuras de escalas, como la diatónica, sean musicalmente satisfactorias y persistentes a lo largo de la historia?

Para dar respuesta a esta pregunta, se debe dar un paso atrás y pasar de la aritmética de los intervalos a la geometría de las estructuras. El presente capítulo se adentra en la teoría de las escalas musicales, un campo donde la teoría de números, los sistemas dinámicos y la geometría convergen para desvelar los principios que gobiernan la construcción de escalas coherentes. Se deja de preguntar “cómo se afina” una escala para preguntar “qué es” desde un punto de vista abstracto y general. El primer paso será modelizar cualquier escala musical, reescribiendo la caracterización del apartado 1.3. Al considerar la octava como la unidad fundamental que se repite, se normalizará el espacio de frecuencias y se representará geométricamente como un círculo. En este modelo, las notas de una escala se convierten en un conjunto de puntos distribuidos sobre la circunferencia.

El desarrollo principal se centrará en un tipo de escala de particular importancia: las escalas generadas, aquellas que se construyen a partir de la repetición de un único intervalo. Igualmente, se explorarán sus propiedades a través del *Teorema de los Tres Pasos*, que demuestra que cualquier escala generada de esta manera tendrá, como máximo, tres tamaños de intervalos diferentes entre sus notas consecutivas.

Finalmente, se focaliza en el caso más relevante para la música occidental: las escalas que poseen solo dos tamaños de intervalo. Estas estructuras se definen como *escalas bien formadas* y ahondaremos en las caracterizaciones de este tipo de escalas que conectan con nociones matemáticas tales como desarrollos en fracción continua, líneas poligonales estrelladas regulares inscritas en circunferencias...

4.1. Modelización de una escala

En el apartado 1.3, dedicado a las escalas del primer capítulo de este trabajo, se ha introducido una noción de escala que sirve como complemento a las ideas que se exponen a continuación.

De entre toda posible gama continua de frecuencias, normalmente nos limitamos a un conjunto discreto dentro de cada tesitura –rango de alturas propio de cada voz o instrumento–. Por tanto, cuando se acota el área de trabajo se está determinando una escala.

Como ya se explicó, una nota de frecuencia f tiene por octava superior una de frecuencia $2f$ y en términos musicales, cuando ambas notas suenan simultáneamente, es difícil diferenciarlas. Esto se expresa diciendo que el intervalo $2 \in \mathbb{R}^+$ es el altamente *consonante* y se puede modelizar como el subgrupo $\langle 2 \rangle \subset \mathbb{R}^+$ de las octavas,

$$\langle 2 \rangle = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

Este subgrupo establece una relación de equivalencia sobre el conjunto de frecuencias $\mathcal{F} : f \sim f' \iff f = 2^n f'$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ y donde f y f' determinan la misma nota en distintas octavas.

Definición 4.1.1. Se denomina *octava* \mathcal{O} al conjunto cociente $\mathcal{F}/\langle 2 \rangle$. Los elementos de \mathcal{O} se corresponden con las *notas musicales* (o *clases de altura*).

Fijando una frecuencia $f_0 \in \mathcal{F}$, el conjunto de frecuencias \mathcal{F} se puede identificar con el conjunto de intervalos \mathbb{R}^+ mediante el morfismo de grupos siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^+ \\ f &\mapsto f/f_0 \end{aligned}$$

A través de este morfismo se asigna a cada frecuencia $f \in \mathcal{F}$ la distancia en forma de *intervalo* que lo separa de f_0 .

El siguiente y último paso para perfeccionar el modelo es cambiar la operación matemática para que sea más intuitiva. Musicalmente, “encadenar” intervalos corresponde a una multiplicación de sus razones. Para simplificar el análisis, se transforma esta operación multiplicativa en una aditiva. Por ello, se emplea el morfismo de grupos \log_2 entre el grupo multiplicativo de los intervalos, (\mathbb{R}^+, \cdot) , en el grupo aditivo de los números reales $(\mathbb{R}, +)$.

$$\log_2 : (\mathbb{R}^+, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$$

En este nuevo codominio el intervalo de octava se convierte en la unidad, $\log_2(2) = 1$, y la equivalencia de octavas se traduce en una equivalencia bajo la suma de enteros.

$$\log_2(f) \sim \log_2(2f) = \log_2(2) + \log_2(f) = 1 + \log_2(f)$$

Esto significa que el espacio de todas las notas es isomorfo al grupo cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} , que se puede representar geoméricamente como un círculo de circunferencia 1. En este modelo final, cada nota corresponde a un punto en el círculo, y la distancia angular entre dos puntos representa el tamaño del intervalo entre ellos.

Todos los cálculos entre morfismos de grupos se resumen en el diagrama conmutativo 4.1.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{\log_2} & \mathbb{R} \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi \\ \mathcal{F}/\langle 2 \rangle & \longrightarrow & \mathbb{R}^+/\langle 2 \rangle & \xrightarrow{\log_2} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{array}$$

Figura 4.1: Diagrama conmutativo que ilustra la construcción del espacio de notas como un círculo. Las flechas verticales representan las proyecciones al cociente, y las horizontales, las transformaciones entre los distintos modelos.

Ejemplo 4.1.1. Se establece como frecuencia fundamental $f_0 = 440$ Hz (correspondiente a $\mathbf{1a}_4$). Se pretende encontrar la posición angular en el círculo para la nota \mathbf{mi} en la escala pitagórica.

En la escala pitagórica, el intervalo de quinta justa tiene una razón de frecuencias de $\frac{3}{2}$. Partiendo de $\mathbf{1a}_4$, la quinta justa superior es \mathbf{mi}_5 . Sin embargo, en el modelo del círculo \mathbb{R}/\mathbb{Z} , todas las octavas se identifican, por lo que la clase de altura de \mathbf{mi}_5 coincide con la de \mathbf{mi}_4 .

Aplicando la cadena de morfismos:

$$(\pi \circ \log_2 \circ \phi)(f_{\mathbf{mi}}) = \pi \left(\log_2 \left(\frac{3}{2} \right) \right) = \pi(\log_2(3) - 1) \approx \pi(1.58496) = 0.58496$$

Por tanto, partiendo de la tónica en la posición 0 del círculo, la quinta justa se sitúa a una distancia angular de aproximadamente 0.585, es decir, un poco más de la mitad del recorrido de la circunferencia.

Observación 4.1.1. El grupo \mathbb{R}/\mathbb{Z} es el grupo cociente de los números reales $(\mathbb{R}, +)$ por el subgrupo de los enteros $(\mathbb{Z}, +)$. Esto significa que dos números reales $x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$. La clase de equivalencia de x se denota por $[x] = x + \mathbb{Z}$.

La proyección canónica π es la aplicación que asigna a cada $x \in \mathbb{R}$ su clase de equivalencia $[x]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\xrightarrow{\pi} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ x &\longmapsto [x] = \{y \in \mathbb{R} : x \sim y\}\end{aligned}$$

Geométricamente, esta proyección “enrolla” la recta real en un círculo de $r = 1$, donde cada punto del círculo representa una clase de equivalencia. Se tiene, en notación topológica, que \mathbb{S}^1 y \mathbb{R}/\mathbb{Z} son espacios homeomorfos, a través del homeomorfismo

$$h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{S}^1, [x] \longmapsto h([x]) = e^{2\pi i x}$$

Tras introducir esos conceptos, se procede a dar una caracterización formal del concepto de escala.

Definición 4.1.2 (Escala). Se denomina **escala de N notas** a todo subconjunto ordenado Σ de N elementos de la circunferencia \mathbb{R}/\mathbb{Z} :

$$\Sigma = \{0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < 1\} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

La distancia entre dos notas sucesivas, $x_{i+1} - x_i$ es lo que se conoce como *paso*.

Observación 4.1.2. De ahora en adelante se establece que la primera nota de cada escala se situa en el cero ($x_0 = 0$), que por comodidad se establece en el norte absoluto del círculo. Esto es posible es un espacio homogéneo, lo que significa que cualquier punto puede ser considerado como el origen sin perder generalidad. En términos musicales, esto equivale a decir que la tónica de una escala puede ser cualquier nota, y las relaciones entre las notas se mantienen invariantes bajo traslaciones circulares.

Ejemplo 4.1.2 (Escala de igual temperamento). Una **escala de igual temperamento de N notas** se corresponde con la escala

$$\Sigma = \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\}.$$

Las escalas temperadas se representan geométricamente mediante vértices de polígonos regulares inscritos en \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Como ya se ha mencionado, la *octava*, que es el intervalo más consonante, permite pasar al grupo cociente e identificar sonidos *módulo octavas*. Siguiendo esta idea, la *quinta justa pura* se corresponde con el segundo intervalo más consonante y a través de su razón de frecuencias $\frac{3}{2}$ podemos construir una escala de múltiplos enteros de $\log_2 \frac{3}{2} = \{\log_2 3\}$.

Ejemplo 4.1.3 (Escala musical pitagórica). Se define la escala musical pitagórica de q notas, con $q \in \mathbb{N}$ y $q \geq 2$ como el conjunto

$$\text{EMP}(q) = \{0, \{\log_2 3\}, \{2\log_2 3\}, \dots, \{(q-1)\log_2 3\}\}$$

Además, por el teorema 3.1.1, ninguna escala generada por *quintas* coincide con la escala de igual temperamento.

Para más información respecto a la modelización matemática de escalas musicales, [26].

4.2. Escalas generadas. Teorema de los 3 pasos

En la sección previa se han introducido algunos ejemplos de escalas que se generan mediante la repetición de un único intervalo. Retomando y generalizando la noción de *escala pitagórica*, se presenta el siguiente concepto de escala generada, que se construye a partir de un generador θ y un número de notas N .

Definición 4.2.1 (Escala generada). Se denomina *escala generada de N notas y generador θ* al conjunto

$$\Gamma(\theta, N) = \{\{k\theta\} : k = 0, 1, \dots, N-1\},$$

donde $\{x\}$ denota la parte fraccionaria de x . Geométricamente, los puntos de $\Gamma(\theta, N)$ se sitúan en la circunferencia unidad (identificada con \mathbb{R}/\mathbb{Z}), y el proceso de generación equivale a rotar sucesivamente un ángulo de $2\pi\theta$ radianes como se observa en la figura 4.2.

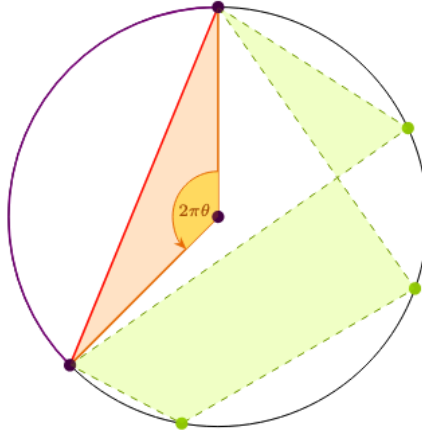


Figura 4.2: El proceso de generación de una escala mediante rotaciones sucesivas de un ángulo $2\pi\theta$ puede visualizarse como el trazado de un polígono, que puede ser simple o estrellado.

Cuando se representa una escala generada en el círculo, los arcos entre notas consecutivas (los *pasos*) toman como máximo tres longitudes distintas. Este resultado, conocido como la *Conjetura de Steinhaus*, se formula matemáticamente en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1 (de los tres pasos). *Toda escala generada $\Gamma(\theta, N)$ tiene a lo sumo tres tamaños distintos de pasos.*

Demostración. He tratado de hacer una readaptación de las demostraciones dadas en [23] y [7]. La prueba se basa en estudiar los vecinos más cercanos al origen (el punto 0). Se considera el conjunto de puntos $\{x_k\} = \{\{k\theta\} : k = 0, \dots, N-1\}$.

Sean a y b los índices de los puntos más cercanos al origen por la derecha y por la izquierda, respectivamente:

- x_a es el punto con el menor valor positivo (vecino derecho del 0). Se define la longitud $\alpha = x_a$.
- x_b es el punto con el mayor valor (vecino izquierdo del 0). Se define la longitud $\beta = 1 - x_b$.

Dado que la escala se genera mediante rotaciones uniformes, la estructura local alrededor del 0 se traslada al resto de puntos. Para cualquier punto x_k , su vecino derecho en el círculo debería ser, teóricamente, el punto x_{k+a} (situado a distancia α). Sin embargo, esto solo es posible si el índice $k+a$ existe en nuestra escala (es decir, si $k+a < N$).

Esto nos permite dividir los N intervalos de la escala en tres categorías:

1. *Pasos de longitud α* : Para todo k tal que $0 \leq k < N-a$, el punto x_{k+a} existe. Por la propiedad de traslación, la distancia entre x_k y su sucesor es exactamente la misma que entre 0 y x_a .

Hay $(N-a)$ pasos de longitud α .

2. *Pasos de longitud β* : Análogamente, mirando hacia la izquierda, para los puntos que admiten a x_{k+b} como vecino, la distancia se conserva. Esto equivale a decir que hay puntos cuyo vecino derecho está a distancia β (que corresponde a restar b en los índices).

Hay $(N-b)$ pasos de longitud β .

3. *El tercer paso (La excepción)*: Se ha clasificado $(N - a)$ pasos de un tipo y $(N - b)$ del otro. La cantidad de pasos restantes es:

$$N - (N - a) - (N - b) = a + b - N$$

Estos pasos corresponden a los índices k que son demasiado grandes para tener al vecino a (se pasan de N) y demasiado pequeños en el ciclo inverso para tener al vecino b .

Para estos puntos límite, el vecino más cercano no es ni a ni b . Geométricamente, el arco resultante es la unión del arco derecho y el izquierdo que no se pudieron formar.

La longitud de estos pasos es $\gamma = \alpha + \beta$.

Por tanto, las únicas longitudes posibles son α , β y $\alpha + \beta$. Si $a + b = N$, el tercer tipo no existe y se tiene una escala de solo dos pasos (como la escala pentatónica (1.3.4) o diatónica ideal). Si $a + b > N$, aparecen los tres pasos. \square

Observación 4.2.1. Particularmente, si $\theta = p/q \in \mathbb{Q}$, $\text{mcd}(p, q) = 1$ y $N \geq q$, se tiene exactamente un polígono regular, *ergo* un único paso. Si $N < q$, se tiene un polígono regular con N lados, y por tanto N pasos. Si $\theta \in \mathbb{I}$, la escala siempre tendrá dos o más pasos. Para distinguir el número de pasos de una escala se recurre a teoría de números por medio de las *fracciones continuas*. Se verá a continuación.

Teorema 4.2.2. Dado $\theta \in (0, 1)$ un número irracional, la sucesión de puntos de la circunferencia $e^{2\pi i \theta k}$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$, la divide en arcos de exactamente dos longitudes distintas si y sólo si N es el denominador de un convergente o de un semiconvergente de θ .

Idea de la demostración. Este resultado es un refinamiento del *Teorema de las Tres Distancias* (conjetura de Steinhaus). La demostración formal completa se puede encontrar en el trabajo de Van Ravenstein [30], pero la intuición geométrica es la siguiente:

ConsidereSe consideraremos el proceso dinámico de añadir puntos $x_k = \{k\theta\}$ en el círculo unitario \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

- i) *División de intervalos*: Al añadir un nuevo punto x_N al conjunto de puntos de la circunferencia $\{x_0, \dots, x_{N-1}\}$, este punto cae necesariamente dentro del intervalo más largo existente (propiedad de división del intervalo máximo). Al dividir este intervalo largo, se generan dos nuevos sub-intervalos.
- ii) *Aparición de la tercera distancia*: En el caso general, al dividir el intervalo mayor, las longitudes resultantes no coinciden con la longitud del intervalo menor que ya existía. Esto da lugar a tres longitudes de arco activas simultáneamente: la longitud grande (aún no cortada), la longitud pequeña (preexistente) y la nueva longitud generada por el corte.
- iii) *Condición de reducción a dos distancias*: Para que haya solo dos longitudes, el “corte” debe ser tal que una de las nuevas longitudes generadas sea idéntica a la longitud pequeña ya existente. Esto ocurre cuando el proceso de llenado se sincroniza perfectamente con la estructura de la fracción continua de θ .
- iv) *Relación con convergentes y semiconvergentes*: Sea $\theta = [0; a_1, a_2, \dots]$ la expansión en fracción continua. Los momentos en los que el conjunto de longitudes se reduce a dos coinciden con los denominadores de los convergentes (q_n) y los semiconvergentes definidos anteriormente como:

$$q_{n,k} = kq_n + q_{n-1}, \quad \text{con } 1 \leq k < a_{n+1}.$$

Geométricamente, cuando $N = q_{n,k}$, significa que se ha añadido k veces la distancia asociada al convergente c_n dentro del hueco dejado por el convergente anterior c_{n-1} . Al completar el paso k -ésimo (pero antes de llegar al nuevo convergente completo q_{n+1}), el espacio restante coincide exactamente con una de las distancias previas, evitando así la creación de una tercera medida distinta.

Por consiguiente, la propiedad de tener exactamente dos longitudes de arco es exclusiva de los valores N tales que $N = q_n$ o $N = q_{n,k}$. \square

Ejemplo 4.2.1 (La escala cromática, **1 paso**). Si se toma como generador $\theta = \frac{1}{12}$ y $N = 12$, se obtiene la escala cromática temperada de 12 notas:

$$\Gamma\left(\frac{1}{12}, 12\right) = \left\{0, \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \dots, \frac{11}{12}\right\}$$

En este caso, todos los pasos son iguales a $\frac{1}{12}$. Esto es consistente con el Teorema 4.2.2, ya que θ es racional y N es múltiplo del denominador.

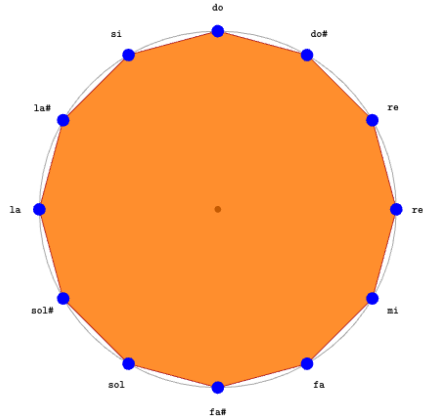


Figura 4.3: Representación dual de la escala cromática temperada de 12 notas.

Ejemplo 4.2.2 (La escala diatónica como caso particular). El generador de la escala pitagórica es $\theta = \{\log_2 3\}$. La teoría de fracciones continuas establece que los denominadores de los convergentes de θ son $1, 2, 5, 7, 12, \dots$. Como $N = 7$ es uno de estos denominadores, el Teorema 4.2.2 predice que la escala $\Gamma(\{\log_2 3\}, 7)$ tendrá exactamente dos tamaños de paso. Estos corresponden al tono y al semitono diatónico pitagórico, confirmando que la escala diatónica es un caso notable de este fenómeno.

Ejemplo 4.2.3 (Escala de 5 tonos generada por $\theta = e$, **3 pasos**).

$$\Gamma(e, 5) = \{\{ke\} : k \in \{0, \dots, 4\}\} = \{0, \{e\}, \{2e\}, \{3e\}, \{4e\}\}$$

Dado que se trabaja en el círculo \mathbb{R}/\mathbb{Z} , al tomar, como se decía, la parte fraccionaria se está realizando la operación módulo 1. Así, para cada k , la nota es $\{ke\} = ke \pmod{1} = ke - \lfloor ke \rfloor$. La escala por orden de generación es:

$$\begin{aligned} \Gamma(e, 5) &= \{ke - \lfloor ke \rfloor : k \in \{0, \dots, 4\}\} = \\ &= \{0, 0.7182818, 0.4365636, 0.1548454, 0.8731272\} \end{aligned}$$

En la tabla 4.4 se observan la ubicación de las notas en orden y las longitudes de paso. Se obtienen únicamente **3 pasos** diferentes, corroborando el teorema 4.2.1.

Igualmente, la figura 4.5 representa el polígono asociado a la escala $\Gamma(e, 5)$.

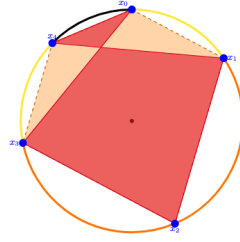
Ejemplo 4.2.4 (Escala de 6 notas generada por π , **2 pasos**).

$$\Gamma(\pi, 6) = \{\{k\pi\}, k \in \{0, \dots, 5\}\} = \{0, \{\pi\}, \{2\pi\}, \dots, \{5\pi\}\}$$

Para calcular los pasos, al encontrarnos en el círculo \mathbb{R}/\mathbb{Z} se debe aplicar la operación módulo 1 (tomar la parte fraccionaria.) Entonces $\{k\pi\} = k\pi \pmod{1} = k\pi - \lfloor k\pi \rfloor$ y la escala es

$$\Gamma(\pi, 6) = \{k\pi - \lfloor k\pi \rfloor, k \in \{0, \dots, 5\}\}$$

Notas (x_i)	Pasos ($x_{i+1} - x_i$)
$x_0 = 0$	$x_1 - x_0 = 0.1548454$
$x_1 = 0.1548454$	$x_2 - x_1 = 0.28172$
$x_2 = 0.4365636$	$x_3 - x_2 = 0.28172$
$x_3 = 0.7182818$	$x_4 - x_3 = 0.15484$
$x_4 = 0.8731272$	$1 - x_4 = 0.12688$

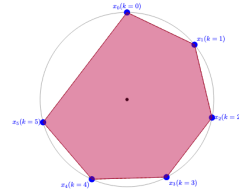
 Figura 4.4: $\Gamma(e, 5)$

 Figura 4.5: Representación dual de $\Gamma(e, 5)$.

$$\begin{aligned}
 &= \{0, \pi - \lfloor \pi \rfloor, 2\pi - \lfloor 2\pi \rfloor, 3\pi - \lfloor 3\pi \rfloor, 4\pi - \lfloor 4\pi \rfloor, 5\pi - \lfloor 5\pi \rfloor\} \\
 &\approx \{0, 0.141592\dots, 0.283185\dots, 0.4247778\dots, 0.56636\dots, 0.70796\dots\}
 \end{aligned}$$

En la tabla 4.6 se observan las longitudes de paso. Se obtienen únicamente 2 diferentes, corroborando los teoremas 4.2.1 y 4.2.2. Corroborar que $N = 6$ es un denominador de un convergente o semiconvergente de $\theta = \{\pi\}$ se ha visto en el ejemplo 2.1.3.

Igualmente, la figura 4.7 representa el polígono asociado a la escala $\Gamma(\pi, 6)$, que por tener un *intervalo generador* diferente de la quinta justa occidental, da lugar a una escala *microtonal*.

Notas (x_i)	Pasos ($x_{i+1} - x_i$)
$x_0 = 0$	$x_1 - x_0 = 0.141592$
$x_1 = 0.141592$	$x_2 - x_1 = 0.141592$
$x_2 = 0.283185$	$x_3 - x_2 = 0.141592$
$x_3 = 0.4247778$	$x_4 - x_3 = 0.141592$
$x_4 = 0.56636$	$x_5 - x_4 = 0.141592$
$x_5 = 0.70796$	$1 - x_5 = 0.29205$

 Figura 4.6: $\Gamma(\pi, 6)$

 Figura 4.7: Representación dual de $\Gamma(\pi, 6)$.

Ejemplo 4.2.5 (Escala de 7 notas generada por $\sqrt{3}$). La escala se genera tomando la parte fraccionaria de los primeros múltiplos del número $\sqrt{3}$.

$$\Gamma(\sqrt{3}, 7) = \{\{k\sqrt{3}\} : k \in \{0, \dots, 6\}\} = \{0, \{\sqrt{3}\}, \{2\sqrt{3}\}, \dots, \{6\sqrt{3}\}\}$$

En el círculo \mathbb{R}/\mathbb{Z} , al tomar la parte fraccionaria se está realizando la operación módulo 1. Así, para cada k , la nota es $\{k\sqrt{3}\} = k\sqrt{3} \pmod{1} = k\sqrt{3} - \lfloor k\sqrt{3} \rfloor$. La escala por orden de generación es:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\sqrt{3}, 7) &= \{k\sqrt{3} - \lfloor k\sqrt{3} \rfloor : k \in \{0, \dots, 6\}\} = \\
 &= \{0, 0.732051, 0.464102, 0.196152, 0.928203, 0.660254, 0.392305\}
 \end{aligned}$$

En la tabla 4.8 se observan las longitudes de paso entre notas consecutivas una vez ordenadas. Se obtienen dos tamaños de paso distintos, lo que concuerda nuevamente con las predicciones de los teoremas 4.2.1 y 4.2.2. Esto se debe a que $N = 7$ es el denominador de uno de los convergentes de la fracción continua que representa a $\{\sqrt{3}\}$.

La justificación teórica es la siguiente: el generador es $\theta = \{\sqrt{3}\} \approx 0.732$, cuya fracción continua es $[0; 1, 2, 1, 2, \dots]$. Los denominadores de sus convergentes son, al calcularse, 1, 1, 3, 4, 11, \dots . Aunque $N = 7$ no es un denominador de un convergente, sí es el denominador de un *semiconvergente*, concretamente el que se forma entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{8}{11}$. Por tanto, la teoría predice correctamente que la escala tendrá solo dos longitudes de paso, como se comprueba numéricamente.

4.3. Escalas bien formadas

Para concluir la sección se trata de dar forma a uno de los conceptos centrales asociados a la teoría de escalas: las escalas bien formadas (*well-formed scales*). Introducidas por Norman Carey

Notas (x_i)	Pasos ($x_{i+1} - x_i$)
$x_0 = 0$	$x_1 - x_0 \approx 0.19615$
$x_1 = 0.19615$	$x_2 - x_1 \approx 0.19615$
$x_2 = 0.39230$	$x_3 - x_2 \approx 0.07180$
$x_3 = 0.46410$	$x_4 - x_3 \approx 0.19615$
$x_4 = 0.66025$	$x_5 - x_4 \approx 0.07180$
$x_5 = 0.73205$	$x_6 - x_5 \approx 0.19615$
$x_6 = 0.92820$	$1 - x_6 \approx 0.07180$

Figura 4.8: Notas ordenadas e intervalos de la escala $\Gamma(\sqrt{3}, 7)$.

y David Clampitt, este marco teórico permite caracterizar de forma abstracta las propiedades estructurales que comparten las escalas diatónicas empleadas a lo largo de la historia de la música. Se emplea como ejemplo paradigmático la escala pitagórica generada por quintas, que en la notación introducida anteriormente se puede escribir como $\Gamma(\log_2(3/2), 7)$.

Intuitivamente, estas escalas se caracterizan por dos propiedades esenciales que garantizan su cohesión estructural: la propiedad de “clausura” y la de “simetría”.

Si una escala puede generarse mediante la repetición de un único intervalo (el generador θ) y es “cerrada” en el sentido de que un número específico de pasos de este generador permuta las notas de la escala, entonces verifica la *propiedad de clausura*. Musicalmente, esto se relaciona con el hecho, entre otros, de que el ciclo de quintas cierra tras N notas, dando lugar a una escala única.

Por su parte, una escala cumple la *propiedad de simetría* si los intervalos que la conforman se distribuyen de la manera más uniforme posible. En la práctica, esto significa que todo intervalo genérico existe en exactamente dos tamaños específicos. Esta propiedad es la que dota a la escala de una riqueza armónica y melódica característica, aunque esta variedad armónico-melódica no es condición *sine qua non* para que una escala sea bien formada, es decir, hay escalas verdaderamente irregulares desde un punto de vista melódico que sí son bien formadas.

Estas dos propiedades, aparentemente intuitivas, se sintetizan en la siguiente definición formal, que es más operativa desde un punto de vista matemático.

Definición 4.3.1 (Escala Bien Formada). Una escala generada $\Gamma(\theta, N)$ se denomina *escala bien formada* si cumple que:

1. Es generada por un único intervalo $\theta \in (0, 1)$. Al número θ , como ya se vio en la sección previa, se le denomina generador.
2. Al ordenar sus notas por altura ($0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < 1$), los intervalos entre notas consecutivas –*pasos*– tienen exactamente dos tamaños distintos..

Observación 4.3.1. La conexión con la teoría de números, establecida por el teorema 4.2.2, es directa y fundamental: una escala $\Gamma(\theta, N)$ es bien formada (es decir, tiene exactamente dos tamaños de paso) si y sólo si N es el denominador de un convergente o semiconvergente de la fracción continua del generador θ .

En las figuras 4.1 y 4.2 se observan las representaciones de las escalas pitagóricas de $1, \dots, 12$ notas clasificándolas según su simetría. En este caso, como las escalas son generadas por $\theta = \log_2(3)$, si cumplen la condición de simetría, entonces serán automáticamente *escalas bien formadas*.

La simetría (o la falta de ella) que se observa en las figuras anteriores puede entenderse visualmente a través de la forma en que se construyen los polígonos que representan las escalas. Para una escala $\Gamma(\theta, n)$ con sus n notas distribuidas en un círculo, se puede trazar dos tipos de polígonos:

1. Polígono de generación: Se obtiene uniendo las notas en el orden en que son generadas por el intervalo θ : se une x_0 con $\{1\theta\}$, $\{1\theta\}$ con $\{2\theta\}$ y así sucesivamente hasta cerrar el ciclo con $\{(n-1)\theta\}$.
2. Polígono de pasos: Se obtiene uniendo las notas en su orden de altura a lo largo del círculo: se unen x_0 y x_1 , x_1 con x_2 , \dots hasta unir x_{n-1} con x_0 nuevamente.

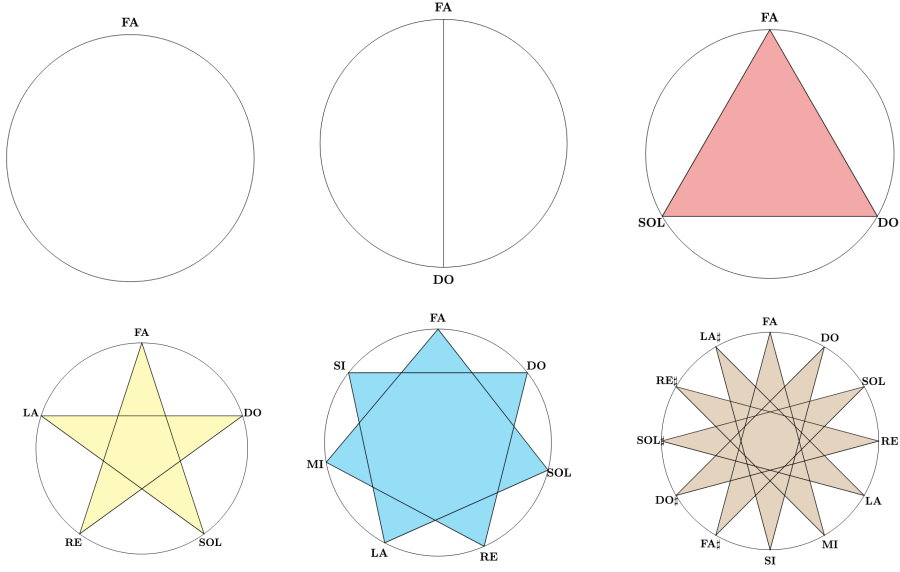


Tabla 4.1: Escalas pitagóricas de $\{1, 2, 3, 5, 7, 12\}$ notas que cumplen con el principio de simetría.

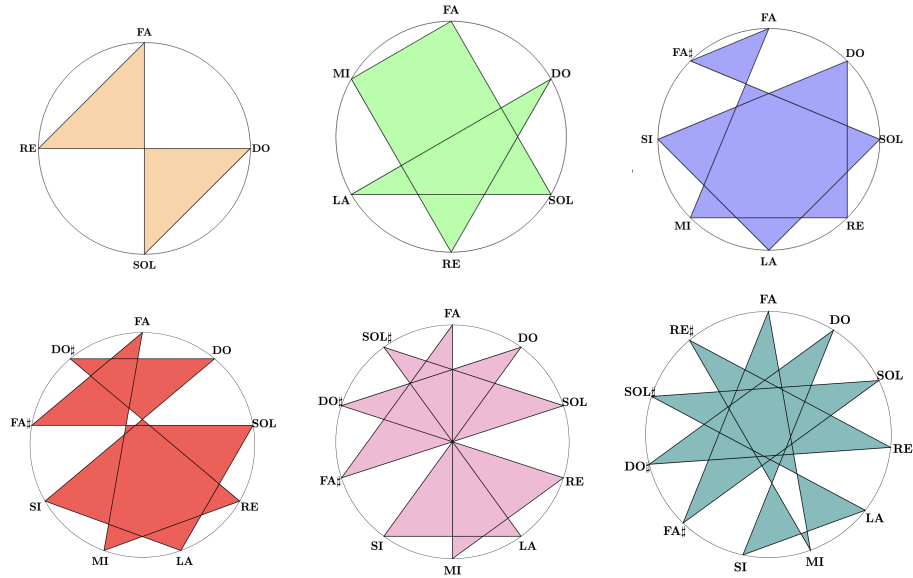


Tabla 4.2: Escalas pitagóricas de $\{4, 6, 8, 9, 10, 11\}$ notas que NO cumplen con el principio de simetría.

La distinción entre estos dos polígonos es crucial. Una escala es bien formada si y sólo si su polígono de generación es un polígono estrellado regular. Esta regularidad visual es la manifestación geométrica de la propiedad de tener solo dos tamaños de paso y se corresponde con las afirmaciones siguientes:

- Todos los lados de la estrella (las líneas que unen las notas en el orden de generación) tienen exactamente la misma longitud.
- Todos los ángulos en los vértices de la estrella son iguales.
- Se puede dibujar con un único trazo continuo, saltando siempre el mismo número de puntos, hasta volver al inicio habiendo visitado todos los puntos una sola vez.

Ejemplo 4.3.1. Para ilustrarlo con un caso concreto, se considera la escala $\Gamma(\sqrt{3}, 7)$ de la Figura 4.9, la cual se ha expuesto anteriormente como el ejemplo 4.2.5.

A primera vista, la distribución de sus notas parece irregular. Sin embargo, un análisis más profundo revela que es un caso curioso de escala bien formada. Esta escala es bien formada porque

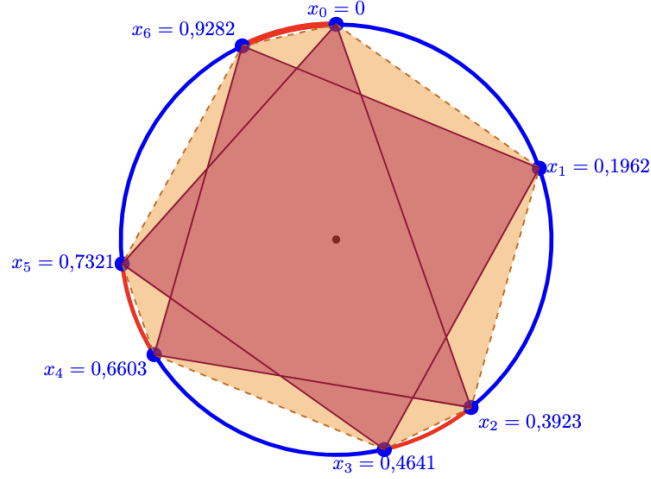


Figura 4.9: Representación poligonal de la escala $\Gamma(\{\sqrt{3}\}, 7)$.

su número de notas, $N = 7$, es el denominador de un semiconvergente $(5/7)$ del generador $\theta = \{\sqrt{3}\}$. Por lo tanto, debe cumplir todas las propiedades de caracterización de las WF:

- El polígono de pasos, de color naranja, está compuesto por lados de exactamente dos longitudes distintas, tal y como exige la Definición 4.3.1. En este caso, hay 3 pasos cortos (de tamaño $\approx 0,0718$) y 4 pasos largos (de tamaño $\approx 0,1962$). La gran diferencia entre ambos tamaños es lo que provoca la distribución no uniforme de las notas en el círculo.
- El polígono de generación, de tono magenta, es una estrella regular. Aunque la distribución de sus vértices pueda crear una ilusión de irregularidad, todos sus lados y ángulos son idénticos. Esto confirma visualmente que el orden de generación es completamente simétrico.

Este ejemplo demuestra una lección importante: una escala puede ser matemáticamente “bien formada” y aun así no ser “uniforme” en un sentido musical o visual si la proporción entre sus dos únicos tipos de paso es muy grande. La regularidad de la estrella de generación es la prueba definitiva de su buena formación. En consecuencia, se establece el siguiente resultado.

En resumen, la propiedad de una escala de ser “bien formada” no es una curiosidad abstracta, sino una característica estructural profunda que se manifiesta de tres maneras equivalentes:

- a) Musicalmente, la escala posee una distribución de intervalos muy regular y equilibrada (solo dos tamaños de paso).
- b) Matemáticamente, el número de notas n es una de las “mejores aproximaciones racionales” del generador θ .
- c) Geométricamente, el orden de generación de sus notas dibuja un polígono estrellado regular.

Capítulo 5

Geometría del ritmo

“Yo no tengo ritmo”, cantaban en la serie infantil Phineas y Ferb. Sin embargo, la realidad es que pocas cosas escapan de tenerlo. Rizando el rizo, incluso el silencio puede entenderse como el ritmo de la ausencia de sonido. Como se introdujo en la sección 1.4, el ritmo constituye uno de los cimientos de la expresión musical, representando una búsqueda humana constante por distribuir patrones de la forma más regular y significativa posible. Esta búsqueda de regularidad trasciende lo musical: desde los patrones de iluminación en farolas de autopistas hasta la programación de semáforos inteligentes, pasando por la fisión nuclear en aceleradores de partículas o la secuenciación de tratamientos médicos, subyace siempre un principio común: la distribución óptima de eventos discretos en el tiempo.

En el centro de esta búsqueda matemática de regularidad se encuentra a Euclides. Euclides estableció los postulados fundamentales que rigieron la geometría durante milenios. Además, en su obra *Elementos* describió un algoritmo capaz de calcular el máximo común divisor (MCD) de dos números enteros. Dados $k, n \in \mathbb{Z}$ con $0 < k < n$, el algoritmo se define recursivamente como:

Algoritmo EUCLIDES(k, n)

1. **if** $k = 0$ **then return** n
2. **else return** EUCLIDES($n \bmod k, k$)

Por ejemplo, para $k = 4$ y $n = 11$, el algoritmo sigue como $\text{EUCLIDES}(4, 11) = \text{EUCLIDES}(3, 4) = \text{EUCLIDES}(1, 3) = \text{EUCLIDES}(0, 1) = 1$.

La conexión entre este algoritmo milenario y la teoría musical emerge al reinterpretar su propósito. Dicha reinterpretación fue formalizada por Godfried Toussaint en 2004, [36], bajo el nombre de “ritmos euclidianos”, demostrando que el mismo principio matemático subyacente al algoritmo de Euclides puede generar muchos de los ritmos más emblemáticos de diversas tradiciones musicales alrededor del mundo. Lo extraordinario reside en que, al aplicar el algoritmo no para hallar un divisor, sino para distribuir eventos, se obtienen patrones rítmicos de notable regularidad.

En las secciones siguientes se explora el ritmo desde un prisma puramente matemático. Además, se profundiza en cómo el algoritmo de Bjorklund —desarrollado originalmente en el contexto de física de aceleradores de partículas— adapta y formaliza esta idea para la generación de ritmos. Además, intentaré responder al porqué de la aparición de estos patrones “euclidianos” forma natural en músicas de culturas aparentemente inconexas, sugiriendo la existencia de principios matemáticos universales subyacentes a nuestra percepción rítmica.

5.1. El ritmo como objeto matemático

La idea de que patrones rítmicos fundamentales en la música del mundo entero —desde África hasta Cuba y los Balcanes— puedan ser generados por un simple principio matemático es el pilar de la teoría del ritmo euclidiano. Estos patrones no son aleatorios; exhiben una propiedad de “uniformidad” que los hace musicalmente coherentes y efectivos. En esta sección, se formaliza qué

es un ritmo, se exploran sus diferentes representaciones matemáticas y se establecerán las bases para la presentación de ritmo euclidiano en la sección siguiente.

Definición 5.1.1 (Ritmo). Un *ritmo* \mathcal{R} de k pulsos (acentos) en un ciclo de n divisiones temporales es un subconjunto ordenado de k elementos del conjunto de los enteros módulo n , \mathbb{Z}_n :

$$\mathcal{R} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}_n, \quad x_i \in \mathbb{Z}_n, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

donde $k, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tales que $k \leq n$. Para el análisis, se asume que los elementos están ordenados $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k < n$ y se establece, por convención, que el ritmo comienza en el primer pulso, es decir, $x_1 = 0$.

Para analizar y construir los ritmos, es fundamental disponer de una notación precisa. Por ello, la definición formal de un ritmo como subconjunto de \mathbb{Z}_n es la base para diversas representaciones y conceptos derivados que facilitan su análisis en distintos contextos. A lo largo de la musicología matemática, si se le puede llamar así, se han consolidado varios sistemas de representación, cada uno ofreciendo una perspectiva diferente del mismo patrón:

i) **Notación binaria:**

Vector $B = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ donde:

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Esta representación es fundamental para el procesamiento computacional y el análisis algebraico.

ii) **Sistema de Cajas de Unidad de Tiempo (TUBS):**

Secuencia visual de n símbolos donde:

$$[\times] \equiv \text{pulso}, \quad [\cdot] \equiv \text{silencio}$$

Desarrollado por musicólogos para transcribir patrones rítmicos complejos de forma intuitiva y culturalmente neutral. Se corresponde directamente con la notación binaria variando los símbolos de representación.

iii) **Secuencia de intervalos (duraciones):**

Tupla $\mathcal{D} = (d_1, d_2, \dots, d_k)$ donde:

$$d_i = (x_{i+1} - x_i) \text{ mód } n \quad \text{para } i = 1, \dots, k-1, \quad d_k = (x_1 - x_k) \text{ mód } n$$

Esta representación captura la estructura métrica fundamental y es invariante bajo rotación.

iv) **Representación poligonal:**

Inscripción en un n -ágono regular donde los vértices corresponden a las divisiones temporales y los pulsos forman un subpolígono de k lados. Esta representación geométrica permite:

- a) Visualizar simetrías rotacionales y reflexivas.
- b) Calcular propiedades métricas (área, momento de inercia).
- c) Analizar la distribución espacial de los pulsos.

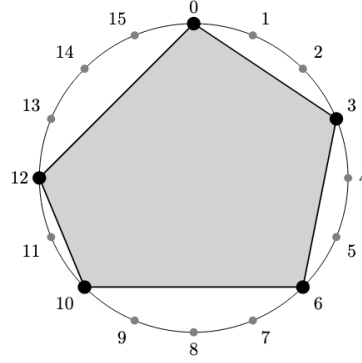
Observación 5.1.1 (Collares Rítmicos). Cuando se analiza la estructura fundamental de un ritmo, a menudo es deseable ignorar su punto de inicio. Dos ritmos se consideran instancias del mismo collar rítmico (*rhythmic necklace*) si uno puede obtenerse a partir del otro mediante una rotación cíclica. Por ejemplo, en notación binaria, [1100] y [1001] pertenecen al mismo collar. La secuencia de intervalos es particularmente útil para estudiar collares, ya que es invariante bajo rotación (solo sus elementos se desplazan cíclicamente).

Ejemplo 5.1.1 (Análisis del ritmo Son). El *Son rhythm*, patrón fundamental de la música afrocubana, corresponde a un ritmo de $k = 5$ pulsos en un ciclo de $n = 16$. Formalmente, se define como:

$$\mathcal{R}_{\text{Son}} = \{0, 3, 6, 10, 12\}_{16}$$

Se muestran algunas de sus representaciones:

TUBS	$[\times \dots \times \dots \times \dots \times \times \dots]$
Vector binario	$[1001001000101000]$
Interválica	$\mathcal{D}_{\text{Son}} = (3, 3, 4, 2, 4)$
Escritura musical	Figura 5.1
Polígono	Figura 5.2


 Figura 5.1: Ritmo *Son* en partitura.

 Figura 5.2: Ritmo *Son* poligonalmente.

5.2. Ritmo euclidiano

Ejemplos de ritmos como el *Son*, la *Bossa Nova*..., no son aleatorios. Exhiben una propiedad de “uniformidad” que los hace musicalmente coherentes y efectivos. Sus pulsos no están ni demasiado agrupados ni perfectamente espaciados. ¿Cómo se puede definir matemáticamente esta propiedad de “buena distribución”?

La respuesta se encuentra en el concepto de *ritmos euclidianos*, que logran transformar el cálculo del máximo común divisor en un método, como digo, para generar patrones distribuidos de máxima regularidad, [12].

Definición 5.2.1 (Máxima regularidad). Un ritmo $\mathcal{R} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}_n$ se dice que es de *máxima regularidad* (o *maximally even*) si las longitudes de los intervalos entre pulsos consecutivos toman, como máximo, dos valores distintos. Es decir, existen enteros d y $d + 1$ tales que cada intervalo entre pulsos consecutivos es igual a d o $d + 1$.

Definición 5.2.2 (Ritmo euclidiano). Un *ritmo euclidiano*, denotado como $\mathcal{E}(k, n)$, es una secuencia binaria de longitud n que distribuye k pulsos (acentos) de la forma más regular posible. La propiedad de “máxima uniformidad” implica que las longitudes de los silencios entre pulsos consecutivos son lo más parecidas posible, resultando en, como máximo, dos longitudes de intervalo distintas.

Observación 5.2.1. Los ritmos euclidianos $\mathcal{E}(k, n)$ son aquellos que maximizan la regularidad definida en 5.2.1. En particular, para cualquier par de enteros k y n , el ritmo euclidiano $\mathcal{E}(k, n)$ es el ritmo de k pulsos en n divisiones que minimiza la desviación de los intervalos entre pulsos consecutivos, logrando así la distribución más uniforme posible.

El método para generar estos ritmos fue propuesto por el investigador sueco Erik Bjorklund en el contexto de la física de partículas, y posteriormente adaptado por Toussaint para la música. Lo que hizo Bjorklund consistió en equiespaciarse las puertas de neutrones de un acelerador de partículas para proteger el hardware y mantener un consumo de energía estable, evitando picos de voltaje, e inconscientemente descubrió un algoritmo que genera ritmos musicales de máxima uniformidad.

Definición 5.2.3 (Algoritmo de Bjorklund). El algoritmo de Bjorklund es un procedimiento recursivo que distribuye k pulsos en n ranuras. Se basa en el principio de “divide y vencerás”, análogo al algoritmo de Euclides.

1. **Inicialización:** Se crean dos grupos de secuencias.
 - a) El grupo **A** contiene k secuencias, cada una con un pulso: [1].
 - b) El grupo **B** contiene $n - k$ secuencias, cada una con un silencio: [0].
2. **Iteración:** Mientras el número de secuencias en **B** sea mayor que 1, se repite el siguiente proceso de emparejamiento:
 - a) Se determina cuál de los dos grupos, **A** o **B**, tiene menos secuencias. Este será el “grupo pequeño” y el otro será el “grupo grande”.
 - b) Cada secuencia del “grupo pequeño” se concatena (se añade al final) con una secuencia del “grupo grande”.
 - c) Las secuencias recién formadas (resultado de la concatenación) pasan a constituir el **nuevo A** para la siguiente iteración.
 - d) Las secuencias del “grupo grande” que no fueron utilizadas (las “sobrantes”) pasan a ser el **nuevo B**.
3. **Finalización:** El algoritmo termina cuando el grupo **B** contiene 1 o 0 secuencias. El ritmo euclidiano final se obtiene concatenando, en orden, todas las secuencias del grupo **A** y después todas las secuencias del grupo **B**.

Observación 5.2.2 (Complejidad del Algoritmo). El algoritmo de Bjorklund tiene complejidad $\mathcal{O}(\log(\min(k, n-k)))$, análoga al algoritmo de Euclides, garantizando eficiencia incluso para valores grandes de n y k .

Ejemplo 5.2.1 (Algoritmo de Bjorklund). A continuación, se propone un ejemplo de aplicación del algoritmo de Bjorklund, para generar el ritmo euclidiano de $k = 6$ y $n = 13$, $\mathcal{E}(6, 13)$. Posteriormente se expone el funcionamiento del método de Bjorklund mediante la presentación del algoritmo en pseudocódigo.

- (1) [1] [1] [1] [1] [1] [1] [0] [0] [0] [0] [0] [0]
- (2) [10] [10] [10] [10] [10] [10] [0]
- (3) [100] [10] [10] [10] [10] [10]
- (4) [1001010101010]

En consecuencia, se ha generado un ritmo euclidiano que consta de 6 pulsos y 7 silencios. Para relacionar este proceso con el algoritmo de Euclides que se señalaba anteriormente, a través de las diferentes iteraciones que se realizan para colocar los [0]’s, se observa que:

$$\text{EUCLIDES}(6, 13) \stackrel{(1)}{=} \text{EUCLIDES}(6, 7) \stackrel{(2)}{=} \text{EUCLIDES}(1, 6) \stackrel{(3)}{=} \text{EUCLIDES}(0, 1) = 1$$

El problema se inicia con 6 secuencias de pulsos y 7 de silencios, análogo al problema euclidiano de $\text{mcd}(7, 6)$. El primer paso de Euclides, $7 = 1 \cdot 6 + 1$, indica un cociente de 1 y un resto de 1. El algoritmo de Bjorklund refleja esto a la perfección: empareja cada uno de los 6 pulsos con un silencio (cociente 1), formando 6 nuevos bloques [10] y dejando un único bloque de silencio, [0], como resto 1. El subproblema se convierte entonces en distribuir este resto entre los 6 nuevos bloques, de la misma forma que el algoritmo de Euclides continúa con los números 6 y 1. De este modo, la máxima uniformidad del ritmo euclidiano no es una coincidencia, sino la consecuencia directa de aplicar el método matemático más eficiente para la división y la conmensurabilidad. El patrón resultante, con sus características dos longitudes de intervalo, es la huella geométrica del proceso de cálculo del máximo común divisor, revelando que un ritmo musicalmente fundamental puede ser, en realidad, una solución a un problema matemático clásico.

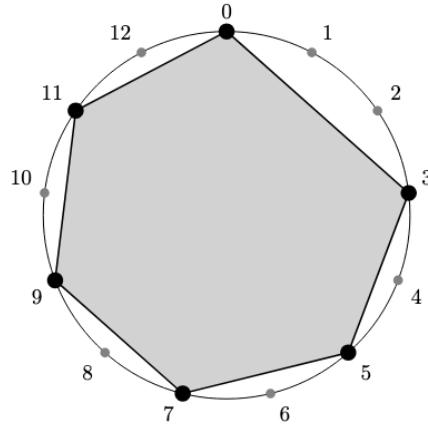
El ritmo euclidiano $\mathcal{E}(6, 13)$ se puede representar, a parte de como cadena de [0]’s y [1]’s, de forma visual a través de su representación poligonal, que se observa en la figura 5.4. Igualmente,

Algoritmo BJORKLUND $\mathcal{E}(k, n)$

```

1.  if  $k > n$  or  $k \leq 0$  then return error
2.  // Inicialización
3.   $A \leftarrow$  lista de  $k$  secuencias  $['1']$ 
4.   $B \leftarrow$  lista de  $n - k$  secuencias  $['0']$ 
5.
6.  while  $\text{longitud}(B) > 1$  do
7.    // Asegurar que A es el grupo grande
8.    if  $\text{longitud}(A) < \text{longitud}(B)$  then
9.       $\text{intercambiar}(A, B)$ 
10.   end if
11.
12.    $B_{\text{nuevo}} \leftarrow []$  // Lista vacía para los sobrantes
13.   for  $i$  from 0 to  $\text{longitud}(B) - 1$  do
14.      $A[i] \leftarrow \text{concatenar}(A[i], B[i])$ 
15.   end for
16.
17.    $B_{\text{nuevo}} \leftarrow$  los elementos de A desde el índice  $\text{longitud}(B)$  hasta el final
18.    $A \leftarrow$  los primeros  $\text{longitud}(B)$  elementos de A (ya modificados)
19.    $B \leftarrow B_{\text{nuevo}}$ 
20. end while
21.
22. return  $\text{concatenar}(A, B)$ 
    
```

Figura 5.3: Esquema visual del algoritmo de Bjorklund para generar ritmos euclidianos.


 Figura 5.4: Representación del ritmo euclidiano $\mathcal{E}(6, 13)$.

Teorema 5.2.1 (Propiedad Fundamental de los Ritmos Euclidianos). *Un ritmo euclidiano $\mathcal{E}(k, n)$ generado mediante el algoritmo de Bjorklund posee, como máximo, dos longitudes de intervalo distintas en su secuencia de distancias.*

Esbozo de la demostración. La clave reside en que el algoritmo de Bjorklund es isomorfo al algoritmo de Euclides. En cada paso, se tienen dos “tipos” de bloques (de longitudes ℓ y $\ell + 1$). La recursión garantiza que:

1. Solo se manejan dos longitudes en cada paso.
2. La combinación de bloques preserva esta propiedad.
3. El proceso termina con a lo sumo dos longitudes distintas.

La correspondencia con el algoritmo de Euclides para $\text{mcd}(k, n - k)$ asegura la corrección. \square

Observación 5.2.3 (Relación con el *Teorema de los Tres Pasos*). Esta propiedad de los dos intervalos es la manifestación en un sistema discreto de un resultado más general del teorema 4.2.1. Dicho teorema, formulado para un espacio continuo, establece que al marcar múltiplos de un generador irracional en un círculo, las distancias entre puntos consecutivos solo pueden tener, como máximo, tres valores. El algoritmo de Bjorklund, al ser una implementación del algoritmo de Euclides para enteros, produce una estructura tan regular que el resultado se restringe a solo dos valores, convirtiéndolo en un caso especial y altamente estructurado.

Capítulo 6

Geometría del sonido

La música se compone de sonidos organizados en forma de notas, cuya sucesión y superposición crea relaciones que nuestra percepción interpreta como consonantes, disonantes, estables o inestables. Gracias a la escala igualmente temperada, que se ha establecido como el sistema principal de afinación de los instrumentos en la música occidental actual, se puede llevar a cabo un análisis de los sonidos determinando qué acordes los conforman y de qué manera se entrelazan. El estudio de estas relaciones y concatenaciones, que en esencia se corresponden con un proceso compositivo, se puede modelizar matemáticamente de diferentes maneras y a lo largo del presente capítulo se tratará de explicar algunas de ellas.

Podríamos contentarnos con clasificar acordes y enumerar escalas, como quien cataloga piezas de un museo. Pero, al ser la música un organismo en movimiento, su verdadera esencia reside en cómo esos sonidos transitan de unos a otros. La armonía tradicional nos dice que un acorde de **Do** mayor “quiere” ir a **Fa** mayor y luego a **Sol** mayor, como un tren sobre raíles. Pero, ¿qué ocurre cuando la música se sale de los raíles?

Es aquí donde la teoría Neo-Riemanniana invita a cambiar el catálogo del museo por un plano del metro. Su potencia reside en no juzgar el viaje, sino en mapear las conexiones. Pionera en los trabajos de David Lewin, esta teoría, que surge a partir una reconsideración de las ideas del músico Hugo Riemann, [38], y que nada tiene que ver con el célebre matemático de igual apellido, no reemplaza el sistema anterior, sino que ofrece un nuevo lente para observar lo que ya estaba: una red de relaciones, donde la pregunta clave deja de ser “¿qué acorde es este?” para convertirse en “¿qué hacer para llegar de este acorde a aquel?”.

En las siguientes secciones, se dan las herramientas necesarias para navegar por este plano. Se aprenden las consecuencias matemáticas de la transposición y la inversión, a manejar las tres líneas principales de las tríadas –las transformaciones \mathcal{P} , \mathcal{L} y \mathcal{R} – y se camina por el *Tonnetz*, diagrama que convierte las secuencias de acordes en paseos geométricos.

En definitiva, siguiendo las ideas expuestas a lo largo de este trabajo y concibiendo, esencialmente, la escala igualmente temperada como el grupo abeliano $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ se pretende ofrecer una solución que, usando la teoría Neo-Riemanniana, dota de un lenguaje formal a la armonía, mostrando que incluso las progresiones más cromáticamente “revoltijas” pueden estar articuladas por una lógica subyacente de elegante simplicidad.

6.1. Acordes matemáticos

Durante la sección 1.2.2 del capítulo 1 se ha introducido el acorde como concepto musical. A partir de ahora se abordarán los acordes desde un prisma aritmético para facilitar su manipulación como objetos algebraicos dentro de un ámbito más estructural.

Como se ha justificado previamente en este trabajo, el grupo cíclico finito $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ es la estructura idónea para representar las doce clases de altura del sistema temperado. Se hace estableciendo una biyección entre las notas musicales y los residuos módulo 12, tal como se refleja en la Figura 1.2 (donde, por convención, $C = 0, C\sharp = 1, \dots, B = 11$).

En este contexto, un intervalo musical se define como una especie de distancia modular orientada entre dos elementos y la unidad en \mathbb{Z}_{12} corresponde al semitono musical, $\frac{1}{2}$ tono.

El enfoque de este trabajo se centra en las **tríadas**, que ya se vio que son acordes formados por la ejecución simultánea de tres notas distintas. Dado que el orden de las notas en un acorde simultáneo no altera su identidad básica (aunque sí su inversión), se modelan los acordes como subconjuntos.

En \mathbb{Z}_{12} existen $\binom{12}{3} = 220$ subconjuntos posibles de 3 elementos. De entre todos ellos, la teoría Neo-Riemanniana restringe su estudio a los 24 acordes consonantes: las tríadas mayores y menores, pero a continuación se expondrán también ejemplos de uso muy común como acordes con 7ª u otros tipos de sonoridades: *aumentado*, *disminuido*...

Definición 6.1.1 (Acorde tríada). Un acorde de tres notas (tríada) se define matemáticamente como un subconjunto $A \subset \mathbb{Z}_{12}$ tal que su cardinalidad es $|A| = 3$. Se denota un acorde como $A = \{x, y, z\}$ donde $x, y, z \in \mathbb{Z}_{12}$ son distintos entre sí.

Observación 6.1.1. A diferencia de una tupla ordenada (x, y, z) , en el conjunto $\{x, y, z\}$ el orden de los elementos no es relevante. Por tanto, $\{0, 4, 7\}$ será, para nosotros, igual que $\{4, 7, 0\}$; ambos representan el acorde de Do Mayor (C).

Para clasificar estos conjuntos en **mayores** o **menores**, se debe atender a su estructura interválica interna.

Definición 6.1.2 (Acorde Mayor). Un subconjunto $M \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$ es una **tríada mayor** si existe un elemento $r \in M$ (llamado fundamental o raíz) tal que:

$$M = \{r, r + 4, r + 7\} \quad (\text{mód } 12)$$

Observación 6.1.2. La tríada mayor se caracteriza por tener una tercera mayor (4 semitonos) y una quinta justa (7 semitonos) sobre la fundamental.

Ejemplo 6.1.1. Si $r = 3$ (mi♭), entonces $M = \{3, 7, 10\} = \{\text{mi♭}, \text{sol}, \text{si}\}$ (Acorde de Mi♭ Mayor).

Definición 6.1.3 (Acorde Menor). Un subconjunto $m \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$ es una **tríada menor** si existe un elemento $r \in m$ tal que:

$$m = \{r, r + 3, r + 7\} \quad (\text{mód } 12)$$

Observación 6.1.3. La tríada menor se caracteriza por tener una tercera menor (3 semitonos) y una quinta justa (7 semitonos) sobre la fundamental.

Ejemplo 6.1.2. Si $r = 0$ (do), entonces $m = \{0, 3, 7\} = \{\text{do}, \text{mi♭}, \text{sol}\}$ (Acorde de Do Menor).

Definición 6.1.4 (Conjunto de tríadas Riemannianas). Sea M el conjunto de las 12 tríadas mayores y m el conjunto de las 12 tríadas menores, entonces el **conjunto de las tríadas Riemannianas**, denotado por \mathcal{TR} , es la unión del conjunto M y el conjunto m . Es decir,

$$\mathcal{TR} = M \cup m,$$

donde:

$$(i) \quad M = \{\{r, r + 4, r + 7\} \mid r = 0, 1, \dots, 11\}$$

$$(ii) \quad m = \{\{r, r + 3, r + 7\} \mid r = 0, 1, \dots, 11\}$$

Dado que $M \cap m = \emptyset$, el conjunto \mathcal{TR} contiene exactamente 24 tríadas consonantes, que son el objeto de estudio de la teoría Neo-Riemanniana.

Observación 6.1.4 (Precisión sobre la entidad del acorde). Hasta ahora se ha trabajado con tríadas como subconjuntos $T = \{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}_{12}$, donde $a, b, c \in \{0, 1, \dots, 11\}$. Sin embargo, es importante recordar que cada elemento de \mathbb{Z}_{12} representa en realidad una *clase de tono*:

$$[a] = \{\dots, a - 12, a, a + 12, a + 24, \dots\}$$

Por lo tanto, una tríada debería denotarse formalmente como $T = \{[a], [b], [c]\}$, representando una *clase de tríadas* que incluye todas sus transposiciones octavales. No obstante, en el contexto de la teoría Neo-Riemanniana —donde se trabaja con clases de altura— esta distinción es irrelevante, pues las operaciones se definen módulo 12. Por simplicidad notacional, se mantiene la convención estándar de identificar cada clase $[a]$ con su representante a , denotando las tríadas simplemente como conjuntos de números módulo 12.

6.1.1. Otras sonoridades triádicas

Aunque el enfoque Neo-Riemanniano clásico pivota sobre las tríadas mayores y menores (consonantes), el universo de las tríadas en \mathbb{Z}_{12} incluye otras estructuras simétricas de gran relevancia armónica.

Definición 6.1.5 (Acorde Disminuido). Una tríada disminuida es un subconjunto $\mathbf{d} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$ generado por una fundamental r tal que:

$$\mathbf{d} = \{r, r + 3, r + 6\} \quad (\text{mód } 12)$$

Observación 6.1.5. Este acorde se forma apilando dos terceras menores consecutivas. Su estructura es simétrica respecto a la inversión interválica, pero carece de la quinta justa, poseyendo en su lugar un tritono (6 semitonos).

Definición 6.1.6 (Acorde Aumentado). Una tríada aumentada es un subconjunto $\mathbf{aug} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_{12})$ tal que:

$$\mathbf{aug} = \{r, r + 4, r + 8\} \quad (\text{mód } 12)$$

Observación 6.1.6. Este conjunto es altamente simétrico; divide la octava en tres partes iguales de 4 semitonos (terceras mayores). Debido a esta simetría rotacional, $\{0, 4, 8\}$ es el mismo conjunto que $\{4, 8, 0\}$ y $\{8, 0, 4\}$. En \mathbb{Z}_{12} solo existen 4 tríadas aumentadas únicas.

6.1.2. Cuatríadas y acordes de séptima

Para caracterizar acordes de mayor complejidad armónica, como los utilizados en el Jazz o en la música del periodo romántico tardío, es necesario extender la cardinalidad del subconjunto a $n = 4$.

Definición 6.1.7 (Cuatríada). Un acorde de cuatro notas es un subconjunto $\mathbf{Q} \subset \mathbb{Z}_{12}$ con cardinalidad $|\mathbf{Q}| = 4$. Generalmente se construyen añadiendo un intervalo de séptima a una tríada base.

A continuación se definen algebraicamente las cuatríadas más comunes en función de su fundamental r .

Definición 6.1.8 (Acorde de Séptima de Dominante). Es el acorde más habitual con función de tensión. Se forma sobre una tríada mayor añadiendo una séptima menor (10 semitonos):

$$\mathbf{v}_7 = \{r, r + 4, r + 7, r + 10\} \quad (\text{mód } 12)$$

Definición 6.1.9 (Acorde de Séptima Mayor (\mathbf{M}_7)). Se caracteriza por su estabilidad y sonoridad abierta. Se forma sobre una tríada mayor añadiendo una séptima mayor (11 semitonos):

$$\mathbf{M}_7 = \{r, r + 4, r + 7, r + 11\} \quad (\text{mód } 12)$$

Definición 6.1.10 (Acorde de Séptima Menor). Se forma al añadir una nota más a una tríada menor, que forma un intervalo de séptima menor con respecto a la fundamental:

$$\mathbf{m}_7 = \{r, r + 3, r + 7, r + 10\} \quad (\text{mód } 12)$$

Definición 6.1.11 (Acorde Disminuido con Séptima). Un conjunto de especial interés matemático por su simetría total. Se forma apilando tres terceras menores:

$$\mathbf{dim}_7 = \{r, r + 3, r + 6, r + 9\} \quad (\text{mód } 12)$$

Observación 6.1.7. El acorde \mathbf{dim}_7 divide el espacio \mathbb{Z}_{12} en cuatro partes iguales. Al igual que la tríada aumentada, su estructura es invariante bajo transposiciones de T_3, T_6 y T_9 (el concepto de transposición se estudia en la próxima sección). Matemáticamente, existen solo 3 acordes disminuidos séptima únicos que contienen todas las notas de la escala cromática.

Ejemplo 6.1.3 (Escala octatónica). La escala octatónica, 1.3.5, también conocida como escala disminuida, se construye alternando intervalos de tono y semitono. Una forma común de definirla es a partir de una nota raíz r :

$$\text{Escala Octatónica} = \{r, r+2, r+3, r+5, r+6, r+8, r+9, r+11\} \quad (\text{mód } 12)$$

Esta escala contiene múltiples acordes disminuidos con séptima. Por ejemplo, si tomamos $r = 0$ (**do**), la escala octatónica resultante es:

$$\{0, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11\} = \{\text{do}, \text{re}, \text{mib}, \text{fa}, \text{fa}\sharp, \text{sol}\sharp, \text{la}, \text{si}\}$$

Dentro de esta escala se pueden encontrar los siguientes acordes disminuidos con séptima (\dim_7):

$$\{0, 3, 6, 9\}, \{2, 5, 8, 11\}, \{3, 6, 9, 0\}, \{5, 8, 11, 2\}$$

Cada uno de estos acordes refleja la simetría inherente de la escala octatónica y su capacidad para generar tensiones armónicas complejas.

6.2. Transformaciones musicales

Las transiciones entre notas y acordes en las obras musicales aparecen cada vez que se produce un cambio de altura o de armonía. Estas variaciones se pueden definir rigurosamente por medio de las matemáticas, concretamente haciendo uso de la teoría de grupos para modelar las operaciones que transforman un objeto musical en otro.

Al considerar el conjunto de las clases de altura \mathbb{Z}_{12} como espacio geométrico, una transformación musical no es más que una función biyectiva $f : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$. De entre todas las permutaciones posibles (12!), la teoría musical tradicional y la Neo-Riemanniana se interesan casi exclusivamente por aquellas que preservan la estructura interválica de los acordes (isometrías): las transposiciones y las inversiones.

6.2.1. Transposición e Inversión

Las dos operaciones fundamentales que generan el grupo de simetrías de la música dodecafónica (isomorfo al grupo diedral D_{24}) son el desplazamiento constante (transposición) y la reflexión (inversión).

Definición 6.2.1 (Transposición). Sean una clase de altura $x \in \mathbb{M}$, $x = \{a, b, c\}$ y un intervalo $n \in \mathbb{Z}_{12}$, la operación de **transposición** T_n se define como una función $T_n(x) : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ donde:

$$T_n(x) = \{a + n, b + n, c + n\} = x + n \quad (\text{mód } 12)$$

Observación 6.2.1. Esta operación representa una rotación del ciclo de notas. Cuando se aplica una transposición T_n a un acorde, simplemente se suman n semitonos a cada uno de sus elementos.

Observación 6.2.2. La transposición preserva la “calidad” del acorde. Si **A** es una tríada mayor, $T_n(\mathbf{A})$ seguirá siendo una tríada mayor para cualquier n .

Ejemplo 6.2.1. Tomando el acorde de **D0**, $\mathbf{C} = \{0, 4, 7\}$. Al aplicarle una transposición de $n = 7$ semitonos (quinta justa):

$$T_7(\{0, 4, 7\}) = \{0 + 7, 4 + 7, 7 + 7\} = \{7, 11, 2\} \quad (\text{mód } 12)$$

El resultado es el conjunto $\{7, 11, 2\}$, (**sol**, **si**, **re**), que corresponde al acorde de **SOL** (**G**).

La segunda operación fundamental es la inversión. Aritméticamente, corresponde a cambiar el signo de los elementos, lo que equivale a recorrer la escala cromática en sentido opuesto.

Definición 6.2.2 (Inversión). Sean $x \in \mathbb{Z}_{12}$ y $n \in \mathbb{Z}_{12}$, la operación de **inversión** I_n se define como una función $I_n(x) : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ dada por:

$$I_n(x) = -x + n \quad (\text{mód } 12)$$

Observación 6.2.3. Geométricamente, I_n representa una reflexión del ciclo de notas respecto a un eje de simetría definido por n . En teoría musical clásica, esto suele conceptualizarse como invertir la dirección de los intervalos: una tercera ascendente se convierte en una tercera descendente.

Observación 6.2.4 (Cambio de modo). A diferencia de la transposición, la inversión transforma tríadas mayores en menores y viceversa. Esto se debe a que el orden de los intervalos se invierte: el intervalo de 4 semitonos (3^a M) se convierte en $-4 \equiv 8 \pmod{12}$ (3^a m complementaria).

Ejemplo 6.2.2. Aplicando la inversión I_0 (respecto a **do**) al acorde de Do Mayor $\mathbf{C} = \{0, 4, 7\}$:

$$I_0(\{0, 4, 7\}) = \{-0, -4, -7\} = \{0, 8, 5\} \pmod{12}$$

Reordenando, $\{0, 5, 8\}$, se observa que es una tríada de **Fa** menor (**Fm**). Mediante una inversión se transforma un acorde mayor en uno menor.

Definición 6.2.3. El conjunto de las funciones de transposición e inversión se denota como \mathcal{TI} y se define por

$$\mathcal{TI} = \{T_n, I_n : n = 0, \dots, 11\}$$

Los elementos de este conjunto aparecen de las composiciones de ambas funciones.

Lema 6.2.1. En el conjunto \mathcal{TI} se tienen las relaciones:

$$\begin{aligned} i) \quad & T_m \circ T_n = T_{m+n} \pmod{12}, \\ ii) \quad & T_m \circ I_n = I_{m+n} \pmod{12}, \\ iii) \quad & I_m \circ T_n = I_{m-n} \pmod{12}, \\ iv) \quad & I_m \circ I_n = T_{m-n} \pmod{12}. \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (i) \quad & T_m \circ T_n = T_m(T_n(\{a, b, c\})) \\ &= T_m(\{a + n, b + n, c + n\}) \\ &= \{a + n + m, b + n + m, c + n + m\} \\ &= \{a + (m + n), b + (m + n), c + (m + n)\} \\ &= T_{m+n} \pmod{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad & T_m \circ I_n = T_m(I_n(\{a, b, c\})) \\ &= T_m(\{-a + n, -b + n, -c + n\}) \\ &= \{-a + n + m, -b + n + m, -c + n + m\} \\ &= \{-a + (n + m), -b + (n + m), -c + (n + m)\} \\ &= I_{m+n} \pmod{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad & I_m \circ T_n = I_m(T_n(\{a, b, c\})) \\ &= I_m(\{a + n, b + n, c + n\}) \\ &= \{-a - n + m, -b - n + m, -c - n + m\} \\ &= \{-a + (m - n), -b + (m - n), -c + (m - n)\} \\ &= I_{m-n} \pmod{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iv) \quad & I_m \circ I_n = I_m(I_n(\{a, b, c\})) \\ &= I_m(\{-a + n, -b + n, -c + n\}) \\ &= \{a - n + m, b - n + m, c - n + m\} \\ &= \{a + (m - n), b + (m - n), c + (m - n)\} \\ &= T_{m-n} \pmod{12} \end{aligned}$$

□

Proposición 6.2.1. Para todo $n, k \in \mathbb{Z}$ tal que $n \equiv k \pmod{12}$,

$$T_n = T_k \quad e \quad I_n = I_k$$

Demostración. Dado que $n \equiv k \pmod{12}$, entonces $n = 12p + k$, $p \in \mathbb{Z}$. En consecuencia,

$$T_n = T_{12p+k} = T_{12p} \circ T_k = (T_0)^p \circ T_k = id \circ T_k = T_k$$

Igualmente,

$$I_n = I_{12p+k} = T_{12p} \circ I_k = (T_0)^p \circ I_k = id \circ I_k = I_k$$

□

Proposición 6.2.2. El conjunto \mathcal{TI} tiene estructura de grupo con la composición de funciones “ \circ ”.

Demostración. Se prueban las propiedades de grupo algebraico.

1. $\forall f, g \in \mathcal{TI}$, $f \circ g \in \mathcal{TI}$ por el lema 6.2.1 $\implies \mathcal{TI}$ cerrado bajo la composición.
2. T_0 es la identidad, porque

$$\begin{aligned} T_0 \circ T_n &= T_{0+n} = T_n, \\ T_m \circ T_0 &= T_{m+0} = T_m, \\ T_0 \circ I_n &= I_{0+n} = I_n, \\ I_m \circ T_0 &= I_{m-0} = I_m. \end{aligned}$$

Por tanto, $T_0 = id \in \mathcal{TI}$.

3. La asociatividad se cumple al ser una propiedad heredada de la composición de funciones.
4. Al coexistir dos tipos de elementos en el grupo, se tienen como elementos neutros $T_{12-n} = T_n^{-1}$ e $I_n = I_n^{-1}$, porque por un lado

$$\begin{aligned} T_n \circ T_{12-n} &= T_{n+12-n} = T_{12} = T_0 \\ T_{12-n} \circ T_n &= T_{n-12+n} = T_{12} = T_0 \end{aligned}$$

y por otro

$$I_n \circ I_n = T_{n-n} = T_0$$

□

Definición 6.2.4 (Grupo de Transposiciones). Se denota por \mathcal{T} al subgrupo de \mathcal{TI} formado exclusivamente por las operaciones de desplazamiento constante:

$$\mathcal{T} = \{T_n \in \mathcal{TI} \mid n \in \mathbb{Z}_{12}\}$$

Este subgrupo es cíclico, abeliano y de orden 12.

Proposición 6.2.3 (Isomorfismo). El grupo \mathcal{TI} es isomorfo al grupo diedral D_{24} .

Demostración. El grupo diedral D_{24} se puede representar mediante la presentación generada por una rotación r y una reflexión s :

$$D_{24} = \langle r, s \mid r^{12} = 1, s^2 = 1, sr = r^{-1}s \rangle$$

Se pretende encontrar generadores isomorfos en el grupo \mathcal{TI} . Se propone la identificación $r = T_1$ y $s = I_0$. Sea $x \in \mathbb{Z}_{12}$ una clase de altura cualquiera.

En primer lugar, se analiza el comportamiento de la operación $T_1(x) = x + 1$ (mód 12). Aplicar esta transformación reiteradamente equivale a una suma acumulativa, de modo que al aplicarla 12 veces se obtiene

$$(T_1)^{12}(x) = x + 12 \equiv x \pmod{12}$$

lo cual confirma que $(T_1)^{12} = T_0 = id$. De manera análoga, al aplicar dos veces consecutivas la operación $I_0(x) = -x$ (mód 12), se obtiene que $(I_0)^2(x) = -(-x) = x$, verificándose así que $(I_0)^2 = T_0 = id$.

A continuación, es necesario comprobar la relación de conmutación estructural $sr = r^{-1}s$, que en el contexto estudiado se traduce como $I_0 \circ T_1 = T_1^{-1} \circ I_0$. Sabiendo que en aritmética modular el inverso de sumar 1 es sumar 11 ($T_1^{-1} = T_{11}$), se evalúan ambos lados de la igualdad. Por la izquierda,

$$(I_0 \circ T_1)(x) = I_0(x + 1) = -(x + 1) = -x - 1 \pmod{12}$$

mientras que por la derecha, la composición resulta en

$$(T_{11} \circ I_0)(x) = T_{11}(-x) = -x + 11$$

Dado que $11 \equiv -1$ (mód 12), ambos resultados son equivalentes para todo x , satisfaciéndose la relación requerida.

Finalmente, el grupo generado por estos dos elementos contiene tanto las potencias de T_1 (las 12 transposiciones $\{T_0, \dots, T_{11}\}$) como los productos de estas con I_0 (las 12 inversiones $\{I_0, \dots, I_{11}\}$). Puesto que una transposición, que conserva la orientación interválica, nunca puede ser igual a una inversión, que la invierte, el conjunto resultante

$$\mathcal{TI} = \{T_0, T_1, \dots, T_{11}, I_0, I_1, \dots, I_{11}\}$$

contiene exactamente 24 elementos distintos. Al existir un homomorfismo entre los generadores que respeta las relaciones y coincidir la cardinalidad finita de ambos grupos, $\mathcal{TI} \cong D_{24}$. \square

6.2.2. Transformaciones \mathcal{P} , \mathcal{L} y \mathcal{R}

El grupo \mathcal{TI} visto anteriormente actúa sobre todo el espacio cromático. Sin embargo, la Teoría Neo-Riemanniana centra su atención en un subgrupo de operaciones muy específico que conecta las tríadas consonantes (el conjunto \mathcal{TR} definido en 6.1.4) basándose en el principio de *conducción de voces*. Este principio establece que la conexión “más fuerte” entre dos acordes se produce cuando se retienen tantas notas comunes como sea posible y las notas que cambian lo hacen por la distancia mínima (un semitono o un tono).

Las tres transformaciones fundamentales que cumplen estos requisitos se denominan \mathcal{P} (*Parallel*), \mathcal{L} (*Leading-tone exchange*) y \mathcal{R} (*Relative*). Matemáticamente, se definen como *inversiones contextuales*: operaciones que invierten el acorde respecto a un eje formado por dos de sus notas.

Definición 6.2.5 (\mathcal{P}). La transformación \mathcal{P} intercambia una tríada con su paralela de modo opuesto. Preserva la fundamental y la quinta, moviendo únicamente la tercera un semitono, hacia arriba o hacia abajo. Sea A una tríada con fundamental r . La acción de \mathcal{P} se define por casos:

$$\mathcal{P}(A) = \begin{cases} \{r, r + 3, r + 7\} & \text{si } A \text{ es mayor } \{r, r + 4, r + 7\} \\ \{r, r + 4, r + 7\} & \text{si } A \text{ es menor } \{r, r + 3, r + 7\} \end{cases}$$

Ejemplo 6.2.3. Consideremos el acorde de **Fa Mayor**, $F = \{5, 9, 0\}$ (correspondiente a las notas **fa**, **1a**, **do**). Al aplicar \mathcal{P} , conservamos la fundamental (5, **fa**) y la quinta (0, **do**). La tercera (9, **1a**) se desplaza un semitono descendente para convertirse en tercera menor (8, **1ab**).

$$\mathcal{P}(\{5, 9, 0\}) = \{5, 8, 0\} = Fm \text{ (Fa Mayor)}$$

El resultado son las notas **fa**, **1ab**, **do**.

Definición 6.2.6 (\mathcal{L}). La transformación \mathcal{L} (del alemán *Leittonwechsel*) intercambia una tríada mayor con una menor conservando las notas que forman la tercera menor (la tercera y la quinta en el acorde mayor; la fundamental y la tercera en el menor). La nota restante se mueve un semitono. Algebraicamente:

$$\mathcal{L}(A) = \begin{cases} \{r+4, r+7, r+11\} & \text{si } A \text{ es mayor } \{r, r+4, r+7\} \\ \{r+1, (r+1)+3, (r+1)+7\} & \text{si } A \text{ es menor } \{r, r+3, r+7\} \end{cases}$$

Nota. En términos simples, si es Mayor la fundamental baja un semitono; si es Menor la quinta sube un semitono).

Ejemplo 6.2.4. Para Mi Mayor, $E = \{4, 8, 11\}$ (**mi**, **sol** \sharp , **si**). Las notas que forman la tercera menor superior del acorde son 8 (**sol** \sharp) y 11 (**si**). Estas se conservan bajo la transformación \mathcal{L} . La fundamental 4 (**mi**) desciende un semitono a 3 (**re** \sharp).

$$\mathcal{L}(\{4, 8, 11\}) = \{3, 8, 11\}$$

El conjunto resultante $\{3, 8, 11\}$ corresponde a las notas **re** \sharp , **sol** \sharp , **si**. Al reordenarlas, se identifica la tríada de **Sol** \sharp menor ($G\sharp m$).

Definición 6.2.7 (\mathcal{R}). La transformación \mathcal{R} (relativa) intercambia una tríada con su relativa clásica. Preserva las notas que forman la tercera mayor (la fundamental y la tercera en el acorde mayor; la tercera y la quinta en el menor). La nota restante se mueve un tono entero (2 semitonos).

$$\mathcal{R}(A) = \begin{cases} \{r+9, r, r+4\} & \text{si } A \text{ es mayor } \{r, r+4, r+7\} \\ \{r+3, r+7, r+10\} & \text{si } A \text{ es menor } \{r, r+3, r+7\} \end{cases}$$

Ejemplo 6.2.5. Volviendo al acorde de Fa Mayor, $F = \{5, 9, 0\}$ (**fa**, **la**, **do**). Para la transformación relativa \mathcal{R} , se conserva las notas que forman la tercera mayor, es decir, la fundamental 5 (**fa**) y la tercera 9 (**la**). La quinta 0 (**do**) asciende un tono completo hasta 2 (**re**).

$$\mathcal{R}(\{5, 9, 0\}) = \{5, 9, 2\}$$

Reordenando el conjunto obtenido $\{2, 5, 9\}$, se tiene las notas **re**, **fa**, **la**, que constituyen la tríada de **Re** menor (Dm).



Figura 6.1: Representación de las transformaciones \mathcal{P} , \mathcal{L} y \mathcal{R} .

Observación 6.2.5 (La estructura de grupo \mathcal{PCR}). Una propiedad fundamental de estas operaciones es que son *involuciones*. Esto significa que aplicar la misma transformación dos veces devuelve al acorde original:

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{L}^2 = \mathcal{R}^2 = id$$

Por ejemplo, el relativo del relativo de Do Mayor es, de nuevo, Do Mayor. Además, la composición de estas operaciones permite alcanzar cualquier tríada del conjunto \mathcal{R} a partir de cualquier otra, formando un grupo que actúa transitivamente sobre las 24 tríadas mayores y menores. Esta estructura algebraica es la que da lugar al famoso grafo conocido como *Tonnetz*.

Hasta este punto, se han definido las operaciones de manera geométrica. Sin embargo, también se pueden manipular estos objetos algebraicamente. Para ello, es conveniente establecer una notación vectorial que permita calcular la acción de las transformaciones sin necesidad de verificar “caso por caso” las notas individuales.

6.2.3. Representación vectorial de las tríadas

Se puede establecer una biyección entre el conjunto de las 24 tríadas riemannianas \mathcal{R} y el producto cartesiano $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2$. Se define el *espacio de estados triádicos* como el conjunto de pares ordenados $S = \{(r, \sigma)\}$, donde:

- i) $r \in \mathbb{Z}_{12}$ representa la fundamental del acorde.
- ii) $\sigma \in \{1, -1\}$ representa el modo del acorde, donde 1 denota **mayor** y -1 denota **menor**.

Ejemplo 6.2.6. Siguiendo este nuevo modelo Do Mayor se representaría como la dupla $(0, 1)$.

Bajo esta representación, las transformaciones \mathcal{P} , \mathcal{L} y \mathcal{R} pueden definirse como funciones biyectivas $f : S \rightarrow S$ que invierten el signo de σ (cambian de modo) y desplazan la fundamental r una cantidad dependiente del modo actual.

Definición 6.2.8 (Transformación neo-Riemanniana). La **transformación neo-Riemanniana** F_k es una aplicación lineal que actúa sobre una tríada (r, σ) de la siguiente manera:

$$F_k(r, \sigma) = (r + k \cdot \sigma, -\sigma) \quad (\text{mód } 12)$$

donde k es una constante de desplazamiento específica para cada transformación.

- i) **Para la transformación \mathcal{P}** , el desplazamiento es nulo ($k = 0$):

$$\mathcal{P}(r, \sigma) = (r, -\sigma) = F_0(r, \sigma)$$

(La fundamental se mantiene, el modo cambia).

- ii) **Para la transformación \mathcal{L}** , el desplazamiento es de una tercera mayor ($k = 4$):

$$\mathcal{L}(r, \sigma) = (r + 4\sigma, -\sigma) = F_4(r, \sigma)$$

(Si es **mayor**, la fundamental sube 4 semitonos; si es **menor**, baja 4 semitonos.)

- iii) **Para la transformación \mathcal{R}** , el desplazamiento es de una sexta mayor ($k = 9 \equiv -3$ (mód 12)):

$$\mathcal{R}(r, \sigma) = (r + 9\sigma, -\sigma) = F_9(r, \sigma)$$

Observación 6.2.6 (Modelado matricial). La definición anterior sugiere permite, al ser las transformaciones lineales sobre el módulo $\mathbb{Z}_{12} \times \{1, -1\}$, escribir la tríada como un vector columna $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} r \\ \sigma \end{pmatrix}$, y cada transformación F_k como una matriz de la forma:

$$\mathbf{M}_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De este modo, se obtienen las matrices generadoras del grupo PLR:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observación 6.2.7. Esta formulación permite programar las operaciones como algoritmos simples facilitando el cálculo de cadenas complejas de transformaciones.

Ejemplo 6.2.7 (Verificación matricial de los ejemplos 6.2.3, 6.2.4 y 6.2.5.). A continuación, retomo los casos prácticos expuestos anteriormente para verificar la robustez del modelo algebraico.

Ejemplo 30 bis

Se expresa Fa Mayor con fundamental $r = 5$ (**fa**) y modo $\sigma = 1$ (**mayor**): $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se aplica la matriz $\mathbf{M}_{\mathcal{P}}$:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{P}} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El vector resultante $(5, -1)$ corresponde a la fundamental 5 (**fa**) con modo **menor**: **Fa menor** (**Fm**).

Ejemplo 31 bis

Se codifica **Mi Mayor** con $r = 4$ (**mi**) y $\sigma = 1$: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Aplicando la matriz $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}$:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El vector resultante $(8, -1)^t$ corresponde a la fundamental 8 (**sol** \sharp) con modo **menor**: **Sol** \sharp menor (**G** \sharp **m**).

Ejemplo 32 bis

Partiendo nuevamente de **Fa Mayor** $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se aplica la matriz $\mathbf{M}_{\mathcal{R}}$:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Reduciendo el módulo 12 ($14 \equiv 2$), se obtiene el vector $(2, -1)^t$. Esto corresponde a la fundamental 2 (**re**) con modo **menor**: **Re menor** (**Dm**).

Más allá de las operaciones individuales, el interés matemático reside en la estructura que estas generan.

Definición 6.2.9 (Grupo \mathcal{PLR}). El grupo \mathcal{PLR} , denotado a veces como \mathcal{G}_{PLR} , es el subgrupo del grupo simétrico S_{24} generado por las operaciones \mathcal{P} , \mathcal{L} y \mathcal{R} :

$$\mathcal{G}_{PLR} = \langle \mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R} \rangle$$

Observación 6.2.8. El grupo se escribe, de forma abreviada, como $\mathcal{G}_{PLR} = \langle \mathcal{L}, \mathcal{R} \rangle$ porque $\mathcal{P} = \mathcal{R}(\mathcal{LR})^3$.

Proposición 6.2.4 (Generadores involutivos). *Al aplicar las transformaciones dos veces, se retorna a la tríada original.*

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{L}^2 = \mathcal{R}^2 = id$$

Demostración. Basta con elevar al cuadrado las matrices generadoras. Dado que todas tienen la forma $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, su cuadrado es:

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

Esto demuestra que son involuciones. □

Proposición 6.2.5 (Isomorfismo). *El grupo \mathcal{G}_{PLR} es isomorfo al grupo diedral D_{24} de orden 24.*

Demostración. Se construirá un morfismo biyectivo $\phi: D_{24} \rightarrow \mathcal{G}_{PLR}$ de grupos.

Es sabido que el grupo diedral D_{24} (simetrías de un dodecágono) tiene la presentación generada por dos reflexiones x e y :

$$D_{24} = \langle x, y \mid x^2 = 1, y^2 = 1, (xy)^{12} = 1 \rangle$$

Por otra parte, en el grupo \mathcal{G}_{PLR} :

i) \mathcal{L} y \mathcal{R} son involuciones: $\mathbf{M}_{\mathcal{L}}^2 = \mathbf{I}$ y $\mathbf{M}_{\mathcal{R}}^2 = \mathbf{I}$.

ii) El producto $\mathcal{L} \cdot \mathcal{R}$, usando sus matrices:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{LR}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz representa una traslación de la fundamental $r \rightarrow r + 5$ (mód 12) manteniendo el modo. Como 5 y 12 son coprimos, $\text{mcd}(5, 12) = 1$, el elemento 5 es un generador de \mathbb{Z}_{12} y el orden de $\mathbf{M}_{\mathcal{LR}}$ es 12. Así, $(\mathbf{M}_{\mathcal{LR}})^{12} = \mathbf{I}$.

Dado que \mathcal{L} y \mathcal{R} satisfacen las mismas relaciones definitorias que x e y , existe un epimorfismo (homomorfismo sobreyectivo) $\phi : D_{24} \rightarrow \langle \mathcal{L}, \mathcal{R} \rangle$ tal que $\phi(x) = \mathcal{L}$ y $\phi(y) = \mathcal{R}$.

Para determinar la inyectividad, se observa el cardinal del grupo imagen. Como el grupo generado por $\langle \mathcal{L}, \mathcal{R} \rangle$ contiene las 12 traslaciones distintas (potencias de $\mathcal{L}\mathcal{R}$) y sus respectivas composiciones con la inversión, su cardinalidad es al menos 24. Sabiendo que $|D_{24}| = 24$, el homomorfismo ϕ debe ser necesariamente inyectivo y, por tanto, un isomorfismo. \square

Observación 6.2.9. Los grupos \mathcal{G}_{PLR} y \mathcal{TI} son isomorfos entre sí:

$$\mathcal{G}_{PLR} \cong \mathcal{TI} \cong D_{24}$$

Sin embargo, es crucial destacar que, aunque ambos grupos son isomorfos y actúan sobre el mismo conjunto de acordes, sus acciones son fundamentalmente diferentes. Mientras que \mathcal{TI} opera mediante transposiciones e inversiones globales en todo el espacio cromático, \mathcal{G}_{PLR} se centra en transformaciones locales entre tríadas específicas, siguiendo el principio de conducción de voces.

Proposición 6.2.6 (Transitividad). *El grupo \mathcal{G}_{PLR} actúa de manera transitiva sobre el conjunto \mathcal{R} . Esto implica que, dadas dos tríadas cualesquiera A y B , existe una única transformación en \mathcal{G}_{PLR} que lleva A a B .*

Demostración. Se prueban existencia y unicidad. Para la existencia, fijando una tríada de referencia, por ejemplo, Do Mayor, representada por el vector $\mathbf{u}_0 = (0, 1)^t$. Demuéstrese que se puede alcanzar cualquier otra tríada objetivo $\mathbf{v} = (r, \sigma)^t$, donde r es la fundamental y σ el modo. Como la operación $\tau = \mathcal{L} \cdot \mathcal{R}$ tiene como matriz asociada $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aplicar τ reiteradamente k veces sobre un acorde mayor equivale a sumar $5k$ a su fundamental:

$$\tau^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5k \\ 1 \end{pmatrix} \pmod{12}$$

Dado que $\text{mcd}(5, 12) = 1$, la congruencia lineal $5k \equiv r \pmod{12}$ tiene solución para cualquier $r \in \mathbb{Z}_{12}$, garantizando que se puede alcanzar cualquier tríada **mayor**. Análogamente, si el objetivo es una tríada **menor** ($\mathbf{v} = (r, -1)^t$), basta con alcanzar primero la tríada **mayor** $(r, 1)^t$ y aplicar posteriormente la transformación \mathcal{P} (que cambia el modo sin mover la fundamental). Por tanto, la órbita de cualquier acorde bajo la acción del grupo cubre todo el conjunto \mathcal{TR} .

Para ver la unicidad, se ha demostrado anteriormente que el cardinal del grupo es $|\mathcal{G}_{PLR}| = 24$ y se sabe que el cardinal del conjunto de acordes es $|\mathcal{TR}| = 24$. Como en una acción transitiva de un grupo finito G sobre un conjunto X , si $|G| = |X|$, la acción es necesariamente simplemente transitiva (o regular). Esto implica que el estabilizador de cualquier elemento es trivial (solo la identidad deja fijo el acorde). En consecuencia, existe exactamente una transformación para cada par de acordes. \square

Teorema 6.2.1 (Dualidad de Lewin). *Existe una relación de dualidad entre el grupo de transposiciones (\mathcal{T}, \circ) y el grupo neo-Riemanniano \mathcal{G}_{PLR} . Aunque ambos actúan sobre el mismo conjunto de acordes, sus operaciones conmutan entre sí:*

$$\forall T_n \in \mathcal{T}, \forall F \in \mathcal{G}_{PLR} \implies T_n(F(A)) = F(T_n(A))$$

Esta propiedad es fundamental musicalmente: asegura que las relaciones armónicas internas (como “ir a la relativa menor”) son independientes de la tonalidad. El relativo de una transposición es la transposición del relativo.

Demostración. Empleando la representación vectorial definida en la sección anterior. Sea un acorde representado por el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} r \\ \sigma \end{pmatrix}$.

1. Se define la acción de una transposición T_n sobre un vector:

$$T_n \begin{pmatrix} r \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + n \\ \sigma \end{pmatrix}$$

2. Recuérdesse la definición general de una transformación neo-Riemanniana F_k (ya sea \mathcal{P} , \mathcal{L} o \mathcal{R}) dada por su fórmula lineal:

$$F_k \begin{pmatrix} r \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + k\sigma \\ -\sigma \end{pmatrix}$$

3. Ahora se calcula la composición en ambos órdenes para verificar si el resultado es idéntico.

$$T_n \left(F_k \begin{pmatrix} r \\ \sigma \end{pmatrix} \right) = T_n \begin{pmatrix} r + k\sigma \\ -\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r + k\sigma) + n \\ -\sigma \end{pmatrix}$$

Al aplicar F_k , se debe sumar k multiplicado por el modo actual del vector (que es σ).

$$F_k \left(T_n \begin{pmatrix} r \\ \sigma \end{pmatrix} \right) = F_k \begin{pmatrix} r + n \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r + n) + k\sigma \\ -\sigma \end{pmatrix}$$

Dado que la suma en \mathbb{Z}_{12} es conmutativa y ambos vectores son idénticos, queda demostrado que cualquier operación $\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{R}$ conmuta con cualquier transposición. \square

6.2.4. Otras transformaciones

Para acabar de conferir a la armonía musical, planteada como transformaciones de la teoría Neo-Riemanniana, una estructura consistente y capaz de modelar cada cambio tonal y sonoro que en ella tienen lugar se presenta un pequeño compendio de modificaciones que, a pesar de no ser tan comunes, merecen ser mencionadas y aparecen de la combinación de las transformaciones básicas \mathcal{P} , \mathcal{L} , \mathcal{R} . Es por ese motivo que no guardan un papel preponderante.

Definición 6.2.10 (\mathcal{S}). La transformación \mathcal{S} (del inglés *Slide*) intercambia dos tríadas de distinto modo que comparten la tercera. Geométricamente, implica desplazar la fundamental y la quinta un semitono en la misma dirección, manteniendo la tercera fija.

$$\mathcal{S} = \mathcal{L} \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{R} \quad (6.1)$$

Ejemplo 6.2.8. Partiendo de Do Mayor ($\{0, 4, 7\}$), la nota que actúa como tercera es el **mi** (4). Manteniendo el 4 y desplazando la fundamental ($0 \rightarrow 1$) y la quinta ($7 \rightarrow 8$), se obtiene $\{1, 4, 8\}$, que corresponde a las notas **do**♯, **mi**, **sol**♯. Esta es la tríada de **Do**♯ menor. Nótese el efecto cromático deslizante: Do Mayor y **Do**♯ menor se sienten como acordes lejanos tonalmente, pero comparten la nota central.

Definición 6.2.11 (\mathcal{N}). La transformación \mathcal{N} (del alemán *Nebenverwandt*, pariente vecino) intercambia una tríada **mayor** con su subdominante **menor**, y una tríada **menor** con su dominante **mayor**. En términos de conducción de voces, se conservan la fundamental (si es **mayor**) o la quinta (si es **menor**), y las otras dos notas se mueven un semitono convergiendo o divergiendo.

$$\mathcal{N} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{P} \quad (6.2)$$

Ejemplo 6.2.9. En Do Mayor ($\{0, 4, 7\}$), la transformación \mathcal{N} lleva a su subdominante **menor**. Las notas que forman la tercera **menor** del acorde original (4 y 7, **mi** y **sol**) se desplazan un semitono ascendente hacia 5 (**fa**) y 8 (**la**♭). La fundamental 0 (**do**) se mantiene. El resultado es $\{0, 5, 8\}$ (**do**, **fa**, **la**♭), que reordenado es la tríada de **Fa** menor (**Fm**).

Definición 6.2.12 (\mathcal{H}). La transformación \mathcal{H} (polo hexatónico) conecta una tríada con su opuesto polar en el ciclo hexatónico de Cohn. Es la transformación más drástica, ya que no comparte ninguna nota común con el acorde original, pero la conducción de voces es muy suave (todas las notas se mueven un semitono en direcciones alternas).

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{L} \quad (6.3)$$

Ejemplo 6.2.10. Para Do Mayor ($\{0, 4, 7\}$), la transformación \mathcal{H} genera el acorde de **La**♭ menor ($\{8, 11, 3\}$). El movimiento cromático estricto:

do (0) baja a **si** (11).


 Figura 6.2: Ejemplo de transformaciones $\mathcal{S}, \mathcal{N}, \mathcal{H}$ sobre el acorde de DoM.

mi (4) baja a **mi \flat** /**re \sharp** (3).

sol (7) sube a **la \flat** (8).

Observación 6.2.10. Dado que las transformaciones $\mathcal{S}, \mathcal{N}, \mathcal{H}$ son, como ya he señalado, combinaciones de las transformaciones “primarias” ($\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$), también pueden escribirse de forma matricial sin más que realizar el producto en $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ indicado por las expresiones 6.1, 6.2 o 6.3. Por ejemplo, para 6.1

$$M_S = M_{\mathcal{L}} M_{\mathcal{P}} M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6.3. Visualización geométrica: El Tonnetz

Toda la estructura algebraica y las propiedades de grupo descritas anteriormente encuentran su representación visual en el Tonnetz (del alemán *Ton*, sonido, y *Netz*, red). Originalmente concebido por Euler (1739) y refinado por Riemann, en la teoría moderna se interpreta como el grafo dual de las transformaciones $\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{R}$.

El Tonnetz es un complejo celular simplicial (un enrejado de triángulos) construido sobre el plano, donde:

1. Los **nodos (vértices)** representan las clases de altura \mathbb{Z}_{12} .
2. Las **aristas** conectan notas separadas por intervalos consonantes:
 - Eje horizontal: 5^a **justa** (7 semitonos).
 - Eje diagonal izquierdo: 3^a **mayor** (4 semitonos).
 - Eje diagonal derecho: 3^a **menor** (3 semitonos).
3. Las **caras (triángulos)** representan las tríadas. Cada triángulo conecta tres notas que forman un acorde.

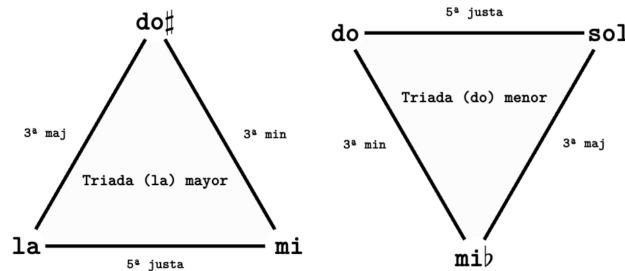


Figura 6.3: Triangulos extraídos del Tonnetz. Los triángulos apuntando hacia arriba representan acordes mayores; los que apuntan hacia abajo, acordes menores.

6.3.1. Las transformaciones como movimientos en el plano

La elegancia del Tonnetz reside en que convierte las operaciones algebraicas \mathcal{P} , \mathcal{L} y \mathcal{R} en movimientos geométricos simples de volteo (*flips*) sobre las aristas de los triángulos.

Dado un triángulo que representa una tríada:

- La transformación \mathcal{P} invierte el triángulo sobre la arista de la 5ª justa (la arista compartida entre el Mayor y su Paralelo menor).
- La transformación \mathcal{L} invierte el triángulo sobre la arista de la 3ª menor (intercambio de sensible).
- La transformación \mathcal{R} invierte el triángulo sobre la arista de la 3ª mayor (relativo).

De esta forma, una progresión de acordes compleja puede visualizarse como un camino o trayectoria a través de esta red triangular. Los compositores del romanticismo tardío, como Wagner o Liszt, [4], a menudo generaban progresiones que, si bien son difíciles de analizar con números romanos tradicionales, trazan líneas rectas o figuras compactas en el Tonnetz, revelando la lógica de conducción de voces subyacente.

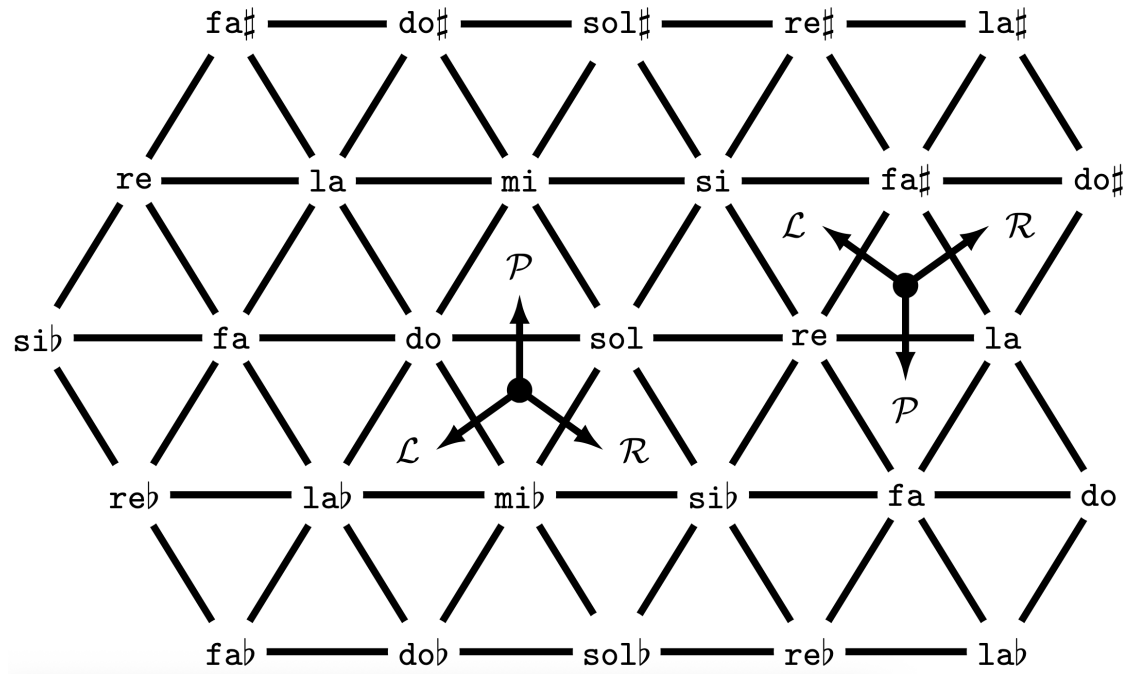


Figura 6.4: Grafo dual de Tonnetz.

Capítulo 7

El semigrupo armónico

Hasta este punto del proyecto, se ha justificado el uso del sistema de 12 divisiones de la octava mediante argumentos aritméticos (fracciones continuas), geométricos (Tonnetz) e instrumentales. Sin embargo, existe una justificación mucho más reciente y puramente algebraica propuesta por Bras-Amorós [5], como se introdujo en 3.5.

Si se concibe la serie armónica física no solo como un fenómeno acústico, sino como una estructura matemática (*monoide temperado*) que evoluciona logarítmicamente, el proceso de establecer un temperamento igual equivale a “discretizar” esta realidad continua. Esto implica proyectar los armónicos físicos sobre una rejilla de números enteros (las notas del sistema temperado), amplificándolos por un factor m (el número de divisiones de la octava) y redondeando al entero más cercano.

De esta manera, la música se modela como un problema de traducción entre el continuo de las frecuencias reales y el discreto de las teclas de un instrumento. La pregunta central que aborda este capítulo es: ¿existe una estructura algebraica óptima que permita realizar este mapeo sin perder las propiedades esenciales del sonido? La respuesta es afirmativa y a continuación, se procede a formalizar las condiciones que conducen a este resultado.

7.1. Continuo y discreto

En el capítulo 2 ya se introducen algunos de los conceptos en los que ahora se profundizará.

Si se modeliza la serie armónica estrictamente en el dominio físico de las frecuencias, la relación entre sus elementos es multiplicativa (el segundo armónico tiene el doble de frecuencia que el fundamental; el tercero, el triple, etc.). Sin embargo, como se ha explicado anteriormente, la psicofísica del sistema auditivo humano no funciona de manera lineal, sino logarítmica (*Ley de Weber-Fechner*). Esto significa que lo que físicamente es un cociente de frecuencias, el cerebro lo interpreta como una “distancia” o intervalo musical.

Debido a esta naturaleza logarítmica de la percepción auditiva, para construir un modelo algebraico que represente fielmente la altura musical, es necesario traducir la estructura multiplicativa de las frecuencias a una estructura aditiva. Por tanto, lo que se hace es buscar un subconjunto de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ que sea cerrado bajo la suma y donde la operación de sumar elementos (intervalos) sea el homólogo perceptivo de multiplicar frecuencias.

Definición 7.1.1 (Monoide Temperado). Un *monoide temperado* M es una sucesión estrictamente creciente de números reales no negativos $M = \{\mu_1, \mu_2, \dots\}$ que cumple tres condiciones:

- i) $\mu_1 = 0$ (El elemento neutro, la nota fundamental).
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) = 0$ (Los elementos se vuelven asintóticamente densos).
- iii) M es cerrado bajo la suma: $\forall \mu_i, \mu_j \in M, \mu_i + \mu_j \in M$.

Observación 7.1.1. Ver ejemplo 2.4.6.

Ejemplo 7.1.1. El siguiente conjunto es un monoide temperado.

$$\mathcal{Q} = \{0\} \vee \left\{ n + \frac{k}{2^{n+1}} : n \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq k \leq 2^{n+1} - 1 \right\}$$

Observación 7.1.2 (Monoide Temperado Normalizado). Un monoide temperado se dice **normalizado** si su primer elemento no nulo es 1. Es decir, $\mu_2 = 1$. Si un monoide M tiene como primer elemento no nulo $\mu_2 \neq 1$, siempre se puede normalizar dividiendo todos sus elementos por μ_2 .

Mientras que los monoides temperados viven en \mathbb{R} , los sistemas de afinación prácticos viven en \mathbb{N} (números de tecla, trastes de guitarra, MIDI). La estructura algebraica que subyace a esta idea es el semigrupo numérico.

Aunque igualmente se definió en los preliminares, se recuerda aquí su caracterización específica en el contexto de este problema.

Definición 7.1.2 (Semigrupo Numérico). Un **semigrupo numérico** S es un subconjunto de \mathbb{N}_0 cerrado bajo la suma, que contiene al 0 y cuyo complemento en \mathbb{N}_0 es finito. El elemento no nulo más pequeño de S , denotado por $m(S)$, se denomina **multiplicidad**.

Ejemplo 7.1.2. El conjunto H que surge de la escala cromática usual (considerando la octava dividida en 12 partes) es un semigrupo numérico con multiplicidad $m = 12$:

$$H = \{0, 12, 19, 24, 28, 31, 34, 36, 38, 40, 42, 43\} \vee \{n \in \mathbb{N} : n \geq 45\}$$

Para visualizarlo musicalmente:

- Los múltiplos de la base $(0, 12, 24, 36 \dots)$ representan a los **sonidos fundamentales** repetidos en diferentes octavas.
- Los elementos intercalados, como el 19 $(12 + 7)$, representan los **segundos sonidos del espectro**, que en música corresponden a la *quinta justa*.

Es decir, el semigrupo va “rellenando” los huecos siguiendo el orden natural de los armónicos: primero la octava (12) y después la quinta (19).

El puente entre el mundo continuo ($M \subset \mathbb{R}$) y el discreto ($S \subset \mathbb{N}$) se corresponde con la operación de discretización, que se formaliza mediante las funciones de redondeo.

Definición 7.1.3. Dado un número real x , se denota su **redondeo al entero más cercano** como $[x]$, su función suelo como $\lfloor x \rfloor$ y su techo como $\lceil x \rceil$. De forma general, para un parámetro de redondeo $\alpha \in [0, 1)$ se define:

$$[x]_\alpha = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } x - \lfloor x \rfloor < \alpha \\ \lceil x \rceil & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 7.1.3 (El papel del parámetro α). El parámetro α actúa como un umbral de decisión que determina cuán grande debe ser la parte decimal para saltar al siguiente entero. Se considera el número real $x = 3.4$. Su parte fraccionaria es 0.4. Se observa cómo cambia su discretización al variar α :

($\alpha = 0.5$) El umbral está a la mitad. Como $0.4 < 0.5$, el número se redondea hacia abajo (“se queda en el suelo”).

$$[3.4]_{0.5} = 3$$

($\alpha = 0.3$) Aquí somos muy permisivos para subir. Como la parte decimal 0.4 supera el umbral 0.3 ($0.4 \geq 0.3$), el número se redondea hacia arriba (“salta al techo”).

$$[3.4]_{0.3} = 4$$

Musicalmente, esto es una herramienta matemática muy potente: permite ajustar la “rejilla” de afinación. Si una nota ideal cae en 3.4 (un poco desafinada hacia abajo), se puede elegir un α específico para forzar que se asigne a la tecla 4 en lugar de a la tecla 3, corrigiendo la afinación según nos convenga para que coincidan las estructuras algebraicas.

Observación 7.1.3. Particularmente, se tiene que $\lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor_1$, $\lceil x \rceil = \lceil x \rceil_0$ y $\lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor_{0.5}$.

Definición 7.1.4 (Discretización). Sea M un monoide temperado y $m \in \mathbb{Z}^+$ un factor de ampliación (que musicalmente representa el número de divisiones de la octava). Se define **la discretización de M** por multiplicidad m y parámetro α como el conjunto:

$$[mM]_\alpha = \{[m \cdot \mu]_\alpha : \mu \in M\}$$

Observación 7.1.4. El problema fundamental es que, aunque M sea cerrado bajo la suma (sea un monoide), en ocasiones la versión discretizada $[mM]_\alpha$ no tiene por qué serlo y el redondeo introduce errores que pueden romper la estructura de semigrupo.

Definición 7.1.5 (Discretizable). Se dice que un monoide temperado M es **discretizable** por una multiplicidad m si el conjunto resultante $[mM]_\alpha$ es un semigrupo numérico.

Ejemplo 7.1.4. Tomando el conjunto \mathcal{Q} del ejemplo 7.1.1 y $m = 10$, se tiene que

$$10\mathcal{Q} = \{0, 10, 12.5, 15, 17.5, 20, 21.25, 22.5, 23.75, 25, \\ 26.25, 27.5, 28.75, 30, 30.625, 31.25, 31.875, 32.5, \dots\}$$

Ahora, se observa qué ocurre al discretizar:

$$\lfloor 10\mathcal{Q} \rfloor = \{0, 10, 12, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 25, \\ 26, 27, 28, 30, 31, 32, \dots\} \cup \{i \in \mathbb{N} : i \geq 33\}$$

Aquí surge un problema estructural. Para que este conjunto sea un semigrupo numérico, debe ser cerrado bajo la suma. Sin embargo, se observa que el elemento 12 pertenece al conjunto (proviene de 12.5), pero la suma $12 + 12 = 24 \notin 10\mathcal{Q}$. En el segundo periodo, los valores saltan de 23 a 25.

Esto demuestra que \mathcal{Q} es **no discretizable** por multiplicidad 10 (bajo la función suelo), ya que el redondeo ha destruido la propiedad de clausura.

7.2. Monoides compatibles con el producto

Tras establecer el mecanismo de discretización, ahora tratamos de preguntarnos: ¿qué forma debe tener el monoide ideal M ? La primera pista viene de la mano de la acústica.

En la física del sonido, ya se ha visto que la relación entre armónicos es multiplicativa (*i.e.*, el tercer armónico tiene el triple de frecuencia que el fundamental). Sin embargo, en la estructura de monoide (y en nuestra percepción de altura), se opera sumando intervalos. Por tanto, se busca un monoide $M = \{\mu_1, \mu_2, \dots\}$ cuyos elementos se comporten aditivamente igual que los índices se comportan multiplicativamente.

Definición 7.2.1 (Compatibilidad de producto). Un monoide temperado $M = \{\mu_1, \mu_2, \dots\}$ (con $\mu_i < \mu_{i+1}$) es **compatible con el producto** si satisface la condición:

$$\mu_{i \cdot j} = \mu_i + \mu_j \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Musicalmente, esto significa que el intervalo del armónico $i \cdot j$ respecto a la fundamental es la suma del intervalo del armónico i y el del armónico j .

Proposición 7.2.1. El conjunto logarítmico $L = \{\lambda_n = \log_2(n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un monoide temperado normalizado y compatible con el producto.

Demostración. Se verifican las condiciones que lo caracterizan paso a paso:

Dado que $n \in \mathbb{N}$ (empezando en 1), el primer elemento es $\lambda_1 = \log_2(1) = 0$. Además, como la función logaritmo es estrictamente creciente para $x > 0$, se cumple que $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ para todo n . Ahora, se ve que la distancia entre elementos consecutivos tiende a cero.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2(n+1) - \log_2(n)) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left(\frac{n+1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, y el logaritmo es una función continua $\log_2(1) = 0$. Por tanto, L es un monoide temperado. Igualmente, hay que probar que $\lambda_i + \lambda_j = \lambda_{i \cdot j}$ para ver la clausura. Tomamos dos elementos cualesquiera $\lambda_i, \lambda_j \in L$.

$$\lambda_i + \lambda_j = \log_2(i) + \log_2(j)$$

Por la propiedad fundamental de los logaritmos (el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos):

$$\log_2(i) + \log_2(j) = \log_2(i \cdot j) = \lambda_{i \cdot j}.$$

Esto demuestra que L es cerrado bajo la suma y satisface la condición de compatibilidad de producto. Finalmente, como el primer elemento no nulo es $\lambda_2 = \log_2(2) = 1$, el monoide está normalizado. \square

Ahora se verá que este monoide que se acaba de caracterizar es único.

Teorema 7.2.1. *El monoide logarítmico $L = \{\log_2(i) : i \in \mathbb{N}\}$ es el **único** monoide temperado normalizado que es compatible con el producto.*

Demostración. Sea $M = \{\mu_1, \mu_2, \dots\}$ un monoide temperado normalizado compatible con el producto. Se debe demostrar que $\mu_i = \log_2(i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por la definición de compatibilidad, se sabe que $\mu_{a \cdot b} = \mu_a + \mu_b$. Por inducción, es fácil ver que para cualquier potencia j^k :

$$\mu_{j^k} = \underbrace{\mu_j + \mu_j + \dots + \mu_j}_k = \underbrace{\mu_j + \dots + \mu_j}_k = k \cdot \mu_j$$

Además, al ser normalizado, se sabe que $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 1$. Ahora, por contradicción se supone que existe algún índice i para el cual $\mu_i \neq \log_2(i)$. Entonces, debe ocurrir uno de los dos casos: $\mu_i < \log_2(i)$ o $\mu_i > \log_2(i)$.

Si $\mu_i < \log_2(i)$, por la densidad de los números racionales en \mathbb{R} , existen dos enteros positivos $p, q \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\mu_i < \frac{p}{q} < \log_2(i)$$

y multiplicando toda la desigualdad por q :

$$q\mu_i < p < q \log_2(i)$$

Esto implica dos desigualdades:

(1) $q\mu_i < p$. Como el monoide es normalizado ($\mu_2 = 1$), se puede escribir $p = p \cdot \mu_2$. Por la propiedad de potencias ($\mu_{x^k} = k\mu_x$), esto equivale a $\mu_{i^q} < \mu_{2^p}$. Al ser M estrictamente creciente, entonces $i^q < 2^p$.

(2) $\frac{p}{q} < \log_2(i) \implies p < \log_2(i^q) \implies 2^p < i^q$.

Se ha llegado a que $i^q < 2^p$ y simultáneamente $2^p < i^q$, una contradicción. El caso $\mu_i > \log_2(i)$ es análogo. Por tanto, $\mu_i = \log_2(i)$, lo que demuestra que M debe ser idéntico a L . \square

Este resultado establece que el conjunto L es el candidato indiscutible para representar la “música continua”. Cualquier sistema de afinación válido debe ser, por tanto, una buena discretización de L .

7.3. Monoides fractales

Una vez establecida la necesidad logarítmica, justificada en el teorema 7.2.1, se aborda la segunda propiedad estructural: la autosimilitud. En música, es deseable que la estructura de la escala se pueda repetir a diferentes niveles de altura para poder transportar melodías entre tonalidades e instrumentos de forma sencilla.

Antes de definir la fractalidad, se formaliza la estructura periódica de un monoide. Dado que un monoide temperado normalizado M contiene a todos los enteros \mathbb{N} (por ser cerrado bajo la suma de $1 + 1 + \dots$), se puede estudiar qué elementos existen entre dos enteros consecutivos.

Definición 7.3.1 (Periodo). Sea M un monoide temperado normalizado. Para cualquier $i \in \mathbb{N}$, el i -ésimo periodo, denotado por $\pi_i(M)$, es el conjunto de elementos de M que se encuentran en el intervalo $[i, i + 1)$:

$$\pi_i(M) = \{x \in M \mid i \leq x < i + 1\}$$

La cardinalidad de este conjunto se denomina *granularidad* del periodo.

Ejemplo 7.3.1 (Granularidad). Se analiza la granularidad en dos monoides distintos:

Sea $M = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Tiene por periodos:

$$\begin{aligned} \pi_0(\mathbb{N}_0) &= \{0\} && \rightarrow \text{Granularidad 1} \\ \pi_1(\mathbb{N}_0) &= \{1\} && \rightarrow \text{Granularidad 1} \\ \pi_2(\mathbb{N}_0) &= \{2\} && \rightarrow \text{Granularidad 1} \end{aligned}$$

La granularidad es constante. Hay exactamente un elemento por unidad.

Sea $L = \{\log_2(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Recordemos que el índice del periodo, i , representa musicalmente el número de octava.

- **Periodo 0** $([0, 1))$: Se busca n tal que $0 \leq \log_2(n) < 1$. Esto implica $1 \leq n < 2$.

$$\pi_0(L) = \{\log_2(1)\} = \{0\}. \quad (\text{Granularidad 1})$$

- **Periodo 1** $([1, 2))$: Se busca n tal que $1 \leq \log_2(n) < 2$, es decir, $2 \leq n < 4$.

$$\pi_1(L) = \{\log_2(2), \log_2(3)\} \approx \{1, 1.58\}. \quad (\text{Granularidad 2})$$

- **Periodo 2** $([2, 3))$: Se busca n tal que $2 \leq \log_2(n) < 3$, es decir, $4 \leq n < 8$.

$$\pi_2(L) = \{\log_2(4), \log_2(5), \log_2(6), \log_2(7)\}. \quad (\text{Granularidad 4})$$

En general, la granularidad del i -ésimo periodo en L es 2^i . Musicalmente, esto refleja que en la octava i existen 2^i armónicos físicos distintos.

Definición 7.3.2 (Monoide Fractal). Un monoide M es **fractal** si la estructura de su primer periodo $\pi_1(M)$ se reproduce autosimilarmente para rellenar los huecos en niveles sucesivos de detalle. Es decir, dividiendo el intervalo $[0, 1]$ en ciertas proporciones, el intervalo $[1, 2]$ debe estar dividido exactamente en las mismas proporciones, y a su vez, cada sub-intervalo generado debe subdividirse siguiendo el mismo patrón.

Ejemplo 7.3.2 (El sistema decimal). Considerando el conjunto D formado por todos los números decimales finitos:

$$D = \{n + d_1 10^{-1} + d_2 10^{-2} + \dots + d_k 10^{-k}\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Se distinguen los periodos

$$\{1, 1.1, 1.2, \dots, 1.9\}. \quad (\text{Divide la unidad en 10 partes}).$$

Haciendo *zoom* entre 1.1 y 1.2, $\{1.11, 1.12, \dots, 1.19\}$. (Vuelve a dividir el sub-intervalo en 10 partes iguales).

Esta autosimilitud convierte a D en un monoïde fractal.

Ejemplo 7.3.3. Retomando el monoïde logarítmico $L = \{\lambda_i = \log_2(i) : i \in \mathbb{N}\}$. Aunque cumple la compatibilidad de producto, carece de estructura fractal.

Para que lo fuera, la proporción entre los sub-intervalos del primer periodo debería mantenerse en el siguiente. Esto implicaría la igualdad:

$$\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_4 - \lambda_2} = \frac{\lambda_5 - \lambda_4}{\lambda_6 - \lambda_4}$$

Sustituyendo los valores logarítmicos y simplificando ($\lambda_4 - \lambda_2 = \log_2(4) - \log_2(2) = 2 - 1 = 1$):

$$\frac{\log_2(3) - 1}{1} = \frac{\log_2(5) - 2}{\log_2(6) - 2}$$

O equivalentemente, usando propiedades de logaritmos:

$$\log_2(1.5) = \frac{\log_2(1.25)}{\log_2(1.5)} \implies (\log_2(1.5))^2 = \log_2(1.25)$$

Calculando los valores: $(0.585)^2 \approx 0.34$, mientras que $\log_2(1.25) \approx 0.32$. La igualdad es falsa. Por tanto, L no posee la propiedad de autosimilitud fractal.

Teorema 7.3.1 (Unicidad del Monoïde Fractal Áureo). *Existe un único monoïde fractal normalizado no biseccional de granularidad 2. Este monoïde está generado por el número áureo ϕ .*

Demostración. Sea M un monoïde fractal normalizado cuyo primer periodo es $\{1, 1+p\}$ con $0 < p < 1$. Se busca determinar el valor de p .

Por la definición de fractalidad, la estructura del primer intervalo se proyecta a los siguientes. Esto permite calcular explícitamente los elementos de los primeros periodos:

- (1) $\{1, 1+p\}$
- (2) $\{2, 2+p^2, 2+p, 2+2p-p^2\}$
- (3) $\{3, \dots, 3+2p-p^2, \dots\}$

Nota. Los términos p^2 surgen de escalar el intervalo original de tamaño 1 por el factor p .

Para que M sea un monoïde, debe ser cerrado bajo la suma. En particular, la suma del elemento generador consigo mismo debe pertenecer al conjunto:

$$(1+p) + (1+p) = 2+2p \in M$$

Analizando dónde cae dicho valor

1. Si $p < 0.5$, entonces $2+p < 2+2p < 3$. Al mirar los elementos disponibles en (2), la única opción es que $2+2p = 2+2p-p^2$, lo que implica $p = 0$, que no es válido.
2. Si $p > 0.5$, entonces $2+2p > 3$. Esto significa que la suma “se sale” de (2) y cae en (3).

Buscando, por tanto, en (3). para hacer coincidir el orden, se tiene que

$$2+2p = 3+p^3$$

Resolviendo esta ecuación cúbica:

$$\begin{aligned} p^3 - 2p + 1 &= 0 \\ (p-1)(p^2 + p - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones son $p = 1$ y las raíces de $p^2 + p - 1 = 0$. La única solución positiva en el rango $(0, 1)$ es:

$$p = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\phi} = \phi - 1 \approx 0.618$$

Por tanto, el único generador posible es la parte decimal del número áureo. El monoïde resultante es $F = \{0, 1, \phi, 2, 2 + \frac{1}{\phi} \dots\}$. \square

Este monoïde F representa una estructura de crecimiento orgánico ideal. Sus primeros elementos (redondeados) son:

$$\{0, 1, 1.618, 2, 2.618, \dots\}$$

7.4. La convergencia en el sistema de 12 tonos

Tras haber expuesto, por un lado, la naturaleza aditiva de los intervalos que exige el uso del monoide logarítmico L y, por otro, la búsqueda de una estructura autosimilar o fractal ideal que conduce al monoide fractal áureo F , a lo largo de la presente sección se justificará cuándo ambas estructuras coinciden y permiten determinar el patrón establecido y universal que rige la música occidental que todos conocemos y somos capaces de escuchar e identificar.

En el dominio continuo (\mathbb{R}), los monoides logarítmico y fractal se corresponden con los conjuntos aproximados:

$$\begin{aligned} L &\approx \{0, 1, 1.585, 2, 2.322, \dots\} \\ F &\approx \{0, 1, 1.618, 2, 2.618, \dots\} \end{aligned}$$

Sin embargo, dado que la música práctica, en general, requiere de discretización, se buscará un número de divisiones de la octava (m) tal que las versiones discretas de ambos monoides sean indistinguibles. Para hacerlo se introducen algunos conceptos.

Definición 7.4.1 (Discretización simultánea). Se dice que una multiplicidad m genera una **discretización simultánea** si los semigrupos numéricos resultantes de discretizar L y F coinciden:

$$[m \cdot L]_\alpha = [m \cdot F]_\beta$$

para algunos parámetros de redondeo α, β .

Antes de obtener el número de divisiones de la octava óptimo, (m), se aclara una última restricción física proveniente de la acústica de los tubos cerrados (como el clarinete). Estos instrumentos solo producen armónicos impares ($1, 3, 5, \dots$). Un sistema de afinación robusto debe permitir sumar los intervalos correspondientes a estos armónicos sin generar inconsistencias dentro del semigrupo. Para ello, se define la propiedad de *impar-filtrabilidad*, primero para los monoides ideales en \mathbb{R} .

Definición 7.4.2 (Monoide impar-filtrable). Sea $M = \{\mu_1, \mu_2, \dots\}$ un monoide temperado. Se dice que es **impar-filtrable** si el subconjunto formado por los elementos de índice impar $M_{\text{odd}} = \{\mu_1, \mu_3, \mu_5, \dots\}$ es cerrado bajo la suma.

Tomando esto en cuenta, existe entonces una diferencia fundamental entre los dos candidatos ideales (L y F):

Teorema 7.4.1. *El monoide logarítmico L es impar-filtrable.*

Demostración. Los elementos de L son de la forma $\log_2(i)$. Tomando dos elementos $\mu_a = \log_2(a)$ y $\mu_b = \log_2(b)$, donde a, b son números impares. Su suma es:

$$\mu_a + \mu_b = \log_2(a) + \log_2(b) = \log_2(a \cdot b)$$

Dado que el producto de dos números impares es siempre impar, el resultado corresponde al elemento $\mu_{a \cdot b}$, que tiene índice impar. Por tanto, la suma se mantiene dentro del subconjunto. \square

Sin embargo, para el monoide fractal áureo, esto falla.

Ejemplo 7.4.1. En el monoide F , generado por ϕ , los elementos de índice impar son $\mu_3 = 1 + (\phi - 1) = \phi$ y $\mu_5 = 2 + (\phi - 1)^2$. Sin embargo, su suma corresponde a un elemento de índice par (μ_{16}). Por tanto, F no es impar-filtrable en el dominio continuo.

Aquí es donde la discretización (el paso a enteros) juega un papel salvador. Al proyectar F sobre los enteros, se introducen errores de redondeo que pueden “arreglar” este defecto, pero solo si la multiplicidad m es la adecuada.

Definición 7.4.3 (Colapso). Dado un monoide temperado $M = \{\mu_i\}$ y una discretización $[mM]$, se dice que ocurre un **colapso** en el índice k si dos elementos distintos del monoide se mapean al mismo entero:

$$[m \cdot \mu_k] = [m \cdot \mu_{k+1}]$$

El valor del colapso es el entero donde esto ocurre. A partir de este punto, la información sobre paridad/imparidad se pierde.

Definición 7.4.4 (Semigrupo impar-filtrable). Un semigrupo numérico obtenido por discretización es *impar-filtrable* si la suma de cualquier par de elementos de índice impar es:

- i) O bien otro elemento de índice impar del semigrupo.
- ii) O bien un valor mayor o igual al colapso.

Finalmente, disponemos de todas las herramientas necesarias para determinar el sistema de afinación óptimo. El procedimiento lógico consiste en someter a los posibles valores de m (el número de notas de la escala) a un doble cribado: primero exigimos la coherencia algebraica entre los modelos ideales y, posteriormente, la consistencia acústica.

El primer paso es buscar aquellas multiplicidades para las cuales la discretización del monoide logarítmico (la percepción del oído) y la del fractal áureo (la estructura geométrica ideal) resultan indistinguibles.

Teorema 7.4.2. *Existe un conjunto finito de multiplicidades m en el rango usual de afinación ($m \leq 20$) tal que los semigrupos numéricos generados por $[m \cdot L]$ y $[m \cdot F]$ coinciden. Estos valores son:*

$$m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \mathbf{12}, 13, 18\}$$

Sin embargo, la coincidencia matemática no es condición suficiente para la viabilidad musical. Al aplicar la restricción del filtrado impar —necesaria para la coherencia de timbres con armónicos impares—, la mayoría de estos candidatos se descartan. Un caso ilustrativo es el del sistema de 18 notas, que a priori parece un candidato fuerte por su alta resolución.

Ejemplo 7.4.2. Para verificar que el sistema de $m = 18$ notas no es impar-filtrable, buscaremos una inconsistencia aritmética en la suma de intervalos impares. Consideremos la discretización por redondeo al entero más cercano (el caso estándar para afinación, $\alpha = 0.5$).

Calculamos los valores de los armónicos impares $n = 3$ (quinta) y $n = 7$ (séptima menor armónica) en el sistema $m = 18$:

$$\begin{aligned}\mu_3 &= 18 \cdot \log_2(3) \approx 18 \cdot 1.5849 = 28.529 \implies s_3 = 29 \\ \mu_7 &= 18 \cdot \log_2(7) \approx 18 \cdot 2.8073 = 50.532 \implies s_7 = 51\end{aligned}$$

Ambos son elementos de índice impar del semigrupo ($s_3, s_7 \in S_{\text{odd}}$). Si el semigrupo fuera impar-filtrable, su suma debería corresponder a otro elemento de índice impar (o superar el colapso).

Realizamos la suma en el dominio discreto:

$$s_{\text{suma}} = s_3 + s_7 = 29 + 51 = 80$$

Ahora, comprobamos a qué armónico corresponde este valor 80 en la serie teórica. El resultado esperado teóricamente sería el producto de los índices: $3 \times 7 = 21$ (que es impar).

$$\mu_{21} = 18 \cdot \log_2(21) \approx 79.06 \implies [79]$$

Sin embargo, nuestra suma ha dado 80, no 79. Existe un error de acumulación. Buscamos si existe algún armónico *par* cercano al valor 80. Probamos con $n = 22$:

$$\mu_{22} = 18 \cdot \log_2(22) \approx 18 \cdot 4.4594 = 80.27 \implies [80]$$

La suma de los elementos discretizados del armónico 3 y el 7 da como resultado exacto el elemento discretizado del armónico 22 ($s_{22} = 80$).

$$s_3 + s_7 = s_{22}$$

Dado que 3 y 7 son impares, pero 22 es par, la propiedad de clausura del subconjunto impar se rompe:

$$S_{\text{odd}} + S_{\text{odd}} \not\subseteq S_{\text{odd}}$$

Esto implica que, en una afinación de 18 notas, la combinación armónica de una quinta y una séptima produce una “sombra” acústica correspondiente a un armónico par, lo cual es físicamente incoherente para modelizar sistemas de armónicos impares (como el clarinete), descartando así $m = 18$ como sistema óptimo.

El análisis exhaustivo de los candidatos restantes conduce inevitablemente a un resultado de unicidad.

Teorema 7.4.3. *El valor $m = 12$ es el mayor número entero (y el único en el rango $10 < m < 19$) que satisface simultáneamente las dos condiciones de consistencia:*

1. *Ser una discretización simultánea del monoide logarítmico y del monoide fractal áureo.*
2. *Generar un semigrupo numérico impar-filtrable antes del colapso.*

Demostración. Se realizará la demostración en dos partes: el descarte de otros candidatos y la validación del 12.

Se supone que existe un semigrupo S generado por $m = 9$ que cumple ambas condiciones. Se analizan sus primeros elementos. Los valores teóricos para el tercer elemento (s_3) en $9F$ se ubican en (14, 15).

- a) Si $s_3 = 14$ (índice par).
- b) Al discretizar $9F$, el valor obtenido es $s_3 = 15$ (índice impar).

Para que sea impar-filtrable, la suma $s_3 + s_3 = 15 + 15 = 30$ debe pertenecer al semigrupo y tener un índice impar (o superar el colapso). Sin embargo, al calcular los elementos de S para $m = 9$, se observa que el valor 30 ocupa una posición de índice par, violando la condición de filtrado impar. Un razonamiento análogo descarta $m = 13$ y $m = 18$.

Sea ahora $S = [12L]_{\alpha_L} = [12F]_{\alpha_F}$. Debemos probar que $S = H$. Analicemos el elemento s_5 . Los valores reales son:

$$12\lambda_5 \approx 27.86 \quad \text{y} \quad 12\phi_5 \approx 28.58$$

Para que estos dos valores den lugar al mismo entero tras la discretización, este entero debe ser necesariamente 28.

- i) Para que 27.86 se convierta en 28 (se redondee hacia arriba), necesitamos un parámetro de redondeo α_L bajo ($\alpha_L \leq 0.86$).
- ii) Para que 28.58 se convierta en 28 (se redondee hacia abajo), necesitamos un parámetro α_F alto ($\alpha_F > 0.58$).

Con estas restricciones sobre α_L y α_F impuestas por s_5 , calculamos ahora s_3 :

$$12\lambda_3 \approx 19.02 \quad \text{y} \quad 12\phi_3 \approx 19.41$$

- Como $\alpha_L \leq 0.86$, 19.02 se redondea a 19.
- Como $\alpha_F > 0.58$, 19.41 se redondea a 19.

Ambos coinciden en $s_3 = 19$. Verificamos la suma de impares: $s_3 + s_3 = 19 + 19 = 38$. Observando el semigrupo H , el valor 38 está presente. Repitiendo el proceso para todos los impares antes del colapso (que ocurre en 55), se verifica que la propiedad se mantiene. Por tanto, $S = H$. \square

Al semigrupo resultante H se le denomina **semigrupo armónico bien temperado** y proporciona una justificación profunda para la hegemonía del sistema de 12 divisiones de octava. Más allá de un compromiso aritmético para cerrar el círculo de quintas, el 12 se revela como el *óptimo matemático* donde convergen la naturaleza logarítmica de la percepción auditiva, la belleza estructural de la geometría fractal áurea y las restricciones físicas de los instrumentos. El sistema cromático no es, por tanto, una invención cultural arbitraria, sino una necesidad estructural que respeta la compatibilidad de producto, la estructura fractal y áurea y el filtrado impar (*Odd-filterability*).

Capítulo 8

Consonancia y disonancia

Los capítulos anteriores han explorado las estructuras musicales desde un enfoque predominantemente algebraico y geométrico, revelando cómo ciertos intervalos –definidos por proporciones numéricas simples– se erigen como fundamentos de los sistemas musicales. Sin embargo, esta aproximación matemática no responde a una pregunta esencial: ¿por qué el ser humano percibe estas combinaciones de sonidos como estables, placenteras o «consonantes», y otras como tensas o «disonantes»?

La explicación no reside en una propiedad mística de los números pequeños, sino en la interacción entre la física del sonido y la biología del sistema auditivo. Para trascender la mera descripción y comprender la causa de estas sensaciones, es necesario recurrir a la psicoacústica y la fisiología.

Resulta crucial, no obstante, establecer una distinción fundamental. El término consonancia posee una dualidad. Por un lado, la consonancia tonal es un concepto estético y cultural, sujeto a la evolución histórica y al entrenamiento musical. Por otro, la consonancia sensorial –en la terminología de Plomp y Levelt– es una propiedad psicoacústica universal. Se refiere a la suavidad perceptual o ausencia de aspereza en un sonido, y es independiente del contexto cultural. Este capítulo se centrará en esta última, de carácter fisiológico, como base para una explicación científica y universal.

El objetivo, por tanto, es demostrar cómo la intuición de Helmholtz [39] sobre los batimientos, formalizada posteriormente en el modelo de Plomp y Levelt (1965), proporciona un marco para cuantificar la rugosidad sonora. Como conclusión, se revelará que los mínimos de dicha rugosidad –los puntos de máxima consonancia– coinciden precisamente con las estructuras algebraicas deducidas en los capítulos previos, otorgando así una base física a los principios matemáticos que rigen la armonía.

8.1. Fundamentos físico-matemáticos de la disonancia

Para entender la disonancia, concébase un experimento simple: manteniendo fija una nota pura de frecuencia f_1 , se hace sonar simultáneamente otra, f_2 , que se aleja progresivamente de la primera. Se comienza modelando la interacción física de estas dos ondas.

Definición 8.1.1 (Superposición de tonos puros). Sean dos tonos puros de amplitud 1 y frecuencias f_1 y f_2 , con $f_1 < f_2$. La señal acústica resultante de superponer ambos tonos viene dada por la suma lineal:

$$s(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$$

Proposición 8.1.1 (Ecuación de los batimientos). *Utilizando identidades trigonométricas, la señal $s(t)$ puede reescribirse como el producto de dos ondas s_1 y s_2 :*

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = 2 \cos\left(2\pi \frac{f_2 - f_1}{2} t\right) \sin\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right)$$

Demostración. Basta aplicar la identidad $\sin A + \sin B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$ con $A = 2\pi f_2 t$ y $B = 2\pi f_1 t$. \square

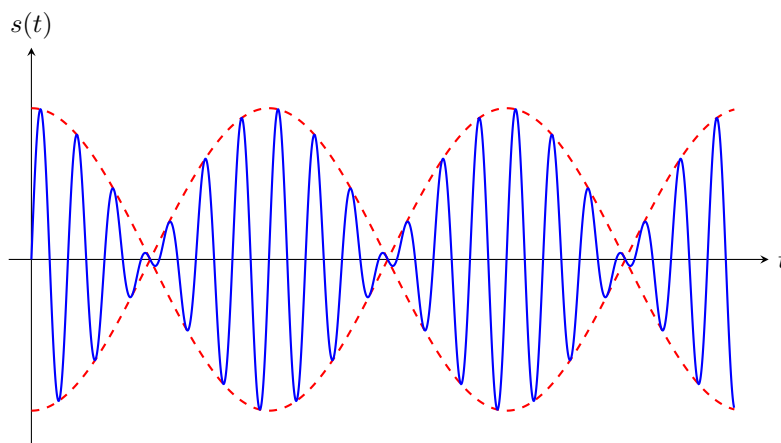


Figura 8.1: Visualización del fenómeno de los batimientos. La onda azul representa el sonido resultante de sumar dos frecuencias cercanas. La línea roja discontinua es la envolvente teórica que dicta la variación del volumen percibido.

Observación 8.1.1. La ecuación de la proposición 8.1.1 indica que el oído percibe una única nota con frecuencia promedio $\frac{f_1+f_2}{2}$, pero con volumen no constante. La amplitud oscila entre 0 y 2 debido al término coseno, $A = 2 \cos(\pi(f_2 - f_1)t)$. Esta oscilación de intensidad es lo que se denomina **batimiento**.

Definición 8.1.2 (Frecuencia de batimiento). Dado que el oído humano no distingue la fase (el signo negativo) de la amplitud, se perciben dos máximos de volumen por cada ciclo completo del coseno. Por tanto, la frecuencia con la que se escuchan los pulsos de volumen es:

$$f_{beat} = |f_2 - f_1|$$

Tomando en cuenta las consideraciones que se acaban de explicar, se puede conceptualizar la disonancia entre dos tonos puros según explicó Helmholtz (1863), que fue el primero en sugerir que la disonancia sensorial es el resultado de batimientos rápidos que el oído no puede resolver individualmente, generando una sensación de “rugosidad”. Ocurre lo siguiente:

- i) Si $|f_1 - f_2|$ es muy pequeña, se escucha un trémolo lento y agradable.
- ii) A medida que la diferencia aumenta, los batimientos se vuelven indistinguibles y se perciben como un sonido áspero o rugoso. Esto es la *disonancia máxima*.
- iii) Si la diferencia sigue aumentando hasta superar el llamado *ancho de banda crítico*, la rugosidad desaparece y los dos tonos se perciben como suaves y separados.

Definición 8.1.3 (Ancho de banda crítico). El *ancho de banda crítico* (en inglés, *critical bandwidth*) se corresponde con el rango de frecuencias dentro del cual la respuesta del oído a múltiples tonos es interferente, es decir, que no los diferencia. Su valor depende de la frecuencia central $\frac{f_1+f_2}{2}$ y se determina experimentalmente.

Observación 8.1.2 (La naturaleza continua de la consonancia). La noción física de rugosidad permite desmitificar la preferencia por las fracciones simples. Cuando dos notas guardan una relación de enteros pequeños, sus series armónicas encajan como un puzle: muchos armónicos coinciden exactamente ($f_{beat} = 0$) reforzando el sonido, y los que no coinciden están lo suficientemente lejos para no molestar.

Por el contrario, en relaciones complejas, los armónicos superiores chocan caóticamente, generando múltiples focos de batimientos rápidos.

Esto implica un corolario fundamental: **la consonancia no es binaria** (consonante vs. disonante), sino una función continua. Un intervalo es más o menos áspero en comparación con otro, dependiendo de la densidad de estos choques armónicos.

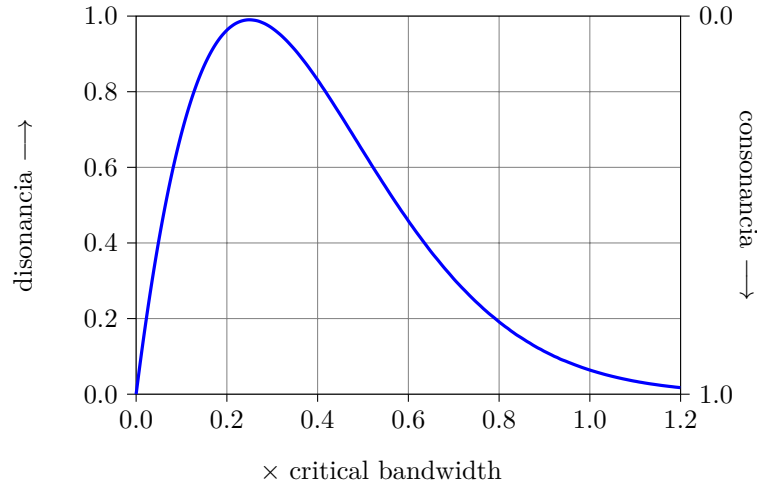


Figura 8.2: Curva representativa del nivel de consonancia de dos tonos puros en función de la diferencia de frecuencias con ancho de banda crítica unitario.

8.2. Modelo de Plomp y Levelt

Para abordar este modelo, es necesario generalizar los conceptos vistos en el Teorema de Fourier (1.1.1). Si bien los instrumentos ideales producen componentes cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la fundamental (armónicos), en la realidad acústica y en la síntesis de sonido esto no siempre se cumple (por ejemplo, en instrumentos de percusión o debido a la rigidez de las cuerdas reales).

Por tanto, se define un sonido complejo no necesariamente como una serie armónica, sino como un conjunto discreto de tonos puros llamados *parciales*.

Definición 8.2.1 (Espectro de un sonido). Un sonido complejo \mathfrak{N} se define matemáticamente por su **espectro**, entendido como el conjunto finito de sus parciales constituyentes. Cada parcial viene determinado por su frecuencia f_i y su amplitud l_i :

$$\mathfrak{N} = \{(f_1, l_1), (f_2, l_2), \dots, (f_n, l_n)\}$$

donde se ordenan las frecuencias tal que $f_1 < f_2 < \dots < f_n$. A f_1 se le denomina frecuencia fundamental, y a f_2, \dots, f_n sobretonos o parciales superiores.

Esta definición es crucial porque el modelo de Plomp y Levelt [29] no asume armonicidad; simplemente calcula la disonancia entre cada par de parciales de este espectro, independientemente de si sus frecuencias guardan una relación entera o no.

Observación 8.2.1 (Relación entre Espectro y Serie Armónica). Es importante notar que la serie armónica es estrictamente un caso particular del concepto de espectro. Mientras que el espectro es una definición general que abarca cualquier conjunto arbitrario de frecuencias $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, la *serie armónica* impone una restricción matemática fuerte sobre estos valores: exige que cada frecuencia sea un múltiplo entero exacto de la fundamental ($f_i = i \cdot f_1$). Por consiguiente, todo sonido armónico posee un espectro, pero no todo espectro es armónico.

A continuación, se detalla la modelización matemática de estas curvas, siguiendo la parametrización propuesta por Sethares [34, apéndice E].

8.2.1. Disonancia en tonos puros

La base del modelo es la disonancia producida por dos ondas sinusoidales puras con frecuencias f_1 y f_2 (asumiendo $f_1 < f_2$) y amplitudes l_1 y l_2 . Plomp y Levelt determinaron que la disonancia es función de la diferencia de frecuencias y de la banda crítica siguiendo la misma idea de la figura 8.2. Matemáticamente, esto se puede aproximar mediante una diferencia de exponenciales que sigue.

Definición 8.2.2 (Función de disonancia). La disonancia $d(f_1, f_2, l_1, l_2)$ entre dos tonos puros viene dada por:

$$d(f_1, f_2, l_1, l_2) = \min(l_1, l_2) \left[e^{-b_1 s(f_2 - f_1)} - e^{-b_2 s(f_2 - f_1)} \right] \quad (8.1)$$

donde:

- i) $b_1 = 3.5$ y $b_2 = 5.75$ son constantes ajustadas experimentalmente para modelar la forma de la curva.
- ii) El término $\min(l_1, l_2)$ asegura que la disonancia está limitada por el tono más débil.
- iii) s es un factor de escala que relaciona la diferencia de frecuencias con el ancho de banda crítico en la frecuencia f_1 .

El parámetro s permite que la curva se “estire” a lo largo del espectro, ya que el ancho de banda crítico no es constante. Se define como:

$$s = \frac{x^*}{s_1 f_1 + s_2}$$

Con $x^* = 0.24$ (punto de máxima disonancia aproximado), $s_1 = 0.021$ y $s_2 = 19$, obtenidas por mínimos cuadrados.

Ejemplo 8.2.1 (Cálculo de disonancia entre dos tonos puros). Se suponen dos tonos puros con amplitud unitaria ($l_1 = l_2 = 1$) en la región central del piano con frecuencias $f_1 = 400$ Hz y $f_2 = 430$ Hz. Calculando el factor de escala s para $f_1 = 400$:

$$s = \frac{0.24}{0.021 \cdot 400 + 19} = \frac{0.24}{8.4 + 19} = \frac{0.24}{27.4} \approx 0.00876$$

La diferencia de frecuencias es $\Delta f = 430 - 400 = 30$. Sustituyendo en la ecuación (8.1):

$$d = 1 \cdot \left[e^{-3.5 \cdot 0.00876 \cdot 30} - e^{-5.75 \cdot 0.00876 \cdot 30} \right]$$

$$d \approx e^{-0.919} - e^{-1.511} \approx 0.398 - 0.220 = 0.178$$

Dado que el máximo matemático de la función utilizada es aproximadamente 0.25, un valor de 0.178 representa el 71 % de la disonancia máxima posible para ese par de tonos. Esto confirma numéricamente que el intervalo de 30 Hz en esta región genera una fuerte sensación de rugosidad. Si se hubiera tomado $f_2 = 400$ (unísono), el término entre corchetes sería $e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$, indicando consonancia perfecta.

8.2.2. Disonancia en tonos complejos

Un sonido complejo \mathfrak{N} se compone de un conjunto de parciales (generalización del concepto de armónicos utilizado en capítulos anteriores). Sea $\mathfrak{N} = \{(f_i, l_i)\}_{i=1}^n$ el espectro de un sonido. El modelo asume que la disonancia total es aditiva: es la suma de las disonancias de cada par de parciales posible.

Definición 8.2.3 (Disonancia intrínseca). La disonancia intrínseca (o rugosidad) de un tono complejo \mathfrak{N} consigo mismo es la suma de las disonancias generadas por todas las parejas de sus propios parciales:

$$\mathcal{D}_{intr}(\mathfrak{N}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d(f_i, f_j, l_i, l_j) \quad (8.2)$$

Finalmente, cuando se evalúa un intervalo musical formado por dos notas complejas, por ejemplo un tono base \mathfrak{N}_1 y un tono desplazado \mathfrak{N}_2 , la disonancia total es la suma de las disonancias intrínsecas más la interacción entre los parciales de ambas notas.

Definición 8.2.4 (Disonancia total del intervalo). Dadas dos notas complejas con espectros $\mathfrak{F} = \{(f_i, l_i)\}_{i=1}^n$ y $\mathfrak{G} = \{(g_j, l'_j)\}_{j=1}^m$, la disonancia total del intervalo es:

$$\mathcal{D}_{Total} = \mathcal{D}_{intr}(\mathfrak{F}) + \mathcal{D}_{intr}(\mathfrak{G}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m d(f_i, g_j, l_i, l'_j) \quad (8.3)$$

Esta formulación permite dibujar las *curvas de disonancia* variando el intervalo entre las notas, revelando mínimos locales de disonancia que coinciden con las escalas musicales usuales.

Ejemplo 8.2.2 (Interacción entre intervalos complejos). Sean las notas \mathfrak{N}_1 y \mathfrak{N}_2 con los espectros $\{(200, 1), (400, 0.5)\}$ y $\{(300, 1), (600, 0.5)\}$ respectivamente. El cálculo de la disonancia total \mathcal{D}_{Total} implica sumar la rugosidad de todas las combinaciones posibles de frecuencias.

Para la disonancia intrínseca de cada nota :

- i) En \mathfrak{N}_1 al estar separados por una octava sus parciales, $\mathcal{D}_{intr}(\mathfrak{N}_1) \approx 0$.
- ii) En \mathfrak{N}_2 , igual que ocurre en el caso anterior, $\mathcal{D}_{intr}(\mathfrak{N}_2) \approx 0$.

De las 4 combinaciones posibles entre los parciales de \mathfrak{N}_1 y \mathfrak{N}_2 , se descarta inmediatamente los pares (200, 600) y (400, 600). Sus diferencias de frecuencia (400 Hz y 200 Hz respectivamente) son tan grandes que la interacción física es nula y no hay disonancia

A) *Cruce de fundamentales* (200, 300): La diferencia es $\Delta f = 100$ Hz. Con $f_{min} = 200$, el ancho de banda crítico es estrecho ($s \approx 0.0103$). Al calcular los exponenciales, la distancia es suficiente para evitar el choque:

$$d(200, 300, 1, 1) \approx 0.025 \quad (\text{Consonancia})$$

B) *Cruce Octava-Fundamental* (400, 300): La diferencia también es $\Delta f = 100$ Hz, pero la amplitud está limitada por el parcial más débil (0.5). Esto reduce aún más el resultado:

$$d(300, 400, 1, 0.5) \approx 0.016$$

La disonancia total es simplemente la suma de estos pequeños residuos:

$$\mathcal{D}_{Total} \approx 0 + 0.025 + 0.016 = 0.041$$

Este valor tan bajo confirma matemáticamente que la quinta justa es un intervalo estable (“valle”), por lo que es consonante.

8.3. Curvas de disonancia

Hasta el momento, se ha calculado la disonancia como un valor escalar para un intervalo fijo. Sin embargo, para comprender la estructura de las escalas musicales, es necesario estudiar cómo varía esta disonancia a medida que el intervalo cambia de forma continua.

Para ello, se formaliza nuevamente el concepto de curva de disonancia, pero en este caso paramétricamente. Considerando una nota base fija con espectro $\mathfrak{F} = \{(f_i, l_i)\}_{i=1}^n$ y una nota móvil \mathfrak{G} cuyo espectro es una versión escalada de \mathfrak{F} por un factor $\alpha \in [1, \infty)$. Es decir, $\alpha \cdot f_j$, entonces la disonancia total se convierte entonces en una función de la variable real α :

Definición 8.3.1 (Función de la Curva de Disonancia). Dada una estructura espectral o timbre base \mathfrak{F} , la curva de disonancia $D_{\mathfrak{F}}(\alpha)$ se define como:

$$D_{\mathfrak{F}}(\alpha) = \mathcal{D}_{intr}(\mathfrak{F}) + \mathcal{D}_{intr}(\alpha\mathfrak{F}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d(f_i, \alpha f_j, l_i, l_j) \quad (8.4)$$

Esta formulación es la que permite generar gráficas como la figura 8.3, donde el eje X representa α y el eje Y el valor de disonancia total.

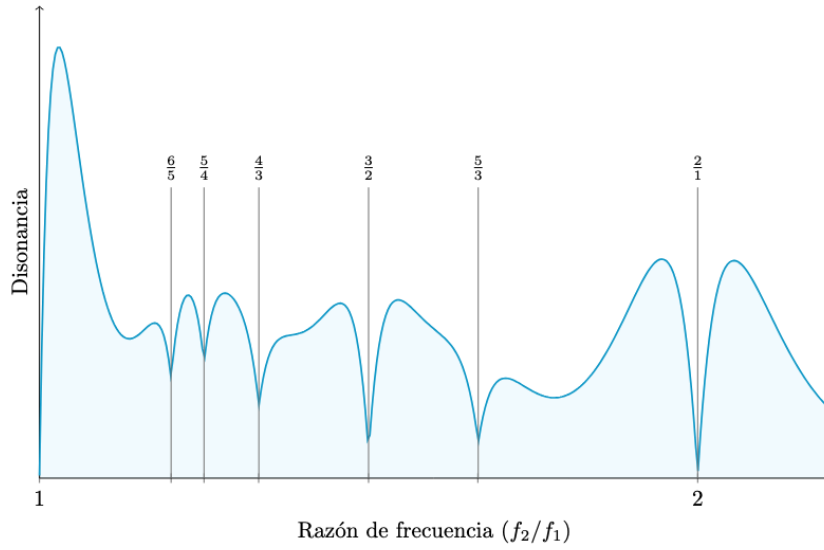


Figura 8.3: Curva de disonancia teórica para dos tonos complejos (Modelo Plomp-Levelt). Se representa la disonancia total en función de la razón de frecuencia entre dos tonos. El modelo asume que cada tono posee 6 armónicos de igual amplitud. Obsérvese cómo la disonancia disminuye drásticamente formando mínimos locales (valles afilados) en puntos específicos. Estos puntos corresponden exactamente a los intervalos de la Entonación Justa. En estos ratios, los armónicos de ambos tonos coinciden matemáticamente, eliminando los batidos y generando sensación de consonancia. Fuera de estos puntos exactos, los armónicos rozan entre sí, elevando la curva de disonancia.

8.3.1. Propiedades fundamentales de las curvas

El análisis de la función $D_{\mathfrak{F}}(\alpha)$ revela propiedades analíticas que vinculan directamente la física del espectro (timbre) con la aparición de intervalos consonantes (escala). A continuación, se enuncian algunas propiedades clave, que justifican por qué ciertos intervalos son universales para instrumentos armónicos. Además, por comodidad, se supone que todos los parciales tienen igual amplitud.

Teorema 8.3.1 (Comportamiento Asintótico). *Cuando el intervalo se hace arbitrariamente grande ($\alpha \rightarrow \infty$), la interacción entre los parciales de ambas notas desaparece, ya que la diferencia de frecuencias supera cualquier ancho de banda crítico. En el límite, la disonancia total es simplemente la suma de las disonancias intrínsecas de cada nota por separado:*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} D_{\mathfrak{F}}(\alpha) = \mathcal{D}_{intr}(\mathfrak{F}) + \mathcal{D}_{intr}(\alpha\mathfrak{F})$$

Demostración. La función de disonancia entre dos tonos puros $d(f_1, f_2)$ depende de términos de la forma $e^{-b \cdot s \cdot (f_2 - f_1)}$.

Si $\alpha \rightarrow \infty$, la diferencia de frecuencia entre cualquier par de parciales cruzados $(f_i, \alpha f_j)$ viene dada por $\Delta f = |\alpha f_j - f_i|$. Es evidente que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} |\alpha f_j - f_i| = \infty$$

Dado que la función exponencial negativa decrece a cero cuando su argumento tiende a infinito ($\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$), se cumple que cada término individual de la interacción tiende a anularse:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} d(f_i, \alpha f_j, l_i, l_j) = 0 \quad \forall i, j$$

Por linealidad del límite, la doble suma que representa la interacción entre las dos notas (el tercer término de la ecuación de disonancia total) converge a cero. En consecuencia, solo permanecen los términos constantes que no dependen de la interacción entre \mathfrak{F} y $\alpha\mathfrak{F}$, es decir, las disonancias intrínsecas de cada nota aislada. \square

La propiedad más relevante del modelo es la relación entre los parciales del timbre y los mínimos locales de la curva (los puntos de consonancia).

Teorema 8.3.2. *Sea una nota \mathfrak{F} con parciales en frecuencias f_1, f_2, \dots, f_n . Si los parciales están suficientemente separados (superando el ancho de banda crítico x^*), entonces la curva de disonancia $D_{\mathfrak{F}}(\alpha)$ presenta un mínimo en $\alpha = 1$.*

Demostración. Para demostrar que $\alpha = 1$ es un mínimo local, se estudia la derivada de la función total respecto al desplazamiento. Dado que $D_{\mathfrak{F}}$ es la suma de interacciones, se analiza el cambio en los términos diagonales frente a los términos cruzados cerca de $\alpha \approx 1$.

La derivada de la función base de disonancia $d(x) = e^{-b_1 x} - e^{-b_2 x}$ es:

$$d'(x) = -b_1 e^{-b_1 x} + b_2 e^{-b_2 x}$$

En el unísono, $d(f_1, \alpha f_1)$, la diferencia de frecuencias es $x = 0$. La pendiente de la disonancia es:

$$d'(0) = -b_1(1) + b_2(1) = b_2 - b_1$$

Usando los valores estándar ($b_1 = 3.5, b_2 = 5.75$), se tiene una pendiente de crecimiento muy pronunciada:

$$d'(0) \approx 2.25$$

Esto indica que romper el unísono incrementa la disonancia rápidamente.

Se debe acotar cuánto puede decrecer la disonancia del resto de parciales para ver si son capaces de contrarrestar el crecimiento anterior. Por hipótesis, los parciales están separados por distancias de al menos $x^*, 2x^*, 3x^* \dots$. La suma de las variaciones de estos términos está acotada por la suma de las derivadas evaluadas en estos puntos.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{\infty} d'(kx^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_2(e^{-b_2 x^*})^k - b_1(e^{-b_1 x^*})^k \right) = \\ &= 5.75 \frac{e^{-5.75 \cdot 0.24}}{1 - e^{-5.75 \cdot 0.24}} - 3.5 \frac{e^{-3.5 \cdot 0.24}}{1 - e^{-3.5 \cdot 0.24}} \approx -0.758 \end{aligned}$$

Tomando el valor absoluto, $|S| \approx 0.758$.

Sin embargo, esta serie asume que los parciales están espaciados regularmente. Para cubrir el caso general donde un parcial podría caer en el punto de máxima pendiente negativa (el punto de inflexión $x^{**} \approx 2x^* \approx 0.44$), se añade un término de corrección correspondiente al valor de la derivada en dicho punto:

$$|d'(x^{**})| \approx |-0.292| = 0.292$$

Por tanto, la cota superior para la suma de las variaciones en un lado de la curva es:

$$\Sigma_{unilateral} \approx 0.758 + 0.292 = 1.05$$

Finalmente, dado que los parciales pueden distribuirse tanto por encima como por debajo de la frecuencia de referencia, duplicando este valor para obtener la cota total:

$$\sum |d'(\text{cruce})| \approx 2 \times 1.05 = 2.1$$

Comparando la tasa de crecimiento del unísono frente a la tasa de cambio del resto:

$$\text{Cambio Diagonal} \approx 2.25 > \text{Cambio Cruzado máx} \approx 2.1$$

Dado que el término diagonal domina, la derivada total en un entorno de $\alpha = 1$ es positiva si nos alejamos (la función crece). Por tanto, $\alpha = 1$ es un mínimo local estricto. \square

Teorema 8.3.3. *Sean una nota \mathfrak{T} y dos parciales suyos f_1 y f_2 separados por al menos x^* . Entonces $D_{\mathfrak{T}}(\alpha)$ presenta un mínimo en $\alpha^* = \frac{f_2}{f_1}$.*

Demostración. Se considera la disonancia total $D_{\mathfrak{T}}(\alpha)$ generada por la interacción de los parciales $\{f_1, f_2\}$ de la nota original con los parciales desplazados $\{g_1, g_2\} = \{\alpha f_1, \alpha f_2\}$ de la nota transpuesta.

La función a minimizar es la suma de las cuatro interacciones posibles entre pares cruzados:

$$D_{\mathfrak{T}}(\alpha) = \underbrace{d(f_1, \alpha f_1)}_{(1)} + \underbrace{d(f_1, \alpha f_2)}_{(2)} + \underbrace{d(f_2, \alpha f_1)}_{(3)} + \underbrace{d(f_2, \alpha f_2)}_{(4)}$$

Se evalúa la situación en el punto $\alpha^* = f_2/f_1$. En este punto, la frecuencia del primer parcial desplazado coincide exactamente con el segundo parcial original:

$$g_1 = \alpha^* f_1 = \left(\frac{f_2}{f_1}\right) f_1 = f_2$$

Se analiza el comportamiento de la derivada de cada término respecto al desplazamiento en el entorno de α^* :

- (3) El término $d(f_2, \alpha f_1)$ representa la interacción entre f_2 y g_1 . En α^* , la diferencia de frecuencias es 0. Como se vio en el teorema anterior, cualquier perturbación desde el unísono provoca un incremento abrupto de la disonancia gobernado por la pendiente en el origen:

$$|d'(0)| \approx 2.25$$

Este término intenta crear un mínimo profundo (un “valle”) en la función total.

- (1),(2),(4) Se debe verificar si la variación de los otros tres términos podría contrarrestar este crecimiento.

- Para (1): La distancia es $|f_1 - f_2| \geq x^*$ (por hipótesis).
- Para (2) y (4): Las distancias son mayores.

En el peor de los casos (escenario más desfavorable para la existencia del mínimo), estos tres términos podrían estar situados justo en el punto de máxima pendiente negativa de la curva de disonancia (x^{**}), disminuyendo su valor al movernos de α^* .

Se sabe por el cálculo anterior que la pendiente máxima fuera del origen está acotada por:

$$\max |d'(x)| = |d'(x^{**})| \approx 0.292$$

Para que α^* sea un mínimo local estricto, la tasa de crecimiento del término (3) debe superar la suma de las tasas de decrecimiento posibles de los otros tres términos:

$$|d'_{\text{unísono}}| > \sum_{i \in \{1,2,4\}} |d'_{\text{resto}}|$$

Sustituyendo por las cotas numéricas obtenidas:

$$2.25 > 3 \times 0.292 = 0.876$$

La desigualdad $2.25 > 0.876$ se cumple holgadamente. La fuerza con la que el término $d(f_2, \alpha f_1)$ genera consonancia al coincidir supera cualquier interferencia disonante que puedan generar los otros parciales. Por tanto, la función total $D_{\mathfrak{T}}(\alpha)$ presenta un mínimo local en la razón $\alpha^* = f_2/f_1$. \square

Finalmente, existe un límite en la cantidad de consonancias posibles para un timbre dado.

Teorema 8.3.4. *Para un espectro constituido por n parciales, la curva de disonancia generada posee, a lo sumo, $2n^2$ mínimos locales.*

Demostración. La función total $D_{\mathfrak{F}}(\alpha)$ es la suma de n^2 funciones elementales de interacción $d(f_i, \alpha f_j)$. Para acotar el número de mínimos totales, analicemos primero la forma de una sola de estas interacciones individuales.

Se considera la interacción entre un parcial fijo f_j y uno móvil αf_i . La curva de disonancia resultante tiene una forma característica de “M”:

1. Comienza en 0 (para $\alpha \approx 0$).
2. Sube hasta un máximo cuando αf_i se acerca a f_j por la izquierda (distancia x^*).
3. Cae a 0 (mínimo absoluto) cuando coinciden exactamente ($\alpha f_i = f_j$).
4. Sube a un segundo máximo cuando se aleja por la derecha.
5. Decrece asintóticamente a 0 cuando $\alpha \rightarrow \infty$.

Por tanto, cada par individual (i, j) aporta exactamente *un mínimo local* (en el unísono) y *dos máximos locales*.

Dado que la función total es la suma de n^2 pares de parciales, y en el peor de los casos los máximos y mínimos no se cancelan entre sí, el número total de extremos no puede superar la suma de los extremos individuales. Si cada par aporta 2 máximos, la curva total tendrá a lo sumo $2n^2$ máximos locales. Por las propiedades de las funciones continuas, el número de mínimos locales intercalados entre estos máximos también está acotado por el mismo orden de magnitud. Excluyendo los mínimos triviales en 0 e ∞ , se concluye que existen a lo sumo $2n^2$ mínimos locales relevantes. \square

Bibliografía

- [1] F. Aceff-Sánchez, O. A. Agustín-Aquino, J. D. Plessis, E. Lluís-Puebla y M. Montiel. *An Introduction to Group Theory with Applications to Mathematical Music Theory*. Vol. 15. Serie Textos. México: Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Matemáticas, 2012.
- [2] Pascal Alessandri y Valérie Berthé. «Three distance theorems and combinatorics on words». En: 2007. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:59320985>.
- [3] Dave Benson. *Music: A Mathematical Offering*. 1.^a ed. USA: Cambridge University Press, 2006. ISBN: 0521619998.
- [4] Jeffrey R. Boland y Lane P. Hughston. *Configurations, Tessellations and Tone Networks*. 2025. arXiv: 2505.08752 [math.CO]. URL: <https://arxiv.org/abs/2505.08752>.
- [5] Maria Bras-Amorós. «Tempered monoids of real numbers, the golden fractal monoid, and the well-tempered harmonic semigroup». En: *Semigroup Forum* 99 (2019), págs. 496-516.
- [6] Norman Carey. «Distribution modulo 1 and musical scales». Tesis doct. University of Rochester, ene. de 1998.
- [7] Marco Castrillón López y Manuel Domínguez. «A meeting-point between mathematics and the theory of musical scales: well-formed scales». En: *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 16.1 (2013), pág. 87.
- [8] Elaine Chew. «Towards a mathematical model of tonality». En: *MIT*. 2000. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:143203964>.
- [9] José Ángel Cid. «Musical scales, irrational numbers, and dynamical systems». En: *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 25.2 (2022), págs. 283-297.
- [10] Alissa S. Crans, Thomas M. Fiore y Ramon Satyendra. *Musical Actions of Dihedral Groups*. Preprint arXiv:0711.1873. 2007. URL: <http://arxiv.org/abs/0711.1873>.
- [11] Rafael Cubarsi. «On the divisions of the octave in generalized Pythagorean scales and their bi-dimensional representation». En: *Journal of Mathematics and Music* 18.1 (2024), págs. 1-19. DOI: 10.1080/17459737.2023.2194301.
- [12] Erik D. Demaine, Francisco Gomez-Martin, Henk Meijer, David Rappaport, Perouz Taslakian, Godfried T. Toussaint, Terry Winograd y David R. Wood. «The distance geometry of music». En: *Computational Geometry* 42.5 (2009). Special Issue on the Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2005 and CCCG 2006), págs. 429-454. ISSN: 0925-7721. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2008.04.005>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925772108001156>.
- [13] Amaya García Pérez. *El número sonoro. La matemática en las teorías armónicas de Salinas y Zarlino*. Ene. de 2003. ISBN: 84-95610-40-X.
- [14] Amaya Sara García Pérez. «El temperamento igual en los instrumentos de cuerda con trastes». En: *Francisco de Salinas. Música, teoría y matemática en el Renacimiento*. Ed. por Amaya Sara García Pérez y Paloma Otaola González. Colección VIII Centenario 12. Ediciones Universidad de Salamanca, 2011. ISBN: 978-84-9012-406-2. URL: <https://gredos.usal.es/bitstream/handle/10366/131589/978-84-9012-406-2-0061-0089.pdf>.

- [15] Joan Girbau i Badó. «Les Matemàtiques i les escales musicals». En: *Butlletí de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques* 18 (oct. de 1985), pàgs. 3-27.
- [16] Xavier Gràcia Sabaté. *Música i Matemàtiques (ALE, 2005-2010)*. https://web.mat.upc.edu/xavier.gracia/musmat_ALE/. Accedido: 2025-11-03.
- [17] IMAGINARY. *The Mathematics of Music – Exhibition Booklet*. Inf. téc. 2019. URL: <https://www.imaginary.org/sites/default/files/20190911-lala-booklet-v0.4-web-text.pdf>.
- [18] Paul Lascabettes e Isabelle Bloch. «What Are "Good" Rhythms? Generating Rhythms Based on the Properties Set Out in The Geometry of Musical Rhythm». En: *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 14639. Coimbra, Portugal: Springer, jun. de 2024, pàgs. 45-57.
- [19] Gareth Loy. *Musimathics: The Mathematical Foundations of Music, Volume 1*. The MIT Press, 2006. ISBN: 0262122820.
- [20] Javier Luque Ordóñez. «Música y Matemáticas. El temperamento igual y otros nuevos temperamentos». En: *Revista Digital de ACTA* (2022).
- [21] Víctor Martín García. *Página del proyecto de Ingeniería de Ondas, curso 06-07*. https://www.lpi.tel.uva.es/~nacho/docencia/ing_ond_1/trabajos_06_07/io5/public_html/p1.html. Accedido: 2025-11-20.
- [22] IMAGINARY - Open Mathematics. *La La Lab - The Mathematics of Music*. Accedido: 2025-11-20. URL: <https://www.imaginary.org/exhibition/la-la-lab-the-mathematics-of-music>.
- [23] Micaela Mayero. «The Three Gap Theorem (Steinhaus Conjecture)». En: *Types for Proofs and Programs*. Ed. por Thierry Coquand, Peter Dybjer, Bengt Nordström y Jan M. Smith. Vol. 1956. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin / Heidelberg, 2000, pág. 162.
- [24] Cristina Menzel Sansó. *El número sonoro. La matemática en las teorías armónicas de Salinas y Zarlino*. Barcelona: Instituto Español de Musicología (CSIC), 2004.
- [25] Microtonal Encyclopedia. *Charles Ives*. 5.01.2026. 2022. URL: https://microtonal.miraheze.org/wiki/Charles_Ives.
- [26] Juan Antonio Navarro González y M. J. Garmendia Rodríguez. «Mathematical theory of musical scales». Inglés. En: *Extracta Mathematicae* 11.2 (1996), pàgs. 369-374. ISSN: 0213-8743.
- [27] Anna Nofuentes Creus. «Temperament musical, fraccions contínues i l'escala de 53 notes». Treball de Fi de Grau. Universitat Autònoma de Barcelona, 2015.
- [28] Athanase Papadopoulos. «Mathematics and group theory in music». En: *Handbook of Group Actions, Vol. II*. Vol. 32. Advanced Lectures in Mathematics. International Press e Higher Education Press, 2015, pàgs. 525-572.
- [29] R. Plomp y W. J. Levelt. «Tonal consonance and critical bandwidth». En: *Journal of the Acoustical Society of America* 38.4 (1965), pàgs. 548-560. DOI: 10.1121/1.1909741.
- [30] Tony van Ravenstein. «The Three Gap Theorem (Steinhaus Conjecture)». En: *Journal of the Australian Mathematical Society. Series A. Pure Mathematics and Statistics* 45.3 (1988), pàgs. 360-370. DOI: 10.1017/S1446788700031062.
- [31] Dario Sánchez Gómez. *TFG_Mates*. 2024.
- [32] Tomás Sanz-Perela. «Per què ens agrada la música? Una resposta matemàtica». En: *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* 37.2 (2022), pàgs. 173-204. DOI: 10.2436/20.2002.01.106.
- [33] Núria Sauló Fernández. «La dissonància musical des del punt de vista matemàtic». Treball de Fi de Grau. Universitat Autònoma de Barcelona, 2020.
- [34] William A. Sethares. *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*. London; New York: Springer, 1998.

-
- [35] Constança Martins de Castro Simas. «Consonance in Music and Mathematics: Application to Temperaments and Orchestration». Inglés. Lisboa, Portugal: Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, dic. de 2014.
 - [36] Godfried T. Toussaint. *The Geometry of Musical Rhythm*. 2nd. USA: Routledge, 2019.
 - [37] Juan Luis Varona Malumbres. *Recorridos por la teoría de números*. Electolibris, 2014.
 - [38] Marta Vela. *Hugo Riemann: el olvidado*. Artículo de revista en línea. UNIR Revista (Universidad Internacional de La Rioja). Jun. de 2016. URL: <https://www.unir.net/revista/educacion/hugo-riemann-el-olvidado/>.
 - [39] H. Von Helmholtz. *On The Sensations Of Tone As A Physiological Basis For The Theory Of Music*. Kessinger Publishing, 2005.
 - [40] J. Winterson. *Maths & Music*. University of Huddersfield, 2024. ISBN: 9781862182301. URL: <https://books.google.es/books?id=s2b00AEACAAJ>.
 - [41] Iannis Xenakis y Sharon Kanach. *Formalized Music: Thought and Mathematics in Composition*. Pendragon Press, 1992. ISBN: 0945193246.