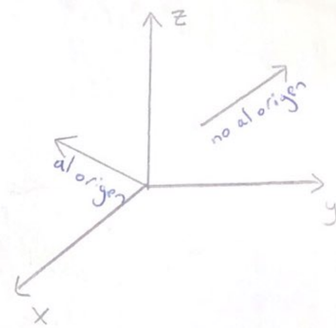
Vectores: → geométricos ($\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$)   1º Parcial 2/7

→ no geométricos ($\mathbb{R}^n$; $n > 3$)



Geométricos:

Forma cartesiana: $\bar{w} \in \mathbb{R}^3 / \bar{w} = (w_x; w_y; w_z)$

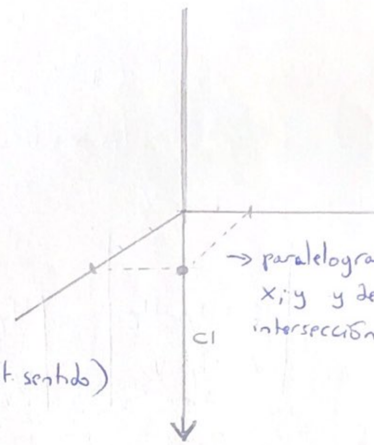
Vectores al origen = parten de $(0;0;0)$

Vectores NO al origen = se los debe llevar al origen

$\bar{v} \left| \begin{array}{l} A\,(A_x; A_y; A_z) \\ B\,(B_x; B_y; B_z) \end{array} \right.$ $\bar{v} = (B_x - A_x; B_y - A_y; B_z - A_z)$ → al origen

Representar un vector geométricamente

$\bar{u} = (3; 2; -5)$



Características de vectores:

Dirección: la recta en la que está incluido (r)

Sentido: $\bar{u} \rightarrow$ opuesto $-\bar{u}$ $((1;1;6) = (-1;-1;-6)$ con dist. sentido)

Punto de aplicación: origen

Norma: $\|\bar{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$

si $\bar{u} \in \mathbb{R}^3 = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

Vector unitario o versor: misma dirección y sentido, norma 1 $\left(\breve{w} = \frac{\bar{w}}{\|\bar{w}\|}\right)$

Versores canónicos: dan las direcciones de los ejes coordenados $(\breve{i} = (1;0;0)$

$\breve{j} = (0;1;0)$

$\breve{k} = (0;0;1))$

Operaciones entre vectores:

Suma: se suman las componentes de los vectores. NO se puede sumar vectores con distinta cantidad de componentes

Resta: suma del opuesto

Producto de un vector por un escalar: $k \cdot \bar{v} = (k \cdot v_x; k \cdot v_y; k \cdot v_z)$

Producto escalar ($\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$): $\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \cos \text{ang}(\bar{u};\bar{v})$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$

Condición de perpendicularidad = $\bar{u} \neq 0 \wedge \bar{v} \neq 0 \Rightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{u} \perp \bar{v}$

Condición de paralelismo = $\bar{u} = k \cdot \bar{w} / k \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{u} \parallel \bar{w}$

Proyección de un vector sobre otro:

$$\text{Proy}_{\bar{v}}\, \bar{u} = \underbrace{\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}\|}}_{\text{norma de la proyección}} \cdot \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} \Longrightarrow \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}\|^2} \cdot \bar{v}$$

Forma canónica:

$\bar{w} = w_x \cdot \breve{i} + w_y \cdot \breve{j} + w_z \cdot \breve{k}$

$\bar{u} = 3\breve{i} - \breve{k}$

$\bar{u} = (3; 0; -1)$

Distancia entre dos puntos: norma del vector con extremo en ambos

Punto medio de un vector: semisuma de componentes

Vector de norma — con respecto a otro: $\_\_ \cdot \breve{v}$

Producto vectorial $(\mathbb{R}^3)$

$\bar{u} \times \bar{v} = \bar{w} \longrightarrow$ resultado: vector

$\bar{w} \perp \bar{u} \wedge \bar{w} \perp \bar{v}$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \breve{i} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \breve{j} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \breve{k}$$

$$(u_y \cdot v_z - u_z \cdot v_y)\,\breve{i} - (u_x \cdot v_z - u_z \cdot v_x)\,\breve{j} + (u_x \cdot v_y - u_y \cdot v_x)\,\breve{k}$$

$\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \text{sen ang}\,(\bar{u}; \bar{v})$

$\|\bar{u} \times \bar{v}\| =$ área del paralelogramo que definen $\bar{u}$ y $\bar{v}$

$\bar{u} \neq \bar{0} \wedge \bar{v} \neq \bar{0} \wedge \bar{u} \times \bar{v} = \bar{0} \Longrightarrow \bar{u} \parallel \bar{v}$

Producto mixto $(\mathbb{R}^3)$

$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = k \longrightarrow$ resultado: escalar $\quad |k| =$ volumen del paralelepípedo

$=$

$\bar{v} \cdot (\bar{w} \times \bar{u})$

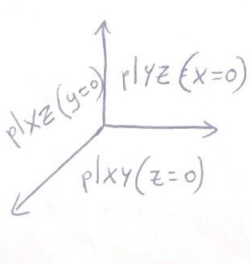
$\bar{w} \cdot (\bar{u} \times \bar{v})$

si $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = 0 \Longrightarrow \bar{u}, \bar{v}$ y $\bar{w}$ son coplanares

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

dos vectores paralelos siempre son coplanares

Planos coordenados = $\perp$ entre sí



Ecuaciones de plano

1) Ec. vectorial paramétrica

$$P = P_0 + \lambda_1 \cdot \bar{u} + \lambda_2 \cdot \bar{v} / \lambda_1 \wedge \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$(x;y;z) = (x_0;y_0;z_0) + \lambda_1 \cdot (u_x;u_y \cdot u_z) + \lambda_2 \cdot (v_x;v_z;v_z)$$

2) Ecs. paramétricas cartesianas

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 \cdot u_x + \lambda_2 \cdot v_x \\ y = y_0 + \lambda_1 \cdot u_y + \lambda_2 \cdot v_y \\ z = z_0 + \lambda_1 \cdot u_z + \lambda_2 \cdot v_z \end{cases}$$

3) Ec. general

$\bar{n} = (n_x;n_y;n_z) \perp \pi \rightarrow$ normal perpendicular al plano

$$\overline{P_0P} \perp \bar{n} \Longrightarrow \overline{P_0P} \cdot \bar{n} = 0$$

$$\underset{a}{\underset{\downarrow}{n_x}} \cdot x + \underset{b}{\underset{\downarrow}{n_y}} \cdot y + \underset{c}{\underset{\downarrow}{n_z}} \cdot z + \underbrace{(-n_x \cdot x_0 - n_y \cdot y_0 - n_z \cdot z_0)}_{d} = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

4) Ec. segmentaria $\rightarrow$ no todos los planos la tienen

$$P = (p;0;0)$$
$$q = (0;q;0) \qquad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{k} = 1$$
$$k = (0;0;k)$$

Si $d = 0$ el plano pasa por el origen y NO tiene ecuación segmentaria

Pase de ecuación: general a segmentaria / general a vectorial

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$ax + by + cz = -d$$
$$\frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} = \frac{-d}{-d}$$
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{k} = 1$$

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$z = \frac{-ax + by - d}{c}$$
$$(x;y;z) = \left(x;y;\frac{-ax - by - d}{c}\right)$$
$$(x;y;z) = \left(0;0;\frac{d}{c}\right) + x\left(1;0;-\frac{a}{c}\right) + y\left(0;1;-\frac{b}{c}\right)$$

Si un plano contiene a un eje, también contiene al origen

Planos especiales

Al origen: $d = 0 \Rightarrow (0;0;0) \in \pi$

// a ejes coordenados $\Rightarrow x + 2y = 0 \rightarrow$ paralelo al eje z

// eje x $\Rightarrow a = 0$

// eje y $\Rightarrow b = 0$

// eje z $\Rightarrow c = 0$

// a planos coordenados

// pl XY $\Rightarrow C_z + d = 0$

// pl XZ $\Rightarrow b_y + d = 0$

// pl YZ $\Rightarrow a_x + d = 0$

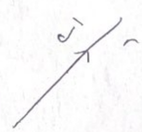
Datos para sacar las ecuaciones del plano:

Punto + normal = ec. general   perpendicular a un segmento $\overline{AB}$ = $\overline{AB} \rightarrow$ normal

Pasa por 3 puntos = sacar 2 vectores, ecuación vectorial y normal haciendo producto vectorial

Contiene a un eje/ es paralelo a un eje: contiene al versor de ese eje

Ecuaciones de la recta



$\bar{d}$ (vector director) // r $\rightarrow$ misma dirección

1) Ec. vectorial paramétrica

$$(x, y, z) = (x_0; y_0; z_0) + \lambda . (d_x; d_y; d_z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

2) Ecs. paramétricas cartesianas

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda . d_x \\ y = y_0 + \lambda . d_y \\ z = z_0 + \lambda . d_z \end{cases}$$

3) Ec. simétrica

$$\frac{x - x_0}{d_x} = \frac{y - y_0}{d_y} = \frac{z - z_0}{d_z}$$

Posiciones relativas entre rectas

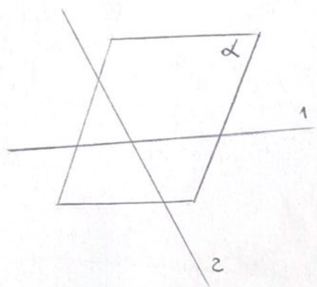
- Paralelas $r_1 \parallel r_2$
- Coincidentes $r_1 \equiv r_2$ $\quad P_1 \in P_2$

$\left.\begin{matrix} r_1 \parallel r_2 \\ r_1 \equiv r_2 \quad P_1 \in P_2 \end{matrix}\right\} \bar{d}_1 \parallel \bar{d}_2 \to$ proporcionales

- Incidentes/concurrentes $r_1 \cap r_2 = \{A\}$
- Alabeadas

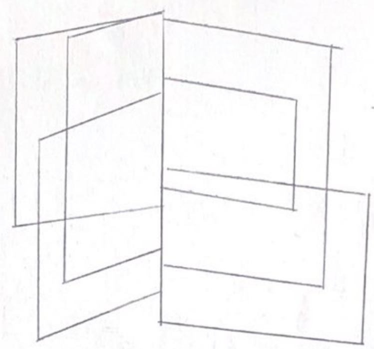
$\overline{P_1P_2} \cdot (\bar{d}_1 \times \bar{d}_2)$ → $= 0 \to$ son coplanares; → $\neq 0 \to$ no son coplanares

Rectas en un mismo plano



$\bar{n}_\alpha = \bar{d}_1 \times \bar{d}_2$

Haz de planos



infinitos planos en el espacio que tienen intersección en una recta

$\alpha_1 \cdot \Pi_1 + \alpha_2 \cdot \Pi_2 + \alpha_3 \cdot \Pi_3$

Sacar la recta teniendo planos del haz, para luego sacar un plano que la contiene

$\alpha \cdot (x_1 + y_1 + z_1 + d_1) + \beta\, (x_2 + y_2 + z_2 + d_2) = 0$

Con un punto, reemplazar x, y, z en ambos planos y encontrar relación entre α y β (ej: $\beta = 4\alpha$)

Reemplazar en ecuaciones y resolver (ej: $\alpha \cdot (x_1 + y_1 + z_1 + d_1) + \beta\, (4x_2 + 4y_2 + 4z_2 + 4d_2) = 0$)

Sacar ecuación general de un haz:

$\alpha\,(x - 2y + z - 1) + \beta\,(x - z + 3) = 0$

$\alpha x - 2\alpha y + \alpha z - \alpha + \beta x - \beta z + 3\beta = 0$

$(\alpha + \beta)x - 2\alpha y + (\alpha - \beta)z + (3\beta - \alpha) = 0$

$\bar{n} = (\alpha + \beta\,; -2\alpha\,; \alpha - \beta)$

Determinar condición de paralelismo: (ej: $2x - y + z + 2 = 0$)

$\dfrac{\alpha + \beta}{2} = \dfrac{-2\alpha}{-1} = \dfrac{\alpha - \beta}{1}$ → a, b y c de la ecuación general del haz; → a, b y c del plano

① ② ③ deben dar el mismo resultado

① $-\alpha - \beta = -4\alpha$

$3\alpha = \beta$

② $-2\alpha = -\alpha + \beta$

$-\alpha = \beta$

no coinciden → $\nexists$ plano haz $\parallel$ al plano dado

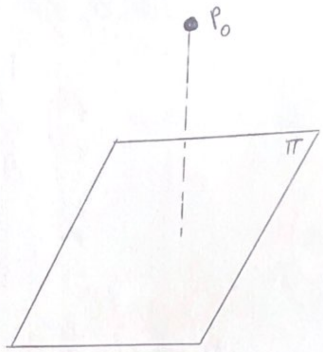
Distancias:

- De punto a plano:

$P_0 \, (x_0 ; y_0 ; z_0)$

$\pi : ax + by + cz + d = 0$

$$dist = \left| \frac{a x_0 + b y_0 + c z_0 + d}{\| \bar{n} \|} \right|$$



SIRVE TAMBIÉN PARA RECTA-PLANO

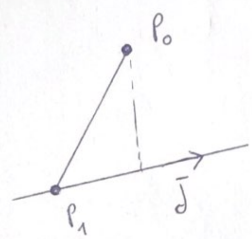
- De punto a recta / entre rectas paralelas

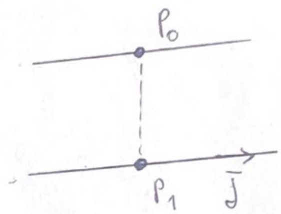
$P_0 \, (x_0 ; y_0 ; z_0)$

$P_1 \, (x_1 ; y_1 ; z_1)$

$\bar{d} \, (d_x ; d_y ; d_z)$

$$dist = \left| \frac{\| \overline{P_0 P_1} \times \bar{d} \|}{\| \bar{d} \|} \right|$$





↓

se puede elegir cualquiera de los directores porque son proporcionales

- Entre rectas alabeadas:

$P_0 \, (x_0 ; y_0 ; z_0)$

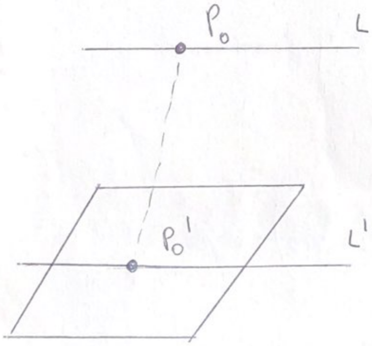
$P_1 \, (x_1 ; y_1 ; z_1)$

$\bar{d}_1 \, (d_{1x} ; d_{1y} ; d_{1z})$

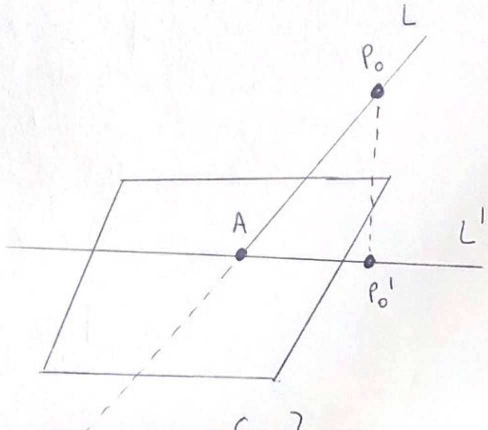
$\bar{d}_2 \, (d_{2x} ; d_{2y} ; d_{2z})$

$$dist = \left| \frac{\overline{P_0 P_1} \cdot (\bar{d}_1 \times \bar{d}_2)}{\| \bar{d}_1 \times \bar{d}_2 \|} \right|$$

Proyección de una recta sobre un plano



$L \parallel \pi \quad \bar{d}_L = \bar{d}_{L'}$



$L \cap \pi = \{ A \}$

Posiciones relativas de planos:

- Se cortan en una recta (ver recta $\in$ dos planos)
- Son paralelos
- Uno está contenido en otro

Si $\pi_1 // \pi_2$ entonces $\bar{n}_1 // \bar{n}_2$

$\pi_1 = 3x + 2y - 6z + 2 = 0$

$\pi_2 = 6x + 4y + 12z + 27 = 0$ → a, b y c son proporcionales, d no.

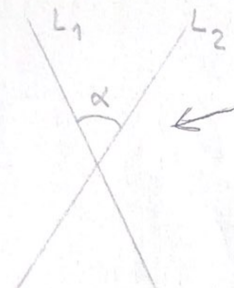
$\pi_1 // \pi_2$

$\pi_1 = 3x + 2y - 6z + 2 = 0$

$\pi_3 = 9x + 6y - 18z + 6 = 0$ → a, b, c y d son proporcionales

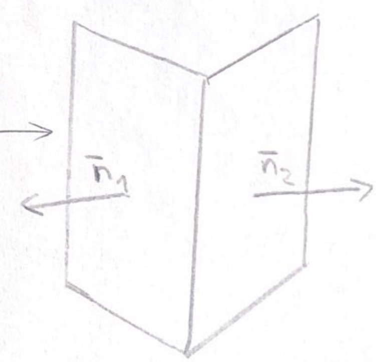
$\pi_1 \equiv \pi_3$

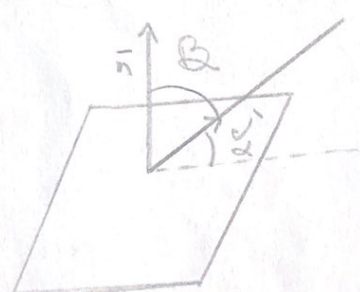
Ángulos entre planos o entre rectas



$\bar{d}_1 \cdot \bar{d}_2 = \|\bar{d}_1\| \cdot \|\bar{d}_2\| \cdot \cos\alpha$

$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = \|\bar{n}_1\| \cdot \|\bar{n}_2\| \cdot \cos\alpha$

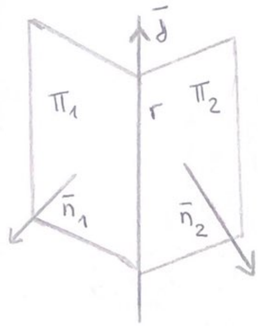




$\bar{d} \cdot \bar{n} = \|\bar{d}\| \cdot \|\bar{n}\| \cdot \cos\beta$

$\alpha = 90° - \beta$ → ángulo entre recta y plano

Recta ∈ dos planos



$\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \bar{d}$ $\quad P_0$ debe pertenecer a la recta y a ambos planos

Los dos planos forman un sistema de dos ecuaciones con 3 incógnitas

Se puede igualar una de las variables a 0 para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= 0 \\ z &= 0 \\ y &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned} \qquad P_0 = \left(0; -\tfrac{3}{2}; 0\right)$$

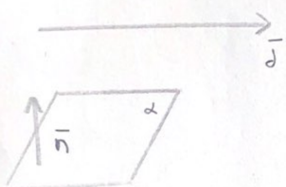
Ec. vectorial $= (x, y; z) = \left(0; -\frac{3}{2}; 0\right) + \lambda(-4; 1; -2) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

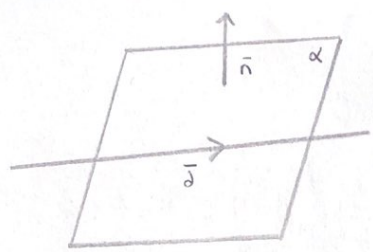
$\to x = 2z$ $\quad$ ↳ se asigna una variable a λ para generalizar la ecuación

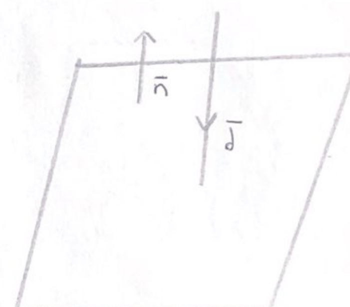
$\to 2z + 2y - z = -3$ $\qquad z = \lambda$

$y = \dfrac{-3 - z}{2}$ $\qquad (x; y; z) = \left(2\lambda; \dfrac{-3-\lambda}{2}; \lambda\right) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Posiciones relativas entre recta y plano







$L \parallel \alpha$ $\qquad L \subset \alpha$ $\qquad L \cap \alpha = \{A\}$

$P_0 \in \alpha$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ $\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}$

$\bar{n} \perp \bar{d} \Rightarrow \bar{n} \cdot \bar{d} = 0$ $\qquad\qquad \bar{n} \cdot \bar{d} \neq 0$

recta: $\dfrac{x - 3}{2} = y = \dfrac{z + 2}{-5}$ $\quad P = (3; 0; -2)$ $\quad$ → se invierten los signos

plano: $3x + 2y - 5z + 2 = 0$

reemplazo

$3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 5 \cdot (-2) + 2 = 0$

$9 + \cancel{10 + 2} = 0 \longrightarrow P = (3; 0; -2) \notin \alpha$

recta: $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} = \dfrac{x - 0}{3} = \dfrac{y - 2}{-2} = \dfrac{z - 3}{-1}$

$P = (0; 2; 3)$

$\bar{d} = (3; -2; -1)\,\lambda$

plano: $5x + y - 2z + 3 = 0$ $\quad \bar{n} = (5; 1; -2)$

reemplazo

$5 \cdot 0 + 2 - 2 \cdot 3 + 3 = 0$

$0 + \cancel{2 - 6 + 3} = 0 \to P = (0; 2; 3) \notin \alpha$

Para $\alpha \cap r = \{A\} \to$ buscar el punto A (donde corta al plano)

SIEMPRE LLEVAR LA RECTA A LA FÓRMULA PARAMÉTRICA

$5 \cdot 3\lambda + 2 - 2\lambda - 2(3 - \lambda) + 3 = 0$

$15\lambda + 2 - \cancel{2\lambda} - 6 + \cancel{2\lambda} + 3 = 0$

$15\lambda = 1 \longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{15}$ $\xrightarrow{\text{reemplazo}}$ $P = \left(\dfrac{3}{15}; \dfrac{28}{15}; \dfrac{44}{15}\right)$

$$L = \begin{cases} x = a + b\lambda \\ y = a + b\lambda \\ z = a + b\lambda \end{cases} \qquad \pi: ax + by + cz + d = 0 \qquad L \cap \pi = \{A\}$$

$$r = \begin{cases} x = a + b\lambda \\ y = a + b\lambda \\ \cancel{z = a + b\lambda} \end{cases} \qquad r \cap \pi = P_0' \qquad d = \overline{AP_0'}$$

a = mismo que en L

b = normal del plano

Matrices

$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \begin{cases} m \text{ filas} \\ n \text{ columnas} \end{cases} \qquad A = a_{ij} \begin{cases} i \text{ fila} \\ j \text{ columna} \end{cases} \qquad A \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \right.$

Operaciones:

- SUMA: sólo entre matrices de mismo orden

$$A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B \in \mathbb{R}^{2\times 2} / B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$(A + B) \in \mathbb{R}^{2\times 2} / A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

- PRODUCTO DE MATRIZ POR ESCALAR

$$A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge k \in \mathbb{R} \qquad A \cdot k = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

- PRODUCTO ENTRE MATRICES: sólo si las columnas de la primera coinciden con las filas de la segunda. NO SON CONMUTABLES

$$A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B \in \mathbb{R}^{2\times 3} / B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{matrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} \end{matrix}$$

2×2 $\quad$ 2×3

COINCIDEN

2×3

Tipos de matrices

- Cuadrada: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Nula: $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N + A = A + N = A$
- Identidad: I (SIEMPRE ES CUADRADA) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A . I = I . A = A \qquad I . I = I^2 = I$
- Traspuesta: $A^t \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} = A^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Propiedades: $(A+B)^t = A^t + B^t \,/\, (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \,/\, (K \cdot A)^t = K \cdot A^t \,/\, (A^t)^t = A$

- Simétrica: $A = A^t$ (SIEMPRE ES CUADRADA)

$A \in \mathbb{R}^{2\times2} / A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $\quad b = c$, $c = b$

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 2 & c \\ b & c & 3 \end{pmatrix}$

- Antisimétrica: $A = -A^t$ (SIEMPRE ES CUADRADA) $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{pmatrix}$

- Inversible $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si $\exists A^{-1} / A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Regular

No singular

- Ortogonal: $A \cdot A^t = I$ (SIEMPRE ES CUADRADA)

CÁLCULO DE MATRIZ INVERSA $\longrightarrow$ GAUSS-JORDAN

Determinante: es una función aplicable a matrices cuadradas que da como resultado un número real

$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \Longrightarrow \det(A) = |A| = K / K \in \mathbb{R}$

Regla de Laplace

Propiedades:

$|N| = 0 \,/\, |I| = 1 \,/\, |A \cdot B| = |A| \cdot |B| \,/$ si alguna fila o columna de la matriz es 0, $|A| = 0$

si alguna fila o columna está repetida, $|A| = 0$ / si en alguna fila o columna $(k \cdot A_1)$ $|A| = k^n \cdot |A|$ siendo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

si alguna fila es la suma de dos $(A_i + A_j)$

$|A| = |A_1\, A_2\, A_3\, A_i \ldots A_n| + |A_1\, A_2\, A_3\, A_j \ldots A_n|$ $\;/\; |A| = |A^t|$

si una matriz es triangular superior o inferior, el determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal

$A \in \mathbb{R}^{3\times3} / A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$ triangular inferior $\longrightarrow |A| = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$

A es inversible $\longrightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \longrightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} \Longrightarrow |A| \neq 0$

A es ortogonal $\longrightarrow |A \cdot A^t| = |I| \longrightarrow |A| \cdot |A^t| = 1 \Longrightarrow |A|^2 = 1$

$A = |A_1\, A_3\, A_2| \Longrightarrow A = -1\, |A_1\, A_2\, A_3|$

Forma matricial de un SEL

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}} \Longrightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 8 \\ 2x + z = 3 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

coeficientes   incógnitas   T.I

$|A| \neq 0 \to SCD$ $|A| = 0 \to SCI$ para sistemas homogéneos

Espacio vectorial

$(\vec{V}_1 + \mathbb{R} \cdot) \begin{cases} \oplus \text{ Suma} \\ \odot \text{ Producto} \end{cases}$ Son planos y rectas al origen pertenecientes a $\mathbb{R}^{n \times n}$

$LCE \to \mathbb{R} \cdot \alpha +$ vector $\vec{a}$ $/ \alpha \in \mathbb{R} \cdot \vec{a} \in \vec{V} \Longrightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in \vec{V}$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge \vec{a} \in \vec{V} \Rightarrow \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$

$\vec{a} \in \vec{V} \wedge \vec{b} \in \vec{V} \wedge \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha (\vec{b} + \vec{a}) = \alpha \vec{b} + \alpha \vec{a}$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge \vec{a} \in \vec{V} \Rightarrow \vec{a} (\alpha + \beta) = \vec{a} \cdot \alpha + \vec{a} \cdot \beta$

$1 \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

↳ elemento neutro

Subespacio vectorial (S)
- $S \subset V$
- $S \neq 0$
- Cumple LCI
- Cumple LCE

Todas las rectas y todos los planos al origen son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$

Ej: Demostrar que $w = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ es un S.E.V. de $\mathbb{R}^3$

① $w \subset \mathbb{R}^3$ por definición

② $(0;0;0) \in w \Rightarrow w \neq \emptyset$

③ LCI

$$\begin{array}{l} (x; y; x+y) \in w \\ + \; (x'; y'; x'+y') \in w \\ \hline ((x+x'); (y+y'); (x+x') + (y+y')) \in w \end{array}$$

Ej: $3 = \lambda + y$

$$\begin{array}{l} (3; 9; 12) \in w \\ (20; 5; 25) \in w \\ \hline (27; 14; 37) \in w \end{array}$$

$\boxed{w \text{ es SEV de } \mathbb{R}^3}$

④ LCE

$\alpha \in \mathbb{R} \wedge (x; y; x+y) \in w$

$\alpha (x; y; x+y) = (\alpha x; \alpha y; \alpha (x+y))$

Ej: $\alpha = 5 \quad (1; 3; 4) \in w$

$5 \cdot (1; 3; 4) \in w =$

$(5; 15; 20) \in w$

$(6; 18; 24) \in w$

Si el SEV no tiene nulo (no pasa por el origen) no es SEV

$V = P_m \rightarrow$ grado del polinomio

Ej: $V = P_6 \rightarrow a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + ax + a_0x^0$

$V = (a_6; a_5; a_4; a_3; a_2; a_1; a_0) \rightarrow \mathbb{R}^7$

Ej: $V = P_4 \quad w = \{ p \in P_4 / p = 0 \text{ ó } gr(p) = 2 \}$

Determinar si w es subespacio de v

1) $w \subset P_4$ por definición ✓

2) $p = 0 \Longrightarrow w \neq 0$ ✓

3) LCI $\rightarrow p = (3; 5; 4) \; gr(p) = 2$

$p' = (-3; 2; 2) \; gr(p) = 2$

$(p + p') = (0; 7; 6) \; gr(p + p') \neq 2 \rightarrow$ no se cumple X

Ej: $V = \mathbb{R}^2 \quad D = \{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 0 \}$

1) $D \subset \mathbb{R}^2$ por definición ✓

2) $(0; 0) \in D \Rightarrow D \neq 0$ ✓

3) LCI $\rightarrow$ cumple (si suma negativo da negativo) ✓

" " positivo " positivo

4) LCE $\rightarrow - \cdot - = + \rightarrow$ no pertenece al conjunto X

Combinación lineal de vectores

CL $\rightarrow v = \alpha_1 \cdot V_1 + \alpha_2 \cdot V_2 + \alpha_3 \cdot V_3 \dots \alpha_n \cdot V_n \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_n \in \mathbb{R}$

Ej: $V = \mathbb{R}^2 \quad (2; 3) \in \mathbb{R}^2 \in CL \quad A = \{ (2; 1); (0; 1) \}$

$(2; 3) = \alpha (2; 1) + \beta (0; 1)$

$\begin{cases} 2 = 2\alpha \\ 3 = \alpha + \beta \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{matrix}$

SCD $\rightarrow$ CL único

SCI $\rightarrow \exists \infty$ CL

SI $\rightarrow$ CL $\nexists$

LI $\rightarrow$ si CL $= \vec{0}$

LD $\rightarrow$ si CL $\neq \vec{0}$

Recta intersección de planos: $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \bar{d}$

Plano que contiene a una recta / es perpendicular a otro: $\bar{n} \cdot \bar{d} = 0$

$\bar{n}_{perp.} \times \bar{d}_{cont.} = \bar{n}_{plano}$

$P_{0\,recta} = P_{0\,plano}$

Espacios vectoriales en $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ rectas o planos al origen

$\hookrightarrow$ si S es recta, $S^{\perp}$ es el plano con $\bar{n} = \bar{d}$

y viceversa

Averiguar si la base es LD $\rightarrow \{(a;a;a);(b;b;b);(c;c;c)\} \rightarrow \alpha(a;a;a) + \beta\cdot(b;b;b) + \gamma(c;c;c) = 0$

es base $\leftarrow$ SCD

no es base $\leftarrow$ SCI

Distancias:

$$\left| \frac{a x_0 + b y_0 + c z_0 + d}{\|\bar{n}\|} \right|$$ punto a plano / recta a plano

$$\left| \frac{\|\overline{P_1P_2} \times \bar{d}\|}{\|\bar{d}\|} \right|$$ punto a recta / entre paralelas

$$\left\| \frac{\overline{P_1P_2} \cdot (\bar{d}_1 \times \bar{d}_2)}{\|\bar{d}_1 \times \bar{d}_2\|} \right\|$$ alabeadas

Proyección $\rightarrow$ recta sobre plano $\begin{cases} \text{normal} \\ \text{director} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$ $\rightarrow$ que cumplan con las condiciones de ambas ecuaciones