

MINISTERUL EDUCAȚIEI



UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ȘI CALCULATOARE

PROIECT DE SEMESTRU

Student: Cojocaru Darius-Andrei

Disciplina: Identificarea Sistemelor

2026



Cuprins

Table of Contents

1. Identificarea sistemelor de ordin II cu poli reali utilizând metoda regresiei liniare	3
1.1. Descrierea procesului fizic	3
1.2. Modelul propus.....	3
1.3. Identificarea propriu-zisă	4
1.3.1. Calculul factorului de proporționalitate.....	4
1.3.2. Calculul constantei de timp dominante	5
1.3.3. Calculul constantei de timp nedominante	6
1.4. Validarea modelului obținut	8
2. Identificarea sistemelor de ordin II cu poli reali utilizând semnale de tip Chirp	9
2.1. Modelul propus.....	10
2.2. Calibrarea semnalului de intrare.....	10
2.3. Identificarea propriu-zisă	11
2.3.1. Calculul factorului de proporționalitate.....	11
2.3.2. Calculul constantelor de timp T1 și T2	11
2.4. Validarea modelului identificat	13
3. Identificarea sistemelor utilizând metode parametrice	14
3.1. Descrierea procesului fizic	15
3.2. Calibrarea semnalului de intrare.....	15
3.3. Construirea datelor din setul de identificare și validare	16
3.4. Identificarea parametrilor modelelor matematice	17
3.5. Validarea modelelor obținute	18
3.6. Proprietățile modelelor validate	21
3.7. Concluzia finala	21



1. Identificarea sistemelor de ordin II cu poli reali utilizând metoda regresiei liniare

1.1. Descrierea procesului fizic

Se prezintă un experiment de achiziție de date pentru un sistem dinamic având regim aperiodic amortizat, precum în Figura 1. Se prezintă un proces de reglare de nivel în cazul a două rezervoare deschise conectate în serie. Reglarea nivelului se face în rezervorul al doilea, mărimea de execuție fiind debitul de intrare în primul rezervor. Sistemul obținut va avea astfel: semnalul de intrare $u(t)$ – debitul de intrare în primul rezervor [m^3/s] și semnalele de stare $x_1(t)$ și $x_2(t)$ – nivelul de lichid în primul și al doilea rezervor [m]; semnalul de ieșire $y(t)$ – măsura scalată a nivelului lichid din al doilea rezervor [m]. Se consideră că echipamentele care furnizează semnalele de intrare și ieșire pot avea o amplificare arbitrară, i.e., factorul de amplificare al sistemului nu este obligatoriu unitar.

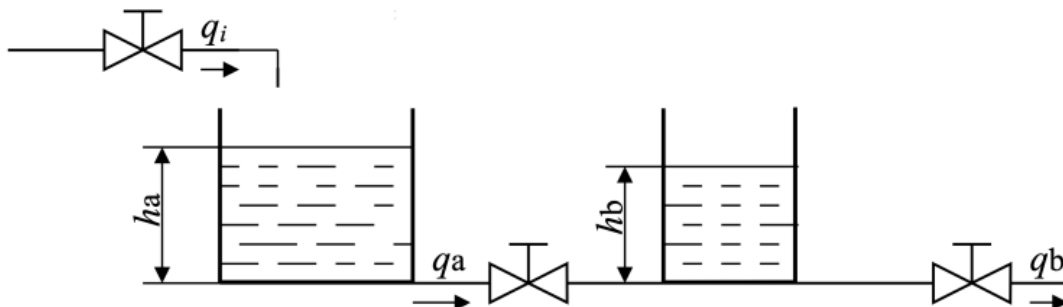


Figura 1: Reglarea nivelului într-un proces cu două rezervoare în serie

Se consideră necunoscute secțiunile rezervoarelor (presupuse constante), respectiv rezistențele de curgere (presupusă laminară) ale lichidului prin instalație. Cele două constante de timp ale procesului format din ansamblul celor două rezervoare legate în serie diferă de constantele de timp individuale ale fiecărui rezervor luat în parte. Se presupune că unui dintre rezervoare are volumul considerabil mai mare decât al celuilalt.

1.2. Modelul propus

Se propune modelarea sistemului cu următoarea structură:



$$H(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}, K, T_1, T_2 > 0, T_1 \gg T_2$$

Unde:

- K – factorul de proporționalitate
- T1 – constanta de timp dominantă a sistemului
- T2 – constanta de timp nedominantă a sistemului

1.3. Identificarea propriu-zisă

1.3.1. Calculul factorului de proporționalitate

Calcul factorului de proporționalitate (K) se folosește formula $K = \frac{y_{st} - y_0}{u_{st} - u_0}$, unde u_0 și u_{st} reprezintă valorile semnalului de intrare, iar y_0 și y_{st} reprezintă valorile semnalului de ieșire. Pentru calculul acestor termeni se aleg patru indecși, doi din partea staționară de pe graficul roșu (graficul ieșirii) din momentul de dinaintea de începutul treptei (i1 și i2 utilizați pentru u_0 și y_0) și doi din partea staționară de pe același grafic din momentul în care treapta deja a urcat (i3 și i4 utilizați pentru u_{st} și y_{st}), acest aspect se poate vedea și în Figura 2.

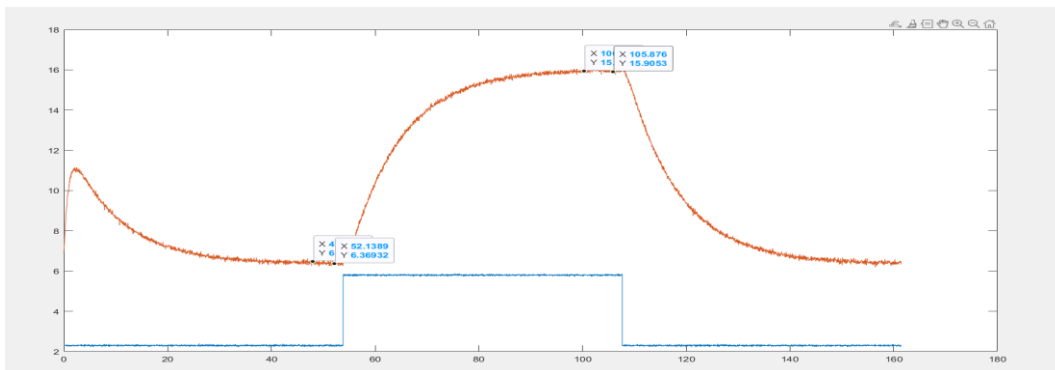


Figura 2: Selecția celor patru indecși (1-4)

Cu ajutorul indecșilor obținuți putem calcula valorile ce ulterior vor fi folosite pentru identificarea parametrului K. Valorile indecșilor sunt:

- i1 = 5880



- $i2 = 6429$
- $i3 = 12371$
- $i4 = 13071$

Calculul pentru y_0 , y_{st} , u_0 și u_{st} se poate vedea în Figura 3.

```
u0=mean(u(i1:i2));
ust=mean(u(i3:i4));
y0=mean(y(i1:i2));
yst=mean(y(i3:i4));
```

Figura 3: Fragment de cod

Valoarea calculată a parametrului K este 2,7324.

1.3.2. Calculul constantei de timp dominante

Pentru calculul constantei de timp dominante se folosește metoda logaritmărilor succesive cu ajutorul regresiei liniare. Pornim de la a selecta doi indecși corespunzători lui T_1 $i5$ și $i6$, aceștia sunt selectați de pe graficul ieșirii, precum în Figura 4.

- $i5 = 6706$
- $i6 = 8065$

Cu ajutorul acestor indecși se formează un nou vector de timp și un nou vector al ieșirii care au ca parametri de timp, momentele determinate de indecșii respectivi. Pentru metoda regresiei avem nevoie de relația ce reiese din Figura 5. Pentru calculul final al constantei de timp dominante se rezolvă relația din Figura 5, iar rezultatul final este dat de inversul opusului primului element din matricea theta.

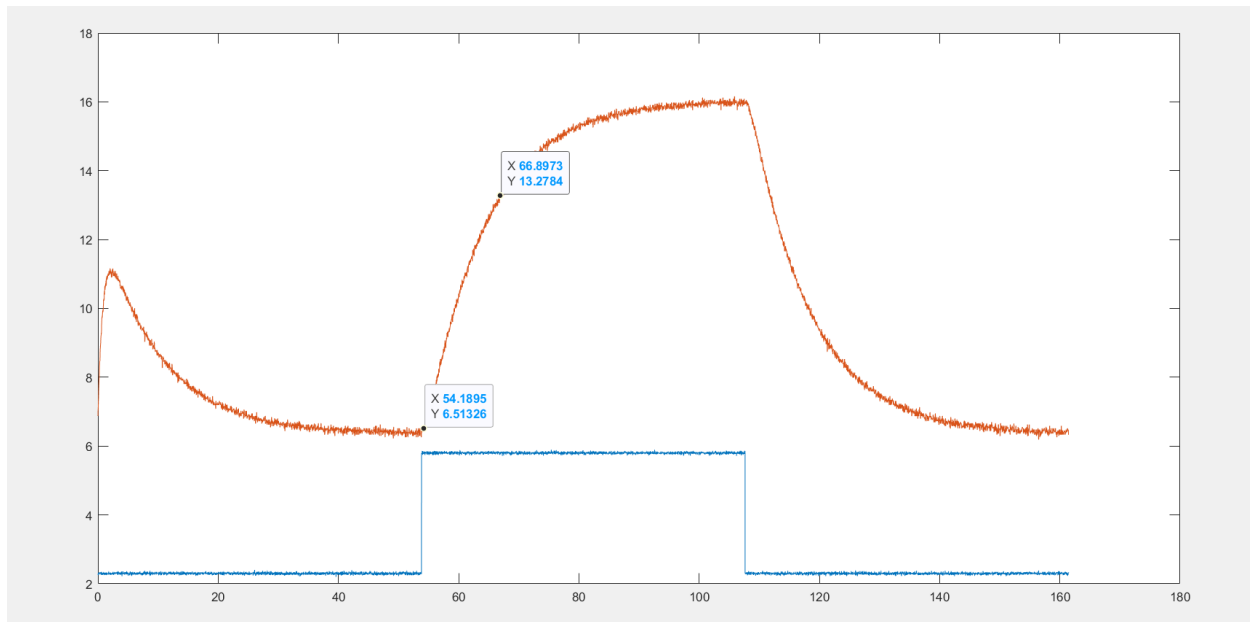


Figura 4: Selecția indecșilor pentru regresia liniară (5-6)

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N t_k^2 & \sum_{k=1}^N t_k \\ \sum_{k=1}^N t_k & N \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N x_k t_k \\ \sum_{k=1}^N x_k \end{pmatrix}.$$

Figura 5: Regresia liniară

Din relația $T_1 = -1/\alpha$ rezultă valoarea constantei de timp dominante și anume $T_1 = 10,0374$.

1.3.3. Calculul constantei de timp nedominante

Pentru determinarea constantei de timp T_2 se pornește de la răspunsul indicial:

$$y(t) = K \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right), \quad t \geq 0,$$

unde logaritmând expresia ajungem la următoarea relație:



$$T_1 T_2 \ln(T_2) - T_2 [T_i + T_1 \ln(T_1)] + T_1 T_i = 0$$

Pentru aflarea lui T_2 este necesar aflarea momentului de timp al punctului de inflexiune T_i . Se aleg de pe graficul ieșirii alți doi indecși, $i7$ și $i8$, conform Figurii 6.

- $i7 = 6660$
- $i8 = 7024$

Aflarea lui T_i ne ajută să determinăm intervalul de timp în care activează T_2 , acesta fiind cuprins între 0.1 și 2.93. Din graficul obținut prin reprezentarea funcției în raport cu T_{2vec} se poate identifica constanta de timp nedominantă T_2 prin intersecția cu zero. Astfel rezultă valoare constantei de timp nedominante și anume $T_2 = 0,36$.

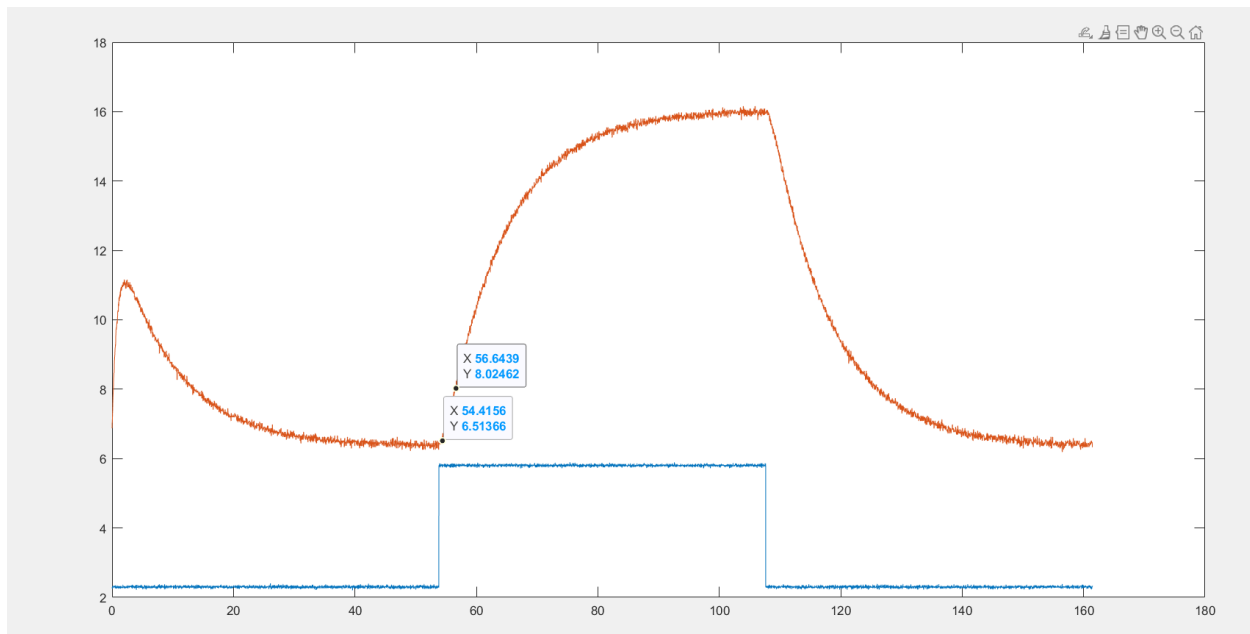
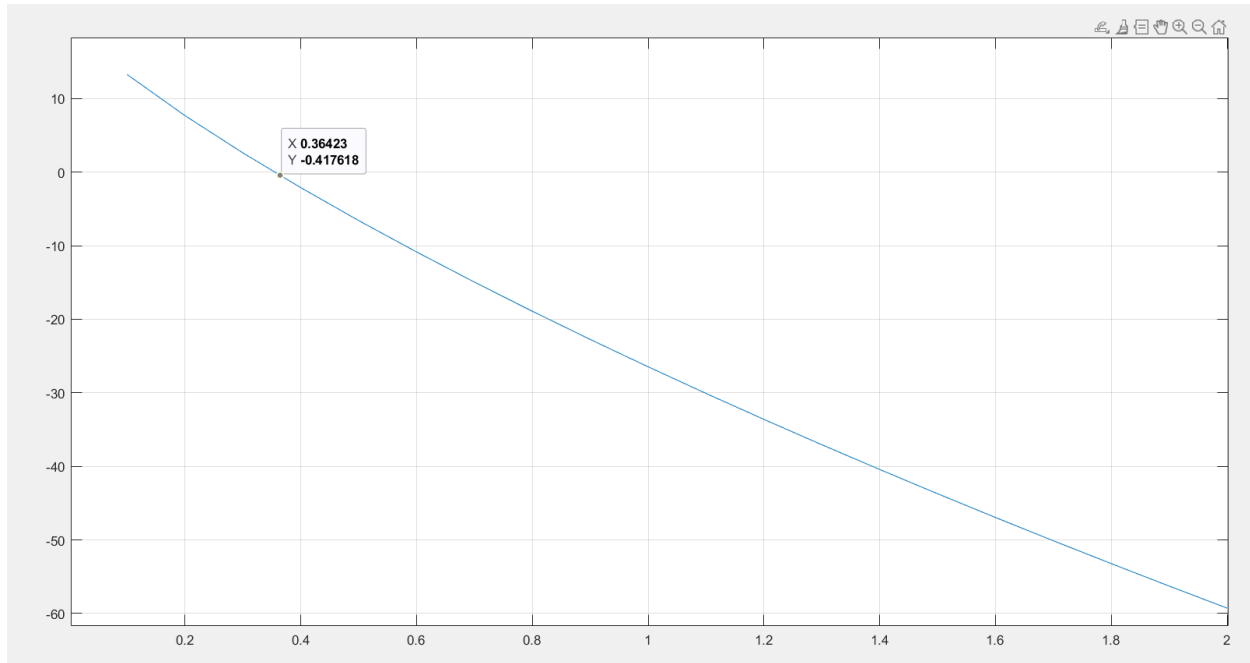


Figura 6: Selecția indecșilor $i7$ și $i8$

Figura 7: Identificarea lui T_2

1.4. Validarea modelului obținut

Ulterior identificării celor trei parametri K , T_1 , T_2 , modelul sistemului sub forma unei funcții de transfer este reprezentat de relația:

Pentru a verifica precizia modelului identificat am transpus modelul din funcție de transfer în spațiul stărilor, stabilind matricele sistemului, deoarece prin spațiul stărilor putem seta condițiile inițiale, deoarece se observă că sistemul nu se află în repaus în momentul simulării. În funcția `lsim`, pe lângă sistemul din spațiul stărilor obținut conform relațiilor din Figura 8, am introdus și condițiile inițiale pentru a obține o dinamică precum a sistemului simulat la începutul proiectului.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 \cdot T_2} & -\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{T_1 \cdot T_2} \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 0) \quad D = (0).$$

Figura 8: Transpunerea modelului în spațiul stărilor.

Pentru evaluarea modelului obținut în urma identificării, am utilizat cei 2 indici de performanță:

**FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ȘI INFORMATICĂ**

- Eroarea medie pătratică:

$$J = \frac{\|y - y_M\|}{\sqrt{N}}$$

- Eroarea medie pătratică normalizată

$$\varepsilon_{MPN} = \frac{\|y - y_M\|}{\|y - \bar{y}\|} \times 100 = 5.81\%$$

Atât eroarea medie pătratică normalizată mică (<10%) și suprapunerea aproape perfectă pe grafic asigură validitatea modelului obținut anterior.

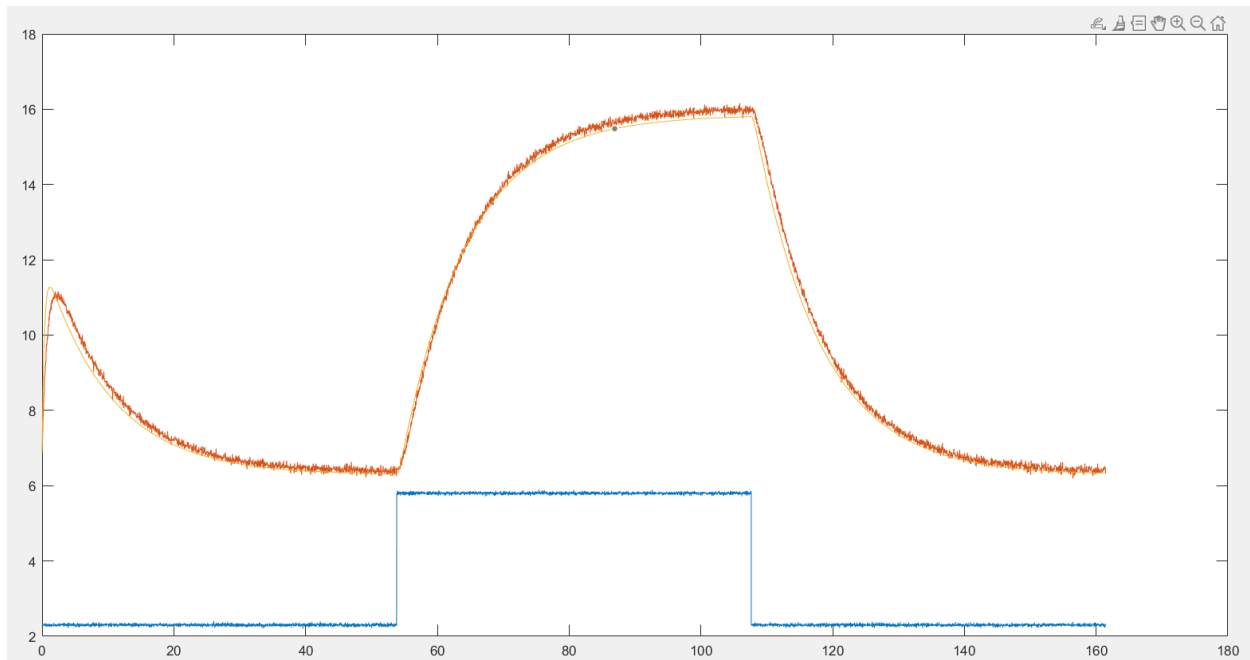


Figura 9: Validarea modelului obținut



2. Identificarea sistemelor de ordin II cu poli reali utilizând semnale de tip Chirp

Se propune analiza aceluiași sistem cu două rezervoare înseriate descris și utilizat în lucrarea anterioară de proiect, vizibil în Figura 1.

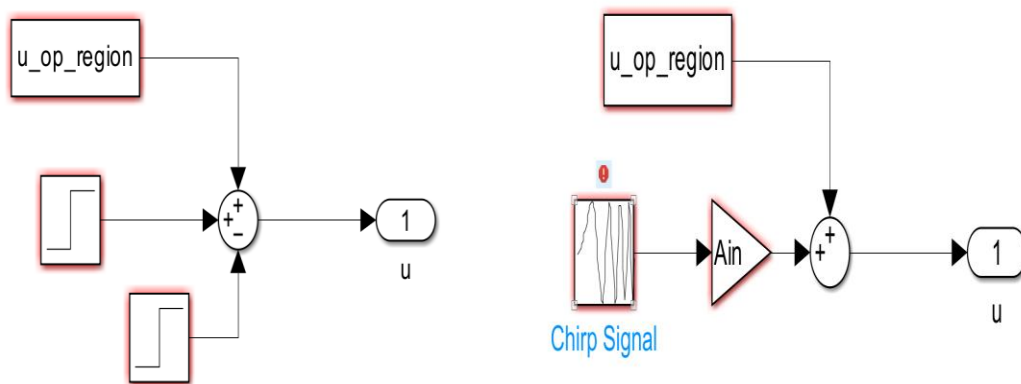
2.1. Modelul propus

Se propune modelarea sistemului cu următoarea structură:

$$H(s) = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}, T_1, T_2 > 0, T_1 \gg T_2$$

2.2. Calibrarea semnalului de intrare

Pentru acest proces a fost necesară modificarea schemei Simulink, prin înlocuirea intrării cu două trepte, utilizat la regresia liniară, cu un semnal chirp și o amplificare.



Figura

10: Modificarea adusă schemei Simulink, de la două trepte la chirp cu amplificare

Parametrii utilizați pentru semnalul chirp au fost aleși pe baza constantei de timp dominantă din proiectul anterior ($T_1 = 10,03$), rezultând parametrul $\omega_f = \frac{1}{10,03} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$. Pornind de la această frecvență de tăiere, s-a definit intervalul de frecvențe pentru această parte de proiect, având un interval suficient de mare pentru desfășurare.

$$f_{\min} = \frac{\omega_f}{2\pi \cdot 10} \quad f_{\max} = \frac{\omega_f \cdot 5}{2\pi}$$


FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Amplificarea de intrare a fost aleasă suficient de mare cât să depășească zgomotul, $A_{in} = 1,48$.
 Asupra intrării am aplicat un filtru median cu ordinul treizeci, pentru a elimina zgomotul.

2.3. Identificarea propriu-zisă

2.3.1. Calculul factorului de proporționalitate

Pentru identificarea factorului de proporționalitate (K), se utilizează raportul dintre valorile medii ale semnalelor de intrare și ieșire în regim staționar.

$$K = \frac{y_{st}}{u_{st}}$$

Valoarea lui y_{st} ($= 6,33$) este obținută din suma a două vârfuri consecutive (unul de sus, celălalt de jos) de pe graficul roșu, al ieșirii, apoi împărțite la doi, iar valoarea lui u_{st} ($= 2,312$) este obținută în același mod, doar ca selectăm de pe graficul intrării, cel roșu, precum în Figura 10.

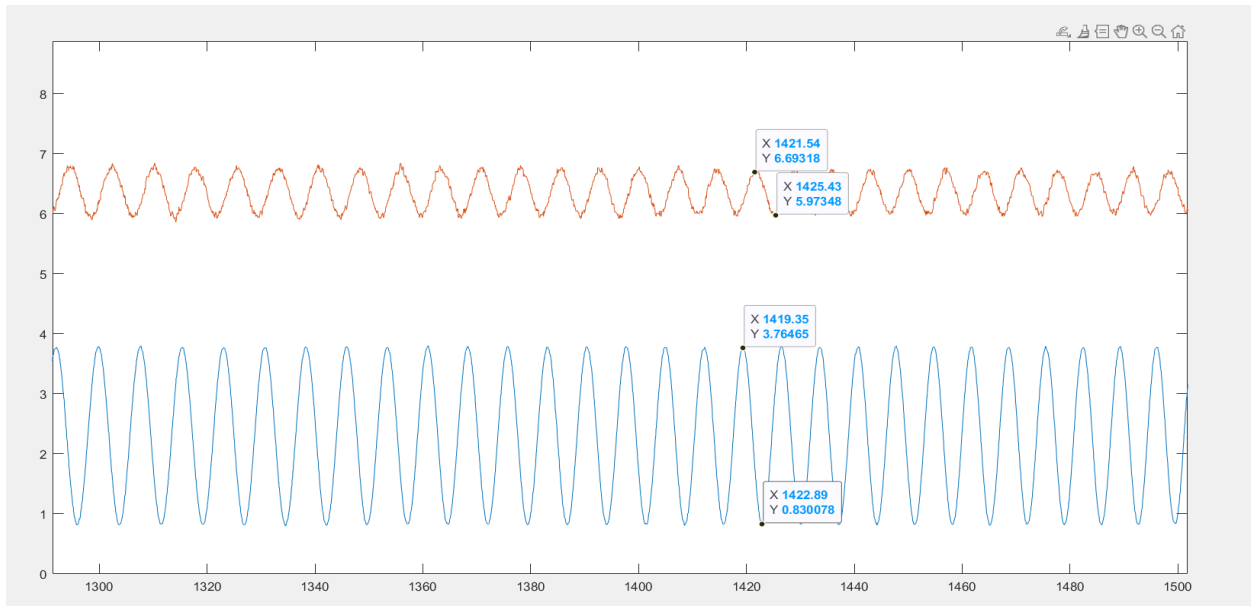


Figura 11: Valorile folosite în calculul lui y_{st} și u_{st}

În cele din urmă, obținem valoarea factorului de proporționalitate, $K = 2,7393$.

2.3.2. Calculul constantelor de timp T_1 și T_2

Pentru identificarea constantelor de timp, s-a analizat răspunsul în frecvență al sistemului, într-o zonă în care cele două semnale, cel de intrare și cel de ieșire se află în cuadratură. S-a ales frecvența $\omega_1 =$


FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

$0,2236 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$, după multiple încercări, astfel încât faza sistemului să fie cât mai apropiată de $-\frac{\pi}{2}$, obținând valoarea de -93.1008 .

Valoarea amplitudinii ieșirii este obținută din aceeași zonă ca ω_1 , folosind metoda peak to peak, obținându-se valoarea 1,5743. Valoarea amplitudinii intrării coincide cu valoarea lui A_{in} din secțiunea Input setup a codului. Ulterior obținerii celor două amplitudini se poate determina modulul sistemului pentru ω_1 .

$$|H(j\omega_1)| = \frac{A_y}{A_u}$$

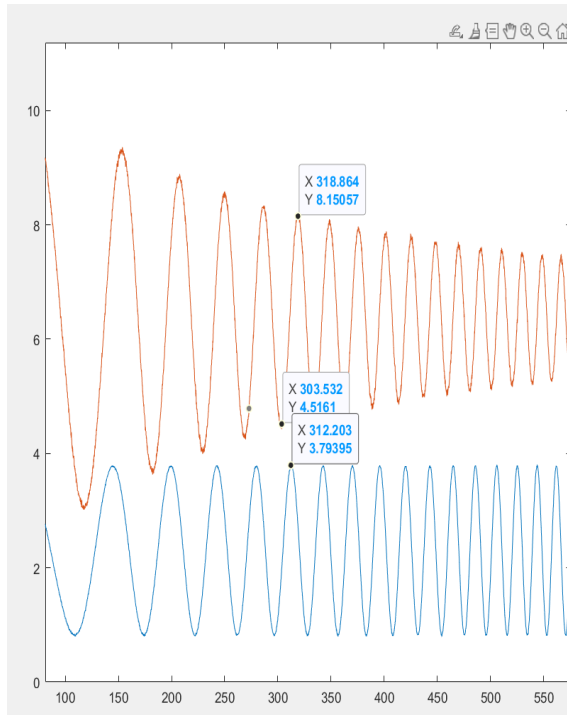


Figura 12: Obținerea lui ω_1

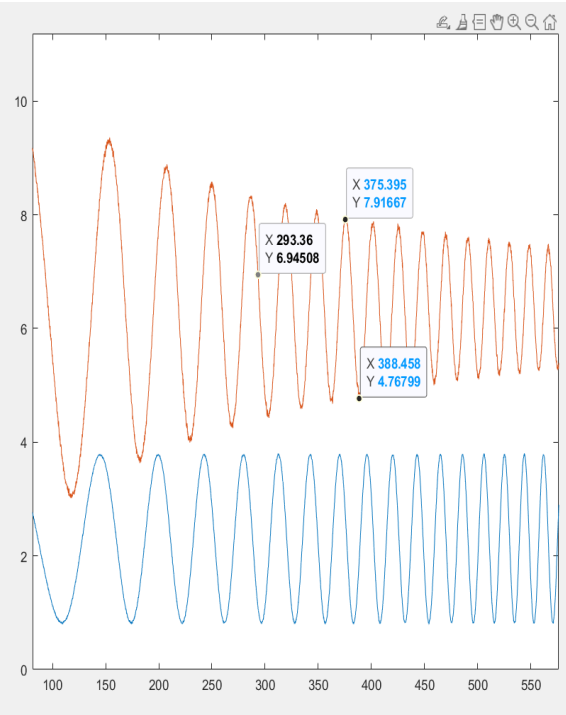


Figura 13: Obținerea lui A_y

Deoarece lucrăm în domeniul frecvenței, vom utiliza pentru funcția de transfer următorul model

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Calculul factorului de amortizare se obține din următoarea formula:



$$\zeta = \frac{K}{2 \cdot |H(j\omega_1)|} = 1,2876$$

Valoarea acestui parametru trebuie să fie mai mare decât unu, deoarece polii sistemului sunt reali și nu complex-conjugați. Pentru calculul celor două constante de timp folosim funcția zpk din intermediul Matlab, în cele din urmă obținând $T_1 = 2,1308$ și $T_2 = 9,3809$, constanta dominantă a sistemului fiind T_2 deoarece ea este mai mare și polul introdus de aceasta este cel dominant, care determină comportamentul sistemului.

$$H(s) = \frac{2.739}{19.99s^2 + 11.51s + 1}$$

2.4. Validarea modelului identificat

Ulterior identificării celor trei parametri K , T_1 , T_2 , modelul sistemului sub forma unei funcții de transfer este reprezentat de relația:

$$H(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} = \frac{2.739}{19.99s^2 + 11.51s + 1}$$

Pentru a verifica precizia modelului identificat am transpus modelul din funcție de transfer în spațiul stărilor, stabilind matricele sistemului, deoarece prin spațiul stărilor putem seta condițiile inițiale, deoarece se observă că sistemul nu se află în repaus în momentul simulării. În funcția `lsim`, pe lângă sistemul din spațiul stărilor obținut conform relațiilor din Figura 8, am introdus și condițiile inițiale pentru a obține o dinamică precum a sistemului simulat la începutul proiectului.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 \cdot T_2} & -\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{T_1 \cdot T_2} \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 0) \quad D = (0).$$

Figura 8: Transpunerea modelului în spațiul stărilor.

Pentru evaluarea modelului obținut în urma identificării, am utilizat cei 2 indici de performanță:

- Eroarea medie pătratică:

$$J = \frac{\|y - y_M\|}{\sqrt{N}}$$

**FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ȘI INFORMATICĂ**

- Eroarea medie pătratică normalizată

$$\varepsilon_{MPN} = \frac{\|y - y_M\|}{\|y - y\|} \times 100 = 16.76\%$$

Atât eroarea medie pătratică normalizată mică și suprapunerea aproape perfectă pe grafic asigură validitatea modelului obținut anterior.

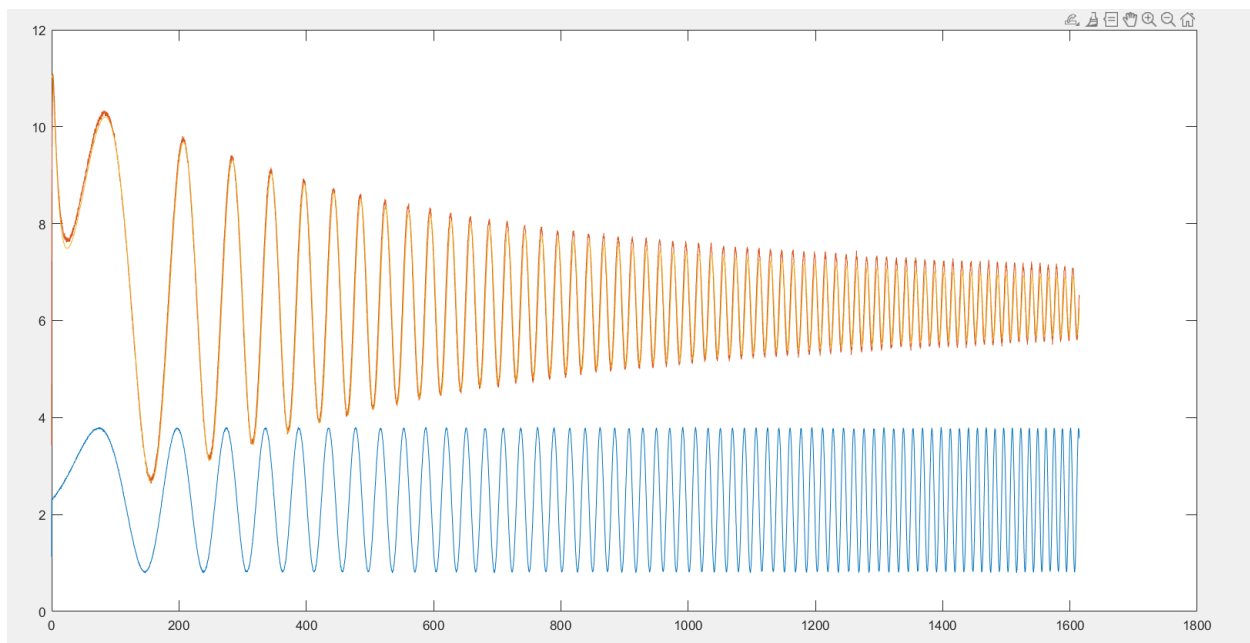


Figura 14: Validarea modelului obținut



3. Identificarea sistemelor utilizând metode parametrice

3.1. Descrierea procesului fizic

Se prezintă un experiment de achiziție de date și identificarea modelului matematic pentru un pendul simplu acționat de un motor electric plasat la baza tijei sale.

Pendulul constă dintr-un corp mic și greu cu masa m , suspendat de o tijă rigidă și foarte ușoară, de lungime l . Se consideră pendulul ca un sistem cu intrarea cuplului mecanic dezvoltat de motor și ieșirea măsurată o combinație liniară a poziției și vitezei unghiulare a pendulului.

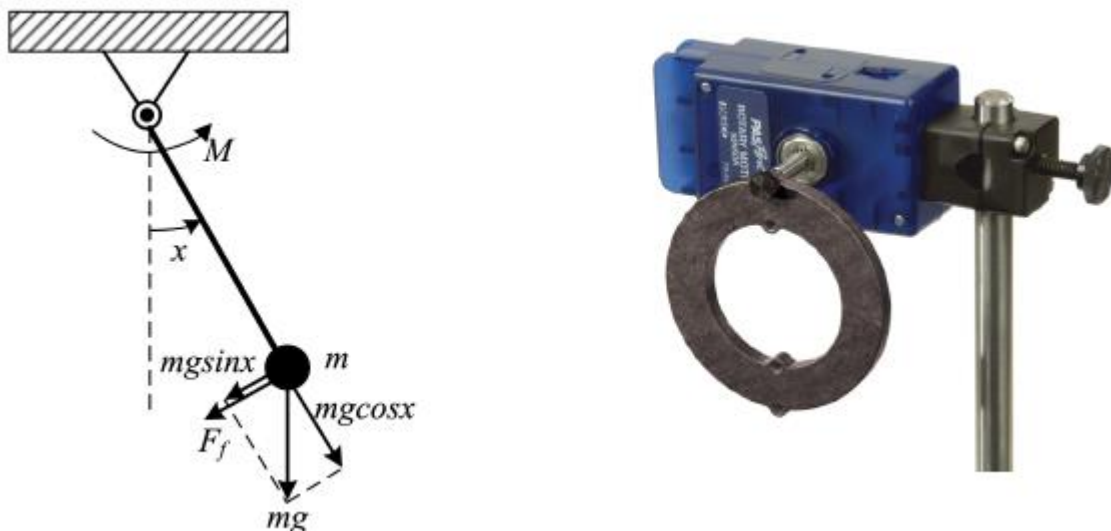


Figura 15: Pendulul mecanic simplu acționat cu motor electric.

3.2. Calibrarea semnalului de intrare

Pornind de la sistemele descrise anterior, se propune proiectarea unui semnal trapezoidal peste care se suprapune un semnal SPAB (semnal pseudoaleator binar).

Numărul de biți al registrului din SPAB, N , a fost ales cinci, astfel încât oferă o secvență de lungimea

$$L = 2^N - 1 = 31 \text{ stări.}$$

Timpul necesar pentru aplanarea condițiilor inițiale, t_1 , a fost ales din grafic și acesta este de aproximativ doisprezece secunde, iar timpul primului maxim, t_r este de aproximativ o secundă.



Calculul divizorului de frecvență al SPAB-ului este identificat din formula:

$$\text{round}\left(\frac{t_r}{N \cdot T_s}\right) = 480$$

Implementarea semnalului de intrare s-a realizat în funcția `generate_input_signal`, unde s-a utilizat durata semnalului SPAB:

$$\Delta T = p \cdot (2^N - 1) \cdot T_s \cdot 3$$

Această perioadă a fost aleasă pentru a putea separa semnalul într-o zonă de identificare și într-o zonă pentru validare.

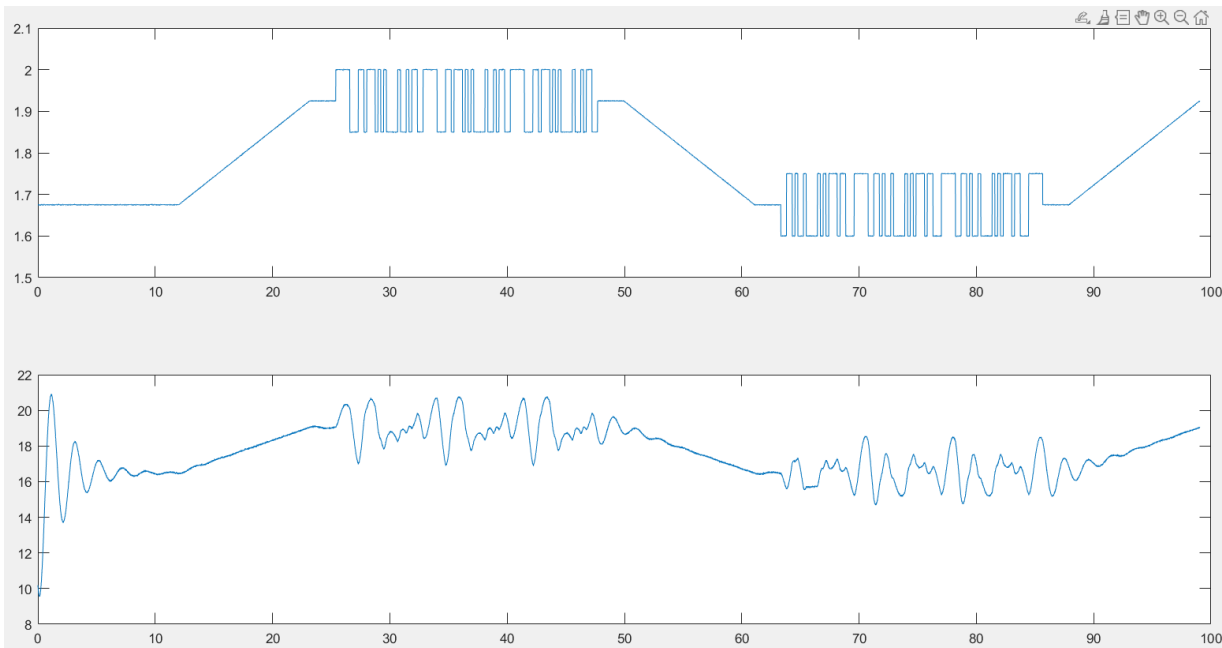


Figura 16: Semnalul de intrare cu formă de trapez, împărțit în zona de identificare și zona de validare

3.3. Construirea datelor din setul de identificare și validare

Setul de identificare (t_{id} , u_{id} , y_{id}) este reprezentat de intervalul format de indecșii $[i_1, i_2] = [45596, 100277]$, Acest set de date a fost folosit pentru antrenarea modelelor alese.

Setul de validare (t_{vd} , u_{vd} , y_{vd}) este reprezentat de intervalul format de indecșii $[i_3, i_4] = [121271, 176705]$, Acest set de date a fost folosit pentru testarea predicției modelelor alese prin funcțiile `resid` și `compare`. Deoarece perioada de eșantionare este foarte mică, s-a folosit o decimare cu factorul $N_r = 15$, iar pentru a lucra cu semnalul în jurul punctului de funcționare am utilizat `detrending`.


FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

$$u_{id} = u_{id} - \text{mean}(u_{id})$$

$$u_{vd} = u_{vd} - \text{mean}(u_{vd})$$

$$y_{id} = y_{id} - \text{mean}(y_{id})$$

$$y_{vd} = y_{vd} - \text{mean}(y_{vd})$$

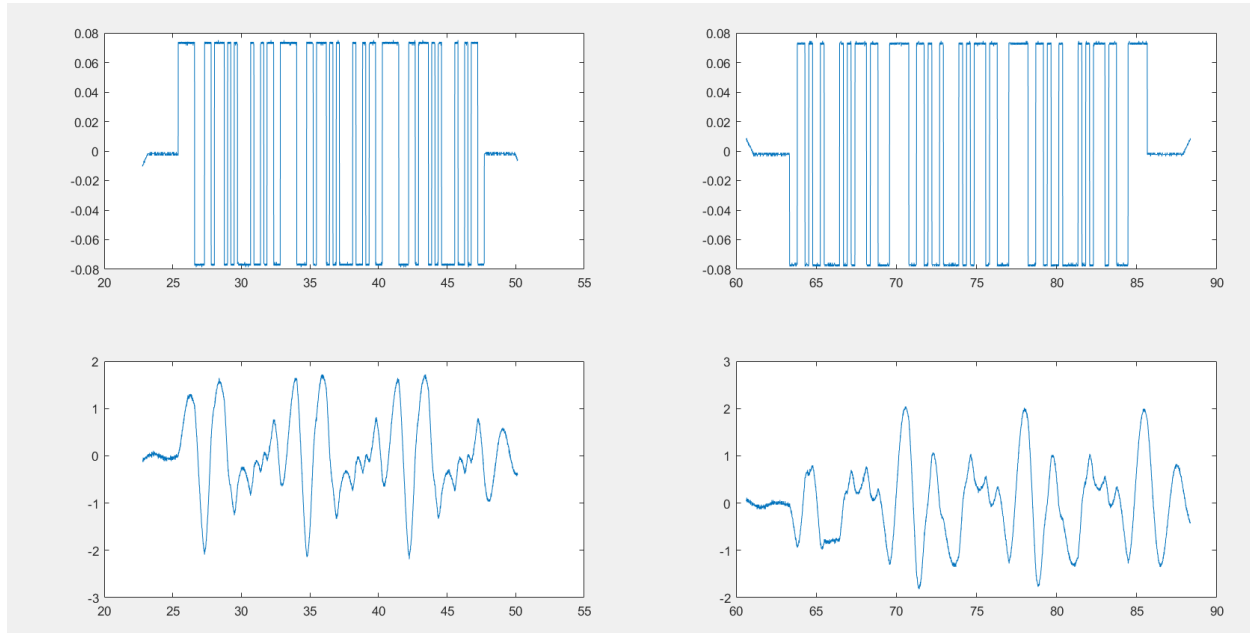


Figura 17: Seturile de date pentru identificare (stânga) și pentru validare (dreapta)

Pentru a identifica parametric, vectorii de date au fost structurați în structuri de date de tipul `iddata`.

$$dat_{id} = \text{iddata}(y_{id}, u_{id}, t_{id}(2) - t_{id}(1))$$

$$dat_{vd} = \text{iddata}(y_{vd}, u_{vd}, t_{vd}(2) - t_{vd}(1))$$

3.4. Identificarea parametrilor modelelor matematice

Pentru identificarea modelelor s-au folosit mai multe structuri, urmărind obținerea unei erori de predicție cât mai mică.

Modelul ARX are următoarea structură:

$$A(z^{-1})Y(z) = z^{-n_d}B(z^{-1})U(z)$$


FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Parametrii structurii din Matlab (n_a , n_b și n_k) reprezintă numărul de poli ai sistemului, în cazul nostru doi, numărul de coeficienți ai polinomului de intrare, în cazul de față tot doi deoarece reprezintă numărul de zerouri ai sistemului plus 1, iar ultimul parametru semnifică timpul mort, ales unu deoarece pendulul răspunde repede la comanda motorului.

Modelul ARMAX are următoarea structură:

$$A(z^{-1})Y(z) = z^{-n_d}B(z^{-1})U(z) + C(z^{-1})E(z)$$

Parametrii structurii din Matlab sunt n_a , n_b , n_c și n_k . Cei trei folosiți anterior au aceeași semnificație și valoare precum la modelul ARX, iar parametrul n_c reprezintă ordinul polinomului care modelează zgomotul. În cazul nostru este cinci și permite o modelare mai bună a zgomotului.

Modelul OE are următoarea structură:

$$Y(z) = \frac{(z^{-n_d}B(z^{-1}))}{F(z^{-1})}U(z) + E(z)$$

Parametrii structurii din Matlab sunt n_b , n_f și n_k . Cei doi folosiți anterior au aceeași semnificație și valoare ca la modelele utilizate anterior, în timp ce n_f este înlocuitorul lui n_a din modelele folosite mai sus.

Modelul SSEST are următoarea structură:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ke(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) + e(k)$$

Spre deosebire de celelalte modele utilizate mai sus, acest model identifică matricele din spațiul stărilor ale sistemului.

3.5. Validarea modelelor obținute

Validarea modelelor obținute se face pe baza a două criterii importante: criteriul de suprapunere (Fit), care evaluează capacitatea modelului de a reproduce ieșirea sistemului, iar cel de al doilea criteriu este verificarea testelor de intercorelație (OE, SSEST) și autocorelație (ARX, ARMAX, SSEST).

Modelul ARX:

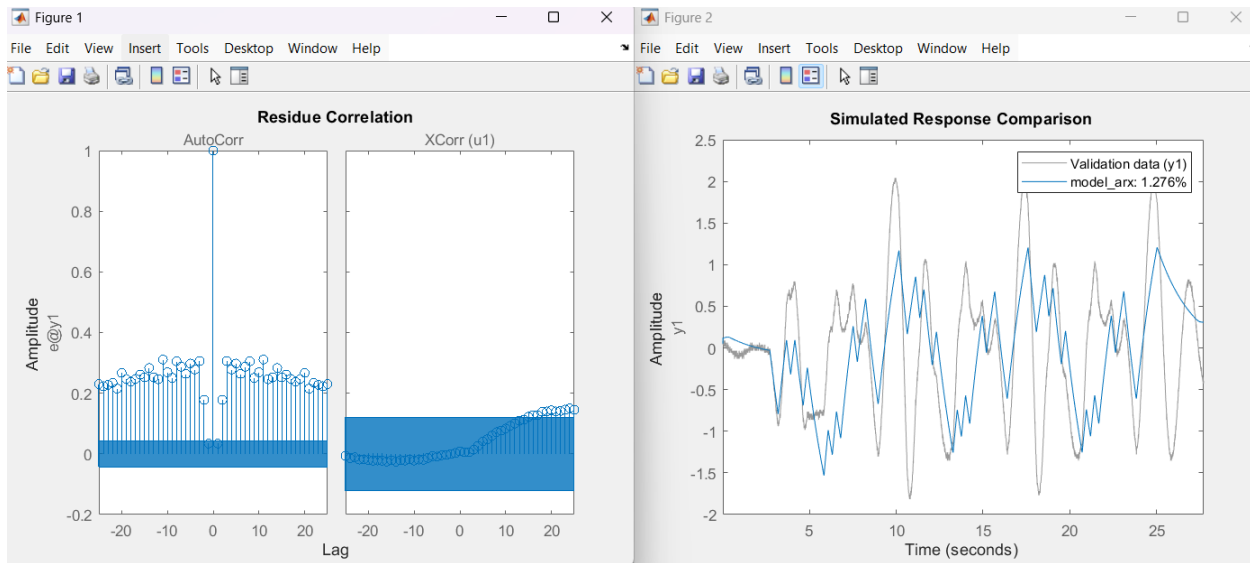


Figura 18: Fitul și autocorelația modelului ARX

Modelul ARX nu are nici un fit bun și nu trece nici testul de autocorelație, în urmare nu este un model bun.

Modelul ARMAX:

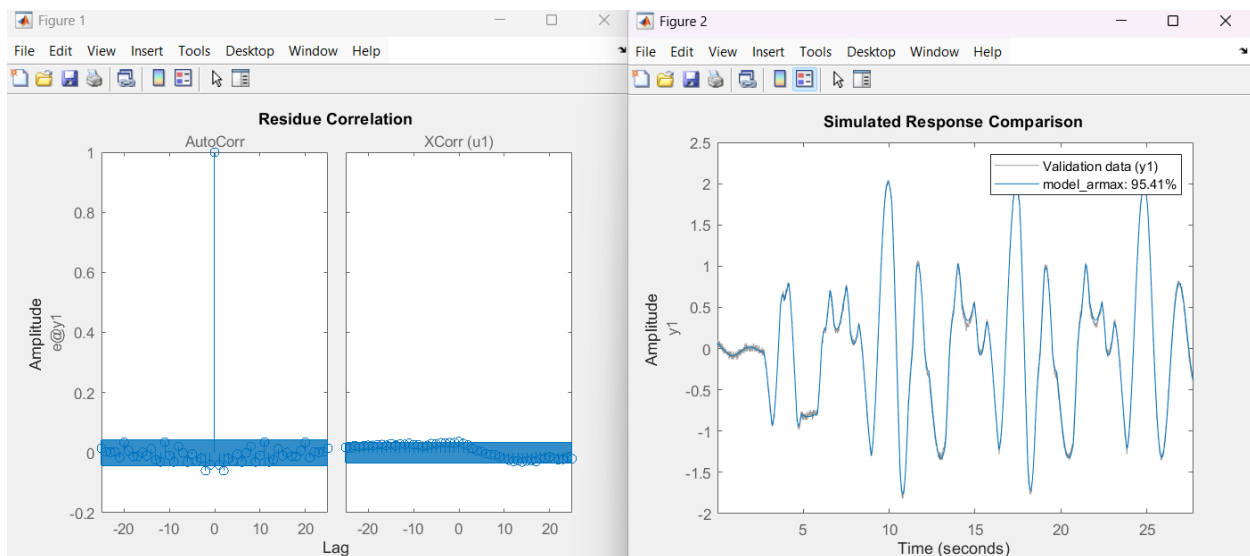


Figura 19: Fitul și autocorelația modelului ARMAX


FACULTATEA DE AUTOMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Deoarece acest model are un fit foarte bun și trece testul de autocorelație, este considerat un model valid.

Modelul OE:

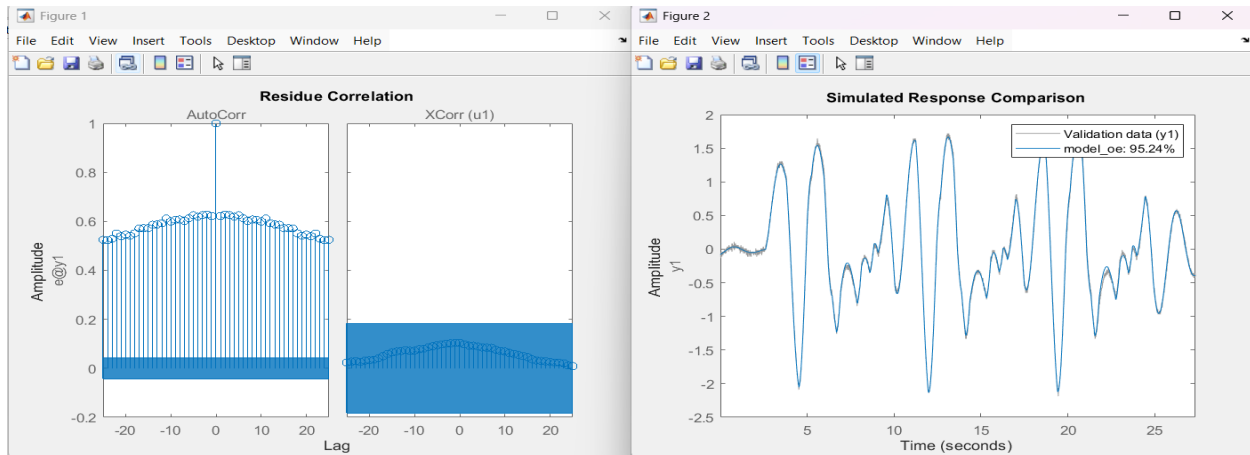


Figura 20: Fitul și intercorelația modelului OE

Deoarece acest model are un fit foarte bun și trece testul de autocorelație, este considerat valid.

Modelul SSEST:

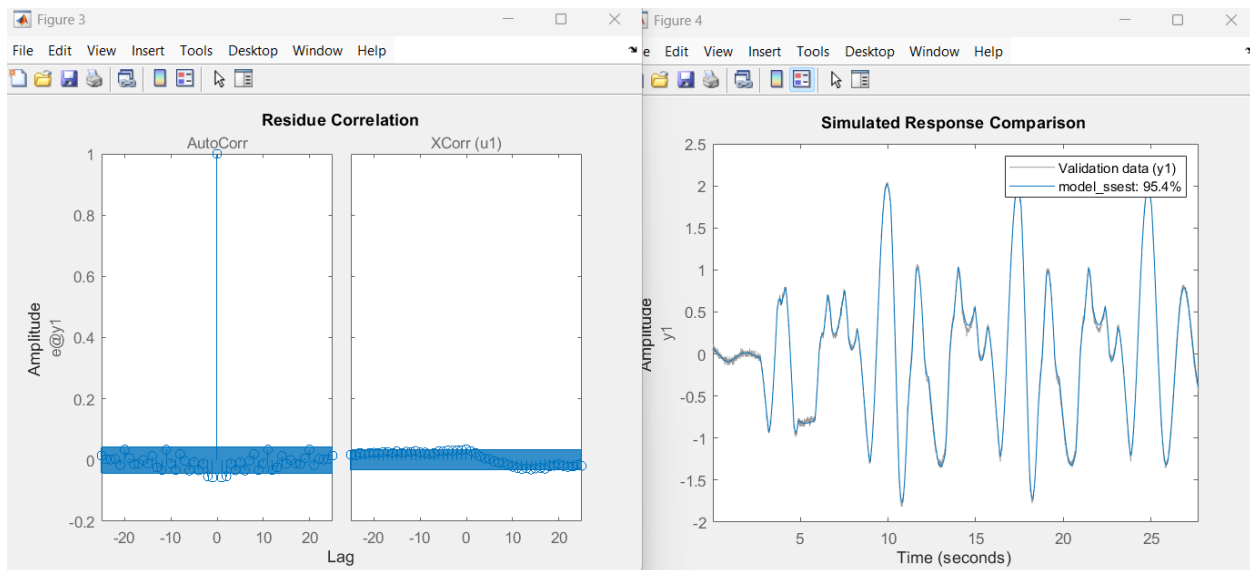


Figura 21: Fitul și intercorelația modelului SSEST



Deoarece acest model are un fit foarte bun și trece testul de intercorelație, este considerat valid.

3.6. Proprietățile modelelor validate

ARMAX:

$$z_{1,2} = 0,9963 \pm 0,0231i$$

$$|z_{1,2}| < 1 \rightarrow \text{sistem stabil, cu regim oscilant amortizat}$$

$$\dot{z} = 0.95$$

OE:

$$z_{1,2} = 0,9963 \pm 0,0231i$$

$$|z_{1,2}| < 1 \rightarrow \text{sistem stabil, cu regim oscilant amortizat}$$

$$\dot{z} = 0.9491$$

SSEST:

$$\dot{s} = -6.8369$$

$$s_{1,2} = -0.4577 \pm 3.0844i$$

$$\operatorname{Re}\{s_{1,2}\} < 0 \rightarrow \text{sistem stabil cu regim oscilant amortizat}$$

3.7. Concluzia finala

În urma analizei tuturor modelelor obținute, toate cele trei modele validate au un fit foarte bun, în jur de 95%, însă modelul cel mai bun obținut l-aș considera OE, deoarece față de modelul SSEST acesta returnează direct o funcție de transfer, în timp ce SSEST returnează matricele de stare al sistemului. Față de modelul ARMAX am făcut comparația testelor de autocorelație/intercorelație, în timp ce la modelul ARMAX o singură pereche de lag depășește foarte puțin banda de încredere, pe când modelul OE are toate punctele de lag în banda de încredere.