Prof. Dr. Nicole Megow
Moritz Buchem, Alexander Lindermayr, Bart Zondervan

Wintersemester 2024/2025

Algorithmentheorie

Übungsblatt 6 (Abgabe am 20.01.2025, 23:59 Uhr)

Übung 6.1 (8 Punkte)

Ein String S ist eine *Teilsequenz* von einem String S', wenn S' nur durch das Löschen von Einträgen in den String S überführt werden kann. Beispielsweise ist $S = ABC$ eine Teilsequenz von $S' = DADBDC$ und $S'' = ABUVCW$. Ein String S ist eine *gemeinsame Teilsequenz* von zwei Strings S' und S'', wenn S eine Teilsequenz von S' und S'' ist. Im obigen Beispiel ist also S eine gemeinsame Teilsequenz von S' und S''.

Gegeben seien nun zwei Strings X und Y. Ziel ist es, die Länge der längsten gemeinsamen Teilsequenz von X und Y zu berechnen.

Beispiele:

- Eingabe: $X = DMJEAUZ$ und $Y = MZJAWDU$
  Ausgabe: 4 (erzielt durch die gemeinsame Teilsequenz $S = MJAU$)
- Eingabe: $X = BDABDKB$ und $Y = ABABDPB$
  Ausgabe: 5 (erzielt durch die gemeinsame Teilsequenz $S = BABDB$)

Gib ein Dynamisches Programm an, welches die Länge der längsten gemeinsamen Teilsequenz in Laufzeit $\mathcal{O}(n_X \cdot n_Y)$ berechnet, wobei n_X und n_Y die Längen der beiden Strings X und Y sind. Es ist dabei **nicht** nötig, eine gemeinsame Teilsequenz zu berechnen, welche die längste Länge tatsächlich erreicht. Gib dabei insbesondere die induktive Definition der DP-Tabelle an und erkläre kurz die Bedeutung der Tabelleneinträge. Begründe kurz, dass dein Dynamisches Programm korrekt ist und die geforderte Laufzeit erzielt.

Übung 6.2 (2+3+2 Punkte)

Telefonanrufe von New York nach Los Angeles werden wie folgt geroutet: Zuerst geht der Anruf entweder nach Chicago oder nach Memphis, dann wird er entweder durch Denver oder Dallas weitergeleitet, bevor er letztendlich in Los Angeles ankommt. Die Anzahl an Telefonleitungen kann unten stehender Tabelle entnommen werden. Die Aufgabe ist es, die maximale Anzahl an Telefongesprächen zwischen New York und Los Angeles zu bestimmen unter der Annahme, dass keine weiteren Telefonate Leitungen belegen.

Städte	Anzahl an Telefonleitungen
New York – Chicago	500
New York – Memphis	400
Chicago – Denver	300
Chicago – Dallas	250
Memphis – Denver	200
Memphis – Dallas	150
Denver – Los Angeles	400
Dallas – Los Angeles	350

(a) Modelliert das Problem als MaxFlow-Problem und zeichnet das Netzwerk der Telefonleitungen.

(b) Berechnet einen maximalen Fluss mit Hilfe von Ford-Fulkerson oder Edmonds-Karp Algorithmus in obigem Netzwerk. Gebt eure Zwischenschritte in Form von augmentierenden Wegen im aktuellen Residualnetzwerk und deren Änderung des Flusswerts an. Gebt außerdem den Fluss und das Residualnetzwerk an nachdem der Algorithmus terminiert hat.

(c) Bestimmt den minimalen Schnitt in obigem Netzwerk. Gebt den Wert des Schnittes sowie die Kantenmenge an.

Übung 6.3 (5 Punkte)

Wir betrachten das maximale Flussproblem mit Kapazitäten auf den Knoten statt auf den Kanten. Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, A)$ mit Start- bzw. Endknoten $s, t \in V$ und Kapazitäten $c(v) \in \mathbb{N}$ für $v \in V \setminus \{s, t\}$ auf den Knoten. Durch einen Knoten $v \in V$ dürfen maximal $c(v)$ Einheiten eines Flusses fließen. Für einen Fluss f muss also $f_v^+ := \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) \leq c(v),$ für alle $v \in V \setminus \{s, t\}$ gelten.

Wie könnt ihr einen maximalen s-t-Fluss mit den bekannten Methoden für Graphen mit Kanten-Kapazitäten finden? Beschreibt dazu, wie der Eingabegraph verändert werden muss, damit bereits aus der Vorlesung bekannte Algorithmen verwendet werden können. Illustriert eure Lösung mit einer Skizze und beschreibt alle Änderungen detailliert.