

Prof. Dr. Nicole Megow  
Moritz Buchem, Alexander Lindermayr, Bart Zondervan

Wintersemester 2024/2025

## Algorithmentheorie

### Übungsblatt 3 (Abgabe am 25.11.2024, 23:59 Uhr)

#### Übung 3.1

(2 Punkte)

Gebt für folgende Rekursionsgleichung eine geschlossene Form in  $\Theta$ -Notation an und zeigt die Korrektheit mit Hilfe des Mastertheorems:

(a)  $T(n) = 8 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 2^n$

(b)  $T(n) = 64 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + (n^2 + 1)(n + 7)$

#### Übung 3.2

(4 Punkte)

Gebt für folgende Rekursionsgleichung eine geschlossene Form in  $\Theta$ -Notation an und zeigt die Korrektheit per Induktion:

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \sqrt{n}.$$

#### Übung 3.3

(7 Punkte)

Im Rahmen der Aktion „schöne Straßen in Bremen“ wurde eine neue Straße gebaut, welche  $M$  Kilometer lang ist und (ohne Kurven) von Norden nach Süden führt. Diese Woche soll die Infrastruktur der Straße ausgebaut werden. Außerdem werden erste Anwohner die neue Straße benutzen.

- (a) Zunächst arbeitet eine Kommunikationsgesellschaft daran, die an der Straße befindlichen Häuser an das Mobilfunknetz anzuschließen. Dazu sollen Sendemasten an der Straße positioniert werden, sodass kein Haus weiter als 5 Kilometer vom nächsten Sender entfernt ist. Entwerft einen Algorithmus, der in Polynomialzeit eine Positionierung der Sender berechnet, welche alle Häuser abdeckt und eine minimale Anzahl an Sendemasten benötigt. Zeigt, dass Euer Algorithmus optimal ist und die gewünschte Laufzeit erreicht.
- (b) Obwohl die Straße neu ist, möchte Mika ihr Pferd dorthin bringen und die Straße entlang reiten, bis es nicht mehr (weiter) kann. Sie möchte also die komplette Straße von Norden nach Süden entlang reiten. Damit ihr Pferd die komplette Strecke zurücklegen kann, muss es zwischendurch Trinkpausen einlegen. Das Pferd kann höchstens 20 Kilometer zurücklegen, bevor es eine Trinkpause benötigt. Mika kennt die Positionen aller Wasserquellen an der Straße und möchte die Positionen für die Trinkpausen so auswählen, dass möglichst

wenig Pausen benötigt werden. Entwickelt eine Strategie nach der Mika die Positionen für Trinkpausen auswählen kann, um die Anzahl der benötigten Pausen zu minimieren. Die Auswahl der Positionen soll dabei in Polynomialzeit durchgeführt werden können. Zeigt, dass eure Strategie die Anzahl der Pausen minimiert und die gewünschte Laufzeit erreicht. Ihr könnt davon ausgehen, dass es ausreichend Quellen gibt, um die komplette Strecke zurückzulegen.

### Übung 3.4

(7 Punkte)

Betrachtet das folgende Problem. Ihr passt auf  $n$  Kinder auf und habt  $m$  Kekse, die zwischen ihnen aufgeteilt werden sollen. Es gilt  $m \geq n$ . Ihr müsst jedem Kind genau einen Keks geben (natürlich kann kein Keks zwei verschiedenen Kindern gegeben werden). Jedes Kind hat einen "Greedfaktor"  $g_i$  mit  $1 \leq i \leq n$ , der die Mindestgröße eines Kekses angibt, mit dem das Kind zufrieden sein wird. Jeder Keks hat eine Größe  $s_j$  mit  $1 \leq j \leq m$ . Euer Ziel ist es, die Anzahl der zufriedenen Kinder zu maximieren, d.h. die Anzahl der Kinder  $i$ , die einen Keks  $j$  zugewiesen bekommen, so dass  $g_i \leq s_j$ . Beschreibt einen Greedy-Algorithmus, der die optimale Zuweisung von Keksen zu Kindern findet. Gebt einen Pseudocode an und beweist die Laufzeit des Algorithmus. Gebt einen Beweis, dass der Algorithmus eine zulässige Lösung findet und diese optimal ist.

- 
- **Zulassung zur Klausur:** Erreichen von *mindestens 50% der möglichen Gesamtpunktzahl*.
  - **Notenbonus:** Es ist möglich, einen Notenbonus in Höhe von einem Notenschritt zu erwerben (d.h. 4.0 wird zu 3.7, oder 3.7 wird zu 3.3, usw.) Die Noten 1.0, 5.0 und 6.0 können nicht verbessert werden. Der erworbene Notenbonus gilt nur für Prüfungen im Wintersemester 2024/25 (Hauptklausur und Nachklausur). Der Notenbonus wird erworben, indem mindestens 75% der in den Übungsaufgaben erreichbaren Punkte erzielt werden. Offensichtliche Täuschungen führen zum Ausschluss vom Notenbonus.
  - **Abgabe:** Die Lösung muss digital (als PDF) im Reiter „DoIT!“ in StudIP für eure Abgabegruppe (z.B. Übungsgruppe 41) hochgeladen werden. Die Abgabefrist ist der 25.11.2024, 23:59 Uhr. Die PDF muss nach Übungsgruppe und Übungsblatt benannt werden (Beispiel "77-3.pdf" für Übungsgruppe 77 und Übungsblatt 3).