Institut für Visualisierung
und Interaktive Systeme

Prof. Dieter Schmalstieg Dr. Guido Reina

5. Übungsblatt zur Vorlesung Computergraphik im WS 2025/26

Besprechung am Montag, Dienstag und Mittwoch, 08.12., 09.12 & 10.12.2025

Aufgabe 1 *Affine Abbildungen, 2D-Transformationen [4 Votierpunkte]*

Es sei die vereinfachte Darstellung eines Hauses in Form von Linien zwischen fünf Punkten gegeben. In der Ausgangsposition befindet sich die linke untere Ecke des Hauses im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems, an der Position $(0, 0)$. Stellen Sie Matrizen M auf, welche die Punkte des Hauses $\boldsymbol{x}$ (in homogenen Koordinaten, d.h. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$) durch Multiplikation $\hat{\boldsymbol{x}} = M\boldsymbol{x}$ und entsprechend der folgenden Beschreibungen transformieren. Orientieren Sie sich dabei an den gegebenen Referenzbildern in Abbildung 1.

1. **Skalierung und Translation:** Skalieren und verschieben Sie das Haus so, dass es um den Faktor 3 in horizontaler Richtung gestreckt und der linke untere Eckpunkt an die Position $(3, 5)$ verschoben wird.
2. **Rotation und Translation:** Transformieren Sie das Haus so, dass es um $60°$ im Uhrzeigersinn rotiert ist und sich sein linker unterer Eckpunkt an der Position $(3, 3)$ befindet. Beachten Sie die Reihenfolge der (Teil-)Transformationen!
3. **Scherung:** Führen Sie eine Scherung mit dem Scherwinkel $\alpha = 45°$ in horizontaler Richtung durch.
4. **Rotation:** Nehmen Sie für diese Aufgabe zunächst folgende Änderung an der bisherigen Ausgangsposition an: Die linke untere Ecke befindet sich an der Position $(7, 7)$. Transformieren Sie das Haus so, dass die in der Abbildung 1 mit *Rotation* beschriftete Endposition erreicht wird. Der Winkel der dabei enthaltenen Rotation beträgt $120°$ im Uhrzeigersinn.

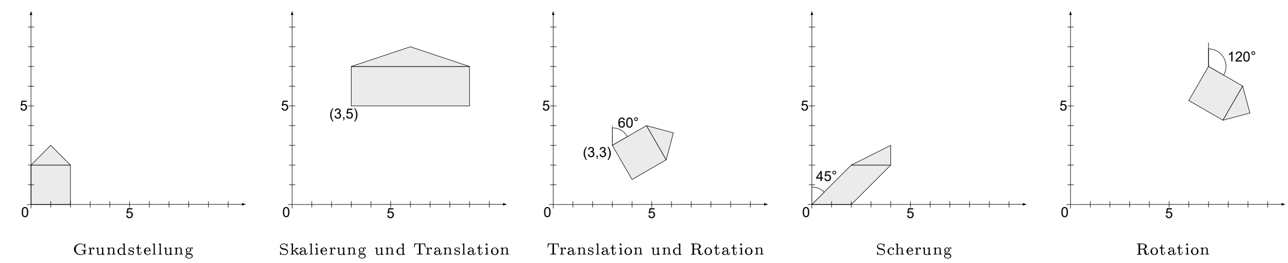

Abbildung 1: Darstellung der beschriebenen Transformationen

Aufgabe 2 *Basiswechsel [2 Votierpunkte]*

Gegeben seien die Basen

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

wobei der Ursprung zur Basis $\mathcal{B}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$ (bezogen auf die Basis $\mathcal{A}$) hat. Gegeben sei weiterhin der Punkt $\mathcal{P}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

1. Berechnen Sie die Matrix $\mathcal{B}\_\mathcal{A}$, mithilfe welcher Sie Punkte von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$ transformieren können.

2. Drücken Sie den Punkt $P_{\mathcal{B}}$ in Bezug auf die Basis $\mathcal{A}$ aus.

Aufgabe 3 *3D-Transformationen, Rotationsmatrizen [4 Votierpunkte]*

Bewegung von Objekten im Raum

Die Bewegung von Objekten im dreidimensionalen Raum kann auf verschiedene Arten beschrieben werden. Ein Beispiel ist die Sequenz aus Translationen und Rotationen. Rotationen können durch Matrizen beschrieben werden. Ein Punkt in einem dreidimensionalen Raum kann durch einen Winkel α (in mathematisch positiver Richtung) mittels einer Matrix rotiert werden.

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1. Berechnen Sie den Punkt, der durch eine Rotation des Punktes $(2, 1)$ um $90°$ resultiert.

Jede Rotation im dreidimensionalen Raum kann anschaulich beschrieben werden, indem die Basisvektoren eines Objekts R auf neue Basisvektoren abgebildet werden. Dieses neue Koordinatensystem wird verwendet, um das Objekt zu beschreiben. Diese lineare Abbildung entspricht einer 3×3-Matrix, deren Spalten die neuen Basisvektoren sind.

2. Geben Sie die Rotationsmatrix an, die den Punkt $(5, 0, 0)^T$ auf den Punkt $(0, 5, 0)^T$ abbildet.

3. Sind Transformationen möglich, die nur eine Koordinatenachse verändern? Falls ja, welche?

Beweis Reihenfolge von Rotationsmatrizen

Gemäß dem Euler Theorem kann jede „starre" Transformation in 3D in eine Sequenz von Rotationen um drei voneinander unabhängige Achsen zerlegt werden.
Hier ist ω die Rotation um die x-Achse:

$$R(\omega, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

φ die Rotation um die y-Achse:

$$R(0,\varphi,0) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

und κ die Rotation um die z-Achse:

$$R(0,0,\kappa) = \begin{pmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Zeigen Sie, dass:

$$R(\omega,0,0) \cdot R(0,\varphi,0) \cdot R(0,0,\kappa) \cdot \vec{x} \neq R(0,0,\kappa) \cdot R(0,\varphi,0) \cdot R(\omega,0,0) \cdot \vec{x}.$$

Warum?