Lineare Algebra

1. Allgemeines

Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x|+|y|$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$

$\mathbb{K}$ steht für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

$\mathbb{I}_n$ ist die $n\times n$-Einheitsmatrix. e_i ist der i-te Einheitsvektor.

2. Matrizen

Die Matrix $A=(a_{ij})\in\mathbb{K}^{m\times n}$ hat m Zeilen mit Index i und n Spalten mit Index j.

2.1. Allgemeine Rechenregeln

Merke: Zeile vor Spalte! (Multiplikation, Indexreihenfolge, etc.)

1) $A+0=A$
2) $1\cdot A=A$
3) $A+B=B+A$
4) $A\cdot B\neq B\cdot A$ (im Allg.)
5) $(A+B)+C=A+(B+C)$
6) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

Multiplikation von $A\in\mathbb{K}^{m\times r}$ und $B\in\mathbb{K}^{r\times n}$: $AB\in\mathbb{K}^{m\times n}$

2.2. Elementare Zeilenumformungen (EZF) (gilt äquiv. für Spalten)

$A\in\mathbb{K}^{m\times n}$ hat m Zeilen $z_i\in\mathbb{K}^n$

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit $\lambda\neq 0$
- Addition des λ-fachen der Zeile z_i zur Zeile z_j

2.3. Transponieren

$A=(a_{ij})\ \in\mathbb{K}^{m\times n}$ gilt: $A^\top=(a_{ji})\ \in\mathbb{K}^{n\times m}$

Regeln:

$(A+B)^\top=A^\top+B^\top$ $\qquad (A\cdot B)^\top=B^\top\cdot A^\top$

$(\lambda A)^\top=\lambda A^\top$ $\qquad (A^\top)^\top=A$

$A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ ist symmetrisch, falls $A=A^\top$ ($\Rightarrow$ orth. diagbar)

$A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ ist schiefsymmetrisch, falls $A=-A^\top$

$A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ ist orthogonal (Spalten-/Zeilenvektoren=ONB), falls:

$AA^\top=\mathbb{I}_n \quad\Leftrightarrow\quad A^\top=A^{-1} \quad\Rightarrow\quad \det A=\pm 1$

$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ ist hermitesch, falls $A=\overline{A}^\top$ (kmplx. konj. u. transp.)

2.4. Inverse Matrix

Für die inverse Matrix A^{-1} von $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ gilt: $A^{-1}A=\mathbb{I}_n$

$(A^{-1})^{-1}=A \qquad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$(A^\top)^{-1}=(A^{-1})^\top$

$A\ \in\mathbb{K}^{n\times n}$ ist invertierbar, falls: $\det(A)\neq 0 \quad\vee\quad \operatorname{rang}(A)=n$

Berechnen von A^{-1} nach Gauß:

$AA^{-1}=\mathbb{I}_n \quad\Rightarrow\quad (A|\mathbb{I}_n)\overset{EZF}{\longrightarrow}(\mathbb{I}_n|A^{-1})$

2x2-Matrix: $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

2.5. Rang einer Matrix

$A\in\mathbb{K}^{m\times n}$ (N0-Zeilen = Nicht-Null-Zeilen)

Bringe A auf ZSF

Rang (Zeilrang) $\operatorname{rang}(A)$: Anzahl N0-Zeilen

Zeilenraum $\operatorname{row}(A)$: Erzeugnis der Zeilen, $\operatorname{Basis}(\operatorname{row}(A))$ = { N0-Zeilen }

Kern: $\operatorname{kern}(A)=\{x\in\mathbb{K}^n \mid Ax=0\}$

Dimensionsformel: $\operatorname{rang}(A)+\dim(\operatorname{kern}(A))=n$

Bringe A auf Spaltenstufenform (transponieren, ZSF)

Spaltenrang: Anzahl der N0-Spalten

Spaltenraum $\operatorname{col}(A)$: Erzeugnis der Spalten, $\operatorname{Basis}(\operatorname{col}(A))$ = { N0-Spalten }

Bild = Spaltenraum: Erzeugnis der Spalten

2.6. Matrixpotenzen

Gegeben: $A\in\mathbb{R}^{mxn}, x\in\mathbb{R}^n$.

Gesucht: Lösung von A^n.

- Bestimme Eigenwerte λ und Eigenvektoren v von A.
- Bestimme $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ mit $x=\alpha_1 v_1+\ldots+\alpha_k v_k$.
- $A^n x=\alpha_1\lambda_1^n v_1+\ldots+\alpha_k\lambda_k^n v_k$.

Gegeben: $A\in\mathbb{R}^{nxn}$, A diagonalisierbar.

Gesucht: A^n.

- $A^n=SD^nS^{-1}$ mit $D^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \lambda_k^n\end{pmatrix}$.

2.7. Lineares Gleichungssystem LGS

Das LGS $Ax=b$ kurz $(A|b)$ mit $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$, $x\in\mathbb{K}^n$, $b\in\mathbb{K}^m$ hat m Gleichungen und n Unbekannte.

Lösbarkeitskriterium:

Ein LGS $(A|b)$ ist genau dann lösbar, wenn: $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A|b)$

Die Lösung des LGS $(A|b)$ hat $\dim(\operatorname{kern}(A))=n-\operatorname{rang}(A)$ frei wählbare Parameter.

Das LGS hat eine Lsg. wenn $\det A\neq 0 \quad\rightarrow\exists A^{-1}$

Das homogene LGS: $(A|0)$ hat stets die triviale Lösung 0

Summen und Vielfache der Lösungen von $(A|0)$ sind wieder Lösungen.

2.8. Determinante

$A\in\mathbb{K}^{n\times n}$: $\det(A)=|A|$

- $|A|=\sum\limits_{i \text{ oder } j=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot|A_{ij}|$

  Entwicklung nach j-ter Spalte oder i-ter Zeile
- Determinante einer 2×2-Matrix:

  $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A)=|A|=ad-bc$
- Determinante einer 3×3-Matrix:

  $$\det(A)=\det\left(\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}\right)\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}$$

  $=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$
- $\det\begin{pmatrix}A & 0\\ C & D\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}=\det(A)\cdot\det(D)$
- $\begin{vmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n=\begin{vmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n\end{vmatrix}$
- $A=B\cdot C \quad\Rightarrow\quad |A|=|B|\cdot|C|$
- $\det(A)=\det(A^\top)$
- Hat A zwei gleiche Zeilen/Spalten $\Rightarrow|A|=0$
- $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$
- Ist A invertierbar, so gilt: $\det(A^{-1})=(\det(A))^{-1}$
- $\det(AB)=\det(A)\det(B)=\det(B)\det(A)=\det(BA)$

Umformung Determinante

- Vertauschen von Zeilen/Spalten ändert Vorzeichen von $|A|$
- Zeile/Spalte mit λ multiplizieren, $|A|$ um Faktor λ größer
- Addition des λ-fachen der Zeile X zur Zeile Y ändert $|A|$ nicht

2.9. Ähnlichkeit von Matrizen

Zwei Matrizen $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ sind ähnlich zueinander, wenn es eine invertierbare Matrix S gibt, sodass $A=SBS^{-1}$. Man schreibt $A\sim B$.

Eigenschaften:

A ist inviertierbar $\Leftrightarrow$ B ist invertierbar $\qquad \det(A)=\det(B)$

A und B haben das gleiche char. Polynom $\qquad \operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(B)$

2.10. Hauptsatz invertierbarer quadratischer Matrizen

1) A ist invertierbar
2) $\dim(\operatorname{col}(A))=\dim(\operatorname{row}(A))=n$
3) $\operatorname{kern}(A)=0$
4) Die strenge ZSF von A ist $\mathbb{I}_n$
5) $\det(A)\neq 0$
6) Zeilen/Spalten von A linear unabh.
7) $Ax=b$ hat eine eindeutige Lösung $\forall b\in\mathbb{R}^n$
8) 0 ist kein Singulärwert von A
9) Lineare Abbildung ist bijektiv
10) $\operatorname{rang}(A)=n$
11) 0 ist kein Eigenwert von A
12) $\operatorname{col}(A)=\mathbb{R}^n$
13) A ist Produkt elementarer Matrizen

Ist eine dieser Aussagen wahr, so sind alle Aussagen wahr!

3. Vektoren

Ein Vektor ist ein n-Tupel reeller oder komplexer Zahlen, also ein Element aus dem $\mathbb{K}^n$.

3.1. Skalarprodukt

$\langle v,w\rangle: V\times V\to\mathbb{R}$

1. Linear: $\langle u,v+w\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle\wedge\langle u,\lambda v\rangle=\lambda\langle u,v\rangle$
2. Symmetrisch: $\langle v,w\rangle=\langle w,v\rangle$
3. Positiv definit: $\langle v,v\rangle\geq 0 \qquad \langle v,v\rangle=0\Leftrightarrow v=0$

Kanonisches Skalarprodukt

$\langle v,w\rangle=v^\top w=v_1w_1+\cdots+v_nw_n$

Skalarprodukt bzgl. sym., quadr. und positiv definiter Matrix $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$

$\langle v,w\rangle_A=v^\top Aw$

Skalarprodukt Polynome $\langle p(x),q(x)\rangle=\int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$

Orthogonalität $\langle a,b\rangle=0\Leftrightarrow a\perp b$

Projektion eines Vektor v längs a: $\operatorname{proj}_a(v)=\frac{\langle v,a\rangle}{\langle a,a\rangle}\cdot a$

Orthogonale Zerlegung eine Vektors v längs a:

$v=\operatorname{proj}_a(v)+\operatorname{proj}_{a^\perp}(v)\Rightarrow\operatorname{proj}_{a^\perp}(v)=v-\operatorname{proj}_a(v)$

Winkel $\cos\phi=\frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\|b\|} \qquad \phi=\arccos\left(\frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\|b\|}\right)$

3.2. Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

$a\times b=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix} \qquad a,b\ \in\mathbb{R}^3$

$a\times b\perp a,b \qquad$ (falls $a\times b=0 \ \Leftrightarrow\ a,b$ linear abhängig)

$a\times b=-b\times a$

$\|a\times b\|=\|a\|\cdot\|b\|\cdot\sin(\measuredangle(a,b))\ \widehat{=}$ Fläche des Parallelogramms

Graßmann-Identität: $a\times(b\times c)\equiv b\cdot(a\cdot c)-c\cdot(a\cdot b)$

Spatprodukt

$[a,b,c]:=\langle a\times b,c\rangle=\det(a,b,c)\ \widehat{=}$ Volumen des Spates.

$[a,b,c]>0 \ \Leftrightarrow\ a,b,c$ bilden Rechtssystem

$[a,b,c]=0 \ \Leftrightarrow\ \{a,b,c\}$ linear abhängig

4. Vektorräume (VR)

Eine nichtleere Menge V mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt K-Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.

Bedingung $(u,v,w\in V \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R})$

- $v+w\in V \qquad \lambda v\in V$
- $u+(v+w)=(u+v)+w$
- $0\in V: v+0=v$
- $v'\in V: v+v'=0$
- $v+w=w+v$
- $\lambda(v+w)=\lambda v+\lambda w$
- $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$
- $(\lambda\mu)v=\lambda(\mu v)$

4.1. Untervektorraum (UVR)

$U\subset V(u,v\in U \quad \lambda\in\mathbb{R})$

1. $U\neq\emptyset \qquad (0\in U)$
2. $u+v\in U$
3. $\lambda u\in U$

4.2. Basis (Jeder VR und jeder UVR besitzt eine Basis!)

Eine Teilmenge $B\subset V$ heißt Basis von V, wenn gilt:

- $\operatorname{span}(B)=V$, B erzeugt V
- B ist linear unabhängig

4.3. Dimension

$n=\dim(V)=|B|=$ Mächtigkeit von B

Mehr als n Vektoren aus V sind stets linear abhängig.

Für jeden UVR $U\subset V$ gilt: $\dim(U)\leq\dim(V)$

4.4. Linearkombination

Jeder Vektor $v\in\mathbb{K}^n$ kann als Linearkombination einer Basis $B=\{b_1,\ldots,b_n\}\subset\mathbb{K}^n$ dargestellt werden

$v=\lambda_1b_1+\cdots+\lambda_nb_n\Rightarrow$ Gauß $\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3 & | & v\end{pmatrix}$

Linear Unabhängig: Vektoren heißen linear unabhängig, wenn aus: $\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_nv_n=0$ folgt, dass $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$

4.5. Orthogonalität

$B\subset V$ heißt

- **Orthogonalsystem**, wenn $\forall v,w\in B: v\perp w$
- **Orthogonalbasis**, wenn B Orthogonalsystem und Basis von V
- **Orthonormalsystem**, wenn B Orthogonalssystem u. $\forall v\in B$: $\|v\|=1$
- **Orthonormalbasis(ONB)**, wenn B Orthonormalsystem u. Basis von V ist

Eine **quadratische Matrix A heißt orthogonal**, wenn $A^\top A=\mathbb{I}_n$

- $A^{-1}=A^\top$
- $\det A=\pm 1$
- Spalten bilden ONB
- Zeilen bilden ONB
- $\|Av\|=\|v\|$
- Drehmatrix mit Drehung um den Ursprung: $\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$
- (Dreh-)Spiegelmatrix mit Spiegelung an der Geraden $y=tan(\frac{\alpha}{2})\cdot x$: $\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha)\end{pmatrix}$

Orthonormalisierungsvefahren einer Basis $\{v_1,\ldots,v_n\}$ nach Gram-Schmidt

1. $b_1=\frac{c_1}{\|c_1\|}$ mit $c_1=v_1$ (Vektor mit vielen 0en oder 1en)
2. $b_2=\frac{c_2}{\|c_2\|}$ mit $c_2=v_2-\frac{\langle v_2,c_1\rangle}{\langle c_1,c_1\rangle}\cdot c_1$
3. $b_3=\frac{c_3}{\|c_3\|}$ mit $c_3=v_3-\frac{\langle v_3,c_1\rangle}{\langle c_1,c_1\rangle}\cdot c_1-\frac{\langle v_3,c_2\rangle}{\langle c_2,c_2\rangle}\cdot c_2$

Erweitern einer ONB von V auf eine ONB des $\mathbb{R}^n$

1. Vektor e_i mit $i\in\{1\ldots n\}$ so wählen, sodass die Skalarprodukte möglichst einfach zu berechnen sind.
2. Gram-Schmidt für $e_i\Rightarrow$ Ergebnis zur Basis hinzufügen
3. So lange Wiederholen bis die Basis n Vektoren besitzt.
4. Alle neu hinzugefügten Vektoren bilden zusammen eine ONB von $V^\perp$

Orthogonale Projektion auf UVR

Gegeben: Vektorraum $V\in\mathbb{R}^n$, $v\in V$, Untervektorraum $U\subset V$

1. Basis von U bestimmen
2. Orthogonalisiere Basis $\{u_1,u_2,u_3,\ldots\}$ von U
3. $\operatorname{proj}_U(v)=\frac{\langle v,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1+\frac{\langle v,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2+\ldots$
4. $\operatorname{proj}_{U^\perp}(v)=v-\operatorname{proj}_U(v)$
5. Abstand von v zu $U=\left\|\operatorname{proj}_{U^\perp}(v)\right\|$

Alternative Methode

1. Basis $\{b_1,\ldots,b_r\}$ von U bestimmen
2. Setze $A=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \ldots & b_r\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times r}$
3. Löse das LGS $A^\top Ax=A^\top v$ und erhalte den Lösungsvektor $x=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)^\top$
4. $\operatorname{proj}_U(v)=\lambda_1b_1+\cdots+\lambda_rb_r$

5. Norm

Euklidische Norm von Vektoren $\|a\|=\sqrt{\langle a,a\rangle}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}$

$\forall v,w\in\mathbb{R}^n$:

1. $\|\lambda v\|=|\lambda|\,\|v\| \qquad$ 2. $\|v+w\|\leq\|v\|+\|w\|$

6. Lineare Abbildungen

Abbildung $f : V \to W$ ist linear, wenn

1. $f(0) = 0$
2. $f(a + b) = f(a) + f(b)$
3. $f(\lambda a) = \lambda f(a)$

$\Rightarrow$ Abbildung als Matrix darstellbar (siehe Abbildungsmatrix)

Injektiv, wenn aus $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Surjektiv: $\forall y \in W\ \exists x \in V : f(x) = y$
(Alle Werte aus W werden angenommen.)
Bijektiv(Eineindeutig): f ist injektiv und surjektiv $\Rightarrow$ f umkehrbar.

6.1. Koordinatenvektor bezüglich einer Basis B

Gegeben: Vektorraum $V \in \mathbb{R}^n$, $v \in V$.
Gesucht: $[v]_B$ (Koordinaten von v bezüglich der Basis B).

1. Bestimme Basis B von V.
2. Löse das LGS $Bx = v$.
3. $[v]_B = x$.

6.2. Abbildungsmatrix (Darstellungsmatrix)

Lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
Abbildungsmatrix spaltenweise: $[f] = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{pmatrix}$

Allgemein $f : V \to W$ mit V, W Vektorräume
$B = (b_1, \dots, b_n)$ ist eine Basis von V, $\exists B^{-1}$.
$[f]_B := B^{-1}[f]B$.

Gesucht: $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = b$ und $b \in \mathbb{R}^n$.
- Löse das LGS $[f]_B x = B^{-1}b$.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) $[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

b) $f(b_1) = \lambda_1 b_1, ..., f(b_n) = \lambda_n b_n$.

$C = (c_1, \dots, c_n)$ ist eine Basis von V.

$\Rightarrow [f]_B^C = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f(b_1)_C & f(b_2)_C & \cdots & f(b_n)_C \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

ist die Darstellungsmatrix von f bzgl. B und C.
"In der j-ten Spalte der Abbildungsmatrix stehen die Koordinaten des Bildes $f(b_j)$ bzgl. der Basis $C = (c_1, \dots, c_m)$"

Eigenschaften von f mit Hilfe von $[f]$

- $\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$
- $\mathrm{im}(f) = \mathrm{col}([f])$
- f injektiv, wenn $\ker([f]) = \{0\}$
- f surjektiv, wenn $\mathrm{im}([f]) = \mathbb{R}^m$
- f bijektiv, wenn $[f]$ invertierbar
- f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv

6.3. Transformationsmatrix

Transformationsmatrix der Koordinaten von B zu C: ${}_C T_B$
Regeln und Berechnung:

- ${}_{\mathbb{I}_n} T_B = T_B$: Vektoren der Basis B
- ${}_C T_B = {}_C T \cdot T_B$
- $({}_C T_B)^{-1} = {}_B T_C$
- $[v]_C = {}_C T_B \cdot [v]_B$
- $C = B \cdot {}_C T_B$

7. Diagonalisierung (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Gegeben: Quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Gilt $Av = \lambda v$ mit $v \neq 0$, so nennt man

- $v \in V$ einen **Eigenvektor** von A zum **Eigenwert** $\lambda \in \mathbb{R}$ und
- $\lambda \in \mathbb{R}$ einen **Eigenwert** von A zum **Eigenvektor** $v \in V$

Ist λ ein Eigenwert von A, so nennt man den Untervektorraum

- $\mathrm{Eig}_A(\lambda) = \{v \in \mathbb{R}^n | Av = \lambda v\}$ den Eigenraum von A zum Eigenwert λ und
- $\dim(\mathrm{Eig}_A(\lambda))$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ
- $\mathrm{geo}(\lambda) = \dim(\mathrm{Eig}_A(\lambda))$

Diagonalisieren von Matrizen
A ist diag.bar falls eine invertierbar Matrix B existiert, sodass

$$D = B^{-1}AB \ \Leftrightarrow\ A = BDB^{-1}$$

und D eine Diagonalmatrix ist.

- Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar wenn $\mathrm{alg}(\lambda) = \mathrm{geo}(\lambda)$ für jeden Eigenwert λ von A gilt.
- Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit n verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.
- Eine symmetrische Matrix hat nur reelle Eigenwerte und ist diagonalisierbar.
- Die Determinante einer Matrix ist gleich dem Produkt der Eigenwerte: $\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$

7.1. Rezept: Diagonalisieren

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. Bestimme das charakteristische Polynom von A
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_n)$$
2. Charakteristische Polynom p_A in Linearfaktoren zerlegen.
$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\nu_1} \dots (\lambda_r - \lambda)^{\nu_r}$$
Es gilt $\nu_1 + \dots + \nu_r = n$
$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sind die Eigenwerte mit algebraischer Vielfachheit $\mathrm{alg}(\lambda_i) = \nu_i$
Ist p_A nicht vollständig in Linearfaktoren zerlegbar $\Rightarrow$ A nicht diagonalisierbar!
3. Bestimme zu jeden Eigenwert λ_i den Eigenraum V_i
$$V_i = \ker(A - \lambda_i \mathbb{I}_n) = \mathrm{span}(B_i)$$
Die Vektoren der Basis B_i sind die Eigenvektoren von λ_i.
Einfacher: Der Eigenvektor v_i ist Lösung des homogenen LGS
$$(A - \lambda_i \mathbb{I}_n)v_i = 0$$
$\dim(V_i) = \mathrm{geo}(\lambda_i)$ geometr. Vielfachheit des Eigenwerts λ_i.
Gilt $\mathrm{geo}(\lambda_i) \neq \mathrm{alg}(\lambda_i)$ für ein i, ist A nicht diagonalisierbar!
4. $B = (v_1\ \dots v_n)$ setzt sich aus den Eigenvektoren zusammen.
$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist die Diagonalmatrix der Eigenwerte.
$$D = B^{-1}AB \ \Leftrightarrow\ A = BDB^{-1}$$

7.2. Orthogonale Diagonalisierbarkeit

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonal diagonalisierbar.

$$D = Q^T AQ \ \Leftrightarrow\ A = QDQ^T$$

Vorgehen

- Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmten
- Eigenvektoren zum selben Eigenwert orthonormalisieren (Gram-Schmidt)
- Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind bereits orthogonal (ggf. noch normieren)
- $Q = (b_1\ \dots b_n)$ setzt sich aus den orthonormalen EV zusammen.
$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist die Diagonalmatrix der Eigenwerte.

8. QR-Zerlegung

$A = QR$, wobei Q orthonormale Spalten hat und R oben dreieckig ist.
Vorgehen

- Q berechnen durch Gram-Schmidt mit den Spalten von A, **beginnend bei der ersten**
- Die Koeffizienten von R ergeben sich aus den Gram-Schmidt Gleichungen wie folgt: $r_{i,i} = ||c_i||^2$ und $r_{i,j} = \frac{\langle v_j, c_i \rangle}{r_{i,i}}$
- Alternativ gilt: $R = Q^T A$

9. Kleinstes-Quadrate-Problem

Für $Ax = b$ lautet die **Normalengleichung** $A^T Ax^* = A^T b$

Lösen durch Gauß oder Umstellen: $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$
Für $A = QR$ lautet die Lösung $x^* = R^{-1} Q^T b$
$\Rightarrow$ optimale Lösung mit minimalem quadratischen Fehler (gibt es immer).

9.1. Rezept: Quadratische Funktion finden

Gegeben: mehrere Punkte (x_i, y_i) im Koordinatensystem
Gesucht: Koeffizienten $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}$ für $f(x) = \mathsf{a} \cdot x^2 + \mathsf{b} \cdot x + \mathsf{c} \cdot 1 = y$
Vorgehen

1. $b = (y_1, y_2, \dots)^\top \qquad A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$
Falls Ausgleichsgerade gesucht: erste Spalte von A streichen
2. Lösungsvektor x^* mithilfe von A und b berechnen
3. $x^* = (\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c})^\top \to f(x) = \mathsf{a}x^2 + \mathsf{b}x + \mathsf{c}$

10. Singulärwertzerlegung

Bei der Singulärwertzerlegung wird eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ als Produkt dreier Matrizen V, Σ und W geschrieben

$$A = V \Sigma W^\top$$

mit $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
V und W sind orthogonal, Σ ist eine Diagonalmatrix.

10.1. Rezept: Singulärwertzerlegung

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

1. Bestimme alle Eigenwerte λ_j und Eigenvektoren w_j der Matrix $A^\top A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und ordne sie
$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$ mit $r \leq n$
2. Bestimme eine ONB des $\mathbb{R}^n$ aus den Eigenvektoren w_j und erhalte $W = \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
3. Die Singulärwerte sind $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j} \qquad j = 1, \dots, \min\{m, n\}$
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \sigma_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad m < n$$
$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad m > n$$
4. Bestimme $v_1, \dots, v_r$ aus $v_i = \frac{1}{\sigma_j} Aw_j$ für alle $j = 1, \dots, r$ (alle $\sigma_j \neq 0$)
5. Falls $r < m$ ergänze $v_1, \dots, v_r$ zu einer ONB, bzw. zu $V = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_m \end{pmatrix}$ orthogonal.
6. $A = V \Sigma W^\top$

10.2. Kompression

- Rang k Matrix $A_{(k)} = V \Sigma_{(k)} W^\top$. Die Matrix $\Sigma_{(k)}$ enthält nur die Singulärwerte $\sigma_1, ..., \sigma_k$. $(\sigma_{k+1}, ..., \sigma_{n/m}$ mit 0 ersetzen).
- Frobenius-Norm $||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2}$
- Es gilt: $||A - A_{(k)}||_F \leq ||A - B||_F$ mit B als eine beliebige Matrix des $\mathbb{R}^{m \times n}$ mit $rang(B) \leq rang(A_{(k)}) = k$
- Speicheraufwand einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $rang(A) \cdot (m + n)$

10.3. Exkurs: Hauptkomponentenanalyse (PCA)

Gegeben: Matrix W der Eigenvektoren von $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top$
Gesucht: Projektionen der Spalten von A auf den Unterraum $U_{(k)}$ als Koordinaten bzgl. der ONB der Eigenvektoren von $AA^\top$
Vorgehen:

1. Normiere $w^1, \dots, w^k$
2. $\overline{w} = (w^1 \dots w^k) \in \mathbb{R}^{m \times k}$
3. Die Koordinatenvektoren $y^1, \dots, y^k \in \mathbb{R}^k$ die Vektoren $x^1, \dots, x^n$ bzgl. der Basis $\{w^1, \dots, w^k\}$ von $U_{(k)}$ ausdrücken, sind die Spalten von
$$\overline{w}^\top A = \begin{pmatrix} (w^1)^\top \\ \vdots \\ (w^k)^\top \end{pmatrix} \cdot A$$

11. Lineare Differentialgleichungen & Rekursive Folgen

11.1. Lösen einer linearen Differentialgleichung

Gegeben: $y'(t) = \lambda y(t)$, mit $y(0) = c$
Lösung: $y(t) = ce^{\lambda t}$ mit $c \in \mathbb{R}$

11.2. Lösen eines Systems linearer Differentialgleichungen

Gegeben: $y'(t) = Ay$, mit $y_1(0), ..., y_n(0)$
Wobei $A \in \mathbb{R}^{nxn}, y_1(0), ..., y_n(0) \in \mathbb{R}, y, y' \in \mathbb{R}^n$.
Lösung:

1. Eigenwerte und Eigenvektoren von A bestimmen.
2. $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$.
3. Anfangswerte einsetzen und Werte für c_1, bis c_n bestimmen.

11.3. Rekursive Folgen

Gegeben: $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}$, Anfangswerte: x_0, x_1
Lösung:

1. Matrix A bestimmen.
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
2. LGS aufstellen.
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$
3. Diagonalisieren: $A = SDS^{-1}$
4. Anfangswerte x_0, x_1 einsetzen und x_n berechnen
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = SD^n S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

12. Definitheit und Quadratische Funktionen

12.1. Definitheit

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Eigenwerten (EW) $\lambda_1, ..., \lambda_n$ heißt:

- positiv definit: EW positiv $<=> v^\top Av > 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
- negativ definit: EW negativ $<=> v^\top Av < 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
- positiv semidefinit: EW $\geq 0 <=> v^\top Av \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$
- negativ semidefinit: EW $\leq 0 <=> v^\top Av \leq 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

12.2. Quadratische Funktionen

Form: $f(x) = x^\top Ax + b^\top x + c = \langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle + c$
Berechnen von Extrempunkten:

- positiv definit: Minimum bei $x^* = -\frac{1}{2}A^{-1}b$
- negativ definit: Maximum bei $x^* = -\frac{1}{2}A^{-1}b$
- positiv/negativ semidefinit: Existenz von Extremum hängt von Lösbarkeit des LGS $2Ax = -b$ ab. (nicht eindeutig!)