Schaltungstheorie

1. Grundlagen

1.1. Sinus, Cosinus $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$

x / φ	0 / $0°$	$\pi/6$ / $30°$	$\pi/4$ / $45°$	$\pi/3$ / $60°$	$\frac{1}{2}\pi$ / $90°$	π / $180°$	$1\frac{1}{2}\pi$ / $270°$	2π / $360°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0

Verbraucherpfeilsystem: Spannung und Strom sind assoziert. Positive Leistung bedeutet Leistungsaufnahme oder Verbrauch von Leistung. Negative Leistung bedeutet Leistungsabgabe oder Erzeugung von Leistung.
Das Gegenteil wäre das Erzeugersystem. In den meisten Fachgebieten wird im Verbrauchersystem gerechnet.

1.2. Begriffserklärung, Glossar

Zählpfeile: Zeigen die gemeinsame(assoziierte) Zählrichtung von Stromfluss und Spannungsabfall zwischen zwei Knoten an, unabhängig von den tatsächlichen Richtungen (Vorzeichen).
Masse (Signale) $\perp$: Gemeinsamer el. Bezugspunkt mit Potential $0V$
Erdung (Fehlstrom): Schutz vor Kurzschluss, führt nur im Fehlerfall Strom.
Kurzschluss (KS): ideal leitender Draht. $u_{\text{KS}}=0$, $i_{\text{KS}}=$ beliebig
Leerlauf (LL): ideal isolierende Luft. $u_{\text{LL}}=$ beliebig, $i_{\text{LL}}=0$
Tor: Ein Tor bilden zwei Anschlüsse bei denen der Stromzufluss des einen Anschluss gleich dem Stromabfluss des anderen Anschluss entspricht. $i_{\text{in}}=i_{\text{out}}$
Arbeitspunkt (AP): Betriebspunkt bei dem alle Kleinsignalquellen Null sind.

2. Netzwerktheorie

2.1. Kirchhoff-Gesetze

Konzentriertheitshypothese: $d << \lambda$ mit
$d=$ Größe der Schaltung, Wellenlänge $\lambda=cT$

Stromgesetz **KCL** (Kirchoff's Current Law)	Spannungsgesetz **KVL** (Kirchoff's Voltage Law)
Knotenregel	Maschenregel
$\sum\limits_{\text{Knoten}} i_k(t)=0$	$\sum\limits_{\text{Masche}} u_m(t)=0$
rausfließende Ströme positiv	Spannungen in Umlaufrichtung positiv
Maxwell: $\operatorname{div}\underline{\boldsymbol{j}}=0$	Maxwell: $\operatorname{rot}\underline{\boldsymbol{E}}=0$
$(n-1)$ Gleichungen	$b-(n-1)$ Gleichungen

2.2. Schaltung und Netzwerkgraph

Der gerichtete Netzwerkgraph stellt die Verbindungsstruktur einer Schaltung durch n Knoten (node) und b Verbindungskanten (branch) mit Richtungspfeilen dar.
Jedes Bauelement mit zwei Anschlüssen entspricht einer Verbindungskante. Ein Knoten ist dort, wo ein oder mehr Anschlüsse von Bauteilen durch ideal leitenden Draht miteinander verbunden sind. Verbundene Anschlüsse entsprechen einem Kurzschluss, nicht verbundene Anschlüsse einem Leerlauf!
Um die Betriebspunkte einer Schaltung zu bestimmen sind $2b$ linear unabhängige Gleichungen nötig. Man erhält diese $2b$ Gleichungen aus den Beschreibungen der Bauelemente und den Kirchoff Gleichungen.

2.3. Baumkonzept

Baum: zusammenhängender azyklischer Teilgraph des Netzwerkgraphen, der alle Knoten enthält.
Nummerierung: erst Baumkanten nummerieren, dann übrige.
KVL: Pro Verbindungskante eine Masche, die sonst nur Baumkanten enthält: $\begin{bmatrix}\underline{\boldsymbol{B}}_b & \mathbb{1}_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{\boldsymbol{u}}_b\\ \underline{\boldsymbol{u}}_v\end{bmatrix}=\underline{\boldsymbol{0}}$
KCL: Pro Baumkante je einen Superknoten, der sonst nur Verbindungskanten enthält, Vorzeichen der Baumkante ist positiv: $\begin{bmatrix}\mathbb{1}_{n-1} & \underline{\boldsymbol{A}}_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{\boldsymbol{i}}_b\\ \underline{\boldsymbol{i}}_v\end{bmatrix}=\underline{\boldsymbol{0}}$

2.4. Knoteninzidenzmatrix

Knoteninzidenzmatrix: $\underline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1b}\\ \vdots & & \\ \alpha_{n-1,1} & \dots & \alpha_{n-1,b}\end{bmatrix}$ n Knoten

Aufstellen
- Wählen des Bezugsknotens
- Für alle Knoten außer Bezugsknoten:
  - Herausgehende Kante $\Rightarrow \alpha=+1$
  - Hereingehende Kante $\Rightarrow \alpha=-1$

KCL: $\underline{\boldsymbol{A}}\underline{\boldsymbol{i}}=\underline{\boldsymbol{0}}$ KVL: $\underline{\boldsymbol{u}}=\underline{\boldsymbol{A}}^T\underline{\boldsymbol{u}}_k$

2.5. Eintorverschaltungen

Serienschaltung		Parallelschaltung	
$u=\sum u_i$	$i=\text{const.}$	$u=\text{const.}$	$i=\sum i_i$
$q=\text{const.}$	$\Phi_{\text{M}}=\sum\Phi_{\text{M},i}$	$q=\sum q_i$	$\Phi_{\text{M}}=\text{const.}$
$R=\sum R_i$	$M=\sum M_i$	$\frac{1}{R}=\sum\frac{1}{R_i}$	$\frac{1}{M}=\sum\frac{1}{M_i}$
$\frac{1}{C}=\sum\frac{1}{C_i}$	$L=\sum L_i$	$C=\sum C_i$	$\frac{1}{L}=\sum\frac{1}{L_i}$
$\underline{\boldsymbol{Z}}=\sum\underline{\boldsymbol{Z}}_i$	$\frac{1}{\underline{\boldsymbol{Y}}}=\sum\frac{1}{\underline{\boldsymbol{Y}}_i}$	$\frac{1}{\underline{\boldsymbol{Z}}}=\sum\frac{1}{\underline{\boldsymbol{Z}}_i}$	$\underline{\boldsymbol{Y}}=\sum\underline{\boldsymbol{Y}}_i$

$$\boxed{\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\quad\Rightarrow\quad R=R_1\parallel R_2=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}}$$

2.6. Resistive Eintore

- Implizite Darstellung: $f_F(u,i)=0$
- Parameterdarstellung: $u=u_F(\lambda)$ $\quad i=i_F(\lambda)$
- Explizite Darstellung: $\underbrace{i=g_F(u)}_{\text{Leitwertdarstellung}}$ $\quad\underbrace{u=r_F(i)}_{\text{Widerstandsdarstellung}}$
- Umpolung: $\overline{F}$ entsteht durch Punktspiegelung von F am Ursprung: $(\overline{u},\overline{i})=(-u,-i)\in\overline{F}$
- Dualität: $(u,i)\in F\Leftrightarrow(R_d i,\frac{u}{R_d})\in F^d$
- Parallelschaltung von Widerstandsgeraden: $G=G_1+G_2$ $\Rightarrow\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Rightarrow R=R_1\parallel R_2=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$
- Serienschaltung von Widerstandsgeraden: genauso wie Parallelschaltung nur R statt G
- Arbeitspunkt ermitteln:
  1. Schaltung aufteilen in Quelle Q und Last L
  2. Parameterdarstellung $\Rightarrow$ Kennlinien zeichnen
  3. Lösung: Schnittpunkte der Kennlinien! $\Rightarrow$ ist die Funktion im AP stetig und diff'bar, kann man sie dort *linearisieren*

Eigenschaften von F:

F stromgesteuert	$\exists r_F(i)$
F spannungsgesteuert	$\exists g_F(u)$
F ungepolt	Kennlinie punktsymm. zum Ursprung
F aktiv	mind. 1 Pkt. in II. od. IV. Quadr.
F verlustfrei	nur auf Koordinatenachsen
F quellenfrei	enthält den Ursprung
F streng linear	$(ku,ki)\in F\quad(u_1+u_2,i_1+i_2)\in F$
F stückweise linear	Kennlinie besteht aus linearen Abschnitten

2.7. Dualwandlung

$u\to R_d\cdot i\qquad i\to\frac{1}{R_d}\cdot u$
Im Schaltbild:
$R\to G=\frac{R}{R_d^2}\qquad G\to R=R_d^2G$
Serienschaltung $\leftrightarrow$ Parallelschaltung

2.8. Teilerregeln

Spannungsteiler: R_1 in Serie mit $R_2\Rightarrow u_{R_1}=\frac{R_1}{R_1+R_2}u_{ges}$
Stromteiler: G_1 in Serie mit $G_2\Rightarrow i_{G_1}=\frac{G_1}{G_1+G_2}i_{ges}$

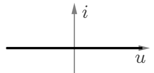
2.9. Arbeitspunktbestimmung

$\mathcal{Q}$: Quelleneintor
$\mathcal{Q}^x$: Quelleneintor mit externer Kennlinie (gespiegelt an der u-Achse)
$\mathcal{F}$: Lasteintor
Graphisch: $AP=\mathcal{F}\cap\mathcal{Q}^x$
Rechnerisch: $i_Q=-i_F\Rightarrow u_{AP}$
$u_Q=u_F\Rightarrow i_{AP}$

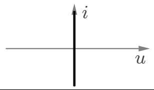
3. Resistive Eintore

3.1. Liste

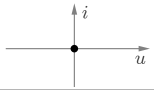
Leerlauf
$u=$ beliebig
$i=0$
u, sl, v



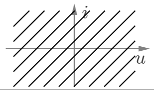
Kurzschluss
$u=0$
$i=$ beliebig
u, sl, v



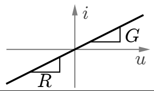
Nullator
$u=0\quad i=0$
u, sl, v, dual zu sich selbst



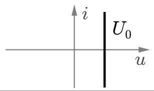
Norator
$u=$ beliebig
$i=$ beliebig
u, sl, a, dual zu sich selbst



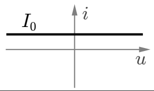
Widerstand
$u=R\cdot i$
$i=G\cdot u$
$G=\frac{1}{R}$



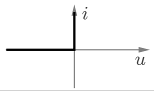
Spannungsq.
$u=U_0$
$i=$ beliebig



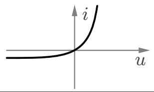
Stromquelle
$u=$ beliebig
$i=I_0$



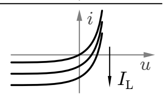
ideale Diode
$u=0\quad$ falls $i>0$
$i=0\quad$ falls $u<0$



reale Diode
$u_D=u_T\cdot\ln\left(\frac{i_D}{I_S}+1\right)$
$i_D=I_S\cdot\left(\exp\left(\frac{u_D}{U_T}\right)-1\right)$



Photodiode
$i=I_S\left(e^{\frac{u_D}{U_T}}-1\right)-i_L$



3.2. Kennlinienbestimmung von verschalteten Bauteilen

Parallel: Kennlinien entlang der i-Achse addieren (Spannungen sind gleich, Ströme addieren sich
Seriell: Kennlinien entlang der u-Achse addieren (Ströme sind gleich, Spannungen addieren sich

3.3. Linearisierung

Beispiel spannungsgesteuert, stromgesteuert analog
$g_{lin}=\left.\frac{\partial i_F}{\partial u_F}\right|_{AP}$
$\Delta i=i-I_{AP}\qquad\Delta u=u-U_{AP}$
$\Delta i=g_{lin}\Delta u$
$i_{F,lin}=\Delta i+I_{AP}=\Delta u\cdot g_{lin}+U_{AP}=g_{lin}(u_f-U_{AP})+I_{AP}$

4. Resistive Zweitore

Ein Zweitor besteht aus zwei Eintoren.

4.1. Beschreibungsformen von Zweitoren

Beschreibung	nicht linear	linear
Implizit	$f_{\mathcal{F}}(\underline{u},\underline{i})=\underline{0}$	$\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\boldsymbol{M}} & \underset{\sim}{\boldsymbol{N}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\underline{u}\\ \underline{i}\end{bmatrix}=0$
Parametrisch	$\underline{u}=u_{\mathcal{F}}(\underline{\lambda})$ $\underline{i}=i_{\mathcal{F}}(\underline{\lambda})$	$\begin{bmatrix}\underline{u}\\ \underline{i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\cdot\underline{\lambda}$

Explizit	nicht linear	linear
Widerstand-beschreibung	$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1(i_1,i_2)\\r_2(i_1,i_2)\end{bmatrix}$	$=\begin{bmatrix}U_0\\U_0\end{bmatrix}+\mathbf{R}\begin{bmatrix}i_1\\i_2\end{bmatrix}$
Leitwert-beschreibung	$\begin{bmatrix}i_1\\i_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g_1(u_1,u_2)\\g_2(u_1,u_2)\end{bmatrix}$	$=\begin{bmatrix}I_0\\I_0\end{bmatrix}+\mathbf{G}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$
Hybrid-beschreibung	$\begin{bmatrix}u_1\\i_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_1(i_1,u_2)\\h_2(i_1,u_2)\end{bmatrix}$	$=\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}\cdot\begin{bmatrix}i_1\\u_2\end{bmatrix}$
Inver. Hybrid-beschreibung	$\begin{bmatrix}i_1\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_1'(u_1,i_2)\\h_2'(u_1,i_2)\end{bmatrix}$	$=\underset{\sim}{\boldsymbol{H'}}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\i_2\end{bmatrix}$
Ketten-beschreibung	$\begin{bmatrix}u_1\\i_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1(u_2,-i_2)\\a_2(u_2,-i_2)\end{bmatrix}$	$=\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\cdot\begin{bmatrix}u_2\\-i_2\end{bmatrix}$
Inver. Ketten-beschreibung	$\begin{bmatrix}u_2\\i_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1'(u_1,-i_1)\\a_2'(u_1,-i_1)\end{bmatrix}$	$=\underset{\sim}{\boldsymbol{A'}}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\-i_1\end{bmatrix}$

4.2. Aufstellen der Zweitormatrix

4.2.1 By Inspection

Gleichungen aufstellen und gesuchte Matrix daraus ableiten.

4.2.2 Kurzschluss-Leerlauf-Methode

Für jede steuernde Größe:

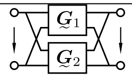
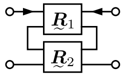
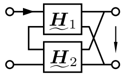
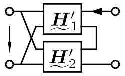
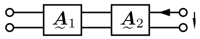
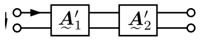
- steuernde Größe einprägen
- restliche steuernde Größen auf 0 setzen (mit KS oder LL)
- gesteuerte Größen ermitteln

4.2.3 Quellenbehaftete lineare Zweitore

1. Matrix des quellenfreien Zweitors bestimmen
2. Quellvektor bestimmen (beide steuernden Größen auf null setzen)
3. Schaltbild mit externen Quellen zeichnen je nach Beschreibungsform

4.3. Verschaltung von Zweitoren

Es gibt sechs mögliche Verschaltungen.

Verschaltung	Bild
Parallel: $g_{ges}=g_{\mathcal{F}1}+g_{\mathcal{F}2}$ linear: $\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}_{\text{ges}}=\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}_1+\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}_2$ Umrechnung:	
Serie: $r_{ges}=r_{\mathcal{F}1}+r_{\mathcal{F}2}$ linear: $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_{\text{ges}}=\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_1+\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}_2$	
Hybrid: $h_{ges}=h_{\mathcal{F}1}+h_{\mathcal{F}2}$ linear: $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}_{\text{ges}}=\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}_1+\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}_2$	
Hybrid Inv.: $h'_{ges}=h_{\mathcal{F}1}+h'_{\mathcal{F}2}$ linear: $\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}'_{\text{ges}}=\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}'_1+\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}'_2$	
Kette: $a_{ges}=a_{\mathcal{F}1}\cdot a_{\mathcal{F}2}$ linear: $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_{\text{ges}}=\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_1\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}_2$	
Kette Inv: $a'_{ges}=a'_{\mathcal{F}2}\cdot a'_{\mathcal{F}1}$ linear: $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}'_{\text{ges}}=\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}'_2\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}'_1$	

4.4. Liste von Zweitoren

4.4.1 VCCS

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{g}\\0 & 0\end{bmatrix}\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\g & 0\end{bmatrix}$$

4.4.2 CCCS

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & -\frac{1}{\beta}\end{bmatrix}\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\\beta & 0\end{bmatrix}$$

4.4.3 VCVS

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\mu} & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{H}'}=\begin{bmatrix}0 & 0\\\mu & 0\end{bmatrix}$$

4.4.4 CCVS

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\\frac{1}{r} & 0\end{bmatrix}\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\r & 0\end{bmatrix}$$

4.4.5 Nullor

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{M}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{N}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

Eigenschaften: Quellenfrei, streng linear

4.4.6 Übertrager (z.B. Transformator)

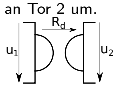
$$A=\begin{bmatrix}\ddot{u} & 0\\0 & \frac{1}{\ddot{u}}\end{bmatrix}$$

$R_{in}=\frac{u_1}{i_1}=\ddot{u}^2R_L$

Eigenschaften: verlustlos(ideal)

4.4.7 Gyrator

Der Gyrator wandelt das an Tor 1 geschaltete Bauteil in das duale Bauteil an Tor 2 um.



$$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0 & R_d\\\frac{1}{R_d} & 0\end{bmatrix}\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}=\begin{bmatrix}0 & -R_d\\R_d & 0\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}0 & G_d\\-G_d & 0\end{bmatrix}\quad \mathcal{F}_{in}=\mathcal{F}^d$$

Eigenschaften: streng linear, verlustlos für $R_1=R_2$

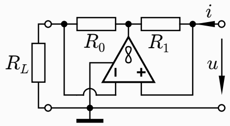
4.4.8 Negativ-Immitanz-Konverter

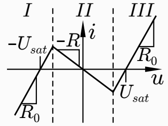
$$A=\begin{bmatrix}-k & 0\\0 & \frac{1}{k}\end{bmatrix}$$

$R_{in}=\frac{u_1}{i_1}=-k^2R\quad -k^2R$: negativer Widerstand(et voilà xD)

Eigenschaften: streng linear, aktiv

4.5. NIK allgemein (Polung beachten)





I	negative Sättigung $u_d<0\Leftrightarrow u_{out}=-U_{sat}$	
	$u=R_0i-U_{sat}$	
II	linearer Bereich $u_d=0$	
	$u=-\frac{R_0}{R_1}R_L\cdot i$	$-U_{sat}<\frac{R_L+R_1}{R_L}u<U_{sat}$
III	positive Sättigung $u_d>0\Leftrightarrow u_{out}=U_{sat}$	
	$u=R_0i+U_{sat}$	

4.6. Dualwandlung

$$\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}\\ \underset{\sim}{\boldsymbol{I}}\end{bmatrix}^d=\begin{bmatrix}R_d\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}\\ \frac{1}{R_d}\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}\end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}^d=\frac{1}{R_d^2}\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^d=R_d^2\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}$

4.7. Linearisierung

Großsignal	Kleinsignal
$i=I_{\text{AP}}+\Delta i$	$\Delta i=i-I_{\text{AP}}$
$u=U_{\text{AP}}+\Delta u$	$\Delta u=u-U_{\text{AP}}$

$\underline{i}=\underline{g}(\underline{u})\quad \Delta\underline{i}\approx\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}\cdot\Delta\underline{u}$

$\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}$ ist die Jakobimatrix $\left.\frac{\partial g_i(\underline{u})}{\partial u_j}\right|_{U_{\text{AP}}}=\left.\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2}\\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2}\end{bmatrix}\right|_{U_{AP}}$

$\Delta\underline{u}\approx\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}\cdot\Delta\underline{u}$

Großsignal: $i\approx I_{\text{AP}}+G(U_{\text{AP}})\cdot(u-U_{\text{AP}})$

Implizite Linearisierung: $\Delta\underline{f}(\Delta\underline{u},\Delta\underline{i})=\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}\Delta\underline{u}+\underset{\sim}{\boldsymbol{N}}\Delta\underline{i}$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}:=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}\end{bmatrix}\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{N}}:=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial i_1} & \frac{\partial f_1}{\partial i_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial i_1} & \frac{\partial f_2}{\partial i_2}\end{bmatrix}$$

5. Resistive Mehrtore

5.1. Beschreibungsformen

Analog zu Zweitoren, nur mit mehr Dimensionen und es gibt sehr viele, nicht mehr benannte Hybridbeschreibungen.

5.2. Spezielle Mehrtore

5.2.1 Mehrtorübertrager

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}_{\text{Übertrager}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}_{a,b}\\-\boldsymbol{H}^T_{a,b} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}'_{\text{Übertrager}}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{\ddot{u}_2} & -\frac{1}{\ddot{u}_3} & \cdots & -\frac{1}{\ddot{u}_p}\\ \frac{1}{\ddot{u}_2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{1}{\ddot{u}_3} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{\ddot{u}_p} & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

Eigenschaften: Verlustlos und Reziprok

5.2.2 Zirkulator

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}=\underset{\sim}{\boldsymbol{1}}\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{N}}=\begin{bmatrix}0 & -R & +R\\+R & 0 & -R\\-R & +R & 0\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}=-\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^{-1}\underset{\sim}{\boldsymbol{N}}=-\underset{\sim}{\boldsymbol{N}}=\begin{bmatrix}0 & +R & -R\\-R & 0 & +R\\+R & -R & 0\end{bmatrix}=-\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^T$$

Eigenschaften: Verlustlos, Nicht reziprok, Schiefsymmetrisch

$p_1=u_1i_1=\frac{u_0^2}{4R}\geq 0W$

$p_2=u_2i_2=-\frac{u_0^2}{4R}=-p_1\leq 0W$

$P_3=u_3i_3=0W$

Die an einem Tor aufgenommene Leistung wird in Pfeilrichtung an das nächste weitergegeben.

5.2.3 Multiplizierer

$$\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\u_3\end{bmatrix}=h\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\i_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{u_1u_2}{U_M}\end{bmatrix}$$

$u_3=\frac{u_1u_2}{U_M}$, U_M Multiplizierkonstante

5.2.4 Dividierer

$$\begin{bmatrix}i_1\\i_2\\u_3\end{bmatrix}=h\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\i_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{u_1}{u_2}U_D\end{bmatrix}$$

$u_3=\frac{u_1}{u_2}U_D$, U_D Dividiererkonstante, $U_D=-U_M$

Realisierung z.B. mit Multiplizierer in Rückkopplungspfad von OpAmp.

6. Eigenschaften von Ein- und Mehrtoren

Ein Mehrtor $\mathcal{F}(\underline{\boldsymbol{u}},\underline{\boldsymbol{i}})$ ist ...

Resistiv: Gedächtnislos; nur von u und i abhängig

Zeitvariant: Betriebsraum kann sich ändern

Reziprozität: $\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}^T=\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}^T=\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$, $\det(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})=1$, $\det(\underset{\sim}{\boldsymbol{A}'})=1$, $h_{21}=-h_{12}$, $h'_{21}=-h'_{12}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^T\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}=\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}^T\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$

Symmetrie: $r_{11}=r_{22}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}=\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}=\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ mit $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}=\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}'$

Eigenschaft	Bedingung
F quellenfrei	$\underline{\boldsymbol{0}}\in\mathcal{F}$; enthält den Ursprung
F streng linear	$(ku,ki)\in F\quad(u_1+u_2,i_1+i_2)\in F$
Nur für Eintore:	
ungepolt	Kennlinie punktsymm. zum Ursprung $\mathcal{F}(u,i)=\mathcal{F}(-u,-i)$

6.1. Linearität

Linear: $(ku,ki)\in F\quad(u_1+u_2,i_1+i_2)\in F$ (Kennlinie gerade)
Streng Linear: linear + quellenfrei, (Gerade durch Ursprung)

6.2. Zeitvarianz

Ein Mehrtor heißt zeitvariant, wenn sich sein Betriebsraum mit der Zeit ändern kann, ansonsten ist es Zeitinvariant.

6.3. Steuerung

Ein Bauelement ist von einer Größe gesteuert, wenn die jeweilige explizite Beschreibung existiert.

Stromgesteuert:	$u=\mathcal{R}(i)$	Spannungsgesteuert:	$i=\mathcal{G}(i)$
Ladungsgesteuert:	$u=\mathcal{C}^{-1}(q)$	Flussgesteuert:	$i=\mathcal{L}^{-1}(\Phi)$

6.4. Leistungsbetrachtung

Verlustlosigkeit: $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^T\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}+\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}^T\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}=0$

Leistung: $P(t)=\underline{u}^T\cdot\underline{i}=u_1i_1+\ldots+u_ni_n$

Passiv: $\forall \mathcal{F}(u,i): P(t) \geq 0$ Kennlinie nur I. oder III. Quadrant
Aktiv: $\exists \mathcal{F}(u,i): P(t) < 0$ Kennlinie im II. oder IV. Quadrant
Verlustlos: $\forall \mathcal{F}(u,i): P(t) = 0$ Kennlinie nur auf Koordinatenachsen
Merke: Alle Mehrtore die nur aus passiven Bauelementen(R,C,L,...) bestehen, sind selbst passiv! inkremental passiv:
letztendlich passiv: $\exists U, I > 0\ \forall (u,i) \in \mathcal{F}: (|u| > U \vee |i| > I \Rightarrow ui > 0)$
Alle realen Bauteile sind letztendlich passiv, da sonst unendlich viel Energie entstehen würde.

7. Allgemeine Analyseverfahren

7.1. Tellegenscher Satz

$u^T i = 0$
Der Spannungsvektor steht immer senkrecht zum Stromvektor ($\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}^T = \underline{0}$ bzw. $\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A}^T = \underline{0}$).

7.2. Die Tableau-Gleichung

... beschreibt ein Netzwerk vollständig bezüglich Verschaltung und Bauteilverhalten.

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{M} & \underset{\sim}{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{e} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{M} & \underset{\sim}{N} \end{bmatrix}$$

($e = 0 \Leftrightarrow$ keine Quellen enthalten)

7.3. Newton-Raphson-Algorithmus

... ist ein iterativer numerischer Algorithmus zum Suchen der Nullstellen von nichtlinearen Gleichungen. Algorithmus wählt iterativ die Nullstelle der Taylorentwicklung als nächsten Bezugspunkt.
Taylorentwicklung zu 0 setzen: $f(x^{(j)}) + J(x^{(j)})(x^{(j+1)} - x^{(j)}) = 0$
Iterationsformel: $x^{(j+1)} = x^{(j)} - J^{-1}(x^{(j)}) f(x^{(j)})$

1. Wähle Initialisierung $\begin{bmatrix} \underline{u}^{(0)} \\ \underline{i}^{(0)} \end{bmatrix}$ mit $\underline{f}(\underline{u}^{(0)}, \underline{u}^{(0)}) = \underline{0}$.
2. Im n+1-ten Schritt: Linearisieren $\underline{f}(\underline{u}, \underline{i}) = \underline{0}$ im n-ten Kandidaten für den AP $\begin{bmatrix} \underline{u}^{(n)} \\ \underline{i}^{(n)} \end{bmatrix}$.
3. Löse das neue lineare Gleichungssystem (z.B. Tableau).
4. Finde neuen Kandidaten für AP in der Nähe $\left[u^{(n+1)^T}, i^{(n+1)^T}\right]$ mit $\underline{f}(\underline{u}^{(n+1)}, \underline{i}^{(n+1)}) = \underline{0}$.
5. Wiederhole Schritt 2. - 4. bis $\left\| \begin{bmatrix} \underline{u}^{(n+1)} \\ \underline{i}^{(n+1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{u}^{(n)} \\ \underline{i}^{(n)} \end{bmatrix} \right\| \leq \epsilon$ (Toleranz/Genauigkeit).

7.4. Knotenspannungsanalyse

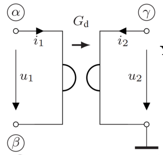
$$\boxed{\underset{\text{Knotenleitwertsmatrix}}{\underset{\sim}{Y}_{\mathrm{k}}} \cdot \underset{\text{Spannungsvektor}}{\underline{u}_{\mathrm{k}}} = \underset{\text{Stromquellenvektor}}{\underline{i}_{\mathrm{q}}}}$$

Vorgehen:
1. Nicht lineare Elemente linearisieren
2. Nicht spannungsgesteuerte Elemente (dual)wandeln
3. Aufstellen der Leitwertsmatrix $\underset{\sim}{Y}'_k$
4. Bestimmung des Stromquellenvektors $\underline{i}'_q$
5. Einbau des Nullators: Addition der Spalten von $\underset{\sim}{Y}'_k$ an denen er anliegt & eine Spalte streichen
6. Einbau des Norators: Addition er Zeilen & eine Zeile streichen

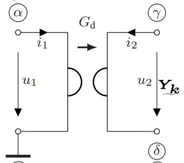
Spezialfall: Nullator/Norator mit Masse verbunden: Spalte/Zeile streichen

7.4.1 Aufstellen der Knotenleitwertsmatrix

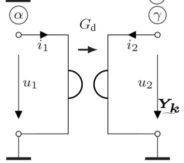
$$\underset{\sim}{Y_k} = \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \overset{\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & & \gamma \end{array}}{\begin{bmatrix} & & \cdots & G_d \\ & & \cdots & -G_d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -G_d & \cdots & G_d & \cdots \end{bmatrix}}$$



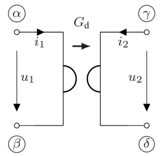
$$\underset{\sim}{Y_k} = \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma \\ \delta \end{array} \overset{\begin{array}{ccccc} \alpha & & \gamma & & \delta \end{array}}{\begin{bmatrix} & \cdots & G_d & \cdots & -G_d \\ -G_d & \cdots & & & \\ G_d & \cdots & & & \end{bmatrix}}$$



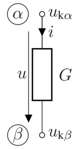
$$\underset{\sim}{Y_k} = \begin{array}{c} \alpha \\ \gamma \end{array} \overset{\begin{array}{ccc} \alpha & & \gamma \end{array}}{\begin{bmatrix} & \cdots & G_d \\ -G_d & \cdots & \end{bmatrix}}$$



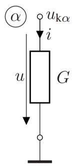
$$\underset{\sim}{Y_k} = \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{array} \overset{\begin{array}{cccccc} \alpha & & \beta & & \gamma & \delta \end{array}}{\begin{bmatrix} & & & \cdots & G_d & \cdots & -G_d \\ & & & \cdots & -G_d & \cdots & G_d \\ -G_d & \cdots & G_d & \cdots & & & \\ G_d & \cdots & -G_d & \cdots & & & \end{bmatrix}}$$



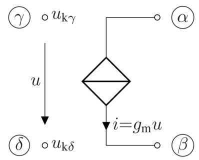
$$\underset{\sim}{Y_k} = \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \overset{\begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array}}{\begin{bmatrix} \cdots & G & \cdots & -G & \cdots \\ \cdots & -G & \cdots & G & \cdots \end{bmatrix}}$$



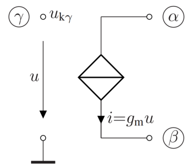
$$\underset{\sim}{Y_k} = \alpha \overset{\alpha}{\begin{bmatrix} \cdots & G & \cdots \end{bmatrix}}$$



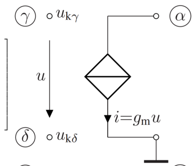
$$\underset{\sim}{Y_k} = \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \overset{\begin{array}{ccc} \gamma & & \delta \end{array}}{\begin{bmatrix} g_m & \cdots & -g_m \\ -g_m & \cdots & g_m \end{bmatrix}}$$



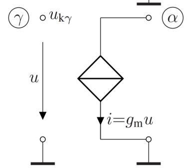
$$\underset{\sim}{Y_k} = \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \overset{\gamma}{\begin{bmatrix} g_m & \cdots \\ -g_m & \cdots \end{bmatrix}}$$



$$\underset{\sim}{Y_k} = \alpha \overset{\begin{array}{ccc} \gamma & & \delta \end{array}}{\begin{bmatrix} g_m & \cdots & -g_m & \cdots \end{bmatrix}}$$



$$\underset{\sim}{Y_k} = \alpha \overset{\gamma}{\begin{bmatrix} g_m & \cdots \end{bmatrix}}$$



7.4.2 Berechnen der Knotenspannungen

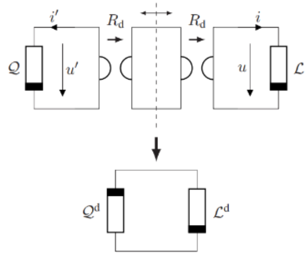
- Umformung und Auflösung von $\underset{\sim}{Y_k} * \underline{u_k} = \underline{i_q}$
- Cram'sche Regel: $u_{ki} = \frac{det(\underset{\sim}{Y_{ki}})}{det(\underset{\sim}{Y_k})}$ wobei $\underset{\sim}{Y_{ki}}$ durch Ersetzen der i-ten Spalte von $\underset{\sim}{Y_k}$ mit $\underline{i_q}$.

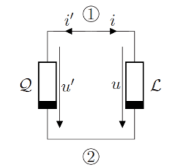
7.5. Dualwandlung

$\underline{u} \xrightarrow{R_d} R_d \underline{i}^d \qquad \underline{i} \xrightarrow{R_d} \frac{1}{R_d} \underline{u}^d$

$\underset{\sim}{A}\underline{i} = \underline{0} \xrightarrow{R_d} \underset{\sim}{A}\underline{u}^d = \underline{0}$ Knoten werden zu Maschen

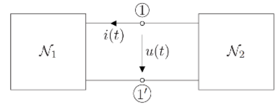
$\underset{\sim}{B}\underline{u} = \underline{0} \xrightarrow{R_d} \underset{\sim}{B}\underline{i}^d = \underline{0}$ Maschen werden zu Knoten





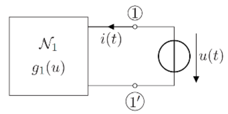
$$\begin{bmatrix} \underline{u}^d \\ \underline{i}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R_d \\ \frac{1}{R_d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix}$$

7.6. Substitutionstheorem

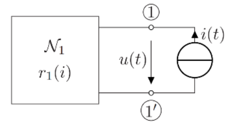


Wenn $\mathcal{N}_1$ zu allen Zeitpunkten

spannungsgestuert



stromgesteuert



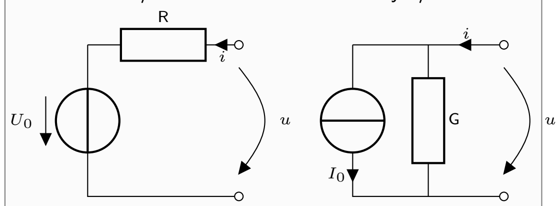
7.7. Superpositionsprinzip

Sei eine lineare eindeutig lösbare Schaltung mit mehreren Erregungen gegeben, so setzt sich die Gesamtlösung aus den einzelnen Teillösungen zusammen.
1. Setze alle bis auf eine unabhängige Quelle U_k bzw. I_k zu Null
2. Berechne die gesuchten Größen u_{z_k} bzw. i_{y_k}
3. Wiederhole Schritte 1 und 2 $\forall$ unabhängige Quellen
4. Gesamtlösung ergibt sich zu $u_z = \sum_k u_{z_k}$ und $i_y = \sum_k i_{y_k}$

7.8. Zweipolersatzschaltungen

Eine beliebe Eintorschaltung $\mathcal{F}$ aus linearen resistiven Netzwerkelementen lässt sich durch mindestens eine der beiden folgenden Ersatzeintore beschreiben.

Helmholz / Thévenin ESB **Mayer / Norton ESB**



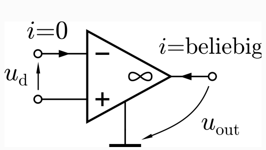
Umrechnung durch Quellwandlung:
$R_i = \frac{1}{G_i} \Leftrightarrow G_i = \frac{1}{R_i}$
$u_0 = -\frac{i_0}{G_i} \Leftrightarrow i_0 = -\frac{u_0}{R_i}$

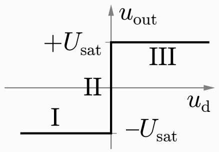
Bestimmen von u_0/i_0: Leerlaufspannung bzw. Kurzschlussstrom von $\mathcal{F}$ bestimmen
Bestimmen von R_i/G_i: Unabhängige Quellen in $\mathcal{F}$ durch entsprechende Nullquellen ersetzen und dann eine Torgröße in Abhängigkeit der anderen bestimmen.

8. Operationsverstärker (OpAmp)

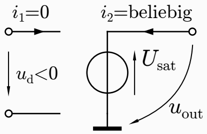
Der Operationsverstärker ist ein elektronischer Verstärker.

8.1. Idealer Operationsverstärker

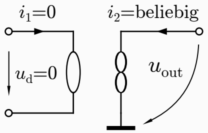




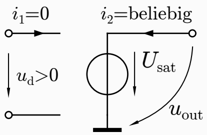
ESB I
Sättigungsbereich
$u_d < 0$
$u_{out} = -U_{sat}$



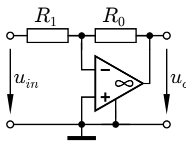
ESB II
streng linearer Bereich
$u_d = 0$
$|u_{out}| \leq |U_{sat}|$



ESB III
Sättigungsbereich
$u_d > 0$
$u_{out} = +U_{sat}$

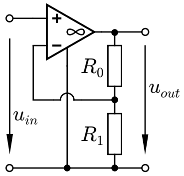


Invertierender Verstärker



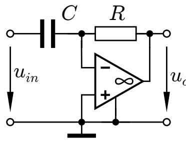
$u_{out} = \frac{-R_0}{R_1} u_{in}$

Nichtinvert. Verstärker



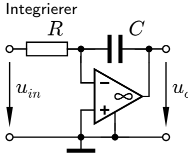
$u_{out} = \left(1 + \frac{R_0}{R_1}\right) u_{in}$

Differenzierer



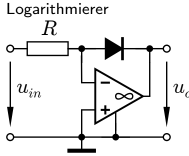
$u_{out} = -RC \cdot \dot{u}_{in}$

Integrierer



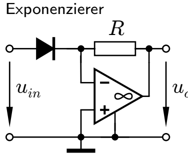
$u_{out} = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^{t_1} u_{in}\, dt$

Logarithmierer



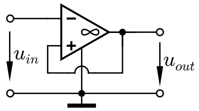
$u_{out} = -U_T \ln \frac{u_{in}}{R \cdot I_S}$

Exponenzierer



$u_{out} = -R \cdot I_S \exp\left(\frac{u_{in}}{U_T}\right)$

Spannungsfolger

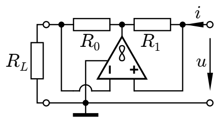


$u_{out} = u_{in} \quad i_{in} = 0$

Addierer

$u_{out} = -R_0 \sum \frac{u_i}{R_i}$

NIK



$u = -R_L \cdot i$

9. Allgemeines Reaktiver Elemente

9.1. Die vier zentralen Größen u, i, q, Φ

... beschreiben die Wirkungsweise von elektronischen Bauelementen.

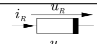
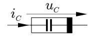
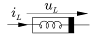
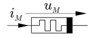
Spannung u: Potentialdifferenz. Hohes zu niedrigem Potential
Strom i: Bewegte Ladung. Bewegungsrichtung positiver Ladung
Ladung q: Grundeigenschaft von Materie.
Magnetischer Fluss Φ: Grundeigenschaft von elektr. magn. Feldern

9.1.1 Allgemeine Zusammenhänge u, i, q, Φ

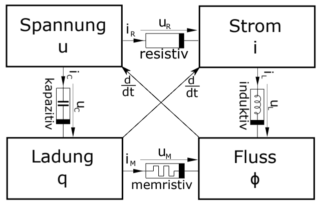
Ladung und Strom beschreiben den Zustand der Materie.
Spannung und magn. Fluss beschreiben den Zustand des elekt. magn. Feldes.
Kondensator ist u-gesteuert (q-gesteuert), falls für ein u (q) nur ein q (u) existiert.
Induktivität ist i-gesteuert (ϕ-gesteuert), falls für ein i (ϕ) nur ein ϕ (i) existiert.

$i(t) = \dot{q}(t)$	$[i] = A$
$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$	$[q] = As = C$
$u(t) = \dot{\Phi}(t)$	$[u] = V$
$\Phi = \Phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$	$[\Phi] = Vs = Wb$

9.1.2 Arten von Bauelementen

Art	Symbol	Beschr.	linear
Resistivität		$f_R(u, i)$	$u = U_0 + R \cdot i$
Kapazität		$f_C(u, q)$	$q = Q_0 + C \cdot u$
Induktivität		$f_L(i, \Phi)$	$\Phi = \Phi_0 + L \cdot i$
Memristivität		$f_M(q, \Phi)$	$\Phi = \Phi_0 + M \cdot q$

9.1.3 Zusammenhang der Bauelemente



9.1.4 Eigenschaften von Reaktanzen

Linearität: siehe Eintore
Differentialgleichung: $i(t) = C \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$, $u(t) = L \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$
Gedächtnis: Verhalten durch vorhergehende Klemmengrößen bestimmt.
Stetigkeit: $u_C(t)$, $i_L(t)$ stetig in (t_a, t_b), wenn Torgrößen endlich
Verlustfreiheit: $W_C(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)\,\mathrm{d}t = \int_{q_1}^{q_2} X(q)\,\mathrm{d}t$ (Arbeit)
Falls linear: $W = \frac{Cu^2}{2} = \frac{Li^2}{2}$
Periodisch: $u(t+T) = u(t)$, $q(t+T) = q(t)$
Graphisch: Falls keine geschlossenen Schleifen in q/u, Φ/i-Diagramm existiert (Hystenesefrei)
Energie (nicht linearer Fall):
- Kapazitiv: $W_C(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)\,\mathrm{d}t = \int_{q_1}^{q_2} u(q)\,\mathrm{d}q$
- Induktiv: $W_C(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} i(\Phi)\,\mathrm{d}\Phi$

Energie (linearer Fall):
- Kapazitiv: $W_C = \frac{C}{2}u^2 = \frac{1}{2C}q^2$
- Induktiv: $W_L = \frac{L}{2}i^2 = \frac{1}{2L}\Phi^2$

Graphisch: Fläche zwischen der Kennlinie und der q-/Φ-Achse
Relaxationspunkte (=Ruhepunkte): Betriebspunkte, in dem die in einer Reaktanz gespeicherte Energie minimal ist. Kandidaten sind: Extremwerte, Wendepunkte, Knicke, Schnittpunkte mit q-/Φ-Achse

9.1.5 Verschaltung von Reaktanzen

- Parallelschaltung: $C_p = C_1 + C_2$, $L_p = L_1 || L_2 = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$
- Serienschaltung: $C_p = C_1 || C_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$, $L_p = L_1 + L_2$

Merke: Am Kondens*ator*, eilt der Strom *vor*, bei Induktivi*täten*, wird er sich ver*späten*
Merke: Ist das Mädchen brav, bleibt der Bauch konkav, hat das Mädchen Sex, wird der Bauch konvex.

10. Komplexe Wechselstromrechnung

Vorraussetzung: lineares, eingeschwungenes System mit sinusförmiger Erregung $x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

10.1. Komplexe Zeigergrößen

Zeitfunktion	$a(t) = A_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$
Zeiger	$A = \alpha + i\beta = A_m \cdot e^{i\phi} = A_m \cdot (\cos\phi + j\sin\phi)$
Maximum	$A_m = \lvert A \rvert = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{AA^*}$
Phase	$\phi = \begin{cases} \arctan\frac{\beta}{\alpha} & \alpha > 0 \\ \arctan\frac{\beta}{\alpha} + \pi & \alpha < 0 \end{cases}$

Differentialoperator: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = j\omega \qquad \frac{d}{dt} e^{j(\omega t + \phi)} = j\omega \cdot e^{j(\omega t + \phi)}$

	Widerstand	Kondensator	Spule	Memristor
$\frac{U}{I} =$	R	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega L$	M
$\frac{I}{U} =$	$G = \frac{1}{R}$	$j\omega C$	$\frac{1}{j\omega L}$	$\frac{1}{M}$
$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	?

10.2. Komplexe Leistungsrechnung

$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_m \quad I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m$
Momentanleistung: $p(t) = u(t)i(t)$
Energie einer Periode: $E = \int_0^T u(t)i(t)dt$
Leistungsmittelwert: $P_w = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$
Komplexe Leistung: $P = \frac{1}{2}UI^* = \frac{1}{2}U_m \cdot e^{j\phi_u} \cdot I_m \cdot e^{-j\phi_i} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot e^{j(\phi_u - \phi_i)}$
Scheinleistung: $S = |P|$
Wirkleistung: $P_w = ReP$
Blindleistung: $P_B = ImP$

11. Mathe

11.1. 2x2-Matrizen

$det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

11.2. Raumdarstellungen

Parametrische Beschreibung:
$Bild \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{I} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{I} \end{bmatrix} \underline{c}, \underline{c} \in R^p \right\}$
Implizite Beschreibung:
$Kern \begin{bmatrix} \underline{U} & \underline{I} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = 0 \right\}$
($\begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{N} \end{bmatrix}$ implizite Beschreibung des lin. Zweitors)

12. Umrechnung von Zweitormatrizen

Explizit → Explizit

In →	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{G}$	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{H}'$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}'$
$\boldsymbol{R}$	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{G}} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} \det \boldsymbol{H} & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h'_{12} \\ h'_{21} & \det \boldsymbol{H}' \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{21}} \begin{bmatrix} a_{11} & \det \boldsymbol{A} \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{21}} \begin{bmatrix} a'_{22} & 1 \\ \det \boldsymbol{A}' & a'_{11} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{G}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{R}} \begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \det \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{22}} \begin{bmatrix} \det \boldsymbol{H}' & h'_{12} \\ -h'_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -\det \boldsymbol{A} \\ -1 & a_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{12}} \begin{bmatrix} a'_{11} & -1 \\ -\det \boldsymbol{A}' & a'_{22} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{H}$	$\frac{1}{r_{22}} \begin{bmatrix} \det \boldsymbol{R} & r_{12} \\ -r_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & \det \boldsymbol{G} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{H}'} \begin{bmatrix} h'_{22} & -h'_{12} \\ -h'_{21} & h'_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{22}} \begin{bmatrix} a_{12} & \det \boldsymbol{A} \\ -1 & a_{21} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{11}} \begin{bmatrix} a'_{12} & 1 \\ -\det \boldsymbol{A}' & a'_{21} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{H}'$	$\frac{1}{r_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -r_{12} \\ r_{21} & \det \boldsymbol{R} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{22}} \begin{bmatrix} \det \boldsymbol{G} & g_{12} \\ -g_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{H}} \begin{bmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{11}} \begin{bmatrix} a_{21} & -\det \boldsymbol{A} \\ 1 & a_{12} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{22}} \begin{bmatrix} a'_{21} & -1 \\ \det \boldsymbol{A}' & a'_{12} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{A}$	$\frac{1}{r_{21}} \begin{bmatrix} r_{11} & \det \boldsymbol{R} \\ 1 & r_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{21}} \begin{bmatrix} -g_{22} & -1 \\ -\det \boldsymbol{G} & -g_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{21}} \begin{bmatrix} -\det \boldsymbol{H} & -h_{11} \\ -h_{22} & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{21}} \begin{bmatrix} 1 & h'_{22} \\ h'_{11} & \det \boldsymbol{H}' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{A}'} \begin{bmatrix} a'_{22} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{11} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{A}'$	$\frac{1}{r_{12}} \begin{bmatrix} r_{22} & \det \boldsymbol{R} \\ 1 & r_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{12}} \begin{bmatrix} -g_{11} & -1 \\ -\det \boldsymbol{G} & -g_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{12}} \begin{bmatrix} 1 & h_{11} \\ h_{22} & \det \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{12}} \begin{bmatrix} -\det \boldsymbol{H}' & -h'_{22} \\ -h'_{11} & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}$

Implizit → Explizit
$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} = -\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^{-1}\underset{\sim}{\boldsymbol{N}} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{G}} = -\underset{\sim}{\boldsymbol{N}}^{-1}\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}$

Explizit → Implizit
$\underset{\sim}{\boldsymbol{1}}\underline{\boldsymbol{u}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}\underline{\boldsymbol{i}} = \underline{\boldsymbol{0}} \quad -\underset{\sim}{\boldsymbol{G}}\underline{\boldsymbol{u}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{1}}\underline{\boldsymbol{i}} = \underline{\boldsymbol{0}}$

Parametrisch → Explizit
$\underset{\sim}{\boldsymbol{R}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{U}}\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}^{-1} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{G}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{I}}\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}$

Implizit → Parametrisch
$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\boldsymbol{U}} \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underset{\sim}{\boldsymbol{M}}^{-1}\underset{\sim}{\boldsymbol{N}} \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{1}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\boldsymbol{U}} \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\boldsymbol{1}} \\ -\underset{\sim}{\boldsymbol{N}}^{-1}\underset{\sim}{\boldsymbol{M}} \end{bmatrix}$

Parametrisch → Implizit
$-\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}^{-1}\underline{\boldsymbol{u}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{1}}\underline{\boldsymbol{i}} = 0 \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{1}}\underline{\boldsymbol{u}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{U}}\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}^{-1}\underline{\boldsymbol{i}} = 0$